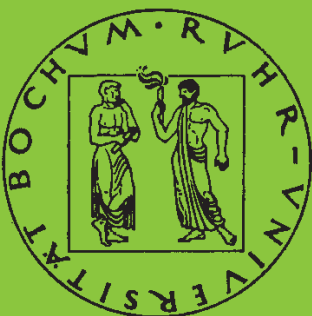


**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik**

**Karin Preusch**

**Hierarchische Schalenmodelle für  
nichtlineare Kontinua mit der p-Version  
der Finite-Element Methode**

Heft Nr. 131



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

INSTITUT FÜR MECHANIK  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Karin Preusch

Hierarchische Schalenmodelle  
für nichtlineare Kontinua  
mit der  $p$ -Version  
der Finite-Element Methode

Herausgeber:  
Institut für Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum  
D-44780 Bochum

---

ISBN 3-935892-06-3

---

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

©2003 Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Printed in Germany

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein hierarchisches Schalenelement basierend auf der p-Version der Finite-Element Methode vorgestellt. Das mathematische Modell wird aus der allgemeinen dreidimensionalen Kontinuumsmechanik hergeleitet und geometrisch linearisiert. Die Beschreibung des hierarchischen Schalenmodells bezieht sich auf die Mittelfläche der Schale und stellt somit ein zweidimensionales krummliniges Kontinuum dar. Aufgrund der Möglichkeit dreidimensionale Spannungszustände abzubilden, können hierarchische Schalenmodelle mit beliebigen Materialmodellen gekoppelt werden. In dieser Arbeit wird die Kopplung mit einem isotrop elastischen und einem isotrop plastischen Materialverhalten vorgestellt.

Das modellabhängige POISSON-THICKNESS Locking wird in einer theoretischen Studie sowie in einer numerischen Analyse untersucht. An ausgewählten Beispielen wird die Robustheit, die Effizienz und weitere numerische Lockingprobleme untersucht. Ein abschließendes Beispiel zeigt die Umsetzung des plastischen Materialverhaltens auf.

## Abstract

This thesis presents a hierarchic shell element based on the p-version of the finite element method. The mathematical model is developed on the general three-dimensional continuum mechanics and is geometrically linearized. The theory of hierarchic shell models is based on the shell midsurface and describes a curved two-dimensional continuum. Because of its capability to represent three-dimensional stress states, hierarchic shell models can be combined with arbitrary material models. In this work, the use of an isotropic elastic and an isotropic plastic material model is illustrated.

The model dependent POISSON-THICKNESS locking is analyzed theoretical and numerical. On the basis of selective examples the robustness, the efficiency and other numerical locking effects are investigated. A closing example shows the realisation of a plastic material behaviour using hierarchic shell elements.

„ Immer wenn Du denkst es geht nicht mehr,  
kommt von irgendwo ein Lichtlein her. ” (Volksmund)

## Danksagung

Diese Arbeit wurde ermöglicht durch die finanzielle Unterstützung der Deutschen Forschungsgesellschaft im Rahmen eines Stipendiums im Graduiertenkolleg *Computational Structural Dynamics* und anschließend durch eine Einzelprojektförderung.

Ich danke recht herzlich allen, die mich bei dieser Arbeit unterstützt haben, vor allem Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns für die Betreuung meiner Arbeit und die Möglichkeit meinen Themenwunsch zu bearbeiten. Prof. Dr. rer.nat. E. Rank danke ich für die stetige Unterstützung, das zur Verfügung gestellte FE-Programm *AdhoC3D* und die Übernahme des zweiten Referates. Auch seinen Mitarbeitern möchte ich meinen Dank aussprechen, die mir bei Fragen zur Implementation mit Rat zur Seite standen. Den Kollegen am Lehrstuhl für Technische Mechanik sei herzlich gedankt für die anregenden Diskussionen und die Unterstützung, die sie mir entgegen gebracht haben.

Ein großer Dank gilt meiner Familie, die großartig hinter mir steht und immer für mich da ist. Danke ...

Bochum, im Mai 2003

Karin Preusch

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Otto T. Bruhns  
Prof. Dr. rer. nat. Ernst Rank

Tag der Einreichung: 07.02.2003  
Tag der mündlichen Prüfung: 16.05.2003

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Stand der Forschung . . . . .	3
1.3 Ziel der Arbeit . . . . .	6
1.4 Gliederung . . . . .	7
<b>2 Kontinuumsmechanischer Rahmen</b>	<b>9</b>
2.1 Konfigurationen und Restriktionen . . . . .	9
2.1.1 Betrachtungsweisen . . . . .	9
2.1.2 Konfigurationen . . . . .	10
2.1.3 Objektivität . . . . .	12
2.2 Kinematische Beziehungen . . . . .	13
2.2.1 Deformation . . . . .	13
2.2.2 Verzerrungsmaße . . . . .	15
2.2.3 Kinetik . . . . .	17
2.2.4 Objektive Zeitableitungen . . . . .	19
2.2.5 Verzerrungsraten . . . . .	21
2.3 Dynamische Beziehungen . . . . .	22
2.3.1 Belastungen . . . . .	22
2.3.2 Spannungen . . . . .	23
2.3.3 Spannungsraten . . . . .	25
2.4 Bilanzgleichungen der Mechanik . . . . .	26
2.4.1 Massenbilanz . . . . .	26
2.4.2 Impulsbilanz . . . . .	27
2.4.3 Drehimpulsbilanz . . . . .	28
2.4.4 Energiebilanz . . . . .	29

2.5	Potentiale . . . . .	30
2.5.1	Elastisches Potential . . . . .	30
2.5.2	Elastisch komplementäres Potential . . . . .	31
2.6	Variationsprinzip in der Mechanik . . . . .	32
2.6.1	Prinzip der virtuellen Verschiebungen . . . . .	33
2.6.2	Prinzip der virtuellen Kräfte . . . . .	34
2.6.3	Variation des elastischen Potentials . . . . .	34
2.6.4	Variation des elastisch komplementären Potentials . . . . .	36
2.7	Geometrische Linearisierung . . . . .	38
2.7.1	Annahmen für die geometrische Linearisierung . . . . .	38
2.7.2	Linearisierte kinematische und dynamische Beziehungen . . . . .	38
2.7.3	Linearisierte Bilanzgleichungen der Mechanik . . . . .	39
2.7.4	Linearisierte Potentiale . . . . .	40
2.7.5	Linearisierte Variationsprinzip der Mechanik . . . . .	40
2.8	Materialmodelle . . . . .	41
2.8.1	Hyperelastische Materialmodelle . . . . .	41
2.8.2	Inelastische Materialmodelle . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Hierarchische Schalenmodelle</b>	<b>51</b>
3.1	Kinematische Beziehungen . . . . .	52
3.1.1	Mittelfläche . . . . .	53
3.1.2	Kontinuum . . . . .	55
3.1.3	Deformation . . . . .	57
3.1.4	Verzerrungsmaß . . . . .	61
3.1.5	Verzerrungsrate . . . . .	62
3.2	Dynamische Beziehungen . . . . .	63
3.2.1	Belastungen . . . . .	63
3.2.2	Spannungen . . . . .	65
3.3	Materialmodelle . . . . .	66
3.3.1	Lineare Elastizität . . . . .	66
3.3.2	Plastizität . . . . .	67
3.4	Prinzip der virtuellen Verschiebungen . . . . .	69

---

<b>4</b>	<b>Modelldiskussion</b>	<b>71</b>
4.1	Modell 0 . . . . .	74
4.1.1	Membranspannungszustand . . . . .	74
4.1.2	Biegespannungszustand . . . . .	75
4.2	Modell 1 . . . . .	75
4.2.1	Membranspannungszustand . . . . .	76
4.2.2	Biegespannungszustand . . . . .	76
4.3	Modell 2 . . . . .	77
4.3.1	Membranspannungszustand . . . . .	77
4.3.2	Biegespannungszustand . . . . .	78
4.4	Modell 3 . . . . .	79
4.4.1	Membranspannungszustand . . . . .	80
4.4.2	Biegespannungszustand . . . . .	81
4.5	Modell (1,1,2) . . . . .	82
4.5.1	Membranspannungszustand . . . . .	83
4.5.2	Biegespannungszustand . . . . .	84
4.6	Modell (2,2,3) . . . . .	84
4.6.1	Membranspannungszustand . . . . .	85
4.6.2	Biegespannungszustand . . . . .	86
4.7	Modell (3,3,4) . . . . .	87
4.7.1	Membranspannungszustand . . . . .	88
4.7.2	Biegespannungszustand . . . . .	89
4.8	Ergebnisse . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Finite-Element Methode</b>	<b>91</b>
5.1	Matrixformulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen . . . .	92
5.1.1	Verschiebungsvektor . . . . .	92
5.1.2	Verzerrungsvektor . . . . .	92
5.1.3	Materialmatrix . . . . .	94
5.1.4	Spannungsvektor . . . . .	96
5.1.5	Lastvektoren . . . . .	97
5.1.6	Prinzip der virtuellen Verschiebungen . . . . .	97



---

5.2	Die Finite-Element-Approximation . . . . .	98
5.2.1	Approximation der Verschiebungen . . . . .	98
5.2.2	<b>L</b> -Operator für globale Verschiebungskoeffizienten . . . . .	100
5.2.3	B-Matrix hierarchischer Schalenmodelle . . . . .	103
5.3	Steifigkeitsmatrix und Lastvektor eines hierarchischen Schalenelementes	103
5.4	Hierarchische Ansatzfunktionen . . . . .	104
5.4.1	Eindimensionale Ansatzfunktionen . . . . .	104
5.4.2	Zweidimensionale Ansatzfunktionen . . . . .	105
5.5	Die Abbildungsfunktion . . . . .	106
5.5.1	Herleitung der Abbildungsfunktion für Schalenelemente . . . . .	107
5.5.2	Abbildungsfunktionen für verschiedene Schalengeometrien . . . . .	110
5.5.3	Kopplung CAD und FE-Programm . . . . .	117
5.6	Numerische Integration . . . . .	121
5.7	Nichtlinearer Algorithmus . . . . .	121
5.7.1	Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren . . . . .	121
5.7.2	Der RADIAL-RETURN-Algorithmus . . . . .	123
5.7.3	Matrixformulierung des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens . . . . .	126
5.7.4	Matrixformulierung des RADIAL-RETURN-Algorithmus . . . . .	128
<b>6</b>	<b>Numerische Untersuchungen</b>	<b>132</b>
6.1	POISSON-THICKNESS-Locking . . . . .	133
6.1.1	Biegespannungszustand aus Randlasten . . . . .	134
6.1.2	Biegespannungszustand aus Flächenlasten . . . . .	142
6.2	Robustheit und SHEAR-Locking . . . . .	150
6.2.1	Quadratische Platte mit Gleichflächenlast . . . . .	151
6.2.2	Konvergenzbetrachtung der Verschiebungen . . . . .	153
6.2.3	Konvergenz des relativen Fehlers in der Energienorm . . . . .	153
6.2.4	Ergebnis der quadratischen Platte unter Gleichflächenlast . . . . .	156
6.3	MEMBRANE-Locking . . . . .	156
6.3.1	Die SCORDELIS & LO Schale . . . . .	157
6.3.2	Konvergenzbetrachtung der Verschiebungen . . . . .	159
6.3.3	Konvergenzbetrachtung des relativen Fehlers in der Energienorm	159

6.3.4	Konvergenzbetrachtung der Spannungen . . . . .	162
6.3.5	Ergebnis der SCORDELIS & LO Schale . . . . .	162
6.4	VOLUME-Locking . . . . .	163
6.4.1	Die COOK Scheibe . . . . .	163
6.4.2	Konvergenzbetrachtung der Verschiebungen . . . . .	164
6.5	Plastisches Materialverhalten . . . . .	166
6.5.1	Reine Biegung mit ideal-plastischem Materialverhalten . . . . .	167
6.5.2	Analytische Lösung . . . . .	167
6.5.3	Konvergenzbetrachtung der Last-Verschiebungskurve . . . . .	169
6.5.4	Konvergenzbetrachtung der Spannungen über die Dicke . . . . .	174
6.5.5	Ergebnis für reine Biegung mit ideal-plastischem Materialverhalten . . . . .	182
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>183</b>
<b>A</b>	<b>Spezielle Kapitel der Tensoralgebra</b>	<b>187</b>
A.1	Pull-Back- und Push-Forward-Operationen . . . . .	187
<b>B</b>	<b>Schalentheorien</b>	<b>189</b>
B.1	Reduziertes Materialmodell für Schalentheorien . . . . .	189
B.2	Membrantheorie . . . . .	189
B.3	Biegetheorie nach Kirchhoff-Love . . . . .	190
B.3.1	Membranspannungszustand . . . . .	191
B.3.2	Biegespannungszustand . . . . .	192
B.4	Biegetheorie nach Naghdi . . . . .	192
B.4.1	Membranspannungszustand . . . . .	193
B.4.2	Biegespannungszustand . . . . .	193
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>195</b>



## Symbolverzeichnis

Eine Größe mit dem Index null  $(\cdot)_0$  oder in Großbuchstaben geschrieben  $\mathbf{X}$  bezieht sich auf die Referenzkonfiguration, die analoge Größe ohne Index  $(\cdot)$  oder in Kleinbuchstaben  $\mathbf{x}$  auf die Momentankonfiguration. Bei Operatoren gilt ebenfalls die Regelung der Groß- und Kleinschreibung. Eine Größe mit dem Index Stern  $(\cdot)^*$  bezeichnet die komplementäre Beschreibung der analogen Größe ohne Stern  $(\cdot)$ .

### Operatoren

$\otimes$	dyadische Verknüpfung zweier Vektoren/Tensoren
$\times$	Kreuzprodukt zweier Vektoren
$\cdot$	Vektorprodukt
$:$	einfache Überschiebung (ohne Symbol) $\mathbf{A} \mathbf{B} = A_{ij} B^{jk} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_k$
$\vdots$	doppelte Überschiebung $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B^{ij}$
$\vec{\cdot}, \overleftarrow{\cdot}$	einfache Überschiebung von links und rechts bzgl. der zweiten Basis des Tensors
$\det(\cdot)$	Determinante des Tensors $(\cdot)$
$\text{tr}(\cdot)$	Spur des Tensors $(\cdot)$
$\text{sym}(\cdot), \text{skew}(\cdot)$	symmetrischer und antimetrischer Anteil des Tensors $(\cdot)$
$\text{dev}(\cdot), \text{sph}(\cdot)$	deviatorischer und sphärischer Anteil des Tensors $(\cdot)$
$\text{GRAD}(\cdot), \text{grad}(\cdot)$	Gradientenbildung des Tensors $(\cdot)$
$\text{DIV}(\cdot), \text{div}(\cdot)$	Divergenzbildung des Tensors $(\cdot)$
$\Phi_{\diamond}^*(\cdot), \Phi_{\star}^{\diamond}(\cdot)$	PULL-BACK- und PUSH-FORWARD-Operator mit $\diamond \in \{\flat, \sharp, \backslash, /\}$

### Ableitungen und Variationen

$(\cdot) _i = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \Theta^i}$	kovariante Ableitung der Komponente $(\cdot)$ nach den körperfesten, konvektiven Koordinaten $\Theta^i$
$(\cdot)_{,i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \Theta^i}$	partielle Ableitung der Größe $(\cdot)$ nach den körperfesten, konvektiven Koordinaten $\Theta^i$
$\overset{\circ}{(\cdot)} = \frac{D(\cdot)}{dt}$	materielle Zeitableitung der Größe $(\cdot)$
$\overset{\circ}{(\cdot)}_J$	ZAREMBA-JAUMANN-Zeitableitung der Größe $(\cdot)$
$\overset{\circ}{(\cdot)}_O, \overset{\circ}{(\cdot)}^O$	ko- und kontravariante OLDROYD-Zeitableitung der Größe $(\cdot)$
$\overset{\circ}{(\cdot)}_{O/}, \overset{\circ}{(\cdot)}^{O\backslash}$	zwei gemischte OLDROYD-Zeitableitungen der Größe $(\cdot)$
$\mathcal{L}_v(\cdot)$	LIE-Zeitableitung der Größe $(\cdot)$
$\delta(\cdot)$	Variation der Größe $(\cdot)$
$\delta_{\mathcal{L}}(\cdot)$	LIE-Variation der Größe $(\cdot)$

## Kontinuumsmechanische Größen

Die Indizes der ko- und kontravarianten Tensorkomponenten sind mit lateinischen Kleinbuchstaben gekennzeichnet und sind von 1 bis 3 definiert.

### Basen

$\mathbf{i}_i = \mathbf{i}^i$	orthonormale Basen des EUKLID'schen Raumes
$\mathbf{G}_i, \mathbf{g}_i$	kovariante Basen eines Punktes des Kontinuums
$\mathbf{G}^i, \mathbf{g}^i$	kontravariante Basen eines Punktes des Kontinuums

### skalare Größen

$\mathcal{V}_0, \mathcal{V}$	Volumen
$\mathcal{S}_0, \mathcal{S}$	Oberfläche
$\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}}, \mathcal{S}^{\mathbf{t}}$	Oberfläche mit dynamischen oder natürlichen Randbedingungen
$\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}}, \mathcal{S}^{\mathbf{u}}$	Oberfläche mit kinematischen Randbedingungen
$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$	Körper
$J$	JAKOBI-Determinante
$\gamma$	LAGRANGE-Operator oder Konsistenzparameter
$m$	Masse
$\rho_0, \rho$	Massendichte
$\lambda, \mu, \kappa$	LAMÉ-Konstanten und Kompressionsmodul
$E, G, \nu$	Elastizitätsmodul, Schubmodul und Querkontraktionszahl
$T$	Temperaturfeld
$S_V$	Vergleichsspannung
$\alpha$	isotrope Verfestigung
$g(\alpha), K(\alpha)$	Funktion der isotropen Verfestigung
$c_\alpha, c_\beta$	Materialparameter für Evolutionsgleichung der isotropen und kinematischen Verfestigung

### skalare Tensorfunktionen und -funktionale

$I_{(\cdot)}, II_{(\cdot)}, III_{(\cdot)}$	Grundinvarianten aus der Spur des Tensors $(\cdot)$
$J_{(\cdot)}, \mathbb{J}_{(\cdot)}, \mathbb{J}\mathbb{J}_{(\cdot)}$	Hauptinvarianten aus dem Eigenwertproblem des Tensors $(\cdot)$ nach [9] mit $(\cdot)^3 - J_{(\cdot)} (\cdot)^2 + \mathbb{J}_{(\cdot)} (\cdot) - \mathbb{J}\mathbb{J}_{(\cdot)} \mathbf{I} = 0$
$w, w^*$	lokale (komplementäre) Formänderungsenergiefunktion oder Potentialfunktion
$w_r, w_i$	reversibler und irreversibler Anteil der Formänderungsenergiefunktion
$\phi$	spezifische Formänderungsenergie
$h$	komplementäre spezifische Formänderungsenergie
$F$	Fließfläche
$\Phi, \Phi^*$	elastisches (komplementäres) Potential
$W, W^*$	elastische (komplementäre) Formänderungsenergie
$A, A^*$	elastisches (komplementäres) Potential der äußeren Lasten

**inkrementelle Größen**

$d\mathbf{X}, dx$	vektorielles Linienelement
$d\mathcal{S}_0, d\mathcal{S}$	vektorielles Oberflächenelement
$d\mathcal{S}_0^T, d\mathcal{S}^t$	Oberflächenelement mit dyn. / natürl. Randbedingungen
$\mathcal{S}_0^u, \mathcal{S}^u$	Oberflächenelement mit kinematischen Randbedingungen
$d\mathcal{V}_0, d\mathcal{V}$	Volumenelement

**Vektoren**

$\mathbf{X}, \mathbf{x}$	Ortsvektor eines Punktes
$\mathbf{r}$	Differenzvektor zweier Punkten der Momentankonfiguration
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor
$\mathbf{u}^*$	gegebener Verschiebungsvektor als kinematische Randbedingung
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{N}, \mathbf{n}$	Normalenvektor auf einer gegebenen Fläche
$\mathbf{T}, \mathbf{t}$	Spannungsvektor
$\mathbf{T}^*, \mathbf{t}^*$	geg. Spannungsvektor, dynamische / natürliche Randbedingung
$\mathbf{K}$	Beschleunigungsvektor des wirkenden Kraftfeldes
$\mathbf{f}^R, \mathbf{f}^S, \mathbf{f}^V$	Gesamtbelastungsvektor, Oberflächen- und Volumenkräfte
$\mathbf{i}_P$	Vektor des Gesamtimpulses
$\mathbf{l}_P$	Vektor des Gesamtdrehimpulses
$\mathbf{m}_P^R, \mathbf{m}_P^S, \mathbf{m}_P^V$	Gesamtmomentenvektor aus Belastung, aus Oberflächen- und Volumenkräften
$\mathbf{q}_n$	Vektorfeld der internen Variablen

**Tensoren 2. Stufe**

$\mathbf{G}, \mathbf{g}$	Metriktensor
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$\mathbf{R}$	orthogonaler Rotationstensor
$\mathbf{U}, \mathbf{v}$	rechter und linker Strecktensor
$\mathbf{C}, \mathbf{b}$	rechter und linker CAUCHY-GREEN-Tensor
$\mathbf{E}, \mathbf{e}$	GREEN-LAGRANGE- und EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor
$\mathbf{A}, \mathbf{a}$	PIOLA- und FINGER-Tensor
$\boldsymbol{\sigma}$	CAUCHY-Spannungstensor
$\mathbf{P}$	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
$\mathbf{S}$	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
$\boldsymbol{\tau}$	KIRCHHOFF-Spannungstensor
$\boldsymbol{\Sigma}$	invers gewichteter 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
$\mathbf{l}, \mathbf{d}, \mathbf{w}$	räumlicher Geschwindigkeitsgradient, symmetrischer und antisymmetrischer Anteil
$\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_r, \boldsymbol{\varepsilon}_i$	linearer Verzerrungstensor, reversibler und irreversibler Anteil
$\boldsymbol{\beta}$	deviatorische kinematische Verfestigung
$\boldsymbol{\eta}, \mathbf{n}$	deviatorischer Spannungstensor und normierter Tensor

## Tensoren 4. Stufe

$\mathbf{G}$	Metriktensor 4. Stufe, Einheitstensor für doppelte Überschiebung eines Tensors 2. Stufe der Referenzkonfiguration
$\mathbf{C}$	linear elastischer Materialtensor
$\mathbf{C}_{ep}$	konsistenter Tangentensteifigkeitstensor

## Größen der hierarchischen Schalenmodelle

Ist eine Größe durch einen Überstrich mit  $\overline{(\cdot)}$  gekennzeichnet, so ist sie das Ergebnis der Größe ohne Überstrich, die mit Hilfe des Shifters  $\mathbf{Z}$  auf die Basen der unverformten Mittelfläche geshiftet wurde. Bei skalaren Größen sind diese beiden äquivalent. Griechische Kleinbuchstaben als Indizes von Tensorkomponenten sind von 1 bis 2 definiert.

### Basen

$\mathbf{A}_i, \mathbf{A}^i$	ko- und kontravariante Basen der Schalenmittelfläche
------------------------------	--

### skalare Größen

$h$	Dicke der Schale
$K, H$	GAUSSsche Krümmung und Hauptkrümmung eines Punktes
$R_{min}, R_{max}$	minimaler und maximaler Hauptkrümmungsradius eines Punktes
$\Gamma_{ij}^l$	CHRISTOFFEL-Symbol
$nk$	Modellnummer des gewählten hierarchischen Schalenmodells
$f$	Faktor aus Integration über die Dickenkoordinate $\Theta^3$
$f_0$	Faktor für Flächenlast auf Ober- und Unterseite der Schale
$\bar{\alpha}$	isotrope Verfestigung der Schale

### inkrementelle Größen

$d\overset{0}{\mathbf{X}}$	vektorielles Linienelement der Schalenmittelfläche
$d\mathcal{L}_0$	Linienelement der Schalenmittelfläche
$d\mathbf{A}_3$	Differential des Normalenvektors der Schalenmittelfläche
$d\mathcal{A}_0$	vektorielles Flächenelement der Schalenmittelfläche
$d\mathcal{A}_0$	Flächenelement der Schalenmittelfläche

### Vektoren

$\overset{0}{\mathbf{X}}$	Ortsvektor eines Punktes auf der Schalenmittelfläche
$\overset{k}{\mathbf{u}}$	$k$ -ter Direktor der polynomialen Beschreibung von $\mathbf{u}$
$\mathbf{T}^3, \mathbf{T}^\alpha$	Flächen- und Randlastspannungsvektor

**Tensoren 2. Stufe**

$\mathbf{A}$	Metriktenor der Schalenmittelfläche
$\mathbf{B}$	Krümmungstensor der Schalenmittelfläche
$\mathbf{Z}$	Shifter als Zweipunkttenor
$\overline{\mathbf{G}}, \overline{\mathbf{G}}^{-1}$	Metriktenor des Kontinuums bezogen auf kontra- und kovariante Mittelflächenbasen
$\overline{\mathbf{F}}$	Deformationsgradient bezogen auf Mittelflächenbasen
$\overline{\mathbf{F}}^k$	$k$ -ter Deformationsgradient der polynomialen Beschr. von $\overline{\mathbf{F}}$
$\overline{\mathbf{C}}$	rechter CAUCHY-GREEN-Tensor bezogen auf Mittelflächenbasen
$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_r, \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$	linearer Verzerrungstensor, reversibler und irreversibler Anteil, bezogen auf Mittelflächenbasen
$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^k$	$k$ -ter Verzerrungstensor der polynomialen Beschreibung von $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$
$\overline{\mathbf{S}}$	Spannungstensor bezogen auf Mittelflächenbasen
$\overline{\mathbf{S}}^k$	$k$ -ter Spannungstensor der polynomialen Beschreibung von $\overline{\mathbf{S}}$
$\overline{\mathbf{n}}_{\overline{\mathbf{S}}}, \overline{\mathbf{n}}_{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$	normierter deviatorischer Spannungstensor bezogen auf ko- und kontravariante Mittelflächenbasen

**Tensoren 4. Stufe**

$\overline{\mathbf{G}}^{-1}$	Metriktenor 4. Stufe des Kontinuums bezogen auf kovariante Mittelflächenbasen
$\overline{\mathbf{C}}$	linear elastischer Materialtenor bezogen auf kovariante Mittelflächenbasen
$\overline{\mathbf{C}}^{k+1}$	linear elastischer Materialtenor als integrierte Schalensteifigkeit





# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

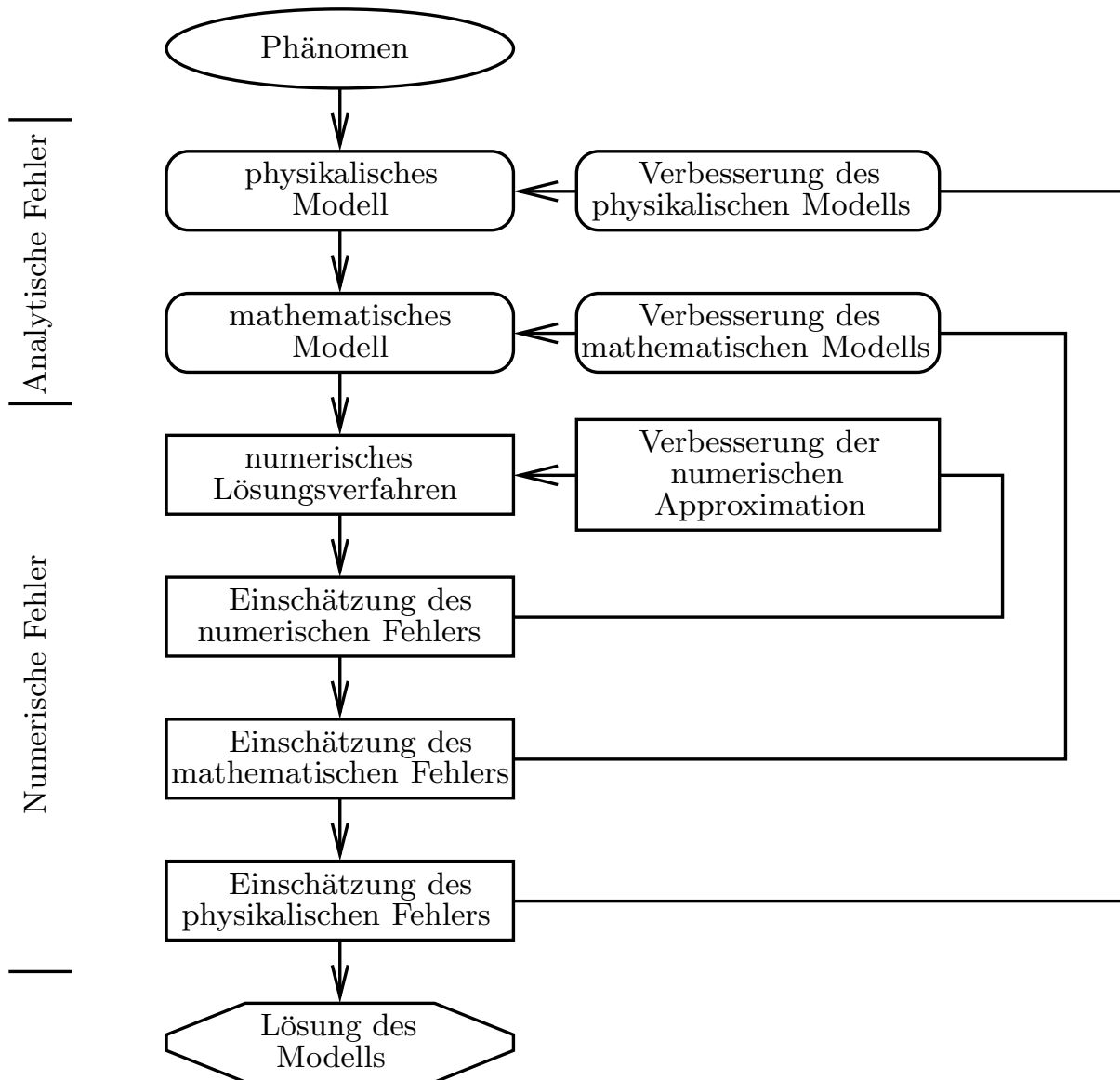
Die Aufgabe der Ingenieurwissenschaften ist es, neue Entwicklungen durch Anwendung naturwissenschaftlicher Erkenntnisse zu realisieren. Hierfür müssen Vorhersagen über das Verhalten der Entwicklungen getroffen werden, die mit der Methodik der Ingenieurwissenschaften erzielt werden. Der erste Schritt dieser Methodik besteht in der Abbildung eines Phänomens der Natur durch ein physikalisches und mathematisches Modell, indem es abstrahiert und mit seinen essentiellen Eigenschaften erfasst wird. Im zweiten Schritt wird ein geeignetes Lösungsverfahren gewählt, das mathematisch oder auch experimentell sein kann. Diese beiden Möglichkeiten kontrollieren sich gegenseitig und sollten daher immer parallel durchgeführt werden. Die mathematischen Lösungsverfahren unterteilen sich in analytische und numerische. Heutzutage rücken die numerischen Lösungsverfahren immer mehr in den Vordergrund, was nicht zuletzt durch den rasanten Fortschritt der Rechenleistung ermöglicht wird. Aus den erzielten Lösungen werden nun quantitative sowie qualitative Vorhersagen getroffen und mit den Anforderungen der gestellten Aufgabe verglichen. Durch einen iterativen Prozess wird das Modell verbessert und den gegebenen Anforderungen angepasst. Da Phänomene nur näherungsweise abgebildet werden können, beinhaltet der gesamte Prozess an vielen Stellen Vereinfachungen. Erst sie ermöglichen es dem Ingenieur, ein lösbares Modell zu formulieren. Ziel ist es, die Anzahl und den Umfang der getroffenen Vereinfachungen möglichst gering zu halten. Des Weiteren soll die gestellte Aufgabe mit dem gewählten Modell in einem gesetzten Rahmen gelöst werden, wie zum Beispiel einer Zeitvorgabe oder vorhandenen Kapazitäten.

Für Phänomene aus der Kontinuumsmechanik zeigt die Abbildung 1.1 den Prozess der Lösungsfindung. Ein gegebenes Phänomen wird soweit vereinfacht, dass es hinreichend von bekannten physikalischen Modellen erfasst werden kann. Hier wird zum Beispiel entschieden, ob ein statisches oder dynamisches Problem vorliegt, ob das Materialverhalten elastisch oder inelastisch ist oder ob zufallsverteilte oder deterministische Lasten auf das System aufgebracht werden.

Im nächsten Schritt wird die Wahl des mathematischen beziehungsweise mechanischen Modells für das System getroffen. Es wird die geometrische Beschreibung des Systems festgelegt, mit der die Struktur eindimensional, zweidimensional oder dreidimensional erfasst wird. Des Weiteren legt die Kinematik das Verhalten der Prozessgrößen fest, wie zum Beispiel der Verschiebungen, wodurch sich die Anzahl der erforderlichen Randbedingungen ergibt. An dieser Stelle wird außerdem die Annahme kleiner oder großer Formänderungen und kleiner oder großer Verzerrungen getroffen.

Da die meisten Modelle nicht analytisch zu lösen sind, stehen verschiedene numerische Lösungsverfahren zur Verfügung, wie zum Beispiel die Finite-Differenzen, Finite-Elemente oder auch Randelemente Methode. Bei der Wahl der numerischen Lösungs-

verfahren wird die geometrische Abbildung, die Diskretisierungsmethode, die Approximation der Prozessgröße und die Wahl der Näherungslösungen und -algorithmen festgelegt, zum Beispiel für die numerische Integration oder bei inelastischem Materialverhalten die Zeitintegration.



**Abb. 1.1:** Lösungsprozess in der Kontinuumsmechanik

Durch eine lokale oder globale Einschätzung des entstandenen numerischen Fehlers kann eine qualitative Aussage über die Berechnungsergebnisse getroffen werden. Eine Netzverfeinerung, Polynomgraderhöhung oder eine Zeitschrittverkleinerung verringert diesen Fehler, jedoch gilt dies nur im Rahmen des gewählten mathematischen und physikalischen Modells. Ist der numerisch ermittelte Modellfehler zu groß, bewirken diese Verfeinerungen nur minimale Verbesserungen der Ergebnisse und es muss ein hierarchisch höheres, mathematisches Modell gewählt werden. Dieses Vorgehen gilt ebenso für das gewählte physikalische Modell. Ist in einer Struktur zum Beispiel bei einer elastischen Berechnung die Fließgrenze des Materials überschritten, so kann der Fehler nur minimiert werden, indem ein inelastisches Materialverhalten für die

Beschreibung des Prozesses gewählt wird.

Durch den hier vorgestellten Lösungsprozess in der Kontinuumsmechanik ist es möglich, quantitative und vor allem auch qualitative Aussagen über die Lösung eines Modells zu treffen, und die für das Modell beste Lösung zu erzielen. Über *alle* getroffenen Vereinfachungen in diesem Prozess kann jedoch noch lange keine qualitative Aussage getroffen werden, da die physikalischen Sachverhalte der meisten getroffenen Vereinfachungen noch nicht bekannt sind. Daher ist die wichtigste und wohl auch verantwortungsvollste Aufgabe des Ingenieurs in diesem Prozess, den ersten Schritt zu machen: das betrachtete technische Phänomen zu *abstrahieren* und mit seinen *essentiellen Eigenschaften* in einem geeigneten Modell zu erfassen.

## 1.2 Stand der Forschung

In den letzten Jahren hat sich in vielen Bereichen der Kontinuumsmechanik die  $p$ -Version der Finite-Element Methode als leistungsstarkes und mit vielen Vorteilen versehenes Näherungsverfahren herausgestellt, da mit ihr der numerische Fehler minimiert werden kann. Daher wird sie in dieser Arbeit als Näherungsverfahren gewählt. Im Folgenden wird die Entwicklung der  $p$ -Version der FEM anhand der verschiedenen mathematischen und physikalischen Modelle kurz angesprochen.

Anfang der 70er Jahre des letzten Jahrhunderts sind die ersten Überlegungen zu einer  $p$ -Version der FEM entstanden. Durch eine Erhöhung des Polynomgrades  $p$  der Ansatzfunktionen sollte eine bessere Approximation des Verschiebungsfeldes erreicht werden. Der Grundgedanke war dabei, den Polynomgrad der Ansatzfunktionen zu steigern, das FE-Netz jedoch beizubehalten. Das erste FE-Programm COMET-X, das auf diesem Gedanken aufbaute, wurde im *Center for Computational Mechanics* an der Washington University unter der Leitung von Prof. SZABÓ entwickelt [94] und weitere in [6] aufgeführte Programme folgten. Für eine strukturierte Implementation wurde eine neue Familie von Ansatzfunktionen aufgestellt, die hierarchischen Ansatzfunktionen [65, 96]. Sie besitzen die Eigenschaft, dass alle Ansatzfunktionen des Polynomgrades  $p - 1$  in den Ansatzfunktionen des Polynomgrades  $p$  enthalten sind. Für die Elementsteifigkeitsmatrix und den -lastvektor hat dies zur Folge, dass die zu  $p - 1$  aufgestellten Matrizen eingebettet sind in die Matrizen des Polynomgrades  $p$ . Dadurch konnte die Implementation der  $p$ -Version sehr stark vereinfacht werden. Die Ergebnisse zeigten nicht nur eine bessere Konvergenz in der Energienorm bei Problemen, bei denen die analytische Lösung bekannt ist, sondern auch bei Problemen, die eine Singularität in einem Knotenpunkt beinhalten [92, 96]. Durch eine Netzverfeinerung hin zur Singularität und Verwendung der  $p$ -Version der FEM konnte sogar eine exponentielle Konvergenz in der Energienorm erreicht werden [92]. Diese Methode entstand Mitte der 80er und wird als  $hp$ -Version der FEM bezeichnet. Die Robustheit der Elemente der  $p$ -Version erlaubt die Verwendung stark verzerrter Elemente [74], welche die Netzgenerierung der  $hp$ -Version vereinfacht. Von besonderer Bedeutung ist die exakte Abbildung der Geometrie, die die Voraussetzung für Berechnungen mit steigendem Polynomgrad ist. Würde keine exakte Abbildung verwendet, so würde

sich der Fehler der Geometrieabbildung bezogen auf den Gesamtfehler mit steigendem Ansatzgrad vergrößern. Um dies zu vermeiden, wird die Blending-Function Methode zur Abbildung gekrümmter Ränder verwendet. Sie basiert auf einem linearen Ein- und Ausblenden der exakten geometrischen Beschreibung des Elementrandes [42, 43]. Die Anwendung dieser Methode ist bei SZABÓ und BABUŠKA [96] beschrieben, der bis heute noch einzigen Publikation über Methoden und Implementation der  $p$ -Version der FEM.

Die bisher vorgestellten Ergebnisse behandeln ausschließlich Scheibenprobleme und ihre Effizienz und Genauigkeit in Relation zur  $p$ -Version der FEM. Bei Plattenproblemen treten jedoch neue Schwierigkeiten auf, wie zum Beispiel der Shearlocking-Effekt. Eine umfassende Studie des REISSNER-MINDLIN Plattenproblems wurde 1990 veröffentlicht [49]. Es wurde gezeigt, dass dieses Problem unter Verwendung der  $hp$ -Version ebenfalls eine exponentielle Konvergenzrate in der Energienorm bei einem Berechnungsgebiet mit Singularität aufweist. Auch die Robustheit der Methode gegen verzerrte Elemente wurde nachgewiesen und es wurde gezeigt, dass bei den Polynomgraden  $p = 7$  und  $p = 8$  der Shearlocking-Effekt vernachlässigbar ist. Diese Vorzüge und weitere neue Möglichkeiten zur Qualitätskontrolle, wie zum Beispiel adaptive Netzverfeinerungen und eine bereichsweise Erhöhung des Polynomgrades, werden anhand von Beispielen in [11] zusammengestellt. Die schon bei Scheibenelementen angewandte Blending-Function Methode hat sich auch bei Plattenelementen bewährt, wie die Untersuchung des Momentenverlaufes einer Kreisringplatte in [48] zeigt. Jedoch treten im Querkraftverlauf starke Oszillationen auf, wenn dieser aus den Schubspannungen berechnet wird. Sie werden erst bei einem höheren Polynomgrad abgebaut. Durch eine Berechnung der Querkraft aus dem Gleichgewicht konvergieren die Ergebnisse sehr viel schneller [67] und die Verläufe sind somit glatter [75]. Auch Layer-Effekte, die je nach gewähltem mathematischen Modell auftreten, können mit der  $p$ -Version gut aufgelöst werden. Bei einer REISSNER-MINDLIN Platte, die durch einen soft simple support gelagert ist, stellt sich eine Singularität in der Querkraft am gelagerten Rand ein. Diese kann durch eine Layerschicht von Elementen am Rand aus dem Berechnungsgebiet eliminiert werden [75], sodass die Dehnungsenergie sehr viel schneller konvergiert. Auf Stützen gelagerte Platten können durch eine Teilbettung eines oder mehrerer Elemente berechnet werden, indem eine Lagerung der entsprechenden Gaußpunkte definiert oder die exakte Stützengeometrie durch eine Teilintegration erfasst wird [19].

Seit Mitte der 60er sind eine Vielzahl von Schalenelementbeschreibungen entstanden. Einen Überblick findet man in [100]. In der vorliegenden Arbeit werden Schalenelemente aufgrund ihres kinematischen Ansatzes und ihrer numerischen Beschreibung in zwei Gruppen unterteilt: in zweidimensionale und dreidimensionale Elemente. Die dreidimensionalen Schalenelemente entsprechen dabei Volumenelementen, die einen niedrigeren, in der  $p$ -Version aber variablen Ansatzgrad über die Dicke haben. Die kinematische Beschreibung basiert also auf einem dreidimensionalen Kontinuum mit Verschiebungsvariablen und nicht, wie in der klassischen Schalentheorie üblich, auf einem zweidimensionalen Kontinuum mit Verschiebungs- und Verdrehungsvariablen. Die zweidimensionalen Schalenmodelle, die einen beliebigen Polynomgrad über die Dicke der Schale haben, werden hierarchische Schalenmodelle genannt. Die Kinema-

tik über die Dicke beschreibt hier, was der Polynomgrad in Dickenrichtung bei den volumetrischen Elementen erfasst.

Ende der 80er Jahre hat SZABÓ bereits ein Volumenelement, basierend auf der  $p$ -Version der FEM mit hierarchischen Ansatzfunktionen, untersucht [97, 93]. Der Polynomgrad der Approximation kann in Dickenrichtung anders als in Richtung der Schalenmittelfläche gewählt werden. Daraus ergibt sich die volumetrische Beschreibung hierarchischer Schalenmodelle über den Grad der Approximation. Für das linear-elastische SCORDELIS-LO Problem wurde gezeigt, dass ein Volumenelement, das in Dickenrichtung einen linearen Ansatzgrad hat, eine gute Näherung der Lösung des linear-elastischen Kontinuums liefert. Anfang der 90er wurde von SURANA in [89] ein dreidimensionales Schalenelement entwickelt, das auf einem neuen Ansatzraum basiert. Dieser Ansatzraum wurde mit LAGRANGE-Funktionen hierarchisch aufgebaut und ist sehr komplex. Er beschreibt eine  $p$ -Approximation über die Dicke des Schalenelementes und ist vergleichbar mit hierarchischen Modellen. Erweitert wurde dieses Element durch eine  $p$ -Approximation mit LAGRANGE-Funktionen in die zwei Hauptrichtungen der Schale in [90]. Die Geometrie des Schalenelementes wurde durch eine 8-knotige LAGRANGE-Interpolation der Mittelfläche und den entsprechenden Normalenvektoren erzeugt. Dadurch entsteht der Nachteil, dass bei steigendem Polynomgrad der Fehler in der Geometrie überwiegt. Eine Studie über hierarchische Ansatzfunktionen, basierend auf LAGRANGE-, LEGENDRE- und CHEBYSHEV-Funktionen, hat ergeben, dass die Konditionszahl bei quadratischen, gestreckten und verzerrten Elementen am niedrigsten bei einer Elementsteifigkeitsmatrix ist, die mit LEGENDRE-Polynomen als Ansatzfunktionen erstellt wurde [35]. FISH hat Mitte der 90er Jahre eine Familie von zwei- und dreidimensionalen Elementen entwickelt [38]. Sie gehen bis zum Polynomgrad  $p=8$  und überwinden das SHEAR-Locking mit Hilfe der ASSUMED-NATURAL-STRAIN-Methode. Untersucht wurde die Effektivität der jeweiligen Elemente anhand der CPU-Zeiten. Jedoch wird hier nicht der Grundgedanke der  $p$ -Version verfolgt. Vielmehr soll der Polynomgrad eine obere Schranke nicht überschreiten und die Konvergenz des Ergebnisses durch eine Verfeinerung des Netzes gewährleistet werden [39]. Ein Jahr später hat ODEN ein hierarchisches Schalenmodell mit einer polynomialen Beschreibung der Verschiebungen über die Dicke und hierarchischen Ansatzfunktionen über die Mittelfläche untersucht [26]. Hierfür wurde auch ein Fehlerschätzer für den Modellfehler entwickelt [62]. Es stellte sich heraus, dass das SHEAR- und MEMBRANE-Locking bei Platten und Zylinderschalen unabhängig von der Modellwahl ist. Bei elastischen Zylinderschalen mit Flächenlasten war das modifizierte NAGHDI-Schalenmodell am effektivsten. Im Frühjahr 99 hat SCHWAB eine umfangreiche Studie eines zweidimensionalen hierarchischen Schalenelementes basierend auf der  $p$ -Version der FEM veröffentlicht [77]. Sie zeigt die Robustheit der Methode gegenüber verzerrten Elementen, einen Boundary-Layer-Effekt und seine Auflösung mit Hilfe von Layerelementen und bei steigendem Polynomgrad die Überwindung des SHEAR-Lockings. Diese Untersuchungen beschränken sich jedoch auf Zylinderschalen, die nicht durch ihre exakte Geometrie, sondern durch eine Interpolationsmethode abgebildet werden. Das Materialverhalten ist auch hier elastisch. Anfang des neuen Jahrtausends wurde von RANK die Idee von SZABÓ des orthotropen Ansatzraumes für ein Volumenelement wieder aufgenommen [30], wobei die

globalen Verschiebungskomponenten approximiert wurden. Daher ist der Vorteil des orthotropen Ansatzraumes nur für Platten und Scheiben, die in einer Koordinatenebene liegen, voll ausschöpfbar. Es wurden eingespannte und stützengelagerte Platten, das SCORDELIS-LO-Problem und ein dreidimensionales Übergangsproblem gelöst. Die Abbildungsfunktion der Geometrie wurde direkt an ein CAD-Programm gekoppelt [18], wodurch das erste Mal allgemeine Schalengeometrien mit der  $p$ -Version berechnet werden konnten.

SZABÓ hat Mitte der 90er zum ersten Mal inelastisches Materialverhalten in die  $p$ -Version der Finite-Element Methode implementiert, indem die Deformationstheorie mit einem geometrisch linearen Scheibenelement gekoppelt wurde [95]. Auch Lokalisationseffekte wurden mit dieser Methode untersucht [31, 52, 76]. Die klassische Plastizitätstheorie nach der  $J_2$ -Fließtheorie mit einem ideal plastischen Materialverhalten wurde ein Jahr später untersucht [50]. Die Berechnungen für Scheibenelemente zeigen gute Ergebnisse. Große Formänderungen mit einer nichtlinearen isotropen Verfestigung nach der VON-MISES-Fließtheorie wurden im folgenden Jahr für einen ebenen Verzerrungs- und Spannungszustand an Scheibenelementen untersucht [61]. Für ein Volumenelement wurde eine ähnliche Beschreibung mit nichtlinearer isotroper Verfestigung erst vor kurzem mit der  $p$ -Version untersucht [32, 29].

### 1.3 Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, den in 1.1 beschriebenen Prozess für dünne, gekrümmte Strukturen, sogenannte Schalentragwerke, zu ermöglichen. Hierfür wird ein elastisches und ein inelastisches Materialverhalten für die Berechnung bereitgestellt, das die Wahl des physikalischen Modells repräsentiert. Die hierarchischen Schalenmodelle beinhalten die verschiedenen mathematischen Modelle. Für die numerische Umsetzung wird die  $p$ -Version der Finite-Element Methode verwendet, die durch die Wahl des Polynomgrades die Güte der numerischen Approximation festlegt.

Während dieses iterativen Prozesses können nicht zulängliche Lösungen auftreten. Sie ergeben sich, wenn für ein gegebenes System der Spannungszustand nicht hinreichend genau abgebildet werden kann oder sich bei einer Konvergenzbetrachtung eines Parameters eine zu kleine Lösung einstellt. Diese nicht zulänglichen Lösungen werden Locking-Effekte genannt. Sie können durch einen Modelldefekt oder eine nicht hinreichende numerische Approximation entstehen. Durch eine Behandlung der direkten Ursachen wird gezeigt, dass Locking-Effekte mit Hilfe des zuvor beschriebenen Lösungsprozesses automatisch überwunden werden können.

Aus der allgemeinen krummlinigen dreidimensionalen Kontinuumsmechanik wird ein hierarchisches, geometrisch lineares Schalenmodell abgeleitet. Die Verschiebungen werden im lokalen Koordinatensystem der Schalenmittelfläche definiert, um eine hierarchische Modellbeschreibung in Dickenrichtung zu erhalten. Es wird keine Reduktion der Verzerrungen eingeführt, wie es in den meisten anderen Schalentheorien der Fall ist. Dadurch wird die Konvergenz zur dreidimensionalen Lösung sichergestellt.

Es wird gezeigt, dass durch die Wahl eines ausreichenden mathematischen Modelles das POISSON-THICKNESS-Locking überwunden werden kann.

Für die numerische Umsetzung ist die  $p$ -Version der Finite-Element Methode gewählt worden. Die Erhöhung des Polynomgrades der Approximation der lokalen Verschiebungskomponenten bewirkt bei entsprechender Wahl die Überwindung des SHEAR-, MEMBRANE- und des VOLUME-Lockings. Diese Effekte entstehen durch eine zu niedrige Approximation der Verschiebungen, die zu Versteifungen des Tragwerkes führen. Durch eine  $h$ -Verfeinerung hin zu Singularitätspunkten und Layerbereichen können diese aufgelöst werden und beeinflussen nicht mehr das Ergebnis im Inneren des Berechnungsgebietes.

Der dreidimensionale Spannungszustand der hierarchischen Schalenmodelle ermöglicht die Wahl beliebiger Materialmodelle. Bei einer Überschreitung der elastischen Fließgrenze kann in diesem Bereich ein plastisches Materialmodell für die Berechnung verwendet werden. In dieser Arbeit wird das verallgemeinerte Materialgesetz von HOOKE und das plastische Materialgesetz nach der VON-MISES-Fließtheorie mit einer nichtlinearen isotropen Verfestigung untersucht.

## 1.4 Gliederung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich inklusive dieser Einleitung in sieben Kapitel.

Der kontinuumsmechanische Rahmen, Bilanzgleichungen, Potentiale und Variationsprinzip der Mechanik werden in Kapitel 2 erst für große Verschiebungen und Formänderungen aufgestellt und zum Schluss geometrisch linearisiert. Des Weiteren werden die in dieser Arbeit verwendeten, dreidimensionalen elastischen und inelastischen Materialmodelle vorgestellt.

In Kapitel 3 wird die Beschreibung der hierarchischen Schalenmodelle bezogen auf die Schalenmittelfläche für ein geometrisch lineares Kontinuum erläutert. Hierfür wird eine polynomiale Beschreibung der Verschiebungen in Dickenrichtung verwendet. Der Polynomgrad gibt die Modellnummer des dazugehörigen Schalenmodelles an.

Aus einer theoretischen Modelldiskussion, die das POISSON-THICKNESS-Locking behandelt, wird in Kapitel 4 das notwendige Modell, dass alle Spannungszustände für moderat dicke Schalen hinreichend genau abbilden kann, für elastische Probleme abgeleitet.

In Kapitel 5 wird die  $p$ -Version der Finite-Element Methode zur Umsetzung der hierarchischen Schalenmodelle verwendet. Hierfür wird die Theorie in die Matrixschreibweise überführt, der Ansatzraum definiert und verschiedene Abbildungsfunktionen ebenso wie eine Möglichkeit der Anbindung an ein CAD-Programm erläutert. Die verwendeten numerischen Lösungsmethoden für inelastische Materialmodelle werden ebenfalls aufgezeigt.

Die Robustheit des Elementes, die Konvergenzeigenschaften bei verschiedenen Locking-Effekten und das Verhalten bei elastoplastischem Materialverhalten werden in Kapitel 6 anhand von Beispielen untersucht.



Kapitel 7 fasst die erzielten Ergebnisse zusammen und gibt einen Ausblick auf noch zu lösende Probleme.

---

## 2 Kontinuumsmechanischer Rahmen

In diesem Abschnitt werden die allgemeinen kontinuumsmechanischen Grundlagen zusammengefasst. Ein Kontinuum stellt einen stetigen Bereich dar, in dem das Material kontinuierlich verteilt ist. Es kann als Punkt-Kontinuum vollständig beschrieben werden, das heißt, die Beschreibung der Bewegung und der Deformation kann durch den Ortsvektor eines Punktes vollständig erfasst werden. Außerdem soll das Indifferenz-Prinzip für Raum und Zeit gelten. Es werden ausschließlich deformierbare und feste Körper betrachtet, das heißt, dass ein Körper in einer endlichen Zeit eine endliche, umkehrbare Deformation erfährt und sich dabei nicht selbst durchdringen kann. Die maßgeblichen Aussagen der Kontinuumsmechanik werden zunächst für große Deformationen und große Verschiebungen aufgestellt und später für kleine linearisiert. Ausführliche Darstellungen der kontinuumsmechanischen Grundlagen sind in den Lehrbüchern von ALTENBACH und ALTENBACH [1], KHAN und HUANG [54], BETTEN [13] und OGDEN [63] zu finden. Für einen späteren Übergang zur Schalentheorie ist es notwendig, den kontinuumsmechanischen Rahmen in körperfesten, konvektiven Koordinaten zu beschreiben. Hierfür wird auf die Bücher von BAŞAR und WEICHERT [9] und HAUPT [46] verwiesen.

### 2.1 Konfigurationen und Restriktionen

#### 2.1.1 Betrachtungsweisen

Aufgrund des Indifferenz-Prinzips kann der Ausgangszeitpunkt  $t_0$  zur Beschreibung der Bewegung und der Deformation eines Körpers beliebig festgelegt werden. Daher wird üblicherweise  $t_0 = 0$  gesetzt. Das räumliche Bezugssystem, das einen EUKLID'schen Raum aufspannt, kann beliebig festgelegt werden, wird jedoch meistens über ein orthonormales Basissystem in einem dem Körper eindeutig zugeordneten Punkt definiert.

Um physikalische Größen in Abhängigkeit von der Zeit zu beschreiben, können grundsätzlich zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen gewählt werden:

Bei der EULER'schen Betrachtungsweise bezieht sich der Beobachter auf einen festen Punkt im Raum und sieht zum Zeitpunkt  $t$  einen materiellen Punkt an sich vorbeiziehen. Der Beobachter kann daher keine Aussage über die Änderungen physikalischer Größen eines materiellen Punktes machen. Diese Betrachtungsweise wird in der Fluidmechanik zur Darstellung von Feldebetrachtungen verwendet.

Bei der LAGRANGE'schen Betrachtungsweise ist der Beobachter mit einem materiellen Teilchen verbunden. Er kann die Veränderungen der physikalischen Größen direkt erfahren, da er sich auf ein körperfestes Koordinatensystem bezieht. Da in der

Festkörpermechanik der Ausgangszustand des Körpers bekannt ist und die Veränderungen von Bewegung und Deformation des Körpers gesucht sind, wird die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise verwendet.

### 2.1.2 Konfigurationen

Für die LAGRANGE'sche Betrachtungsweise bestehen zwei Möglichkeiten Prozessgrößen zu definieren: Die TOTALE-LAGRANGE'sche Betrachtungsweise, in der sich alle Größen auf die Referenzkonfiguration beziehen, und die UPDATED-LAGRANGE'sche Betrachtungsweise, bei der sich alle Größen auf die Momentankonfiguration beziehen. Diese beiden Betrachtungsweisen werden im Folgenden nebeneinander aufgeführt. Sie sind gleichberechtigt und haben je nach Problemstellung Vor- und Nachteile.

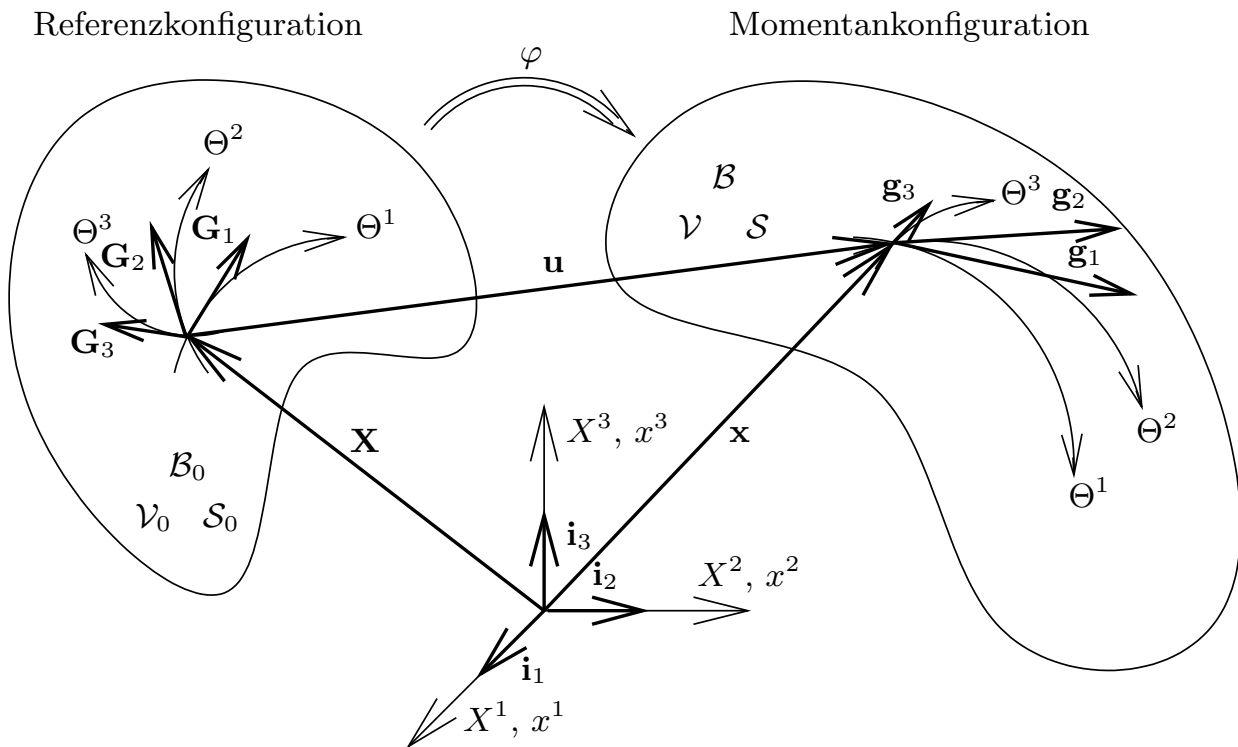


Abb. 2.1: Konfigurationen des Kontinuums

Im dreidimensionalen EUKLID'schen Raum  $\mathbb{R}^3$  kann jeder Punkt eines Körpers  $\mathcal{B}_0$  zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  in der Referenzkonfiguration durch die Basisvektoren  $\mathbf{i}_i$  und den dazugehörigen raumfesten, materiellen Koordinaten  $X^i$ , die wiederum von dem körperfesten, konvektiven Koordinatensystem  $\Theta^j$  abhängig sind, beschrieben werden.

$$\mathbf{X} = X^i \mathbf{i}_i = X^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) \mathbf{i}_i \quad (2.1)$$

Erfährt der Körper eine Deformation, so befindet er sich danach in der Momentankonfiguration als  $\mathcal{B}$  zum Zeitpunkt  $t$  mit den raumfesten, räumlichen Koordinaten

$x^i$ , die ebenfalls von dem körperfesten, konvektiven Koordinatensystem  $\Theta^j$  abhängig sind.

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{i}_i = x^i(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, t) \mathbf{i}_i \quad (2.2)$$

Analog zu den Ortsvektoren werden im Folgenden die Größen der Referenzkonfiguration mit großen Buchstaben und die der Momentankonfiguration mit kleinen Buchstaben gekennzeichnet. Diese Regel kann auf Zweipunktensoren nicht angewendet werden, da sie keiner Konfiguration zugewiesen werden können. Sie werden mit Großbuchstaben bezeichnet. Des Weiteren werden die Flächen und Volumen und deren Inkremente in der Referenzkonfiguration mit einem Großbuchstaben und Index Null bezeichnet und in der Momentankonfiguration nur mit dem Großbuchstaben.

Die kovarianten Basisvektoren der Referenz- bzw. Momentankonfiguration,  $\mathbf{G}_i$  bzw.  $\mathbf{g}_i$ , berechnen sich durch Ableitung der Ortsvektoren (2.1) und (2.2) nach den körperfesten, konvektiven Koordinaten  $\Theta^i$ . Die kontravarianten Basen  $\mathbf{G}^i$  bzw.  $\mathbf{g}^i$  entsprechen dem reziproken Ausdruck.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Theta^i} = \mathbf{X}_{,i} & \mathbf{g}_i &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^i} = \mathbf{x}_{,i} \\ \mathbf{G}^i &= \frac{\partial \Theta^i}{\partial \mathbf{X}} & \mathbf{g}^i &= \frac{\partial \Theta^i}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad (2.3)$$

Das Skalarprodukt der kovarianten Basen ergibt die kovarianten Komponenten des Metriktensors  $\mathbf{G}$  bzw.  $\mathbf{g}$

$$G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \quad \text{bzw.} \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (2.4)$$

mit denen sich mit Hilfe der Identität des KRONECKER-Deltas  $\delta_i^j$

$$\delta_i^j = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = G_{ik} G^{kj} \quad \text{bzw.} \quad \delta_i^j = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = g_{ik} g^{kj}, \quad (2.5)$$

das die Orthogonalitätsbeziehung der ko- und kontravarianten Basen der jeweiligen Konfiguration darstellt, die kontravarianten Komponenten des Metriktensors berechnen lassen:

$$G^{ij} = (G_{ij})^{-1} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j \quad \text{bzw.} \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j. \quad (2.6)$$

Der Metriktensor  $\mathbf{G}$  bzw.  $\mathbf{g}$  mit den definierten Determinanten  $G$  bzw.  $g$  entspricht also dem Einheitstensor  $\mathbf{I}$  in der jeweiligen Konfiguration.

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j & \text{bzw.} & \quad \mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \\ &= \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i & & \quad = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$G = \det \mathbf{G} := \det(G_{ij}) \quad \text{bzw.} \quad g = \det \mathbf{g} := \det(g_{ij}) \quad (2.8)$$

### 2.1.3 Objektivität

Das Axiom der materiellen Objektivität besagt, dass die gewählten Größen und Beziehungen zur Beschreibung der Veränderung der physikalischen Größen von der Wahl des Beobachters im Raum unabhängig sein müssen. Diese Forderung wird auch Beobachterindifferenz genannt.

Ein Wechsel des Beobachters von  $\mathcal{O}$  auf  $\overline{\mathcal{O}}$  mit  $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\overline{\mathbf{x}}, \overline{t})$  besagt: Ein Ereignis, dass vom Beobachter  $\mathcal{O}$  am Ort  $\mathbf{x}$  zum Zeitpunkt  $t$  erfahren wird, ist gleich zu dem, dass der Beobachter  $\overline{\mathcal{O}}$  am Ort  $\overline{\mathbf{x}}$  zum Zeitpunkt  $\overline{t}$  erfährt. Eine Beobachtertransformation ist also durch die folgenden Gleichungen des Ortes und der Zeit mit

$$\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \overline{\mathbf{c}}(t) \quad \text{und} \quad \overline{t} = t - a \quad (2.9)$$

beschrieben [63]. Der zweistufige Tensor  $\mathbf{Q}$  stellt hierbei einen beliebigen, zeitabhängigen, eigentlich orthogonalen Rotationstensor und der Vektor  $\overline{\mathbf{c}}$  einen beliebigen, zeitabhängigen Translationsvektor dar. Die Konstante  $a$  ist die Zeitdifferenz zwischen den Beobachtern. Sie ist mit dem hier geltenden Indifferenz-Prinzip irrelevant, sodass  $\overline{t} = t$  gewählt werden kann. Der Rotationstensor ist ein Zweipunktensor, der die Basen der aktuellen Konfiguration des Beobachters  $\mathcal{O}$  in die aktuellen des Beobachters  $\overline{\mathcal{O}}$  transformiert mit

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \overline{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i & \mathbf{Q}^{-1} &= \mathbf{g}_i \otimes \overline{\mathbf{g}}^i \\ \mathbf{Q}^{-T} &= \overline{\mathbf{g}}^i \otimes \mathbf{g}_i & \mathbf{Q}^T &= \mathbf{g}^i \otimes \overline{\mathbf{g}}_i \end{aligned} \quad (2.10)$$

und die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q}^{-1} \quad , \quad \det \mathbf{Q} = 1 \quad , \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{g} \quad , \quad \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \overline{\mathbf{g}} \quad . \quad (2.11)$$

Durch die in Gleichung (2.11) aufgeführten Eigenschaften ergeben sich komponentenunabhängige Objektivitätskriterien. Für eine Objektivitätsanalyse bleiben die Basen der Referenzkonfiguration einer Größe unverändert und die Basen der Momentankonfiguration wechseln den Beobachter. Eine Skalar, Vektor oder Tensor 2. Stufe ist objektiv, wenn für die Größen in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration folgende Transformationsbeziehungen gelten:

$$\begin{aligned} \text{Skalar} & \quad \overline{\Phi}(\mathbf{X}, t) = \Phi(\mathbf{X}, t) & \quad \overline{\phi}(\overline{\mathbf{x}}, t) &= \phi(\mathbf{x}, t) \\ \text{Vektor} & \quad \overline{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \quad \text{bzw.} & \quad \overline{\mathbf{a}}(\overline{\mathbf{x}}, t) &= \mathbf{Q} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}^T \\ \text{Tensor} & \quad \overline{\mathbf{B}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) & \quad \overline{\mathbf{b}}(\overline{\mathbf{x}}, t) &= \mathbf{Q} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (2.12)$$

Setzt sich ein Tensor 2. Stufe aus zwei unterschiedlichen Basen zusammen, handelt es sich um einen Zweipunktensor. Bezieht sich seine erste Base auf die Momentankonfiguration, so ist er objektiv, wenn er der Transformationsbeziehung

$$\overline{\mathbf{b}}(\overline{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{Q} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (2.13)$$

folgt. Ist die zweite Basis in der Momentankonfiguration definiert, gilt er als objektiv, wenn er die folgende Transformationsbeziehung erfüllt:

$$\bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}^T . \quad (2.14)$$

Diese Transformationsbeziehungen sind gleich zu denen für Vektoren in der Momentankonfiguration.

## 2.2 Kinematische Beziehungen

### 2.2.1 Deformation

Die Verschiebung eines körperfesten Punktes aus der Referenz- in die Momentankonfiguration kann durch den Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  definiert werden.

$$\mathbf{u} := \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.15)$$

Das materielle Linienelement  $d\mathbf{X}$  in der Referenzkonfiguration und das räumliche Linienelement  $d\mathbf{x}$  in der Momentankonfiguration sind definiert zu

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Theta^i} d\Theta^i = \mathbf{G}_i d\Theta^i \quad \text{bzw.} \quad d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^i} d\Theta^i = \mathbf{g}_i d\Theta^i . \quad (2.16)$$

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  beschreibt die Veränderung eines materiellen Linienelementes  $d\mathbf{X}$  in ein räumliches Linienelement  $d\mathbf{x}$ .

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \text{GRAD}\mathbf{x} d\mathbf{X} := \mathbf{F} d\mathbf{X} & d\mathbf{X} &= \text{grad}\mathbf{X} d\mathbf{x} := \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \\ \text{mit } \text{GRAD}\mathbf{x} &= \mathbf{x}_{,i} \otimes \mathbf{G}^i & \text{mit } \text{grad}\mathbf{X} &= \mathbf{X}_{,i} \otimes \mathbf{g}^i \end{aligned} \quad (2.17)$$

Er ist ein Zweipunktensor, der den Übergang der einen in die andere Konfiguration definiert. Mit ihm können die sogenannten PULL-BACK- und PUSH-FORWARD-Operatoren,  $\Phi_{\diamond}^*(\cdot)$  und  $\Phi_{\star}^{\diamond}(\cdot)$ , definiert werden, die im Anhang A.1 näher erläutert sind.

Mit Hilfe des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}$  in (2.15) lässt sich der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  durch eine materielle bzw. räumliche Beschreibung darstellen.

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \text{GRAD}\mathbf{u} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{g} - \text{gradu} \quad (2.18)$$

Wird der Deformationsgradienten durch das körperfeste, konvektive Koordinatensystem definiert, so ergibt sich für die verschiedenen Basen in (2.3)

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i & \mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i \\ \mathbf{F}^{-T} &= \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i & \mathbf{F}^T &= \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Er stellt eine Abbildung der Basen der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration dar.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \mathbf{F} \mathbf{G}_i & \mathbf{G}_i &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{g}_i \\ \mathbf{g}^i &= \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G}^i & \mathbf{G}^i &= \mathbf{F}^T \mathbf{g}^i \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad (2.20)$$

Da es sich hier um eine Beschreibung fester Körper handelt, kann sich ein Körper bei einer Deformation nicht selbst durchdringen. Daraus folgt für die Determinante des Deformationsgradienten, die auch als JAKOBI-Determinante  $J$  bezeichnet wird, dass sie größer null sein muss.

$$J := \det \mathbf{F} = \det(F^i_j) = \sqrt{\frac{g}{G}} > 0 \quad \text{bzw.} \quad J^{-1} := \det \mathbf{F}^{-1} = \sqrt{\frac{G}{g}} \quad (2.21)$$

Die Flächenvektoren  $d\mathcal{S}_0$  bzw.  $d\mathcal{S}$  mit den Längen  $dS_0$  bzw.  $dS$  sind mit Hilfe der orthonormalen Vektoren  $\mathbf{N}$  bzw.  $\mathbf{n}$  der Fläche definiert, die sich aus den normierten kontravarianten Basen berechnen und für die gilt

$$\mathbf{n} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{N} = \mathbf{F}^T \mathbf{n}. \quad (2.22)$$

Hier werden beispielhaft die Flächenvektoren der  $\Theta^1, \Theta^2$ -Ebene aufgeführt, die mit Gleichung (2.17) bestimmt werden.

$$\begin{aligned} d\mathcal{S}_0 &= dS_0 \mathbf{N} = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2 & d\mathcal{S} &= dS \mathbf{n} = d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2 \\ &= \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2 d\Theta^1 d\Theta^2 & &= \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 d\Theta^1 d\Theta^2 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad (2.23)$$

$$d\mathcal{S} = J \mathbf{F}^{-T} d\mathcal{S}_0 \quad \text{bzw.} \quad d\mathcal{S}_0 = J^{-1} \mathbf{F}^T d\mathcal{S} \quad (2.24)$$

Gleichung (2.24) wird auch als NANSON-Gleichung bezeichnet. Mit den Normalenvektoren der Fläche in (2.22) ist die Beziehung zwischen den Längen der Flächenvektoren  $dS_0$  bzw.  $dS$  definiert.

$$dS = J dS_0 \quad \text{bzw.} \quad dS_0 = J^{-1} dS \quad (2.25)$$

Die Volumenelemente  $d\mathcal{V}_0$  und  $d\mathcal{V}$  berechnen sich aus dem Spatprodukt der Linienelemente der jeweiligen Konfiguration.

$$\begin{aligned} d\mathcal{V}_0 &= (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3 & d\mathcal{V} &= (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3 \\ &= \sqrt{G} d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 & &= \sqrt{g} d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad (2.26)$$

$$d\mathcal{V} = J d\mathcal{V}_0 \quad \text{bzw.} \quad d\mathcal{V}_0 = J^{-1} d\mathcal{V} \quad (2.27)$$

Aus Gleichung (2.27), die auch EULER-Gleichung genannt wird, lässt sich ablesen, dass die JAKOBI-Determinante die Volumenänderung eines Körpers beschreibt. Da ein differentielles Volumenelement niemals eine negative Größe annehmen kann, wird auch hier ersichtlich, dass die JAKOBI-Determinante  $J$  immer größer null sein muss.

Bei einer Objektivitätsanalyse nach Abschnitt 2.1.3 der hier eingeführten Größen ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\overline{d\mathbf{X}} = d\mathbf{X} \qquad \overline{d\mathbf{x}} = \mathbf{Q} d\mathbf{x} \qquad (2.28)$$

$$\overline{d\mathcal{S}_0} = d\mathcal{S}_0 \qquad \overline{d\mathcal{S}} = \mathbf{Q} d\mathcal{S} \mathbf{Q}^T \qquad (2.29)$$

$$\overline{d\mathcal{V}_0} = d\mathcal{V}_0 \qquad \overline{d\mathcal{V}} = d\mathcal{V} \qquad (2.30)$$

$$\overline{J} = J \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{J} = J \qquad (2.31)$$

$$\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{Q} \mathbf{F} \ , \ \overline{\mathbf{F}^{-1}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Q}^T \qquad (2.32)$$

$$\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \qquad \overline{\mathbf{g}} = \mathbf{Q} \mathbf{g} \mathbf{Q}^T \qquad (2.33)$$

Der Deformationsgradienten folgt dem Objektivitätskriterium für Zweipunktensoren in Gleichung (2.13) und ist, wie alle weiteren untersuchten Größen, objektiv.

### 2.2.2 Verzerrungsmaße

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  kann nicht als eindeutiges Verzerrungsmaß verwendet werden, da er neben der Streckung und Scherung des Linienelementes  $d\mathbf{X}$  noch eine Starrkörperrotation beinhaltet. Deshalb wird er durch eine Polarzerlegung in einen Rotationstensor  $\mathbf{R}$ , der einen orthogonalen Tensor darstellt, und einen rechten Strecktensor  $\mathbf{U}$  bzw. einen linken Strecktensor  $\mathbf{v}$  aufgeteilt.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad \text{mit} \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F} = \mathbf{v}\mathbf{R} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \\ \text{und} \quad \mathbf{R} = -\mathbf{R}^T = -\mathbf{R}^{-1} \end{aligned} \qquad (2.34)$$

Der rechte und der linke Strecktensor sind durch Transformationsbeziehungen mit Hilfe des Rotationstensors  $\mathbf{R}$  gekoppelt.

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{v} \mathbf{R} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T \qquad (2.35)$$

Nun kann der rechte CAUCHY-GREEN-Tensor  $\mathbf{C}$  und der linke CAUCHY-GREEN-Tensor  $\mathbf{b}^{-1}$ , der keine Starrkörperrotation enthält, definiert werden zu

$$\begin{aligned} \mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} \qquad \mathbf{b}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{v}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{v}^{-1} \\ = \mathbf{U}^2 \qquad \text{bzw.} \qquad = \mathbf{v}^{-2} \end{aligned} \qquad (2.36)$$

$$\mathbf{C} = g_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \qquad \mathbf{b}^{-1} = G_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$$

mit ihren Inversen

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U}^{-1} \qquad \mathbf{b} := \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{v} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{v} \\ = \mathbf{U}^{-2} \qquad \text{bzw.} \qquad = \mathbf{v}^2 \end{aligned} \qquad (2.37)$$

$$\mathbf{C}^{-1} = g^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \qquad \mathbf{b} = G^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j .$$

Aus der Definition von  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{b}^{-1}$  wird deutlich, dass es symmetrische Tensoren sind. In Abhängigkeit von dem Verschiebungsvektor in Gleichung (2.15) und dem



Deformationsgradienten in Gleichung (2.18) lassen sich die CAUCHY-GREEN-Tensoren wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{G} + \text{GRAD}\mathbf{u} + \text{GRAD}^T\mathbf{u} & \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{b}^{-1} = \mathbf{g} - \text{gradu} - \text{grad}^T\mathbf{u} \\ + \text{GRAD}^T\mathbf{u}\text{GRAD}\mathbf{u} & \quad \quad \quad + \text{grad}^T\mathbf{u}\text{gradu} . \end{aligned} \quad (2.38)$$

Mit Hilfe des rechten und linken Strecktensors kann nun die allgemeine Definition von Verzerrungstensoren nach HILL aufgestellt werden [63].

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m = \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{G}) & \quad \text{für } m \neq 0 & \quad \mathbf{e}_m = -\frac{1}{m}(\mathbf{v}^{-m} - \mathbf{g}) \\ \mathbf{E}_m = \ln \mathbf{U} & \quad \text{für } m = 0 & \quad \mathbf{e}_m = \ln \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Aus dem Grenzfall  $m = 0$  resultieren der materielle und räumliche HENCKY-Verzerrungstensor und mit  $m = 1$  ergibt sich der materielle und räumliche BIOT-Verzerrungstensor. Für  $m = 2$  berechnen sich der GREEN-LAGRANGE-Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  und der EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor  $\mathbf{e}$  zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{G}) & \quad \quad \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{v}^{-2}) \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) & \quad \quad \quad \text{bzw.} \quad = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{b}^{-1}) \\ = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij})\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j & \quad \quad \quad = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij})\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (2.40)$$

und mit  $m = -2$  ergeben sich der PIOLA-Tensor  $\mathbf{A}$  und der FINGER-Tensor  $\mathbf{a}$  zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{-2} - \mathbf{G}) & \quad \quad \quad \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{v}^{-2}) \\ = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{G}) & \quad \quad \quad \text{bzw.} \quad = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{b}) \\ = \frac{1}{2}(g^{ij} - G^{ij})\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j & \quad \quad \quad = \frac{1}{2}(g^{ij} - G^{ij})\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Durch die gleichen Komponenten und die verschiedenen Basen der Verzerrungstensoren in Gleichung (2.40) und (2.41) wird deutlich, dass die Tensoren durch eine PULL-BACK- bzw. PUSH-FORWARD-Operation aus Anhang A.1 gekoppelt sind.

$$\mathbf{E} = \Phi_b^*(\mathbf{e}) = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e} = \Phi_*^b(\mathbf{E}) = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{A} = \Phi_{\sharp}^*(\mathbf{a}) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{F}^{-T} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a} = \Phi_{\sharp}^{\#}(\mathbf{A}) = \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}^T \quad (2.43)$$

Die weiteren Beziehungen folgen mit Gleichung (2.19) aus einem Komponenten- und Basenvergleich.

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{a} \mathbf{F} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e} = \mathbf{F} \mathbf{A} \mathbf{F}^T \quad (2.44)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{e} \mathbf{F}^{-T} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.45)$$

Der GREEN-LAGRANGE- und EULER-ALMANZI-Verzerrungstensor sind gleich zu den Verzerrungstensoren, die sich aus  $\Delta ds^2$ , der halben Differenz der Quadrate der Linienelemente vor und nach der Deformation, definieren lassen, dem sogenannten ingenieurmäßigen Verzerrungsmaß.

$$\Delta ds^2 = \frac{1}{2}(ds^2 - dS^2) = \frac{1}{2}(dx dx - d\mathbf{X} d\mathbf{X}) \quad (2.46)$$

$$\mathbf{E} = d\mathbf{X}^{-1} \Delta ds^2 d\mathbf{X}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e} = dx^{-1} \Delta ds^2 dx^{-1} \quad (2.47)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.38) lassen sich der GREEN-LAGRANGE- und EULER-ALMANZI-Tensor in Abhängigkeit des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}$  schreiben.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \text{GRAD} \mathbf{u} + \text{GRAD}^T \mathbf{u} + \text{GRAD}^T \mathbf{u} \text{GRAD} \mathbf{u} \right) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2} \left( \text{grad} \mathbf{u} + \text{grad}^T \mathbf{u} - \text{grad}^T \mathbf{u} \text{grad} \mathbf{u} \right) \quad (2.48)$$

Die Überprüfung der Objektivität ergibt ein positives Resultat, der in diesem Abschnitt definierten Größen. Auch die verwendeten Transformationen in Gleichung (2.35) und die Operationen in (2.42) und (2.43) sind objektiv. Der Rotationstensor  $\mathbf{R}$  ist ein Zweipunktstensor und folgt dem Objektivitätskriterium in (2.13).

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \quad \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{Q} \mathbf{v} \mathbf{Q}^T \quad (2.49)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{Q} \mathbf{R} \quad (2.50)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{Q} \mathbf{b} \mathbf{Q}^T \quad (2.51)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \quad \bar{\mathbf{e}} = \mathbf{Q} \mathbf{e} \mathbf{Q}^T \quad (2.52)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \quad \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{Q} \mathbf{a} \mathbf{Q}^T \quad (2.53)$$

### 2.2.3 Kinetik

Zur Berechnung zeitabhängiger Größen wird in der LAGRANGE'sche Betrachtungsweise die materielle Zeitableitung verwendet, für die der Punkt  $\mathbf{X}$  festgehalten wird und nach der Zeit  $t$  abgeleitet wird. Die materielle Zeitableitung wird durch das totale Differential gebildet.

$$\frac{D(\cdot)}{dt} \equiv (\dot{\cdot}) \quad (2.54)$$

Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  eines Punktes im Raum ist definiert als materielle Zeitableitung eines räumlichen Punktes zu

$$\mathbf{v} := \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{u}}, \quad (2.55)$$

wodurch sich die materielle Zeitableitung des Deformationsgradienten zu

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{D}{dt}(\text{GRAD}\mathbf{x}) = \text{GRAD}\mathbf{v} = \text{grad}\mathbf{v} \mathbf{F} \quad (2.56)$$

ergibt. Durch diese Gleichung ist der räumliche Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{l}$  definiert.

$$\mathbf{l} := \text{grad}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F} \dot{\mathbf{F}}^{-1} \quad , \quad -\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{l}^{-1} \quad (2.57)$$

Die materielle Zeitableitung der JAKOBI-Determinante und ihrer Inversen ergibt sich mit den zuvor aufgestellten Beziehungen zu

$$\dot{J} = \frac{D}{dt}(\det \mathbf{F}) = \det \dot{\mathbf{F}} = \det(\mathbf{l} \mathbf{F}) = J \text{tr} \mathbf{l} \quad (2.58)$$

$$J^{-1} = \frac{D}{dt} \left( \frac{1}{\det \mathbf{F}} \right) = \frac{-\det \dot{\mathbf{F}}}{(\det \mathbf{F})^2} = -J^{-1} \text{tr} \mathbf{l} \quad (2.59)$$

und die materielle Zeitableitung des differentiellen Volumenelementes der Momentankonfiguration kann berechnet werden.

$$d\dot{\mathcal{V}} = \dot{J} d\mathcal{V}_0 = \text{tr} \mathbf{l} d\mathcal{V} \quad (2.60)$$

Zur Berechnung der Verzerrungsraten ist es sinnvoll den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{l}$  in einen symmetrischen und einen antimetrischen Tensor aufzuteilen.

$$\begin{aligned} \mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad \text{mit} \quad \mathbf{d} = \text{sym} \mathbf{l} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \quad , \quad \mathbf{d}^T = \mathbf{d} \\ \mathbf{w} = \text{skew} \mathbf{l} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) \quad , \quad \mathbf{w}^T = -\mathbf{w} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Hierbei wird der symmetrische Anteil  $\mathbf{d}$  als tensorielle Verzerrungsgeschwindigkeit und der antimetrische Anteil  $\mathbf{w}$  als Spintensor bezeichnet.

Für den Nachweis der Objektivität der in diesem Abschnitt hergeleiteten Größen wird die Zeitableitung der Identität  $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{g}$  in Gleichung (2.11), die sich zu

$$\dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q} = -\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q} \dot{\mathbf{Q}}^T = -\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \quad (2.62)$$

ergibt, verwendet. Aus einer Objektivitätsanalyse folgt, dass nur die tensorielle Verzerrungsgeschwindigkeit  $\mathbf{d}$  objektiv ist.

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{Q} \mathbf{v} + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{x} + \dot{\mathbf{c}} \quad (2.63)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{F}}} = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{F} \quad (2.64)$$

$$\dot{\bar{J}} = J \text{tr} \mathbf{l} + J \det \dot{\mathbf{Q}} \quad (2.65)$$

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{Q} \mathbf{l} \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \quad (2.66)$$

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{Q} \mathbf{d} \mathbf{Q}^T \quad (2.67)$$

$$\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{Q} \mathbf{w} \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \quad (2.68)$$

### 2.2.4 Objektive Zeitableitungen

Um einen geschichtsabhängigen Deformationsprozess zu beschreiben, der zum Beispiel bei einem inelastischen Materialmodell vorhanden ist, müssen nicht nur die verwendeten Größen, sondern auch deren Zeitableitungen objektiv sein. Die materielle Zeitableitung in Gleichung (2.54) ist für objektive Größen der Referenzkonfiguration objektiv. Für objektive Vektoren und Tensoren in der Momentankonfiguration ist sie jedoch nicht objektiv, wie aus den folgenden Gleichungen deutlich wird.

$$\begin{array}{lll}
 \text{Skalar} & \dot{\bar{\Phi}} = \dot{\Phi} & \dot{\bar{\phi}} = \dot{\phi} \\
 \text{Vektor} & \dot{\bar{\mathbf{A}}} = \dot{\mathbf{A}} & \text{bzw. } \dot{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{a}} + (\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T) \mathbf{Q} \mathbf{a} \\
 \text{Tensor} & \dot{\bar{\mathbf{B}}} = \dot{\mathbf{B}} & \dot{\bar{\mathbf{b}}} = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{b}} \mathbf{Q}^T + (\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T) \mathbf{Q} \mathbf{b} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \mathbf{b} \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T)^T
 \end{array} \tag{2.69}$$

Aus der Objektivitätsanalyse des Spintensors  $\mathbf{w}$  in (2.68) folgt die Beziehung

$$\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T = \bar{\mathbf{w}} - \mathbf{Q} \mathbf{w} \mathbf{Q}^T \tag{2.70}$$

mit der sich mit Hilfe der materiellen Zeitableitung einer objektiven, aktuellen Größe in (2.69) die objektive Zeitableitung von ZAREMBA-JAUMANN herleiten lässt.

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\mathbf{a}}_J &= \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{w}^T \mathbf{a} \\
 \overset{\circ}{\mathbf{b}}_J &= \dot{\mathbf{b}} + \mathbf{w}^T \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{w}.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Bei einem inelastischen, ebenen Scherproblem treten bei einigen mit diesen Ableitungen berechneten Größen Oszillationen in den Ergebnissen auf, die physikalisch nicht sinnvoll erscheinen. Deshalb ist die Zeitableitung von ZAREMBA-JAUMANN nicht geeignet zur Beschreibung geschichtsabhängiger Prozesse. Des Weiteren lässt sich daraus schließen, dass die geforderte Objektivität für Zeitableitungen nicht das einzige Kriterium sein kann, um physikalisch korrekte Zeitableitungen zu bestimmen.

Durch Umformung der Gleichung (2.68) mit Hilfe des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{l}$  in (2.61) ergibt sich

$$\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T = -\bar{\mathbf{l}}^T + \mathbf{Q} \mathbf{l}^T \mathbf{Q}^T \tag{2.72}$$

und mit (2.69) lässt sich die objektive, kovariante OLDROYD-Zeitableitung herleiten.

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\mathbf{a}}_O &= \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{l}^T \mathbf{a} \\
 \overset{\circ}{\mathbf{b}}_O &= \dot{\mathbf{b}} + \mathbf{l}^T \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{l}.
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Aus der Objektivitätsanalyse des Geschwindigkeitsgradienten in (2.66) ergibt sich

$$\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T = \bar{\mathbf{l}} - \mathbf{Q} \mathbf{l} \mathbf{Q}^T \tag{2.74}$$

und die kontravariante OLDROYD-Zeit ableitung lässt sich bestimmen.

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\mathbf{a}}^O &= \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{l} \mathbf{a} \\ \overset{\circ}{\mathbf{b}}^O &= \dot{\mathbf{b}} - \mathbf{l} \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{l}^T.\end{aligned}\tag{2.75}$$

Wird bei der Berechnung der objektiven, kovarianten OLDROYD-Zeit ableitung die Identität aus Gleichung (2.62) verwendet, folgt die erste gemischte OLDROYD-Zeit ableitung für Tensoren 2. Stufe zu

$$\overset{\circ}{\mathbf{b}}_{O/} = \dot{\mathbf{b}} + \mathbf{l}^T \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{l}^T.\tag{2.76}$$

Unter Anwendung der gleichen Identität mit Gleichung (2.74) berechnet sich die zweite gemischte OLDROYD-Zeit ableitung für Tensoren 2. Stufe.

$$\overset{\circ}{\mathbf{b}}^{O\setminus} = \dot{\mathbf{b}} - \mathbf{l} \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{l}.\tag{2.77}$$

Die zuvor aufgeführten Zeit ableitungen sind Ableitungen einer Größe in der Momentankonfiguration. Nach Transformation der aktuellen Größe mit Hilfe der Operationen im Anhang A.1 in die Referenzkonfiguration, ist die materielle Zeit ableitung dieses Ausdruckes objektiv. Das Ergebnis kann wieder in die Momentankonfiguration transformiert werden [58]. Aus dieser Überlegung ergibt sich die objektive Zeit ableitung von LIE, die allerdings von der Komponentendarstellung der Größen abhängig ist.

$$\begin{aligned}\text{Vektor} \quad \mathcal{L}_v^\diamond \mathbf{a} &= \Phi_\star^\diamond \frac{D}{dt} (\Phi_\diamond^\star \mathbf{a}) \quad \text{mit} \quad \diamond \in \{b, \#, \setminus, /\} \\ \mathcal{L}_v^b \mathbf{a} &= \mathcal{L}_v(a_i \mathbf{g}^i) = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{l}^T \mathbf{a} \\ \mathcal{L}_v^\# \mathbf{a} &= \mathcal{L}_v(a^i \mathbf{g}_i) = \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{l} \mathbf{a} \\ \text{Tensor} \quad \mathcal{L}_v^\diamond \mathbf{b} &= \Phi_\star^\diamond \frac{D}{dt} (\Phi_\diamond^\star \mathbf{b}) \quad \text{mit} \quad \diamond \in \{b, \#, \setminus, /\} \\ \mathcal{L}_v^b \mathbf{b} &= \mathcal{L}_v(b_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) = \dot{\mathbf{b}} + \mathbf{l}^T \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{l} \\ \mathcal{L}_v^\# \mathbf{b} &= \mathcal{L}_v(b^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) = \dot{\mathbf{b}} - \mathbf{l} \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{l}^T \\ \mathcal{L}_v^{\setminus} \mathbf{b} &= \mathcal{L}_v(b^i_{.j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j) = \dot{\mathbf{b}} - \mathbf{l} \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{l} \\ \mathcal{L}_v^{/} \mathbf{b} &= \mathcal{L}_v(b_i^{.j} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j) = \dot{\mathbf{b}} + \mathbf{l}^T \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{l}^T\end{aligned}\tag{2.78}$$

Diese Zeit ableitung hat den Nachteil, dass sie nicht dem Konzept der Tensoranalyse folgt, indem ein Tensor in jeder beliebigen Komponentendarstellung verwendet werden kann und die Operationen auf ihn immer gleich aussehen. Sie stimmt jedoch für die entsprechende Komponentendarstellung mit einer der vier zuvor definierten OLDROYD-Zeit ableitungen überein, wodurch sie rückwirkend dem Konzept der Tensoranalyse folgt.

Durch den Anteil der Starrkörperrotationen im Deformationsgradienten wird die materielle Zeit ableitung einer objektiven Größe in der Momentankonfiguration nicht

objektiv. Wird eine aktuelle Größe mit Hilfe des Rotationstensor  $\mathbf{R}$  aus der Polarzerlegung des Deformationsgradienten zurückrotiert und in dieser Konfiguration die materielle Zeitableitung gebildet, so ergibt sich durch eine Objektivitätsanalyse die mitrotierende Zeitableitung von GREEN und NAGHDI.

Bei der Verwendung der mitrotierenden, logarithmischen Zeitableitung, oder auch natürliche genannt, sollte für ein inelastisches Materialverhalten der räumlichen HENCKY-Verzerrungstensor angewendet werden [16]. Die logarithmische Zeitableitung hat den weiteren Vorteil, dass sie selbstkonsistent ist, das heißt, dass bei einem elastoplastischen Materialverhalten die Ratenformulierung des elastischen Anteils exakt integrierbar ist [23].

Abschließend ist für die aufgeführten objektiven Zeitableitungen anzumerken: Ist ein Transformationszusammenhang zwischen der Zeitableitung einer materiellen und einer aktuellen Größe nach den PULL-BACK- bzw. PUSH-FORWARD-Operationen gegeben, so berechnet die objektive Zeitableitung physikalisch korrekte Ergebnisse.

### 2.2.5 Verzerrungsraten

Die materiellen Zeitableitungen der Verzerrungstensoren in Gleichung (2.40) und (2.41) werden mit Hilfe der Gleichungen (2.36), (2.37), (2.42) und (2.43) gebildet.

$$\dot{\mathbf{E}} = \Phi_b^*(\mathbf{d}) = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d} - \mathbf{l}^T \mathbf{e} - \mathbf{e} \mathbf{l} \quad (2.79)$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \Phi_{\sharp}^*(\mathbf{d}^{-1}) = -\mathbf{F}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{F}^{-T} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\mathbf{a}} = -\mathbf{d} + \mathbf{l} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{l}^T \quad (2.80)$$

Zwischen der GREEN-LAGRANGE-Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{E}}$  sowie der PIOLA-Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{A}}$  und dem symmetrischen Anteil  $\mathbf{d}$  des Geschwindigkeitsgradienten besteht ein Transformationszusammenhang nach der ko- bzw. kontravarianten PULL-BACK-Operation aus Anhang A.1.

Zur Ermittlung der LIE-Zeitableitung werden die physikalisch nahen Komponentendarstellungen der aktuellen Verzerrungstensoren in Gleichung (2.40) und (2.41) verwendet.

Mit den im vorherigen Abschnitt definierten objektiven Zeitableitungen ergibt sich für den EULER-ALMANSI-Verzerrungstensor

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{e}}_J &= \mathbf{d} - \mathbf{d} \mathbf{e} - \mathbf{e} \mathbf{d} & \overset{\circ}{\mathbf{e}}_{O/} &= \mathbf{d} - 2 \mathbf{e} \mathbf{d} \\ \overset{\circ}{\mathbf{e}}_O &= \mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} = \Phi_{\star}^b(\dot{\mathbf{E}}) & \overset{\circ}{\mathbf{e}}^{O\setminus} &= \mathbf{d} - 2 \mathbf{d} \mathbf{e} \\ \overset{\circ}{\mathbf{e}}^O &= \mathbf{d} - 2 \mathbf{d} \mathbf{e} - 2 \mathbf{e} \mathbf{d} & \mathcal{L}_v \mathbf{e} &= \mathbf{d} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} = \Phi_{\star}^b(\dot{\mathbf{E}}) . \end{aligned} \quad (2.81)$$

Es wird deutlich, dass nur für die kovariante OLDROYD- und die LIE-Zeitableitung ein Transformationszusammenhang analog zur kovarianten PUSH-FORWARD-Operation in Gleichung (2.42) besteht. Die objektiven Zeitableitungen des FINGER-Verzer-

rungstensors lauten

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\mathbf{a}}_J &= -\mathbf{d} + \mathbf{d} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{d} & \overset{\circ}{\mathbf{a}}_{O/} &= -\mathbf{d} + 2\mathbf{d} \mathbf{a} \\
\overset{\circ}{\mathbf{a}}_O &= -\mathbf{d} + 2\mathbf{d} \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \mathbf{d} & \overset{\circ}{\mathbf{a}}^{O\setminus} &= -\mathbf{d} + 2\mathbf{a} \mathbf{d} \\
\overset{\circ}{\mathbf{a}}^O &= -\mathbf{d} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{F}^T = \Phi_{\star}^{\sharp}(\dot{\mathbf{A}}) & \mathcal{L}_v \mathbf{a} &= -\mathbf{d} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{F}^T = \Phi_{\star}^{\sharp}(\dot{\mathbf{A}}).
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Die kontravariante OLDROYD- und der LIE-Zeitableitung folgen dem Transformationszusammenhang analog zur kontravarianten PUSH-FORWARD-Operation in Gleichung (2.43). Da die Zeitableitung von LIE auf diesem Zusammenhang aufgebaut ist, und er sich daher für alle Tensorpaare einstellt, wird diese im Folgenden für die Ermittlung der objektiven Verzerrungsraten verwendet.

## 2.3 Dynamische Beziehungen

### 2.3.1 Belastungen

Äußere Belastungen auf ein Kontinuum können zum Beispiel mechanischer, thermischer, elektromagnetischer oder aber auch chemischer Art sein. Hier werden mechanische Belastungen betrachtet, die aus einem Gravitations-, Trägheits- oder magnetischen Kraftfeld entstehen können. Wirken diese Felder auf das Kontinuum, so ergeben sich Volumenlasten. Oberflächenlasten greifen an einem Kontinuum an, wenn das Kraftfeld auf einen Körper wirkt, der über seine Oberfläche diese Belastung an das Kontinuum weiterleitet. Reibung zwischen zwei Körpern wird hier nicht berücksichtigt und Momente werden als lineare Oberflächenkräfte auf das Kontinuum aufgebracht.

Der Vektor  $\mathbf{f}^R$  der Gesamtbelastungen ist in der aktuellen Konfiguration definiert und setzt sich aus dem Vektor der Oberflächenkräfte  $\mathbf{f}^S$  und dem der Volumenkräfte  $\mathbf{f}^V$  zusammen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^R &= \mathbf{f}^S + \mathbf{f}^V \\
\mathbf{f}^S &= \int_{S_0} \mathbf{T} \, dS_0 & \mathbf{f}^S &= \int_S \mathbf{t} \, dS \\
\mathbf{f}^V &= \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{K} \, dV_0 & \mathbf{f}^V &= \int_V \rho \mathbf{K} \, dV
\end{aligned} \tag{2.83}$$

bzw.

Hierbei sind  $\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{N}, t)$  bzw.  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$  definierte Oberflächenkräfte, die sich auf die Oberflächen  $S_0$  bzw.  $S$  beziehen, für die mit Gleichung (2.25) gilt

$$\mathbf{T} = J \mathbf{t} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{t} = J^{-1} \mathbf{T}. \tag{2.84}$$

$\mathbf{K}$  steht für die Kraft pro Masse bzw. die Beschleunigung des wirkenden Feldes, die mit Gleichung (2.27) und (2.105) nicht von der Konfiguration und dem Punkt im

Raum abhängt, sondern nur von dem wirkenden Kraftfeld. Bei einem Gravitationsfeld entspricht  $\mathbf{K}$  also dem Vektor der Erdbeschleunigung.

Die Oberfläche  $\mathcal{S}_0$  bzw.  $\mathcal{S}$  ist in zwei Teilbereiche aufgeteilt. Auf dem Bereich  $\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}}$  bzw.  $\mathcal{S}^{\mathbf{t}}$  sind dynamische oder natürliche Randbedingungen durch  $\mathbf{T}^*$  bzw.  $\mathbf{t}^*$  gegeben und auf dem Bereich  $\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}}$  bzw.  $\mathcal{S}^{\mathbf{u}}$  sind kinematische Randbedingungen durch  $\mathbf{u}^*$  gegeben.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}^* - \mathbf{T} = \mathbf{0} & \text{auf } \mathcal{S}_0^{\mathbf{T}} & \mathbf{t}^* - \mathbf{t} = \mathbf{0} & \text{auf } \mathcal{S}^{\mathbf{t}} \\ \mathbf{u}^* - \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{auf } \mathcal{S}_0^{\mathbf{u}} & \mathbf{u}^* - \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{auf } \mathcal{S}^{\mathbf{u}} \end{array} \quad \text{bzw.} \quad (2.85)$$

Dabei gilt für die Aufteilung der Oberfläche  $\mathcal{S}_0$  bzw.  $\mathcal{S}$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_0^{\mathbf{T}} \cup \mathcal{S}_0^{\mathbf{u}} = \mathcal{S}_0 & & \mathcal{S}^{\mathbf{t}} \cup \mathcal{S}^{\mathbf{u}} = \mathcal{S} \\ \wedge \mathcal{S}_0^{\mathbf{T}} \cap \mathcal{S}_0^{\mathbf{u}} = \emptyset & \text{bzw.} & \wedge \mathcal{S}^{\mathbf{t}} \cap \mathcal{S}^{\mathbf{u}} = \emptyset. \end{array} \quad (2.86)$$

### 2.3.2 Spannungen

Die in Gleichung (2.83) eingeführten Oberflächenkräfte  $\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{N}, t)$  bzw.  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)$  können auch als Spannungsvektoren interpretiert werden. Mit Hilfe des CAUCHY-Theorems

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{N} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \quad (2.87)$$

und Gleichung (2.22) und (2.84) lässt sich ein Zusammenhang zwischen dem 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{P}$  und dem real wirkenden CAUCHY-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  aufstellen.

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (2.88)$$

Der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{P}$  ist ein Zweipunktensor und somit keiner Konfiguration zugehörig. Wird der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  auf ihn angewendet, lässt sich der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{S}$ , der die Spannungen in der Referenzkonfiguration darstellt, bestimmen. Mit den definierten PULL-BACK- bzw. PUSH-FORWARD-Operationen für Zweipunktensoren in Anhang A.1 kann eine Beziehung zwischen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{S}$  definiert werden.

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (2.89)$$

$$\mathbf{S} = \Phi_{\sharp}^*(\mathbf{P}) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P} = \Phi_{\star}^{\sharp}(\mathbf{S}) = \mathbf{F}\mathbf{S} \quad (2.90)$$

Durch die Definition des KIRCHHOFF-Spannungstensors  $\boldsymbol{\tau}$  in der Momentankonfiguration als gewichteter CAUCHY-Spannungstensor ist eine PULL-BACK- bzw. PUSH-FORWARD-Operation zwischen  $\boldsymbol{\tau}$  und  $\mathbf{S}$  gegeben.

$$\boldsymbol{\tau} := J\boldsymbol{\sigma} \quad (2.91)$$

$$\mathbf{S} = \Phi_{\sharp}^*(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\tau} = \Phi_{\star}^{\sharp}(\mathbf{S}) = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \quad (2.92)$$



Der Spannungstensor  $\Sigma$  ist als invers gewichteter 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  definiert, wodurch sich eine PULL-BACK- bzw. PUSH-FORWARD-Operation zwischen  $\sigma$  und  $\Sigma$  ergibt.

$$\Sigma := J^{-1}\mathbf{S} \quad (2.93)$$

$$\Sigma = \Phi_{\sharp}^*(\sigma) = \mathbf{F}^{-1}\sigma\mathbf{F}^{-T} \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \Phi_{\star}^{\sharp}(\Sigma) = \mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}^T \quad (2.94)$$

Die folgende Tabelle stellt den Zusammenhang zwischen den einzelnen Spannungstensoren dar, wobei die gerahmten Beziehungen PULL-BACK- bzw. PUSH-FORWARD-Operationen darstellen.

	Referenzkonfiguration			Momentankonfiguration	
	$\Sigma$	$\mathbf{S}$	$\mathbf{P}$	$\tau$	$\sigma$
$\Sigma$	$\Sigma$	$= J^{-1}\mathbf{S}$	$= J^{-1}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}$	$= J^{-1}\mathbf{F}^{-1}\tau\mathbf{F}^{-T}$	$= \boxed{\mathbf{F}^{-1}\sigma\mathbf{F}^{-T}}$
$\mathbf{S}$	$J\Sigma$	$= \mathbf{S}$	$= \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}$	$= \boxed{\mathbf{F}^{-1}\tau\mathbf{F}^{-T}}$	$= J\mathbf{F}^{-1}\sigma\mathbf{F}^{-T}$
$\mathbf{P}$	$J\mathbf{F}\Sigma$	$= \mathbf{F}\mathbf{S}$	$= \mathbf{P}$	$= \tau\mathbf{F}^{-T}$	$= J\sigma\mathbf{F}^{-T}$
$\tau$	$J\mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}^T$	$= \boxed{\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T}$	$= \mathbf{P}\mathbf{F}^T$	$= \tau$	$= J\sigma$
$\sigma$	$\boxed{\mathbf{F}\Sigma\mathbf{F}^T}$	$= J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T$	$= J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T$	$= J^{-1}\tau$	$= \sigma$

**Tab. 2.1:** Transformationsbeziehungen der Spannungstensoren

Die Wahl des Spannungstensors zur Beschreibung eines Problems hängt von der Wahl des Dehnungstensors ab, da beide Größen energetisch konjugiert sein müssen.

Um die Objektivität der verschiedenen Spannungstensoren zu überprüfen, wird vorausgesetzt, dass der CAUCHY-Spannungstensor  $\sigma$ , der in der Momentankonfiguration definiert ist, objektiv ist. Der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor ist objektiv, wenn analog zum Deformationsgradienten das Objektivitätskriterium für Zweipunktensoren in (2.13) angewandt wird. Alle übrigen Spannungstensoren sind nach Gleichung (2.12) objektiv.

$$\bar{\sigma} := \mathbf{Q}\sigma\mathbf{Q}^T \quad (2.95)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\tau} = \mathbf{Q}\tau\mathbf{Q}^T \quad (2.96)$$

$$\bar{\Sigma} = \Sigma \quad \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{Q}\mathbf{P} \quad (2.97)$$

### 2.3.3 Spannungsraten

Mit Hilfe der Beziehungen in Gleichung (2.90), (2.92) und (2.94) können die materiellen Zeitableitungen der Spannungstensoren berechnet werden.

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{lP} \quad (2.98)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{S}} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T + \mathbf{l}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{l}^T \quad (2.99)$$

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{F}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{F}^T + \mathbf{l}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}^T \quad (2.100)$$

Zur Ermittlung der LIE-Zeitableitung wird davon ausgegangen, dass der CAUCHY-Spannungstensor in kontravarianten Komponenten gegeben ist. Die Komponentendarstellungen aller übrigen Spannungstensoren lassen sich aus der letzten Spalte in Tabelle 2.1 bestimmen.

Nach Anwendung der objektiven Zeitableitungen für Vektoren in Abschnitt 2.2.4 auf den 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor ergibt sich

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{P}}_J &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{dP} & \overset{\circ}{\mathbf{P}}^O &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}} = \Phi_{\star}^{\sharp}(\dot{\mathbf{S}}) \\ \overset{\circ}{\mathbf{P}}_O &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}} + 2\mathbf{dP} & \mathcal{L}_v\mathbf{P} &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}} = \Phi_{\star}^{\sharp}(\dot{\mathbf{S}}) . \end{aligned} \quad (2.101)$$

Nur bei der kontravarianten OLDROYD- und der LIE-Zeitableitung besteht eine kontravariante PUSH-FORWARD-Operation zwischen der objektiven Zeitableitung des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors und der materiellen Zeitableitung des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors. Diese Beziehung lässt eine physikalische Deutung der objektiven Ableitungen zu.

Für die objektive Zeitableitung des KIRCHHOFF-Spannungstensors ergibt sich eine PUSH-FORWARD-Operation angewendet auf die materielle Zeitableitung des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors, wenn die kontravarianten OLDROYD- oder die LIE-Zeitableitung verwendet wird.

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_J &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T + \mathbf{d}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{d} & \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_{O/J} &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T + 2\mathbf{d}\boldsymbol{\tau} \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}_O &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T + 2\mathbf{d}\boldsymbol{\tau} + 2\boldsymbol{\tau}\mathbf{d} & \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^{O\setminus} &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T + 2\boldsymbol{\tau}\mathbf{d} \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}^O &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T = \Phi_{\star}^{\sharp}(\dot{\mathbf{S}}) & \mathcal{L}_v\boldsymbol{\tau} &= \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T = \Phi_{\star}^{\sharp}(\dot{\mathbf{S}}) \end{aligned} \quad (2.102)$$

Wird die OLDROYD- oder die LIE-Zeitableitung auf den CAUCHY-Spannungstensor angewendet, so ergibt sich eine PUSH-FORWARD-Operation der materiellen Zeitableitung des invers gewichteten 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors.

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_J &= \mathbf{F}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{F}^T + \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{d} & \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_{O/J} &= \mathbf{F}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{F}^T + 2\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}_O &= \mathbf{F}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{F}^T + 2\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} + 2\boldsymbol{\sigma}\mathbf{d} & \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^{O\setminus} &= \mathbf{F}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{F}^T + 2\boldsymbol{\sigma}\mathbf{d} \\ \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}^O &= \mathbf{F}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{F}^T = \Phi_{\star}^{\sharp}(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}) & \mathcal{L}_v\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{F}\dot{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{F}^T = \Phi_{\star}^{\sharp}(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}) \end{aligned} \quad (2.103)$$

Da die LIE-Zeitableitung eine PUSH-FORWARD-Operation zur materiellen Zeitableitung einer Größe in der Referenzkonfiguration immer gewährleistet, dass eine physikalische Deutung der objektiven Ableitung möglich ist, wird diese im Folgenden zur Ermittlung der objektiven Spannungsrate gewählt.

## 2.4 Bilanzgleichungen der Mechanik

Die Bilanzgleichungen der Mechanik beschreiben allgemeine Prinzipien. Sie werden in integraler Form über den gesamten Körper aufgestellt und können, bei einem glatten Verlauf der zu bilanzierenden Größen, als lokale Differentialgleichung in jedem Punkt des Kontinuums aufgestellt werden.

### 2.4.1 Massenbilanz

Die Massenbilanz besagt, dass bei fehlendem Massenaustausch über die Oberfläche und fehlendem Zuwachs oder Verlust von Masse im Inneren eines Körpers die Gesamtmasse  $m$  eines Körpers für alle Zeiten gleich bleibt. Diese Aussage wird auch die globale Massenerhaltung genannt.

$$m = \text{konst.} \quad \text{bzw.} \quad m = \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} \quad (2.104)$$

$$m = \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \, d\mathcal{V}_0$$

Daraus kann ein Zusammenhang der Massendichte  $\rho_0$  des Körpers  $\mathcal{B}_0$  in der Referenzkonfiguration und der Massendichte  $\rho$  des Körpers  $B$  in der aktuellen Konfiguration mit Hilfe von Gleichung (2.27) hergestellt werden.

$$J = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (2.105)$$

Bleibt die Masse nun während der Deformation konstant, so verschwindet ihre materielle Ableitung nach der Zeit. Mit der Gleichung (2.60) ergibt sich der globale Massenerhaltungssatz zu

$$\dot{m} = 0$$

$$\int_{\mathcal{V}_0} \dot{\rho}_0 \, d\mathcal{V}_0 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathcal{V}} (\dot{\rho} + \rho \, \text{tr} \mathbf{l}) \, d\mathcal{V} = 0 \quad (2.106)$$

und der lokale Massenerhaltungssatz zu

$$\dot{\rho}_0 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \dot{\rho} + \rho \, \text{tr} \mathbf{l} = 0. \quad (2.107)$$

### 2.4.2 Impulsbilanz

Die Impulsbilanz sagt aus, dass die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses  $\mathbf{i}_P$  gleich der an dem Körper angreifenden Gesamtbelastungen  $\mathbf{f}^R$  ist. Wird der Gesamtimpuls  $\mathbf{i}_P$  zu

$$\mathbf{i}_P = \int_m \mathbf{v} \, dm \quad (2.108)$$

definiert, so ergibt sich mit der Definition der Gesamtbelastungen in (2.83) und der Massenerhaltung in (2.104) die Impulsbilanz zu

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}(\mathbf{i}_P) &= \mathbf{f}^R = \mathbf{f}^S + \mathbf{f}^V \\ \frac{D}{dt} \left( \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \mathbf{v} \, d\mathcal{V}_0 \right) &\quad \text{bzw.} \quad \frac{D}{dt} \left( \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} \, d\mathcal{V} \right) \\ &= \int_{S_0} \mathbf{T} \, dS_0 + \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \mathbf{K} \, d\mathcal{V}_0 \quad \quad = \int_S \mathbf{t} \, dS + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{K} \, d\mathcal{V}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Nach Anwendung des CAUCHY-Theorems in (2.87) und des GAUSS'schen Integralsatzes

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \mathbf{P} \mathbf{N} \, dS_0 &= \int_{\mathcal{V}_0} \text{DIV} \mathbf{P} \, d\mathcal{V}_0 \quad \text{bzw.} \quad \int_S \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dS = \int_{\mathcal{V}} \text{div} \boldsymbol{\sigma} \, d\mathcal{V} \\ \text{mit } \text{DIV} \mathbf{P} &= \text{GRAD} \mathbf{P} : \mathbf{G} \quad \quad \text{mit } \text{div} \boldsymbol{\sigma} = \text{grad} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2.110)$$

folgt die globale Impulsbilanz

$$\int_{\mathcal{V}_0} (\text{DIV} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{K}) \, d\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{v}} \, d\mathcal{V}_0 \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathcal{V}} (\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{K}) \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho \dot{\mathbf{v}} \, d\mathcal{V} \quad (2.111)$$

und die lokale Impulsbilanz lautet

$$\text{DIV} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{K} = \rho_0 \dot{\mathbf{v}} \quad \text{bzw.} \quad \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{K} = \rho \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.112)$$

Für statische Systeme gilt

$$\text{DIV} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{K} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{K} = 0. \quad (2.113)$$

### 2.4.3 Drehimpulsbilanz

Die Drehimpulsbilanz beschreibt die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses beziehungsweise des Dralls  $\mathbf{l}_P$ , die gleich dem Gesamtmoment  $\mathbf{m}_P^R$  aller am Körper angreifenden Oberflächen- und Volumenlasten  $\mathbf{f}^R$  ist. Wird der Drall  $\mathbf{l}_P$  bezogen auf einen beliebigen Punkt  $P$  mit  $\mathbf{r} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}_P(\mathbf{X}_P)$  zu

$$\mathbf{l}_P = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dm \quad (2.114)$$

definiert, so folgt mit der Massenerhaltung in (2.104) für die Drehimpulsbilanz

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}(\mathbf{l}_P) &= \mathbf{m}_P^R = \mathbf{m}_P^S + \mathbf{m}_P^V \\ \frac{D}{dt} \left( \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{r} \times \rho_0 \mathbf{v} \, d\mathcal{V}_0 \right) &\quad \text{bzw.} \quad \frac{D}{dt} \left( \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \, d\mathcal{V} \right) \\ &= \int_{S_0} \mathbf{r} \times \mathbf{T} \, dS_0 + \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{r} \times \rho_0 \mathbf{K} \, d\mathcal{V}_0 \quad = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{K} \, d\mathcal{V}, \end{aligned} \quad (2.115)$$

wobei das Moment aus Oberflächenkräften  $\mathbf{m}_P^S$  bzw. aus Volumenkräften  $\mathbf{m}_P^V$  aus dem Kreuzprodukt des entsprechenden Lastvektors und des Differenzvektors  $\mathbf{r}$  entstehen.

Mit Hilfe des CAUCHY-Theorems in (2.87) und des Integralsatzes von DE BOER

$$\int_{S_0} \mathbf{r} \times \mathbf{P} \mathbf{N} \, dS_0 = \int_{\mathcal{V}_0} \text{DIV}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) \, d\mathcal{V}_0 \quad \text{bzw.} \quad \int_S \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dS = \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}) \, d\mathcal{V} \quad (2.116)$$

sowie der Identität

$$\text{DIV}(\mathbf{r} \times \mathbf{P}) = \text{GRAD} \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \text{DIV} \mathbf{P} \quad \text{bzw.} \quad \text{div}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}) = \text{grad} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{r} \times \text{div} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.117)$$

ergibt sich unter Verwendung der lokalen Impulsbilanz in (2.112)

$$\int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{F} \times \mathbf{P} \, d\mathcal{V}_0 = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g} \times \boldsymbol{\sigma} \, d\mathcal{V} = \mathbf{0}. \quad (2.118)$$

Mit Gleichung (2.89) folgt für die globale Drehimpulsbilanz

$$\int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{F} \, \text{skew} \mathbf{S} \, \mathbf{F}^T \, d\mathcal{V}_0 = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathcal{V}} \text{skew} \boldsymbol{\sigma} \, d\mathcal{V} = \mathbf{0} \quad (2.119)$$

und für die lokale Drehimpulsbilanz

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T. \quad (2.120)$$

Sie beschreibt die symmetrische Eigenschaft des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors  $\mathbf{S}$  und des CAUCHY-Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$ .

### 2.4.4 Energiebilanz

Diese Arbeit basiert auf dem Ansatz der klassischen Mechanik, in der mechanische und thermodynamische Vorgänge entkoppelt sind. Spezialfälle der klassischen Mechanik sind isotherme Prozesse, bei denen jeder Punkt während der Deformation seine Temperatur beibehält. Hier wird auf die explizite Darstellung des thermodynamischen Rahmen verzichtet, da diese Restriktionen durch die Wahl der Materialmodelle und -parameter erfüllt werden. Es verbleibt die kinetische Energiebilanz, die aus der Multiplikation der lokale Impulsbilanz (2.112) mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  folgt.

$$\rho_0 \mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \operatorname{DIV} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{v} \mathbf{K} \quad \text{bzw.} \quad \rho \mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{v} \mathbf{K} . \quad (2.121)$$

Mit der Identität

$$\operatorname{DIV}(\mathbf{v} \mathbf{P}) = \mathbf{v} \operatorname{DIV} \mathbf{P} + \mathbf{P} : \operatorname{GRAD} \mathbf{v} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{div}(\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{v} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{v} \quad (2.122)$$

und den Gleichungen (2.56) bzw. (2.61) und (2.120) ergibt sich die lokale kinetische Energiebilanz.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v} \mathbf{v}) = & \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2} \rho \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{v} \mathbf{v}) = \\ \operatorname{DIV}(\mathbf{v} \mathbf{P}) + \rho_0 \mathbf{v} \mathbf{K} - \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} & \quad \operatorname{div}(\mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{v} \mathbf{K} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.123)$$

Wird diese Gleichung über  $\mathcal{V}_0$  bzw.  $\mathcal{V}$  integriert und der GAUSS'sche Integralsatz in (2.110) angewendet, so folgt die globale kinetische Energiebilanz in Ratenform.

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{\mathcal{V}_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{v}}^2 \, d\mathcal{V}_0}_{\text{Rate der kinetischen Energie}} = & \underbrace{\int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{v} \mathbf{T} \, d\mathcal{S}_0 + \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \mathbf{v} \mathbf{K} \, d\mathcal{V}_0}_{\text{Rate der äußeren Arbeit aus Oberflächen- und Volumenkräften}} - \underbrace{\int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, d\mathcal{V}_0}_{\text{Rate der Deformationsenergie}} \end{aligned} \quad (2.124)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{v}}^2 \, d\mathcal{V}}_{\text{Rate der kinetischen Energie}} = & \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \mathbf{t} \, d\mathcal{S} + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{v} \mathbf{K} \, d\mathcal{V}}_{\text{Rate der äußeren Arbeit aus Oberflächen- und Volumenkräften}} - \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, d\mathcal{V}}_{\text{Rate der Deformationsenergie}} \end{aligned} \quad (2.125)$$

Aus der lokalen Energiebilanz (2.123) lässt sich die Rate der lokalen, spezifischen Deformationsenergie ableiten, aus der mit den Beziehungen für die kovariante Darstellung der Spannungstensoren

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{F} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F} \quad (2.126)$$

die energetisch konjugierten Größen sichtbar werden.

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \frac{1}{\rho_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \\
&= \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\tau} : \mathcal{L}_v \mathbf{e} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathcal{L}_v \mathbf{e} \\
&= -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\Sigma} : \dot{\mathbf{A}} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\tau} : \mathcal{L}_v \mathbf{a} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathcal{L}_v \mathbf{a}
\end{aligned} \tag{2.127}$$

## 2.5 Potentiale

### 2.5.1 Elastisches Potential

Das elastische Potential  $\Phi$  als Gesamtpotential existiert, wenn ein konservatives System vorliegt, das heißt, ein elastischer Körper unterliegt isothermen, rein mechanischen Prozessen, und die äußeren Belastungen des Körpers sind durch ein Potential  $A$  beschreibbar. Dies ist der Fall, wenn die Oberflächenkräfte  $\mathbf{T}$  bzw.  $\mathbf{t}$  und die Volumenkräfte  $\mathbf{K}$  zeitunabhängig sind. Das Potential der äußeren Volumen- und Oberflächenkräfte  $A$  ergibt sich dann mit Hilfe der Definition der Geschwindigkeit in (2.55) durch Integration der entsprechenden Ratenanteile in Gleichung (2.125) über die Zeit  $t_0 = 0$  bis  $t$ . Das Potential der Oberflächenkräfte kann unter Berücksichtigung der definierten Randbedingungen in (2.85) und ihres Definitionsbereiches in (2.86) in zwei Integrale unterteilt werden.

$$\Phi = -W + A \quad \text{mit} \tag{2.128}$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_{S_0^u} \mathbf{x}^* \mathbf{T} \, dS_0^u + \int_{S_0^T} \mathbf{x} \mathbf{T}^* \, dS_0^T & A &= \int_{S^u} \mathbf{x}^* \mathbf{t} \, dS^u + \int_{S^T} \mathbf{x} \mathbf{t}^* \, dS^T \\
& \quad \text{bzw.} & & \\
& + \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \mathbf{x} \mathbf{K} \, d\mathcal{V}_0 & & + \int_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{x} \mathbf{K} \, d\mathcal{V}
\end{aligned} \tag{2.129}$$

Für die Beschreibung des elastischen Potentials wird die Existenz einer Potentialfunktion oder auch Formänderungsenergiefunktion  $w$  vorausgesetzt, die von den Verzerrungen abhängig ist. Sie verknüpft die energetisch konjugierten Spannungen und Verzerrungen und beschreibt, integriert über das Volumen der Referenzkonfiguration, die Formänderungsenergie  $W$ .

$$\begin{aligned}
W &= \int_{\mathcal{V}_0} w \, d\mathcal{V}_0 \\
W &= \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \phi \, d\mathcal{V}_0 & \text{bzw.} & W = \int_{\mathcal{V}} \rho \phi \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho_0 \phi J^{-1} \, d\mathcal{V} \\
& \quad \text{mit } \phi = \phi(\mathbf{E}) & & \quad \text{mit } \phi = \phi(\mathbf{e})
\end{aligned} \tag{2.130}$$

Die Potentialfunktion  $w$  hängt von der spezifischen Formänderungsenergie  $\phi$ , die gleich der freien HELMHOLTZ-Energie ohne Temperaturbelastungen ist, und der unabhängigen Dichte  $\rho_0$  ab. Sie stellt einen eindeutigen, invertierbaren Zusammenhang zwischen den energetisch konjugierten Spannungen und Verzerrungen dar.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} & \text{bzw.} & \quad \phi = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} = \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{e} \\ \text{mit } \mathbf{S} &= J \boldsymbol{\Sigma} = \rho_0 \frac{\partial \phi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} & & \quad \text{mit } \boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \boldsymbol{\tau} = \rho \frac{\partial \phi(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}} \end{aligned} \quad (2.131)$$

Diese Definition ergibt sich, indem die Spannungstensoren in (2.125) als zeitunabhängig betrachtet werden und die aktuelle Rate der Deformationsenergie mit Hilfe der LIE-Zeitableitung des Verzerrungstensors  $\mathbf{e}$  in (2.81) über die Zeit  $t_0 = 0$  bis  $t$  integriert wird. Hierbei ist anzumerken, dass der 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor nicht eindeutig aus der Potentialfunktion herleitbar ist.

Existiert eine solche spezifischen Formänderungsenergie  $\phi$ , für die der Zusammenhang in (2.131) gegeben ist, so beschreibt sie ein hyperelastisches Materialverhalten, dass die energetisch konjugierten Größen miteinander koppelt.

### 2.5.2 Elastisch komplementäres Potential

Das elastisch komplementäre Potential setzt sich aus der komplementären Formänderungsenergie  $W^*$  und dem Potential der äußeren Volumen- und Oberflächenkräfte  $A$  aus Gleichung (2.129) zusammen, wobei die gleichen Voraussetzungen wie beim elastischen Potential gelten.

$$\Phi^* = -W^* + A^* \quad \text{mit} \quad A^* = A \quad (2.132)$$

Die komplementäre Formänderungsenergie  $W^*$  ist in Abhängigkeit der Spannungstensoren definiert. Dafür wird die komplementäre Potentialfunktion  $w^*$ , die sich für isotherme elastische Materialmodelle aus der unabhängigen Dichte  $\rho_0$  und der komplementären spezifischen Formänderungsenergie  $h$  zusammensetzt, die gleich der freien Enthalpie ohne Temperaturbelastung ist, über das Volumen der Referenzkonfiguration integriert.

$$\begin{aligned} W^* &= \int_{\mathcal{V}_0} w^* \, d\mathcal{V}_0 & & \quad W^* = \int_{\mathcal{V}} \rho h \, d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \rho_0 h J^{-1} \, d\mathcal{V} \\ W^* &= \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 h \, d\mathcal{V}_0 & \text{bzw.} & \quad \text{mit } h = h(\boldsymbol{\tau}) = h(\boldsymbol{\sigma}) \\ \text{mit } h &= h(\mathbf{P}) = h(\mathbf{S}) = h(\boldsymbol{\Sigma}) & & \quad \text{mit } h = h(\boldsymbol{\tau}) = h(\boldsymbol{\sigma}) \end{aligned} \quad (2.133)$$

Die komplementären spezifischen Formänderungsenergie ist mit ihren energetisch konjugierten Größen nur über den 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Tensor und den Deformationsgradienten definiert. Durch Überführung dieser Definition in die Referenz- bzw.



Momentankonfiguration ergeben sich die energetisch konjugierten Größen. Wird die freie Enthalpie  $h$  nach dem entsprechenden Spannungstensor differenziert, so ergeben sich die energetisch konjugierten Verzerrungstensoren.

$$\begin{aligned}
 h(\mathbf{P}) &= \frac{1}{\rho_0} \mathbf{P} : \mathbf{F} \\
 h(\mathbf{S}) &= \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \mathbf{C} & h(\boldsymbol{\tau}) &= \frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{g} \\
 \text{mit } \mathbf{C} &= \rho_0 \frac{\partial h(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} & \text{mit } \mathbf{g} &= \rho_0 \frac{\partial h(\boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{\tau}} \\
 h(\boldsymbol{\Sigma}) &= \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{C} & h(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{g} \\
 \text{mit } \mathbf{C} &= \rho \frac{\partial h(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} & \text{mit } \mathbf{g} &= \rho \frac{\partial h(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}
 \end{aligned} \tag{2.134}$$

## 2.6 Variationsprinzipie in der Mechanik

In der linear-elastischen Mechanik gibt es verschiedene Variationsprinzipie, um das vorliegende Problem für eine numerische Lösung aufzubereiten. Zu den bekanntesten zählen das Prinzip der virtuellen Verschiebungen und das Prinzip der virtuellen Kräfte, die Variation des elastischen und des elastisch komplementären Potentials, auf die im Folgenden näher eingegangen wird. Die Methode der gewichteten Residuen sowie das Verfahren von TREFFTZ seien hier nur als weitere Methoden genannt. Allen Methoden liegt dabei die gleiche starke Form des Randwertproblems für statische Systeme zugrunde, die aus den folgenden Gleichungen besteht:

1. die lokale Impulsbilanz

$$\text{DIV} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{K} = \mathbf{0} \text{ in } \mathcal{V}_0 \quad \text{bzw.} \quad \text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{K} = \mathbf{0} \text{ in } \mathcal{V} \tag{2.135}$$

2. die Kinematik

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{G}) \text{ in } \mathcal{V}_0 & \mathbf{e} &= \frac{1}{2} (\mathbf{g} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \text{ in } \mathcal{V} \\
 \text{mit } \mathbf{F} &= \text{GRAD} \mathbf{x} & \text{mit } \mathbf{F}^{-1} &= \text{grad} \mathbf{X} \\
 &= \mathbf{G} + \text{GRAD} \mathbf{u} & &= \mathbf{g} - \text{grad} \mathbf{u}
 \end{aligned} \tag{2.136}$$

3. die dynamischen Randbedingungen oder auch DIRICHLET-Randbedingungen genannt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}^* - \mathbf{T} &= \mathbf{0} \text{ auf } \mathcal{S}_0^T & \mathbf{t}^* - \mathbf{t} &= \mathbf{0} \text{ auf } \mathcal{S}^t \\
 \text{mit } \mathbf{T} &= \mathbf{P} \mathbf{N} & \text{mit } \mathbf{t} &= \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}
 \end{aligned} \tag{2.137}$$

4. die kinematischen Randbedingungen oder auch NEUMANN-Randbedingungen genannt

$$\mathbf{u}^* - \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \mathcal{S}_0^u \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{u}^* - \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \mathcal{S}^u. \tag{2.138}$$

### 2.6.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Für das Prinzip der virtuellen Verschiebungen wird die lokale Impulsbilanz sowie die dynamischen Randbedingungen mit einer virtuellen Verschiebung, der Variation der Verschiebungen, die auch Testfunktion genannt wird, skalar multipliziert und über das Volumen  $\mathcal{V}_0$  bzw.  $\mathcal{V}$  sowie die Oberfläche  $\mathcal{S}_0^T$  bzw.  $\mathcal{S}^t$  integriert.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{u} (\text{DIV} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{K}) \, d\mathcal{V}_0 & \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathcal{V}} \delta \mathbf{u} (\text{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{K}) \, d\mathcal{V} \\ + \int_{\mathcal{S}_0^T} \delta \mathbf{u} (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) \, d\mathcal{S}_0^T = 0 & \quad \text{bzw.} \quad + \int_{\mathcal{S}^t} \delta \mathbf{u} (\mathbf{t}^* - \mathbf{t}) \, d\mathcal{S}^t = 0 \end{aligned} \quad (2.139)$$

Aus Gleichung (2.15) wird ersichtlich, dass die Variation des Verschiebungsvektors gleich der Variation des Ortsvektors in der Momentankonfiguration ist.

$$\delta \mathbf{u} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \delta \mathbf{x} \quad (2.140)$$

Die LIE-Variation  $\delta_{\mathcal{L}}^{\diamond}$  mit  $\diamond \in \{b, \#, \backslash, /\}$ , die im Folgenden verwendet wird, ist analog zur LIE-Zeitableitung in (2.78) unter Verwendung der Operationen in Anhang A.1 definiert [34].

$$\delta_{\mathcal{L}}^{\diamond}(\cdot) = \Phi_{\star}^{\diamond} \delta(\Phi_{\diamond}^{\star}(\cdot)) \quad (2.141)$$

Die Variation des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  und des EULER-ALMANZI'schen Verzerrungstensors  $\mathbf{e}$  lauten

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} + \delta \mathbf{F}^T \mathbf{F}) & \delta_{\mathcal{L}} \mathbf{e} &= \mathbf{F}^{-T} \delta \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \\ &= \text{sym}(\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}) & \text{bzw.} & \quad = \text{sym}(\delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}) \\ &= \text{sym}(\mathbf{F}^T \text{GRAD} \delta \mathbf{x}) & & \quad = \text{sym}(\text{grad} \delta \mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (2.142)$$

Mit der Identität

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} \text{DIV} \mathbf{P} &= \text{DIV}(\delta \mathbf{x} \mathbf{P}) & \delta \mathbf{x} \text{div} \boldsymbol{\sigma} &= \text{div}(\delta \mathbf{x} \boldsymbol{\sigma}) \\ &\quad - \mathbf{P} : \text{GRAD} \delta \mathbf{x} & \text{bzw.} & \quad - \boldsymbol{\sigma} : \text{grad} \delta \mathbf{x} , \end{aligned} \quad (2.143)$$

dem modifizierten GAUSS'schen Integralsatz in (2.110) und dem CAUCHY-Theorem in (2.87) lässt sich das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in die *schwache Form*, oder auch Form A genannt [21], überführen, die für eine numerische Implementation verwendet wird.

$$\begin{aligned} - \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, d\mathcal{V}_0 & \quad \text{bzw.} \quad - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} : \delta_{\mathcal{L}} \mathbf{e} \, d\mathcal{V} \\ + \int_{\mathcal{S}_0^T} \delta \mathbf{x} \mathbf{T}^* \, d\mathcal{S}_0^T + \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \delta \mathbf{x} \mathbf{K} \, d\mathcal{V}_0 = 0 & \quad \text{bzw.} \quad + \int_{\mathcal{S}^t} \delta \mathbf{x} \mathbf{t}^* \, d\mathcal{S}^t + \int_{\mathcal{V}} \rho \delta \mathbf{x} \mathbf{K} \, d\mathcal{V} = 0 \end{aligned} \quad (2.144)$$

Zur Herleitung wurden die Gleichungen der Kinematik und der kinematischen Randbedingungen in der starken Form verwendet. Es ist anzumerken, dass für das Prinzip der virtuellen Verschiebungen kein funktionaler Zusammenhang zwischen den virtuellen Verzerrungen und den konjugierten Spannungen gegeben sein muss.

### 2.6.2 Prinzip der virtuellen Kräfte

Das Prinzip der virtuellen Kräfte ist für große Formänderungen und Verschiebungen nur mit Hilfe des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor definiert. Hier wird die Kinematik mit den virtuellen Spannungen und die kinematischen Randbedingungen mit den virtuellen äußeren Kräften skalar multipliziert und über das Volumen  $\mathcal{V}_0$  sowie die Oberfläche  $\mathcal{S}_0^u$  integriert.

$$\int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{P} : (\text{GRAD} \mathbf{x} - \mathbf{F}) \, d\mathcal{V}_0 + \int_{\mathcal{S}_0^u} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \, \delta \mathbf{T} \, d\mathcal{S}_0^u = 0 \quad (2.145)$$

Mit der Identität in (2.143) für virtuelle Kräfte, die durch die Variation der lokalen Impulsbilanz in (2.135) mit

$$\text{DIV}(\delta \mathbf{P}) = \delta(\text{DIV} \mathbf{P}) = -\rho_0 \, \delta \mathbf{K} = \mathbf{0} \, , \quad (2.146)$$

vereinfacht wird, kann das Prinzip der virtuellen Kräfte mit dem CAUCHY-Theorem in (2.87) und dem modifizierten GAUSS'schen Integralsatz in (2.110) in die *schwache Form* für eine Implementation überführt werden.

$$-\int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{P} : \mathbf{F} \, d\mathcal{V}_0 + \int_{\mathcal{S}_0^u} \mathbf{x}^* \, \delta \mathbf{P} \mathbf{N} \, d\mathcal{S}_0^u = 0 \quad (2.147)$$

Das Prinzip der virtuellen Kräfte verwendet die exakte Form der lokalen Impulsbilanz und der dynamischen Randbedingungen und erfüllt die Kinematik und die kinematischen Randbedingungen im Mittel. Diese Anforderungen an die Variation der Spannungen ist meist sehr schwer zu erfüllen, da sie ein Differentialgleichungssystem exakt erfüllen müssen. Daher ist diese Methode zur Lösung des gegebenen Randwertproblems auch nicht weit verbreitet.

### 2.6.3 Variation des elastischen Potentials

Die Variation des Funktionals  $\Phi$ , also des elastischen Potentials, mit der Stationaritätsbedingung

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= -\delta W + \delta A = 0 \\ \delta \Phi(\delta \mathbf{E}, \delta \mathbf{u}) &= 0 \quad \text{bzw.} \quad \delta \Phi(\delta_{\mathcal{L}} \mathbf{e}, \delta \mathbf{u}) = 0 \end{aligned} \quad (2.148)$$

entspricht dem Prinzip vom Minimum des elastischen Gesamtpotentials.

Wird das Potential der äußeren Volumen- und Oberflächenkräfte  $A$  aus (2.129) nach den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  variiert, so entfällt das Integral über die Oberflächen  $\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}}$  bzw.  $\mathcal{S}^{\mathbf{u}}$ , da es konstante Verschiebungen  $\mathbf{u}^*$  enthält.

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}}} \delta \mathbf{x} \mathbf{T}^* \, d\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}} & \delta A &= \int_{\mathcal{S}^{\mathbf{t}}} \delta \mathbf{x} \mathbf{t}^* \, d\mathcal{S}^{\mathbf{t}} \\ &+ \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \delta \mathbf{x} \mathbf{K} \, d\mathcal{V}_0 & &+ \int_{\mathcal{V}} \rho \delta \mathbf{x} \mathbf{K} \, d\mathcal{V} \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad (2.149)$$

Die Variation der Formänderungsenergie  $W$  ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \frac{\partial \phi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} : \delta \mathbf{E} \, d\mathcal{V}_0 & \delta W &= \int_{\mathcal{V}} \rho \frac{\partial \phi(\mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}} : \delta_{\mathcal{L}} \mathbf{e} \, d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, d\mathcal{V}_0 & \text{bzw.} &= \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} : \delta_{\mathcal{L}} \mathbf{e} \, d\mathcal{V} \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} J \boldsymbol{\Sigma} : \delta \mathbf{E} \, d\mathcal{V}_0 & &= \int_{\mathcal{V}} J^{-1} \boldsymbol{\tau} : \delta_{\mathcal{L}} \mathbf{e} \, d\mathcal{V} . \end{aligned} \quad (2.150)$$

Hier wurde die Variation des GREEN-LAGRANGE'schen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  und der LIE-Variation des EULER-ALMANSI'schen Verzerrungstensor  $\mathbf{e}$  in (2.142) verwendet.

Mit der Symmetriebedingung in Gleichung (2.120) und Gleichung (2.90) kann die Variation der Formänderungsenergie auch in der Zwischenkonfiguration definiert werden

$$\delta W = \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, d\mathcal{V}_0 \quad (2.151)$$

und die Variation des elastischen Potentials berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} - \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, d\mathcal{V}_0 & & - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} : \delta_{\mathcal{L}} \mathbf{e} \, d\mathcal{V} \\ + \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}}} \delta \mathbf{x} \mathbf{T}^* \, d\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}} + \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \delta \mathbf{x} \mathbf{K} \, d\mathcal{V}_0 & = 0 & \text{bzw.} & + \int_{\mathcal{S}^{\mathbf{t}}} \delta \mathbf{x} \mathbf{t}^* \, d\mathcal{S}^{\mathbf{t}} + \int_{\mathcal{V}} \rho \delta \mathbf{x} \mathbf{K} \, d\mathcal{V} = 0 . \end{aligned} \quad (2.152)$$

Es wird deutlich, dass die Variation des elastischen Potentials gleich der *schwachen Form* des Prinzips der virtuellen Verschiebungen ist. Das Prinzip des Minimums des elastischen Potentials lässt sich durch die in Abschnitt 2.6.1 gezeigten Umformungen

in die Form B nach [21] überführen.

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int_{\mathcal{V}_0} \delta\mathbf{u}(\text{DIV}\mathbf{P} + \rho_0\mathbf{K}) \, d\mathcal{V}_0 & \delta\Phi &= \int_{\mathcal{V}} \delta\mathbf{u}(\text{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{K}) \, d\mathcal{V} \\ &+ \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}}} \delta\mathbf{u}(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) \, d\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}} = 0 & \text{bzw.} & & + \int_{\mathcal{S}^{\mathbf{t}}} \delta\mathbf{u}(\mathbf{t}^* - \mathbf{t}) \, d\mathcal{S}^{\mathbf{t}} = 0 \end{aligned} \quad (2.153)$$

Die Kinematik und die kinematischen Randbedingungen werden exakt und das lokale Gleichgewicht und die dynamischen Randbedingungen integrativ, also im Mittel, erfüllt. Aus einem Vergleich des Ergebnisses mit Gleichung (2.139) geht hervor, dass das Minimum des elastischen Potentials in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen übergeht. Hier wurde jedoch die Existenz der spezifischen Formänderungsenergie  $\phi$ , die das hyperelastische Materialverhalten beschreibt, vorausgesetzt, welche bei dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen nicht notwendig war.

#### 2.6.4 Variation des elastisch komplementären Potentials

Die Stationaritätsbedingung der Variation des elastisch komplementären Potentials  $\Phi^*$  lautet

$$\begin{aligned} \delta\Phi^* &= -\delta W^* + \delta A^* = 0 \\ \delta\Phi^*(\delta\mathbf{P} \vee \delta\mathbf{S} \vee \delta\boldsymbol{\Sigma}, \delta\mathbf{T}) &= 0 \quad \text{bzw.} \quad \delta\Phi^*(\delta\boldsymbol{\sigma} \vee \delta\boldsymbol{\tau}, \delta\mathbf{t}) = 0 \end{aligned} \quad (2.154)$$

und entspricht dem Minimum des elastisch komplementären Gesamtpotentials.

Bei der Variation der äußeren Volumen- und Oberflächenkräfte  $A^*$  aus (2.132) bzw. (2.129) entfallen die Integrale über die Oberflächen  $\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}}$  bzw.  $\mathcal{S}^{\mathbf{t}}$  und über das Volumen  $\mathcal{V}_0$  bzw.  $\mathcal{V}$ , da dort konstante Kraftgrößen vorgegeben sind.

$$\begin{aligned} \delta A^* &= \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}}} \mathbf{x}^* \delta\mathbf{P} \mathbf{N} \, d\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}} & \delta A^* &= \int_{\mathcal{S}^{\mathbf{u}}} \mathbf{x}^* \delta\mathbf{t} \, d\mathcal{S}^{\mathbf{u}} \\ &= \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}}} \mathbf{x}^* \mathbf{F} \delta\mathbf{S} \mathbf{N} \, d\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}} & \text{bzw.} & & = \int_{\mathcal{S}^{\mathbf{u}}} \mathbf{x}^* \delta\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, d\mathcal{S}^{\mathbf{u}} \\ &= \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}}} \mathbf{x}^* J\mathbf{F} \delta\boldsymbol{\Sigma} \mathbf{N} \, d\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}} & & & = \int_{\mathcal{S}^{\mathbf{u}}} \mathbf{x}^* J^{-1} \delta\boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \, d\mathcal{S}^{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (2.155)$$

Die Variation der komplementären Formänderungsenergie nach dem jeweiligen Span-

nungstensor ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
\delta W^* &= \int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{P} : \rho_0 \frac{\partial h(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} d\mathcal{V}_0 \\
&= \int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{P} : \mathbf{F} d\mathcal{V}_0 & \delta W^* &= \int_{\mathcal{V}} \delta \boldsymbol{\sigma} : \rho \frac{\partial h(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\mathcal{V} \\
\delta W^* &= \int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{S} : \rho_0 \frac{\partial h(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} d\mathcal{V}_0 & &= \int_{\mathcal{V}} \delta \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{g} d\mathcal{V} \\
&= \int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{S} : \mathbf{C} d\mathcal{V}_0 & \text{bzw.} & \delta W^* &= \int_{\mathcal{V}} J^{-1} \delta \boldsymbol{\tau} : \rho_0 \frac{\partial h(\boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{\tau}} d\mathcal{V} \\
\delta W^* &= \int_{\mathcal{V}_0} J \delta \boldsymbol{\Sigma} : \rho \frac{\partial h(\boldsymbol{\Sigma})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} d\mathcal{V}_0 & &= \int_{\mathcal{V}} J^{-1} \delta \boldsymbol{\tau} : \mathbf{g} d\mathcal{V} . \\
&= \int_{\mathcal{V}_0} J \delta \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{C} d\mathcal{V}_0
\end{aligned} \tag{2.156}$$

Für die Variation des elastisch komplementären Potentials mit Hilfe des 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors ergibt sich der Ausdruck

$$\delta \Phi^* = - \int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{P} : \mathbf{F} d\mathcal{V}_0 + \int_{\mathcal{S}_0^u} \mathbf{x}^* \delta \mathbf{P} \mathbf{N} d\mathcal{S}_0^u = 0, \tag{2.157}$$

der sich in die Form B überführen lässt.

$$\int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{P} : (\text{GRAD} \mathbf{x} - \mathbf{F}) d\mathcal{V}_0 + \int_{\mathcal{S}_0^u} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \delta \mathbf{T} d\mathcal{S}_0^u = 0 \tag{2.158}$$

Diese Gleichung ist identisch mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte in (2.145). Die lokale Impulsbilanz und die dynamischen Randbedingungen werden exakt und die Kinematik und die kinematischen Randbedingungen integrativ im Mittel erfüllt. Für das Minimum des elastisch komplementären Potentials wurde jedoch die Existenz der komplementären spezifischen Formänderungsenergie  $h$  vorausgesetzt.

In den Größen der Referenz- bzw. Momentankonfiguration lautet das Minimum des elastisch komplementären Potentials:

$$\begin{aligned}
2 \int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{S} : \left( \frac{1}{2} (\text{GRAD} \mathbf{u} + \text{GRAD}^T \mathbf{u} \right. \\
\left. + \text{GRAD}^T \mathbf{u} \text{GRAD} \mathbf{u}) - \mathbf{E} \right) d\mathcal{V}_0 & \text{ bzw.} & \int_{\mathcal{V}} \delta \boldsymbol{\sigma} : (\text{grad} \mathbf{X} + \text{grad} \mathbf{u} - \mathbf{g}) d\mathcal{V} \\
+ \int_{\mathcal{S}_0^u} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) (\mathbf{G} + \text{GRAD} \mathbf{u}) \delta \mathbf{S} \mathbf{N} d\mathcal{S}_0^u = 0 & & + \int_{\mathcal{S}^u} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} d\mathcal{S}^u = 0 .
\end{aligned} \tag{2.159}$$

## 2.7 Geometrische Linearisierung

### 2.7.1 Annahmen für die geometrische Linearisierung

Im Bauwesen sind Verschiebungen und Deformationen aus Gründen der Sicherheit und der Funktionalität möglichst klein zu halten. Der Gebrauchstauglichkeitsnachweis von Bauteilen begrenzt hierbei die zulässigen Verschiebungen unter Gebrauchslast in Abhängigkeit des gewählten Systems und des Materials.

Bei kleinen Verschiebungen wird die Annahme getroffen, dass die Momentankonfiguration und die Referenzkonfiguration zusammen fallen. Sie hat zur Folge, dass bei der Gradienten- und Divergenzbildung nicht mehr zwischen den Konfigurationen unterschieden werden muss.

$$\begin{aligned} & \mathbf{u} \text{ ist klein} \\ \Rightarrow & \mathbf{X} \cong \mathbf{x} \quad \mathbf{G}_i \cong \mathbf{g}_i \quad \mathbf{G} \cong \mathbf{g} \quad J \cong 1 \quad \mathcal{V} \cong \mathcal{V}_0 \quad \mathbf{N} \cong \mathbf{n} \quad (2.160) \\ \Rightarrow & \text{GRAD}\mathbf{u} \cong \text{gradu} \quad \text{DIV}\mathbf{S} \cong \text{div}\mathbf{S} \end{aligned}$$

Bei kleinen Deformationen wird die Annahme getroffen, dass der Gradient der Verschiebungen hinreichend klein ist, um das Produkt zweier Verschiebungsgradienten zu vernachlässigen.

$$\begin{aligned} & \text{GRAD}\mathbf{u} \ll 1 & \text{gradu} \ll 1 \\ \Rightarrow & \text{GRAD}^T\mathbf{u} \text{ GRAD}\mathbf{u} \cong 0 & \text{bzw.} \quad \Rightarrow \quad \text{grad}^T\mathbf{u} \text{ gradu} \cong 0 \quad (2.161) \\ \Rightarrow & \mathbf{E} = \text{sym}(\text{GRAD}\mathbf{u}) & \Rightarrow \quad \mathbf{e} = \text{sym}(\text{gradu}) \end{aligned}$$

Unabhängig voneinander können kleine Verschiebungen und/oder kleine Deformationen gewählt werden. In dieser Arbeit werden im Folgenden beide Annahmen getroffen.

### 2.7.2 Linearisierte kinematische und dynamische Beziehungen

Der inverse Deformationsgradient in (2.18) lässt sich mit den oben aufgeführten Annahmen linearisieren zu:

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \text{GRAD}\mathbf{u} \quad \mathbf{F}^{-1} \cong \mathbf{G} - \text{GRAD}\mathbf{u} . \quad (2.162)$$

Der rechte und der linke CAUCHY-GREEN-Tensor ergeben sich durch Linearisierung der Gleichung (2.36).

$$\begin{aligned} \mathbf{C} & \cong \mathbf{G} + \text{GRAD}\mathbf{u} + \text{GRAD}^T\mathbf{u} & \text{bzw.} & \quad \mathbf{b}^{-1} \cong \mathbf{G} - \text{GRAD}\mathbf{u} - \text{GRAD}^T\mathbf{u} \\ & = \mathbf{G} + 2 \text{sym}(\text{GRAD}\mathbf{u}) & & \quad = \mathbf{G} - 2 \text{sym}(\text{GRAD}\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.163)$$

Die Verzerrungen in (2.48) berechnen sich mit den Annahmen aus (2.160) und (2.161) zum symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten. Sie können aber auch durch

die linearisierten CAUCHY-GREEN-Tensoren und der linearisierten Beziehung in (2.40) bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) & \text{bzw.} & & \mathbf{e} &\cong \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{b}^{-1}) \\ &\cong \text{sym}(\text{GRAD}\mathbf{u}) & & & &\cong \text{sym}(\text{GRAD}\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.164)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cong \mathbf{E} \cong \mathbf{e} \cong \text{sym}(\text{GRAD}\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\text{GRAD}\mathbf{u} + \text{GRAD}^T\mathbf{u}) \quad (2.165)$$

Mit dem Geschwindigkeitsgradienten in (2.57)

$$\mathbf{l} \cong \text{GRAD}\mathbf{v} = \text{GRAD}\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{F}} \quad (2.166)$$

ergibt sich für die materielle Verzerrungsrate in (2.79) und die aktuelle, objektive in (2.81) ein gleiches Ergebnis. Daraus folgt, dass für geometrisch linearisierte Verzerrungsraten keine objektive Zeitableitung benötigt wird.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &\cong \dot{\mathbf{E}} \cong \mathcal{L}_v\mathbf{e} = \mathbf{d} = \text{sym}(\mathbf{l}) \cong \text{sym}(\dot{\mathbf{F}}) = \text{sym}(\text{GRAD}\mathbf{v}) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &\cong \frac{1}{2}(\text{GRAD}\dot{\mathbf{u}} + \text{GRAD}^T\dot{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (2.167)$$

Für den Vektor der Oberflächenlasten in (2.83) ergibt sich aus Gleichung (2.84)  $\mathbf{T} \cong \mathbf{t}$  und die Spannungstensoren in Gleichung (2.88), (2.89), (2.91) und (2.93) sind identisch

$$\mathbf{S} \cong \boldsymbol{\Sigma} \cong \mathbf{P} \cong \boldsymbol{\tau} \cong \boldsymbol{\sigma} , \quad (2.168)$$

wodurch die Definition einer objektiven Zeitableitung der Spannungen nicht mehr benötigt wird.

### 2.7.3 Linearisierte Bilanzgleichungen der Mechanik

Aus der Massenbilanz können die folgenden Beziehungen abgeleitet werden:

$$\rho \cong \rho_0 \quad \dot{\rho} \cong 0 \quad \dot{J} \cong \text{tr}\mathbf{l} \cong 0 . \quad (2.169)$$

Die Linearisierung der globalen und lokalen Impulsbilanz in Gleichung (2.111) und (2.112) lautet

$$\int_{\mathcal{V}_0} (\text{DIV}\mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{K}) \, d\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \dot{\mathbf{v}} \, d\mathcal{V}_0 \quad (2.170)$$

$$\text{DIV}\mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{K} = \rho_0 \dot{\mathbf{v}} . \quad (2.171)$$

Aus der lokalen Drehimpulsbilanz in Gleichung (2.120) ergibt sich die Symmetriebedingung des linearen Spannungstensors zu  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ .



Aus der Rate der lokalen, spezifischen Deformationsenergie in Gleichung (2.127) lassen sich die geometrisch linearen energetisch konjugierten Größen ableiten zu

$$\dot{w} \cong \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (2.172)$$

wodurch sich die linearisierte Energiebilanz bestimmen lässt.

$$\int_{\mathcal{V}_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{v}}^2 d\mathcal{V}_0 = \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{v} \mathbf{T} d\mathcal{S}_0 + \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \mathbf{v} \mathbf{K} d\mathcal{V}_0 - \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} d\mathcal{V}_0 \quad (2.173)$$

#### 2.7.4 Linearisierte Potentiale

Für eine geometrisch lineare spezifische Formänderungsenergie  $\phi$  mit der Eigenschaft

$$\rho_0 \frac{\partial \phi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.174)$$

ergibt sich das elastische Potential in Gleichung (2.128) zu:

$$\Phi = - \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon} d\mathcal{V}_0 + \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}}} \mathbf{x}^* \mathbf{T} d\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}} + \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}}} \mathbf{x} \mathbf{T}^* d\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}} + \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \mathbf{x} \mathbf{K} d\mathcal{V}_0 . \quad (2.175)$$

Für die geometrisch lineare komplementäre spezifische Formänderungsenergie  $h$  mit der Eigenschaft

$$\rho_0 \frac{\partial h(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{S}) \quad (2.176)$$

lautet das komplementär elastische Potential in Gleichung (2.132)

$$\Phi^* = - \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{S}) d\mathcal{V}_0 + \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}}} \mathbf{x}^* \mathbf{T} d\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}} + \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}}} \mathbf{x} \mathbf{T}^* d\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}} + \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \mathbf{x} \mathbf{K} d\mathcal{V}_0 . \quad (2.177)$$

#### 2.7.5 Linearisierte Variationsprinzip der Mechanik

Die Variation des elastischen Potentials in (2.153), die gleich dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen in (2.139) ohne Verwendung einer Materialbeschreibung ist, lautet in ihrer geometrisch linearen Form

$$\int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{u} (\text{DIV} \mathbf{S} + \rho_0 \mathbf{K}) d\mathcal{V}_0 + \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}}} \delta \mathbf{u} (\mathbf{T}^* - \mathbf{S} \mathbf{N}) d\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}} = 0 \quad (2.178)$$

und kann in die *schwache Form* der linearisierten Gleichung in (2.144) bzw. (2.152)

$$- \int_{\mathcal{V}_0} \mathbf{S} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\mathcal{V}_0 + \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}}} \delta \mathbf{u} \mathbf{T}^* d\mathcal{S}_0^{\mathbf{T}} + \int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \mathbf{K} d\mathcal{V}_0 = 0 \quad (2.179)$$

umgeformt werden.

Das Prinzip der virtuellen Kräfte in (2.145) lässt sich linearisieren zu

$$\int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{S} : \left( \frac{1}{2} (\text{GRAD} \mathbf{u} + \text{GRAD}^T \mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon} \right) d\mathcal{V}_0 + \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}}} (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}) \delta \mathbf{S} \mathbf{N} d\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.180)$$

und ist äquivalent mit der linearisierten Variation des komplementär elastischen Potentials in (2.158) ohne die Vorgabe eines Materialgesetzes. Wird diese Gleichung in ihre *schwache Form* überführt, so entspricht sie einer geometrischen Linearisierung der Gleichungen (2.147) und (2.157).

$$- \int_{\mathcal{V}_0} \delta \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon} d\mathcal{V}_0 + \int_{\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}}} (\mathbf{X} + \mathbf{u}^*) \delta \mathbf{S} \mathbf{N} d\mathcal{S}_0^{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.181)$$

## 2.8 Materialmodelle

In Abschnitt 2.6 wurden die zur Lösung des gegebenen Randwertproblems gängigen Variationsprinzipie der Mechanik vorgestellt. Die in den Gleichungen (2.135) bis (2.138) aufgeführte *starke Form* des Randwertproblems war dabei Grundlage jedes Variationsprinzipes. Um diese Prinzipie in ein Näherungsverfahren umzusetzen, wird jedoch ein funktionaler Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Dehnungen, das sogenannte Materialgesetz, benötigt. Es kann elastisch, also eindeutig und invertierbar, oder inelastisch, also in Abhängigkeit der Prozessgeschichte, sein.

Wird kein Materialgesetz zur Lösung der vorhandenen Struktur benötigt und können die Spannungen nur mit Hilfe des Schnittprinzipes und der lokalen Impulsbilanz unter Verwendung der kinematischen und dynamischen Randbedingungen berechnet werden, so liegt ein statisch bestimmtes System vor. Im Allgemeinen basieren die zu lösenden Probleme auf statisch unbestimmten Systemen, die nur mit Hilfe zusätzlicher Gleichungen aus dem Materialgesetz gelöst werden können.

### 2.8.1 Hyperelastische Materialmodelle

Bei hyperelastischen Materialmodellen wird die Existenz einer Potentialfunktion oder auch Formänderungsenergiefunktion  $w$  vorausgesetzt, die integriert über das Volumen des unverformten Körpers die Formänderungsenergie  $W$  beschreibt.

$$W = W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\mathcal{V}_0} w(\boldsymbol{\varepsilon}) d\mathcal{V}_0 \quad \text{mit} \quad w(\boldsymbol{\varepsilon}) = \rho_0 \phi(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.182)$$

Die Potentialfunktion  $w$  hängt von der spezifischen Formänderungsenergie  $\phi$  und der unabhängigen Dichte  $\rho_0$  ab. Sie stellt einen eindeutigen, invertierbaren Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen dar. Für ein linearisiertes

Materialverhalten ergibt sich der lineare Materialtensor  $\mathbf{C}$  durch Ableitung der linearisierten Spannungen  $\mathbf{S}$  nach den Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

$$\mathbf{S} = \frac{\partial w(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 w(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.183)$$

Die komplementäre Formänderungsenergie  $W^*$  ist abhängig von den Spannungen  $\mathbf{S}$ . Sie berechnet sich aus dem Integral der komplementären Potentialfunktion  $w^*$ , die sich für isotherme elastische Materialmodelle aus der unabhängigen Dichte  $\rho_0$  und der komplementären spezifischen Formänderungsenergie  $h$  zusammensetzt, über das Referenzvolumen.

$$W^* = W^*(\mathbf{S}) = \int_{\mathcal{V}_0} w^*(\mathbf{S}) \, d\mathcal{V}_0 \quad \text{mit} \quad w^*(\mathbf{S}) = \rho_0 h(\mathbf{S}) = \mathbf{S} : \boldsymbol{\varepsilon} - w(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.184)$$

Durch Ableiten der komplementären Potentialfunktion  $w^*$  nach den Spannungen ergeben sich die Verzerrungen. Der inverse Materialtensor  $\mathbf{C}^{-1}$  berechnet sich durch erneutes Ableiten.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial w^*(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}^{-1} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial^2 w^*(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{S} \partial \mathbf{S}} \quad (2.185)$$

### 2.8.1.1 Verallgemeinertes Materialmodell von Hooke

Das verallgemeinerte Materialmodell von HOOKE wird durch eine klassische, quadratische Form der Potentialfunktion, die von den festen Materialparametern  $\lambda$  und  $\mu$  abhängig ist, beschrieben.

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) I_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 - 2\mu II_{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.186)$$

$$\text{mit} \quad I_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \quad II_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} ((\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 - \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^2)$$

Die linear-elastischen Spannungen ergeben sich durch Ableiten dieser Potentialfunktion nach den Verzerrungen.

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{G} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^T \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.187)$$

Durch nochmaliges Differenzieren nach den Verzerrungen berechnet sich der linear-elastische Materialtensor  $\mathbf{C}$ , der unabhängig von der Zeit  $t$  ist.

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + 2\mu \mathbf{G} \quad \text{mit} \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$$

$$\mathbf{C} = \mathbb{C}^{ijmn} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_m \otimes \mathbf{G}_n \quad (2.188)$$

$$\text{mit} \quad \mathbb{C}^{ijmn} = \lambda G^{ij} G^{mn} + 2\mu G^{im} G^{jn}$$

Der Materialtensor kann mit Hilfe des Kompressionsmoduls  $\kappa$  in einen sphärischen und einen deviatorischen Anteil aufgespalten werden.

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \text{sph}\mathbf{C} + \text{dev}\mathbf{C} \\ &= \kappa \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + 2\mu \left( \mathbf{G} - \frac{1}{3} \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} \right) \quad \text{mit} \quad \kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu\end{aligned}\quad (2.189)$$

Die komplementäre Potentialfunktion  $w^*$  des verallgemeinerten Materialgesetzes von HOOKE lautet

$$\begin{aligned}w^*(\mathbf{S}) &= -\frac{\lambda}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} (\text{tr}\mathbf{S})^2 + \frac{1}{4\mu} \text{tr}\mathbf{S}^2 = \frac{\lambda + \mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} I_{\mathbf{S}}^2 - \frac{1}{2\mu} II_{\mathbf{S}} \\ \text{mit} \quad I_{\mathbf{S}} &= \text{tr}\mathbf{S} \quad II_{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} ((\text{tr}\mathbf{S})^2 - \text{tr}\mathbf{S}^2),\end{aligned}\quad (2.190)$$

woraus sich durch Differentiation nach den Spannungen  $\mathbf{S}$  die Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  als

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{tr}\mathbf{S} \mathbf{G} + \frac{1}{2\mu} \mathbf{S}^T \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}^T = \mathbf{S} \quad (2.191)$$

ergeben und sich der inverse, linear-elastische Materialtensor  $\mathbf{C}^{-1}$  zu

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{-1} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \frac{1}{2\mu} \mathbf{G} \\ \mathbf{C}^{-1} &= \mathbb{C}^{-1}_{ijmn} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{G}^m \otimes \mathbf{G}^n \\ \text{mit} \quad \mathbb{C}^{-1}_{ijmn} &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} G_{ij} G_{mn} + \frac{1}{2\mu} G_{im} G_{jn}\end{aligned}\quad (2.192)$$

berechnet. Auch er ist zeitunabhängig und nur von den festen Materialparametern, den LAMÉ-Konstanten, abhängig.

Der Zusammenhang zwischen den LAMÉ-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  und dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$  bzw. dem Schubmodul  $G$  lautet

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \mu. \quad (2.193)$$

## 2.8.2 Inelastische Materialmodelle

Inelastisches Materialverhalten liegt vor, wenn sich nach der Entlastung eines Systems eine bleibende Verformung einstellt. Die umwandelbare beziehungsweise reversible Dehnungsenergie wird nach Überschreiten eines Grenzspannungszustandes zum Teil in eine nicht umwandelbare beziehungsweise irreversible Verformungsenergie und zu 90 – 95% in Wärmeenergie überführt. Diese Dissipation kann während des Prozesses nur größer oder gleich null sein. Der eindeutige, invertierbare Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen geht hierbei verloren. Die Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen ist also von der Prozessgeschichte und ihren Variablen,

wie zum Beispiel Lastaufbringung, Dehnungsgeschwindigkeit und Temperaturänderung, abhängig. Mathematisch kann diese Prozessabhängigkeit der entsprechenden Größen explizit als integrale Formulierung über die Zeit oder implizit als Differentialgleichung formuliert werden. Im Folgenden wird die zweite Darstellungsmöglichkeit gewählt.

Bei inelastischen Materialverhalten muss infolge der freiwerdenden Dissipation ein thermodynamischer Rahmen verwendet werden. Inelastische Materialmodelle können in zwei Klassen unterteilt werden: in geschwindigkeitsunabhängige und geschwindigkeitsabhängige Prozesse [20]. Geschwindigkeitsabhängige Prozesse weisen eine Dehnungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon} \geq 10^{-3} \frac{1}{s}$  auf. Dies tritt auf bei viskoplastischem Materialverhalten, wie zum Beispiel Kriechen und Relaxation. Die Dehnungsgeschwindigkeit verursacht im Inneren des Systems ein Temperaturfeld. Da die entstandene Wärmeenergie nicht schnell genug an die Umgebung abgeführt werden kann entstehen Temperaturgradienten im Inneren des Systems. Im Rahmen dieser Arbeit soll ein geschwindigkeitsunabhängiges und somit auch isothermes Materialverhalten betrachtet werden, das eine Dehnungsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon} < 10^{-3} \frac{1}{s}$  aufweist. Der Prozess kann hier durch thermodynamische Gleichgewichtszustände abgebildet werden. Die in dieser Arbeit verwendeten theoretischen Grundlagen gehen auf HILL zurück [47] und sind in der gängigen Literatur von ALTENBACH und ALTENBACH [1], KHAN und HUANG [54], BETTEN [13] und SIMO und HUGHES [84] zu finden .

Ein inelastisches Materialverhalten tritt ein, wenn der gegebene Spannungszustand die Fließfläche bzw. Fließbedingung  $F$  erreicht hat, sodass gilt:

$$F(\mathbf{S}, T, \mathbf{q}_n) = 0 . \quad (2.194)$$

Hierbei steht  $\mathbf{S}$  für die geometrisch linearen Spannungen,  $T$  für das gegebene Temperaturfeld und  $\mathbf{q}_n$  für einen Satz interner Variablen, die die Veränderung der Fließfläche sowie das Verfestigungsverhalten des Materials beschreiben. Die Fließbedingung muss während des plastischen Prozesses erfüllt bleiben. Somit muss die materielle Zeitableitung der Fließbedingung, die Konsistenzbedingung genannt wird, verschwinden.

$$\dot{F}(\mathbf{S}, T, \mathbf{q}_n) = 0 \quad (2.195)$$

Bei metallischen Werkstoffen, die in dieser Arbeit verwendet werden sollen, ist das plastische Materialverhalten unabhängig vom hydrostatischen Druck, dem negativen sphärischen Anteil des Spannungstensors  $\text{sph}\mathbf{S}$ . Da im Rahmen dieser Arbeit isotherme Prozesse behandelt werden, lautet die Fließbedingung:

$$F(\text{dev}\mathbf{S}, \mathbf{q}_n) = 0 \quad \text{mit} \quad \text{dev}\mathbf{S} = \mathbf{S} - \text{sph}\mathbf{S} , \quad \text{sph}\mathbf{S} = \frac{1}{3} \text{tr}\mathbf{S} \mathbf{G} . \quad (2.196)$$

Werden die Spannungen im Hauptspannungsraum  $S^1, S^2, S^3$  dargestellt und eine beliebige Schnittebene, die senkrecht zur Raumdiagonalen  $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3)$  steht, gebildet, so ergibt sich in dieser Ebene, der sogenannten  $\pi$ -Ebene, immer die gleiche Fließkurve. Stellt die Fließkurve in der  $\pi$ -Ebene einen Kreis dar, so ergibt sich im

Raum ein Zylinder als Fließfläche, die sogenannte VON MISES Fließfläche (siehe Abbildung 2.2). Ist die Fließkurve in der  $\pi$ -Ebene ein regelmäßiges Sechseck, so stellt sie im Raum ein regelmäßiges Prisma dar. Sie wird die Fließfläche von TRESCA genannt (ohne Abbildung).

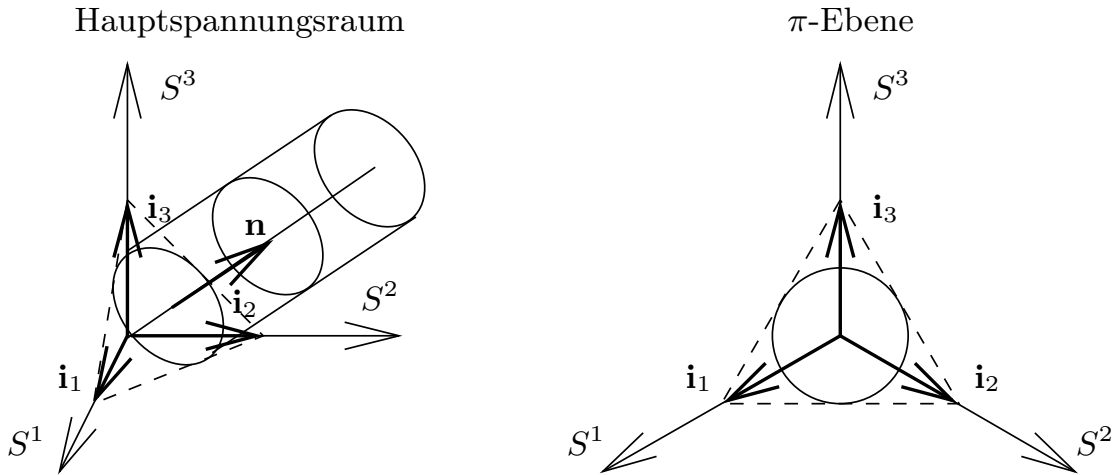


Abb. 2.2: VON MISES Fließfläche

Die linearen Verzerrungen in (2.165) lassen sich für kleine Formänderungen additiv in einen reversiblen Anteil  $\varepsilon_r$  und einen irreversiblen Anteil  $\varepsilon_i$  aufspalten.

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_i \quad (2.197)$$

Die Rate der lokalen, spezifischen Deformationsenergie  $\dot{w}$  in (2.172) lässt sich folglich mit (2.197) ebenfalls additiv aufspalten

$$\dot{w} = \dot{w}_r + \dot{w}_i = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \dot{\varepsilon}_r + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \dot{\varepsilon}_i, \quad (2.198)$$

woraus sich die Potentialfunktion  $w$  herleiten lässt.

$$w = w_r + w_i = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \varepsilon_r + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \varepsilon_i \quad (2.199)$$

Die Spannungen  $\mathbf{S}$  sind durch die Definition der Fließfläche immer im elastischen Bereich definiert mit  $\{(\mathbf{S}, \mathbf{q}_n) \in \mathbb{E}_{\mathbf{S}} \mid F(\mathbf{S}, \mathbf{q}_n) \leq 0\}$ . Daraus folgt, dass sich die Spannungen  $\mathbf{S}$  aus dem reversiblen Anteil der Potentialfunktion in (2.199) und dem eindeutigen, invertierbaren Zusammenhang zwischen Spannungen und reversiblen Dehnungen in (2.183) berechnen lassen.

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \varepsilon_r = \mathbf{C} : (\varepsilon - \varepsilon_i) \quad (2.200)$$

Aus dieser Beziehung kann die Spannungsrate  $\dot{\mathbf{S}}$  für einen konstanten Materialtensor  $\mathbf{C}$  abgeleitet werden.

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{C} : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_i) \quad (2.201)$$

Es wird angenommen, dass die dissipierte Energie  $\dot{w}_i$  in (2.198) unter Verwendung der Fließfläche mit Hilfe eines LAGRANGE-Operators  $\gamma$  während des Prozesses extremal wird

$$\mathcal{L} = \mathbf{S} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i - \gamma F \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{S}} = 0, \quad (2.202)$$

woraus sich die assoziierte Fließregel für die plastischen Verzerrungsraten  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i$  ergibt.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i = \gamma \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \quad (2.203)$$

Der LAGRANGE-Operator  $\gamma$  muss im Weiteren noch bestimmt werden. Da die plastischen Verzerrungsraten mit steigenden Spannungen größer werden, muss für den LAGRANGE-Operator  $\gamma \geq 0$  gelten. Die assoziierte Fließregel wird auch Normalenregel genannt, da die plastischen Verzerrungsraten stets senkrecht und nach außen gerichtet auf der Fließkurve stehen. Sie beinhaltet also, dass die Fließkurve maximal aufgeweitet wird, woraus sich ableiten lässt, dass die dissipierte Energie ein Maximum annimmt.

Für einen Belastungsprozess, bei dem die Spannungen  $\mathbf{S}^*$  im inneren der Fließfläche und die Spannungen  $\mathbf{S}$  auf der Fließfläche liegen, muss das Spannungsinkrement  $\mathbf{S} - \mathbf{S}^*$ , also der Zuwachs an Spannungen, mit den plastischen Verzerrungsraten  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i$  immer positive Arbeit leisten. Unter Berücksichtigung der Normalenregel ist dies der Fall, wenn der Winkel zwischen den beiden Vektoren  $\mathbf{S} - \mathbf{S}^*$  und  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i$  immer kleiner  $90^\circ$  ist. Daraus lässt sich eine konvexe Form der Fließfläche ableiten.

Analog hierzu muss ein Spannungszuwachs  $\dot{\mathbf{S}}$  von Punkten auf der Fließfläche nach außen gerichtet sein, wenn sich ein inelastisches Materialverhalten einstellen soll. Auch hier ist der Winkel zwischen den Vektoren kleiner  $90^\circ$  und es wird eine positive dissipierte Energie gewährleistet. Daraus lässt sich die sogenannte Belastungsbedingung ableiten.

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} : \dot{\mathbf{S}} > 0 \quad (2.204)$$

Aus den zuvor aufgestellten Restriktionen lassen sich die KUHN-TUCKER Bedingungen bzw. Be- und Entlastungsbedingungen zusammenstellen. Der LAGRANGE-Operators  $\gamma$ , der die Größe der irreversiblen Verzerrungsrate definiert, muss für ein inelastisches Materialverhalten mit  $F(\text{dev}\mathbf{S}, \mathbf{q}_n) = 0$  größer null sein. Liegt ein elastisches Materialverhalten vor, so ist  $F(\text{dev}\mathbf{S}, \mathbf{q}_n) < 0$  und es ergibt sich  $\gamma = 0$ . Folglich verschwindet für einen beliebigen Zustand  $\gamma F(\text{dev}\mathbf{S}, \mathbf{q}_n)$  und es gilt auch  $\gamma \dot{F}(\text{dev}\mathbf{S}, \mathbf{q}_n) = 0$ . Aus diesen Überlegungen und der Konsistenzbedingung in (2.195) lassen sich die Be- und Entlastungsbedingungen für einen beliebigen Spannungszustand ableiten.

$$\begin{aligned} F(\text{dev}\mathbf{S}, \mathbf{q}_n) < 0 & \Rightarrow \gamma = 0 \quad \text{elastische Belastung} \\ F(\text{dev}\mathbf{S}, \mathbf{q}_n) = 0 & \begin{cases} \dot{F}(\text{dev}\mathbf{S}, \mathbf{q}_n) = 0 \quad \wedge \quad \gamma > 0 & \text{plastische Belastung} \\ \dot{F}(\text{dev}\mathbf{S}, \mathbf{q}_n) = 0 \quad \wedge \quad \gamma = 0 & \text{neutrale Belastung} \\ \dot{F}(\text{dev}\mathbf{S}, \mathbf{q}_n) < 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 0 & \text{elastische Entlastung} \end{cases} \quad (2.205) \end{aligned}$$

### 2.8.2.1 Melan-Prager-Ziegler-Shield Fließfläche

Ausgehend von der VON MISES Fließfläche unter Berücksichtigung einer isotropen Verfestigung  $\alpha$  und einer kinematischen Verfestigung  $\beta$  als interne Variablen  $\mathbf{q}_n$ , lässt sich die MELAN-PRAGER-ZIEGLER-SHIELD Fließbedingung wie folgt definieren.

$$F(\text{dev}\mathbf{S}, \beta, \alpha) = (\text{dev}\mathbf{S} - \beta) : (\text{dev}\mathbf{S} - \beta) - g(\alpha) = 0 \quad (2.206)$$

Aus dieser Gleichung ist die Beschreibung eines Kreises in der  $\pi$ -Ebene mit der deviatorischen Mittelpunktverschiebung  $\beta$  und dem Radius  $\sqrt{\frac{3}{2} g(\alpha)}$  erkennbar. Die Fließfläche hat die Form einer quadratischen Spannung. Die isotrope Verfestigungsfunktion  $g(\alpha)$  beschreibt die Verfestigung des Materials nach Überschreiten der Fließspannung. Die kinematische Verfestigung bildet den BAUSCHINGER Effekt bei zyklischer Belastungsgeschichte ab.

Zur Bestimmung des LAGRANGE-Operators  $\gamma$  wird die Konsistenzbedingung aus (2.195) verwendet, die sich für die hier gewählte Fließfläche bei kleinen Formänderungen zu

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} : \dot{\mathbf{S}} + \frac{\partial F}{\partial \beta} : \dot{\beta} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = 0 \quad (2.207)$$

ergibt. Für die materielle Ableitung der internen Variablen werden physikalisch motivierte Evolutionsgleichungen angesetzt, die durch die Materialparameter  $c_\alpha$  und  $c_\beta$  beschrieben werden.

$$\dot{\beta} = c_\beta \dot{\epsilon}_i \quad , \quad \dot{\alpha} = c_\alpha \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} : \dot{\epsilon}_i \quad (2.208)$$

Mit den folgenden Regeln für die Fließbedingung in Gleichung (2.206)

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial F}{\partial \text{dev}\mathbf{S}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} : \dot{\mathbf{S}} = \frac{\partial F}{\partial \text{dev}\mathbf{S}} : \dot{\mathbf{S}} = \frac{\partial F}{\partial \text{dev}\mathbf{S}} : \text{dev}\dot{\mathbf{S}} \quad (2.209)$$

und der assoziierten Fließregel in (2.203) lässt sich der LAGRANGE-Operators  $\gamma$ , der auch Konsistenzparameter genannt wird, aus der Konsistenzbedingung der MELAN-PRAGER-ZIEGLER-SHIELD Fließfläche zu

$$\begin{aligned} 2 (\text{dev}\mathbf{S} - \beta) : \text{dev}\dot{\mathbf{S}} - 4 \gamma c_\beta (\text{dev}\mathbf{S} - \beta) : (\text{dev}\mathbf{S} - \beta) \\ - 4 \gamma c_\alpha g(\alpha)_{,\alpha} (\text{dev}\mathbf{S} - \beta) : (\text{dev}\mathbf{S} - \beta) &= 0 \\ \gamma = \frac{(\text{dev}\mathbf{S} - \beta) : \text{dev}\dot{\mathbf{S}}}{2 (c_\beta + c_\alpha g(\alpha)_{,\alpha}) g(\alpha)} \end{aligned} \quad (2.210)$$

bestimmen, wodurch die plastischen Verzerrungsraten definiert sind.

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{(\text{dev}\mathbf{S} - \beta) : \text{dev}\dot{\mathbf{S}}}{(c_\beta + c_\alpha g(\alpha)_{,\alpha}) g(\alpha)} (\text{dev}\mathbf{S} - \beta) \quad (2.211)$$



Der Materialparameter  $c_\beta$  der kinematischen Verfestigung ist positiv, da sich für wachsende irreversible Dehnungen in (2.208) steigende Spannungen, also eine positive Mittelpunktverschiebung, ergeben müssen. Da die interne Variable  $\alpha$  vom Typ einer plastischen Deformationsenergie ist, und die Ableitung der Fließfläche nach den Spannungen eine Spannung ergibt, muss in (2.208) die Variable  $c_\alpha$  positiv sein. Die Funktion  $g(\alpha)$  ist vom Typ her eine quadratische Spannung und ebenfalls positiv. Bei steigender plastischer Deformationsenergie steigt der Funktionswert ebenfalls, wodurch die Ableitung  $g(\alpha)_{,\alpha}$  positiv ist. Daraus folgt, dass sich aus der Bedingung  $\gamma > 0$  zeigen lässt, dass die Belastungsbedingung in (2.204) automatisch erfüllt ist.

Für die Implementation des Stoffgesetzes wird der Tensor der konsistenten Tangentensteifigkeit benötigt, um die Rate des Spannungstensors in Abhängigkeit von der Rate des Verzerrungstensors auszudrücken. Mit Hilfe der additiven Aufspaltung der Verzerrungen in (2.197), der Spannungsrate in (2.201) und der Konsistenzbedingung in (2.195) lässt sich der LAGRANGE-Operator  $\gamma$  zu

$$\gamma = \frac{\frac{1}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \mathbf{n} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{2 (\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n} + c_\beta + c_\alpha g(\alpha)_{,\alpha})} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} \quad , \quad \boldsymbol{\eta} = \text{dev} \mathbf{S} - \boldsymbol{\beta} \quad (2.212)$$

berechnen. Der Tensor  $\boldsymbol{\eta}$  steht hier für den Spannungstensor senkrecht zur Fließfläche und  $\mathbf{n}$  ist sein normierter. Die irreversiblen Verzerrungsraten  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i$  sind durch eine Funktion der Gesamtverzerrungsraten  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  definiert.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i = 2 \gamma \boldsymbol{\eta} = \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{C} : \mathbf{n}}{\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n} + c_\beta + c_\alpha g(\alpha)_{,\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.213)$$

Hierbei wurde die Symmetrie des Spannungs- und Verzerrungstensors, die einige Symmetrieeigenschaften des linear-elastischen Materialtensor  $\mathbf{C}$  zur Folge hat, berücksichtigt. Der Tensor der konsistenten Tangentensteifigkeit  $\mathbf{C}_{ep}$  lässt sich nun aus der Gleichung der Spannungsrate in (2.201) ableiten.

$$\mathbf{C}_{ep} = \mathbf{C} - \frac{\mathbf{C} : \mathbf{n} \otimes \mathbf{C} : \mathbf{n}}{\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n} + c_\beta + c_\alpha g(\alpha)_{,\alpha}} \quad (2.214)$$

Unter Verwendung des linear-elastischen Materialgesetzes von HOOKE in (2.189) ergibt sich der konsistente Tangentensteifigkeitstensor zu:

$$\mathbf{C}_{ep} = \kappa \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + 2 \mu \left( \mathbf{G} - \frac{1}{3} \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} - \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{1 + \frac{c_\beta + c_\alpha g(\alpha)_{,\alpha}}{2 \mu}} \right) . \quad (2.215)$$

### 2.8.2.2 von Mises Fließfläche

Da im Bauwesen wechselnde Beanspruchungen nicht die Bedeutung besitzen wie im Maschinenbau, wird im Folgenden ein Materialgesetz mit rein isotroper Verfestigung vorgestellt.

Die VON MISES Fließfläche ist nach [84] für eine isotrope Verfestigung  $\alpha$  zu

$$F(\text{dev} \mathbf{S}, \alpha) = \|\text{dev} \mathbf{S}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K(\alpha) = 0 . \quad (2.216)$$

definiert und hat die Form einer Spannung. Der Radius der Prozessgeschichte in der  $\pi$ -Ebene entspricht der Verfestigungsfunktion  $K(\alpha)$ . Durch den Faktor  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  ergibt sich  $K(\alpha)$  als Fließspannung bei reinem Zug.

Diese Definition der Fließfläche wird auch  $J_2$ -Plastizität genannt, da sich zeigen lässt, dass die Determinante des Spannungsdeviators  $\|\text{dev}\mathbf{S}\| = \sqrt{-2 \mathcal{J}_{\text{dev}\mathbf{S}}} = \sqrt{\mathcal{II}_{\text{dev}\mathbf{S}}}$  ist.  $\mathcal{J}_{\text{dev}\mathbf{S}}$  ist die zweite Hauptinvariante des Spannungsdeviators definiert nach [9]. Hauptinvarianten sind die drei Invarianten des Eigenwertproblems eines gegebenen Tensors.  $\mathcal{II}_{\text{dev}\mathbf{S}}$  ist die zweite Grundinvariante, die über die Spur des Spannungsdeviators definiert ist. Die erste Hauptinvariante  $\mathcal{J}_{\text{dev}\mathbf{S}}$  ist gleich der ersten Grundinvarianten  $\mathcal{I}_{\text{dev}\mathbf{S}}$  und gibt den hydrostatischen Druck des Spannungszustandes an. Dieser ist in  $\text{dev}\mathbf{S}$  nicht mehr enthalten und die ersten Invarianten sind folglich null. Nicht berücksichtigt wurde in dieser Fließflächenbeschreibung die dritte Hauptinvariante  $\mathcal{III}_{\text{dev}\mathbf{S}}$  bzw. Grundinvariante  $\mathcal{III}_{\text{dev}\mathbf{S}}$  der deviatorischen Spannungen. Sie soll jedoch bei metallischen Werkstoffen keinen großen Einfluß auf die Plastifizierung des Materials haben und kann daher vernachlässigt werden.

Die Vergleichsspannung  $S_V$ , die durch die Gestaltänderungsarbeit-Hypothese definiert ist [22], ist ebenfalls eine Funktion der zweiten Hauptinvarianten des Spannungsdeviators mit  $S_V = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}\mathbf{S}\| = \sqrt{-3 \mathcal{J}_{\text{dev}\mathbf{S}}} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathcal{II}_{\text{dev}\mathbf{S}}}$ . Die Fließflächenbeschreibung nach VON MISES lässt sich daher als eine Funktion der Schubdehnungsenergie bezeichnen [88].

Mit dieser Fließbedingung lassen sich die irreversiblen Verzerrungsraten aus der assoziierten Fließregel in (2.203) zu

$$\dot{\epsilon}_i = \gamma \frac{\text{dev}\mathbf{S}}{\|\text{dev}\mathbf{S}\|} \quad (2.217)$$

berechnen und die Evolutionsgleichung der isotropen Verfestigung  $\alpha$  ergibt sich laut SIMO [84] zu

$$\dot{\alpha} = \gamma c_\alpha \quad \text{mit} \quad c_\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\alpha} = \gamma \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (2.218)$$

Auch hier lassen sich die irreversiblen Verzerrungsraten und der konsistente Tangentensteifigkeitstensor herleiten. Die Ergebnisse sind identisch mit den Ergebnissen einer MELAN-PRAGER-ZIEGLER-SHIELD Fließbedingung mit isotroper Verfestigung, wenn gilt:

$$\beta = \mathbf{0} \quad c_\beta = 0 \quad g(\alpha) = \frac{2}{3} K^2(\alpha) \quad c_\alpha g(\alpha)_{,\alpha} = \frac{2}{3} K(\alpha)_{,\alpha} \quad (2.219)$$

Für die irreversiblen Verzerrungsraten ergibt sich

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{C} : \mathbf{n}}{\mathbf{n} : \mathbf{C} : \mathbf{n} + \frac{2}{3} K(\alpha)_{,\alpha}} : \dot{\epsilon} \quad (2.220)$$

und für den Tensor der konsistenten Tangentensteifigkeit  $\mathbf{C}_{ep}$  folgt:

$$\mathbf{C}_{ep} = \kappa \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + 2 \mu \left( \mathbf{G} - \frac{1}{3} \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} - \frac{\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}}{1 + \frac{K(\alpha), \alpha}{3 \mu}} \right). \quad (2.221)$$

### 3 Hierarchische Schalenmodelle

Eine Schale als flächenhafte Struktur ist definiert durch ihre gekrümmte Geometrie und ihre charakteristischen Abmessungen, die in zwei Richtungen, den Mittelflächenrichtungen, wesentlich größer sind als in Dickenrichtung. Sie kann in alle Richtungen belastet sein und stellt einen Sonderfall eines allgemeinen, dreidimensionalen Körpers dar. Durch ihre gekrümmte Struktur besitzt die Schale ein günstiges Verhältnis von Eigengewicht zu Steifigkeit und wird daher bei vielen Leichtbauten und weit gespannten Tragwerken eingesetzt. Die Krümmung der Struktur bewirkt, dass Belastungen senkrecht zur Schale im Wesentlichen durch Spannungen in Mittelflächenrichtung abgetragen werden können. Allerdings sind Schalentragwerke durch ihre hohe Schlankheit sehr anfällig gegen Imperfektionen, Einzellasten und Biegebeanspruchungen.

Die kinematische Beschreibung einer Schale kann aus der allgemeinen Beschreibung des Kontinuums abgeleitet werden. Da das Tragverhalten des Systems von den lokalen Richtungen der Schalenmittelfläche abhängig ist, ist es sinnvoll, die Beschreibung der Schale basierend auf einem krummlinigen, der Geometrie folgenden Koordinatensystem zu formulieren. Klassische Schalentheorien, wie zum Beispiel die Theorie nach KIRCHHOFF-LOVE oder nach NAGHDI, beschränken sich auf eine zweidimensionale Beschreibung des Problems [8]. Hierbei werden die gesuchten Verschiebungen und Verdrehungen bezogen auf die Mittelfläche definiert und ein modifiziertes Stoffgesetz, das die Normalspannungen in Dickenrichtung zu null setzt, verwendet (siehe Anhang B). Für linear-elastische Probleme und dünne Schalen erzielen beide Theorien eine gute Näherung der dreidimensionalen Lösung. Bei dicken Schalen, wie sie im Bauwesen meist vorhanden sind, ergeben sich aus der NAGHDI Theorie bessere Ergebnisse.

Um nun Schalen mit allgemeinen inelastischen Materialmodellen zu berechnen, muss die verwendete Theorie einen dreidimensionalen Spannungszustand abbilden können. In den letzten 25 Jahren gab es zwei Entwicklungsrichtungen in der Beschreibung neuer Schalentheorien, die dieses Ziel verfolgten [15].

- Die Erste beschreibt das Schalenkontinuum basierend auf einem zweidimensionalen, krummlinigen Kontinuum. Mit einer erweiterten Enhanced-Assumed-Strain Methode, die von BÜCHTER und RAMM [24] entwickelt und von BISCHOFF [14] weiter verfolgt wurde, konnte ein lockingfreies Schalenelement entwickelt werden. Alternativ kann das zweidimensionale Kontinuum mit sogenannten Direktoren, die die Verschiebungen, Verdrehungen, Krümmungen etc. der Schale abbilden, beschrieben werden, um einen dreidimensionalen Spannungszustand zu erhalten. Diese Methode ist von SANSOUR in [78] aufgenommen und von ECKSTEIN in [34] weiterentwickelt worden. Die Direktoren können mit Verschiebungs- oder auch mit Rotationsvariablen angenähert werden. Die Verwendung von Verschiebungsvariablen hat den Vorteil, dass sie bei großen Formänderungen additiv sind.

- Die zweite Entwicklungsrichtung basiert auf Volumenelementen, die nur mit Hilfe von Verschiebungsvariablen beschrieben werden. Sie gewährleisten über den Ansatzgrad der Verschiebungsapproximation in Dickenrichtung eine ausreichende kinematische Beschreibung der Schale, sodass der erforderliche Spannungszustand abgebildet werden kann. Das erweiterte Volumenelement von PARISCH in [64] stellt eine Möglichkeit dar. Ein orthotroper, hierarchischer Ansatzraum in alle drei Richtungen wurde von SZABÓ entwickelt [97] und von DÜSTER wieder aufgenommen [30]. Für eine  $J_2$  Plastizitätstheorie mit isotroper Verfestigung hat sich dieses Element als geeignet erwiesen [32]. Ähnliche Volumenelemente sind auch von SURANA [89] und FISH [38] entwickelt worden, jedoch nicht mit einem konsequent variablen, hierarchischen Ansatzraum wie bei den zuvor genannten Autoren.

Die Idee der hierarchischen Schalenmodelle besteht nun darin, eine allgemeine Modellbeschreibung zu entwickeln, in der ein kinematisch höheres Modell als eine Erweiterung eines niedrigeren Modells definiert ist. Die Beschreibung dieser Modelle basiert, wie die zuvor aufgezeigte erste Entwicklungsrichtung, auf einem zweidimensionalen, krummlinigen Schalenkontinuum. Hierarchische Schalenmodelle zeichnen sich durch einen beliebigen Polynomgrad des Verschiebungsfeldes über die Dicke der Schale aus, wodurch eine polynomiale Beschreibung der Kinematik hergeleitet werden kann. Sie sind vergleichbar zu dem von DÜSTER entwickelten Volumenelement mit orthotropem, hierarchischem Ansatzraum von Formfunktionen. Jedoch haben die hierarchischen Schalenmodelle den Vorteil, dass eine entkoppelte Beschreibung der Theorie in der dritten lokalen Richtung vorhanden ist. Eine analytische oder, bei inelastischem Materialverhalten, numerische Vorabintegration über die Dicke kann daher durchgeführt werden und führt zu effektiveren Rechenzeiten im Vergleich zu Volumenelementen [15]. Des Weiteren werden die Verschiebungsvariablen im lokalen Koordinatensystem formuliert und approximiert, sodass die lokalen Lastabtragsrichtungen mit ihren unterschiedlichen Eigenschaften effizienter abgebildet werden können. Für die Approximation der Verschiebungsvariablen werden zweidimensionale, in der Mittelfläche definierte, hierarchische Ansatzfunktionen gewählt. Dieses Konzept für hierarchische Schalenmodelle wurde erstmalig von ODEN vorgestellt [26] und von SCHWAB weiter entwickelt [77]. Jedoch haben beide nur einfach gekrümmte Zylinderschalen und Platten untersucht. Der große Vorteil der hierarchischen Schalenmodelle, die Abbildung eines dreidimensionalen Spannungszustandes, wird in dieser Arbeit erstmalig für inelastische Materialmodelle ausgenutzt.

### 3.1 Kinematische Beziehungen

Die räumliche Schale mit beliebiger Geometrie wird durch eine Beschreibung der Schalenmittelfläche, die bei  $\frac{h}{2}$  liegt und  $h$  die Dicke der Schale darstellt, angenähert. Die sich daraus ergebende Schalentheorie basiert auf der Beschreibung eines zweidimensionalen, krummlinigen Kontinuums.

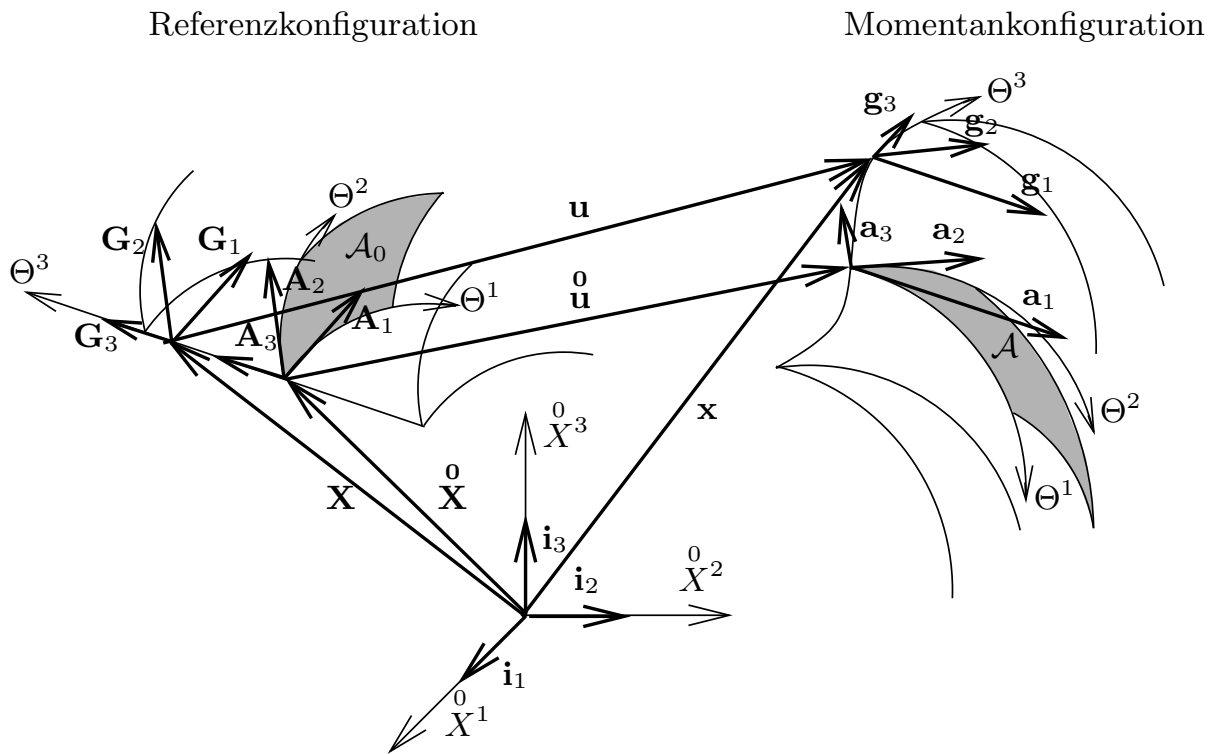


Abb. 3.1: Konfigurationen der Schale

### 3.1.1 Mittelfläche

Aus dem Ortsvektor  $\overset{0}{\mathbf{X}}$  der Schalenmittelfläche

$$\overset{0}{\mathbf{X}} = \overset{0}{X}^i \mathbf{i}_i = \overset{0}{X}^i(\Theta^\alpha) \mathbf{i}_i = \overset{0}{X}^i(\Theta^1, \Theta^2) \mathbf{i}_i \quad (3.1)$$

lassen sich die ko- und kontravarianten Basen  $\mathbf{A}_\alpha$  und  $\mathbf{A}^\alpha$  und die Metrik  $\mathbf{A}$  der unverformten Schalenmittelfläche bestimmen, die in Abbildung 3.1 dargestellt sind.

$$\mathbf{A}_\alpha = \frac{\partial \overset{0}{\mathbf{X}}}{\partial \Theta^\alpha} = \overset{0}{\mathbf{X}}_{,\alpha} \quad , \quad \mathbf{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{A}} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}^3 \quad , \quad A = |\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2| \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}^i = A_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j = A^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \quad \text{mit} \\ A_{\alpha\beta} &= \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta \quad , \quad A_{\alpha 3} = A_{3\beta} = 0 \quad , \quad A_{33} = 1 \\ \det \mathbf{A} &:= |A_{\alpha\beta}| = A \end{aligned} \quad (3.3)$$

Das Linienelement  $d\overset{0}{\mathbf{X}}$  der Mittelfläche lässt sich aus dem totalen Differential des Ortsvektors der Schalenmittelfläche zu

$$d\overset{0}{\mathbf{X}} = \frac{\partial \overset{0}{\mathbf{X}}}{\partial \Theta^\alpha} d\Theta^\alpha = \mathbf{A}_\alpha d\Theta^\alpha \quad (3.4)$$

berechnen, sodass für das vektorielle Flächenelement  $d\mathbf{A}_0$  und das skalare Flächenelement  $d\mathcal{A}_0$  folgt:

$$d\mathbf{A}_0 = d\overset{\circ}{\mathbf{X}}_1 \times d\overset{\circ}{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{A}_3 d\mathcal{A}_0 = \mathbf{A}_3 \sqrt{A} d\Theta^1 d\Theta^2 \quad (3.5)$$

$$d\mathcal{A}_0 = \sqrt{A} d\Theta^1 d\Theta^2. \quad (3.6)$$

Das Quadrat des Linienelementes der Fläche  $d\mathcal{L}_0^2$  gibt die *erste Grundform* der Flächentheorie an, die die Einträge des Metriktensors beinhaltet mit denen Abstände, Winkel und Flächeninhalte auf einer Fläche berechnet werden können.

$$d\mathcal{L}_0^2 = d\overset{\circ}{\mathbf{X}} \cdot d\overset{\circ}{\mathbf{X}} = A_{\alpha\beta} d\Theta^\alpha d\Theta^\beta \quad (3.7)$$

Der Krümmungstensor  $\mathbf{B}$  wird aus dem negativen Gradienten des Normalenvektors der Mittelfläche bezogen auf die Mittelfläche gebildet.

$$\mathbf{B} = -\overline{\text{GRAD}}\mathbf{A}_3 = -\frac{\partial\mathbf{A}_3}{\partial\Theta^i} \otimes \frac{\partial\Theta^i}{\partial\overset{\circ}{\mathbf{X}}} = -\mathbf{A}_{3,i} \otimes \mathbf{A}^i \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j = B^i_j \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}^j \quad \text{mit}$$

$$B_{\alpha\beta} = -\mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} = \mathbf{A}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{A}_3, \quad B_{\alpha 3} = B_{3\beta} = B_{33} = 0$$

Aus den gemischten Komponenten des Krümmungstensors kann die GAUSSsche Krümmung  $K$  und die Hauptkrümmung  $H$  eines Punktes auf der Schale berechnet werden, die abhängig von den zwei Hauptkrümmungsradien  $R_{min}$  und  $R_{max}$  sind.

$$K = |B^{\alpha}_{\cdot\beta}| = \frac{1}{R_{min}R_{max}} \begin{cases} > 0 & \text{elliptischer Punkt} \\ < 0 & \text{hyperbolischer Punkt} \\ \text{sonst} & \text{parabolischer Punkt} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$H = \frac{1}{2} B^{\alpha}_{\cdot\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{min}} + \frac{1}{R_{max}} \right)$$

Die *zweite Grundform* der Flächentheorie entsteht aus dem Produkt des differentiellen Linienelementes der Fläche mit dem Differential des Normalenvektors  $d\mathbf{A}_3$  der Fläche. Sie beinhaltet die kovarianten Komponenten des Krümmungstensors und beschreibt somit die geometrische Eigenschaft der Mittelfläche an einem Punkt.

$$\begin{aligned} d\overset{\circ}{\mathbf{X}} \cdot d\mathbf{A}_3 &= \mathbf{A}_\alpha d\Theta^\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} d\Theta^\beta = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} d\Theta^\alpha d\Theta^\beta = -\mathbf{A}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{A}_3 d\Theta^\alpha d\Theta^\beta \\ &= -B_{\alpha\beta} d\Theta^\alpha d\Theta^\beta \end{aligned} \quad (3.10)$$

Für die partielle Ableitung eines Vektors nach den körperfesten, konvektiven Koordinaten  $\Theta^i$  werden im Folgenden noch die CHRISTOFFEL-Symbole  $\Gamma^l_{ij}$  benötigt. Sie

beschreiben die Veränderung der Basen in Richtung der kontravarianten Koordinaten.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{\beta}_{,\alpha} &= -\Gamma_{\alpha i}^{\beta} \mathbf{A}^i & \mathbf{A}^3_{,\alpha} &= -\Gamma_{\alpha i}^3 \mathbf{A}^i \\
&= -(\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} \mathbf{A}^{\gamma} + \Gamma_{\alpha 3}^{\beta} \mathbf{A}^3) & &= -(\Gamma_{\alpha\gamma}^3 \mathbf{A}^{\gamma} + \Gamma_{\alpha 3}^3 \mathbf{A}^3) \\
\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} &= \mathbf{A}_{\alpha,\gamma} \cdot \mathbf{A}^{\beta} & \Gamma_{\alpha\gamma}^3 &= \mathbf{A}_{\alpha,\gamma} \cdot \mathbf{A}^3 = B_{\alpha\gamma} \\
\Gamma_{\alpha 3}^{\beta} &= \mathbf{A}_{\alpha,3} \cdot \mathbf{A}^{\beta} = -B_{\cdot\alpha}^{\beta} & \Gamma_{\alpha 3}^3 &= \mathbf{A}_{\alpha,3} \cdot \mathbf{A}^3 = 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Die kovariante Ableitung der Basen zur Erhaltung der Tensoreigenschaften ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{\beta}|_{\alpha} &= \mathbf{A}_{,\alpha}^{\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} \mathbf{A}^{\gamma} & \mathbf{A}^3|_{\alpha} &= \mathbf{A}_{,\alpha}^3 + \Gamma_{\alpha 3}^3 \mathbf{A}^3 \\
&= B_{\cdot\alpha}^{\beta} \mathbf{A}^3 & &= -B_{\alpha\beta} \mathbf{A}^{\beta}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

### 3.1.2 Kontinuum

Das unverformte Schalenkontinuum  $\mathcal{B}_0$  kann für den Ortsvektor  $\mathbf{X}$  des Kontinuums linear in Dickenrichtung  $\Theta^3$  beschrieben werden, wie in Abbildung 3.1 gezeigt ist.

$$\mathbf{X} = \overset{0}{\mathbf{X}} + \Theta^3 \mathbf{A}_3 \quad \text{mit} \quad -\frac{h}{2} \leq \Theta^3 \leq \frac{h}{2} \tag{3.13}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich das Linienelement  $d\mathbf{X}$  des Kontinuums in Gleichung (2.16) zu

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Theta^i} d\Theta^i = \mathbf{G}_i d\Theta^i \tag{3.14}$$

berechnen und die kovarianten Basen  $\mathbf{G}_i$  in Gleichung (2.3) sind für das Schalenkontinuum definiert.

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Theta^i} \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}_{\alpha} = \mathbf{A}_{\alpha} + \Theta^3 \mathbf{A}_{3,\alpha} \quad , \quad \mathbf{G}_3 = \mathbf{A}_3 \tag{3.15}$$

Für einen Übergang der Basen des Kontinuums in die Basen der Mittelfläche wird ein Zweipunktstensor definiert, der aus dem dyadischen Produkt dieser Basen besteht.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z} &= \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{A}^i & \mathbf{Z}^{-1} &= \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{G}^i \\
\mathbf{Z}^{-T} &= \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{A}_i & \mathbf{Z}^T &= \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{G}_i
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Er wird der materielle Shifter  $\mathbf{Z}$  genannt und bildet einen Transformationszusammenhang zwischen den beiden Basissystemen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_i &= \mathbf{Z} \mathbf{A}_i & \mathbf{A}_i &= \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{G}_i \\
\mathbf{G}^i &= \mathbf{Z}^{-T} \mathbf{A}^i & \mathbf{A}^i &= \mathbf{Z}^T \mathbf{G}^i
\end{aligned} \quad \text{bzw.} \tag{3.17}$$



Mit den Gleichungen (3.3), (3.8) und (3.15) lässt sich der Shifter auf die Basen der Mittelfläche beziehen.

$$\mathbf{Z} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{A}^i = \mathbf{A} - \Theta^3 \mathbf{B} = Z_{.j}^i \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}^j \quad \text{mit} \quad Z_{.j}^i = \delta_j^i - \Theta^3 B_{.j}^i \quad (3.18)$$

$$\det \mathbf{Z} := |Z_{.j}^i| = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{A}} = 1 - 2\Theta^3 H + (\Theta^3)^2 K \quad (3.19)$$

Die Determinante des Shifters  $\det \mathbf{Z}$  hängt von der GAUSSSchen Krümmung und der Hauptkrümmung eines Punktes auf der Schalenmittelfläche ab und ist eine quadratische Funktion in  $\Theta^3$ .

Die kovarianten Komponenten des Metriktensors  $\mathbf{G}$  des unverformten Schalenkontinuums in (2.7) berechnen sich dann zu

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_i = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad \text{mit} \\ G_{\alpha\beta} &= A_{\alpha\beta} - \Theta^3 (A_{\alpha\delta} B_{.\beta}^{\delta} + A_{\beta\delta} B_{.\alpha}^{\delta}) + (\Theta^3)^2 A_{\delta\pi} B_{.\alpha}^{\delta} B_{.\beta}^{\pi} \\ &= A_{\alpha\beta} - \Theta^3 2 B_{\alpha\beta} + (\Theta^3)^2 B_{\pi\alpha} B_{.\beta}^{\pi} \quad , \\ G_{\alpha 3} &= G_{3\beta} = 0 \quad , \quad G_{33} = 1 \quad , \end{aligned} \quad (3.20)$$

wodurch sich die kontravarianten Komponenten bestimmen lassen.

$$\begin{aligned} G^{11} &= \frac{1}{G} G_{22} \quad , \quad G^{12} = G^{21} = -\frac{1}{G} G_{12} \quad , \quad G^{22} = \frac{1}{G} G_{11} \quad , \\ G^{\alpha 3} &= G^{3\beta} = 0 \quad , \quad G^{33} = 1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Hieraus wird mit Gleichung (3.19) deutlich, dass die kontravarianten Komponenten der Metrik  $\mathbf{G}$  eine gebrochen rationale Funktion darstellen, die sich aus einem quadratischen Polynom in  $\Theta^3$  im Zähler und einem Polynom vierten Grades in  $\Theta^3$  im Nenner zusammensetzt.

Die quadratische Länge des Linienelementes  $d\mathcal{L}^2$  des Kontinuums ergibt sich mit (3.14) zu

$$d\mathcal{L}^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{G}_i d\Theta^i \cdot \mathbf{G}_j d\Theta^j = G_{ij} d\Theta^i d\Theta^j \quad , \quad (3.22)$$

wodurch sich ein differentielles Linienelement  $d\mathcal{L}$  des Kontinuums auf der Kurve  $\Theta^\alpha$  wie folgt berechnet:

$$d\mathcal{L} = \sqrt{G_{\alpha\alpha}} d\Theta^\alpha = \sqrt{G^{\beta\beta}} \sqrt{G} d\Theta^\alpha = \sqrt{G^{\beta\beta}} \det \mathbf{Z} \sqrt{A} d\Theta^\alpha \quad \not\propto_{\alpha} \quad . \quad (3.23)$$

Im kovarianten Koordinatensystem sind drei Oberflächen eines Körpers definiert. Das erste vektorielle Flächenelement  $d\mathcal{S}_0^1$  beschreibt die  $\Theta^3\Theta^1$ -Ebene, das zweite  $d\mathcal{S}_0^2$  die  $\Theta^2\Theta^3$ -Ebene und das dritte  $d\mathcal{S}_0^3$  die  $\Theta^1\Theta^2$ -Ebene. Die entsprechende Flächennormale  $\mathbf{N}^i$  berechnet sich aus der normierten kontravarianten Basis, die senkrecht

auf der Ebene  $i$  steht. Mit Gleichung (2.23) lassen sich die drei vektoriellen Flächenelemente berechnen.

$$\begin{aligned} d\mathcal{S}_0^1 &= d\mathcal{S}_0^1 \mathbf{N}^2 = \mathbf{G}_3 \times \mathbf{G}_1 d\Theta^3 d\Theta^1 & \text{mit} & \quad \mathbf{N}^2 = \frac{1}{\sqrt{G^{22}}} \mathbf{G}^2 \\ d\mathcal{S}_0^2 &= d\mathcal{S}_0^2 \mathbf{N}^1 = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3 d\Theta^3 d\Theta^2 & \text{mit} & \quad \mathbf{N}^1 = \frac{1}{\sqrt{G^{11}}} \mathbf{G}^1 \\ d\mathcal{S}_0^3 &= d\mathcal{S}_0^3 \mathbf{N}^3 = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2 d\Theta^1 d\Theta^2 & \text{mit} & \quad \mathbf{N}^3 = \mathbf{G}^3 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die differentiellen Flächenelemente  $d\mathcal{S}_0^i$  berechnen sich aus dem Betrag des entsprechenden vektoriellen Flächenelementes in (3.24).

$$\begin{aligned} d\mathcal{S}_0^1 &= \sqrt{G^{22}} \det \mathbf{Z} d\Theta^3 \sqrt{A} d\Theta^1 \\ d\mathcal{S}_0^2 &= \sqrt{G^{11}} \det \mathbf{Z} d\Theta^3 \sqrt{A} d\Theta^2 \\ d\mathcal{S}_0^3 &= \det \mathbf{Z} d\mathcal{A}_0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Das differentielle Volumenelement  $d\mathcal{V}_0$  in Gleichung (2.26) lässt sich mit Hilfe von (3.19) und (3.6) auf die Mittelfläche beziehen.

$$d\mathcal{V}_0 = \det \mathbf{Z} \sqrt{A} d\Theta^1 d\Theta^2 d\Theta^3 = \det \mathbf{Z} d\Theta^3 d\mathcal{A}_0 \quad (3.26)$$

### 3.1.3 Deformation

Um die Deformation hierarchischer Schalenmodelle zu beschreiben, wird der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  des Kontinuums in Dickenrichtung über ein Polynom der Dickenkoordinate  $\Theta^3$  von  $k = 0$  bis  $nk$  der einzelnen Verschiebungsvektoren  $\mathbf{u}^k$  definiert. Das Polynom setzt sich aus einer Summe von Produkten zusammen, wobei sich jedes Produkt aus den Faktoren  $(\Theta^3)^k$  und  $\mathbf{u}^k$  zusammensetzt. Durch diese Definition entsteht eine polynomiale Beschreibung der Kinematik über die Dicke der Schale, die durch die Wahl der Modellnummer  $nk$ , die den maximalen Grad des Polynomes angibt, bestimmt wird. Die exakte dreidimensionale Kinematik über die Dicke, also der Übergang zum Kontinuum, wird mit  $nk \rightarrow \infty$  erzielt.

Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  des Kontinuums ist somit definiert zu

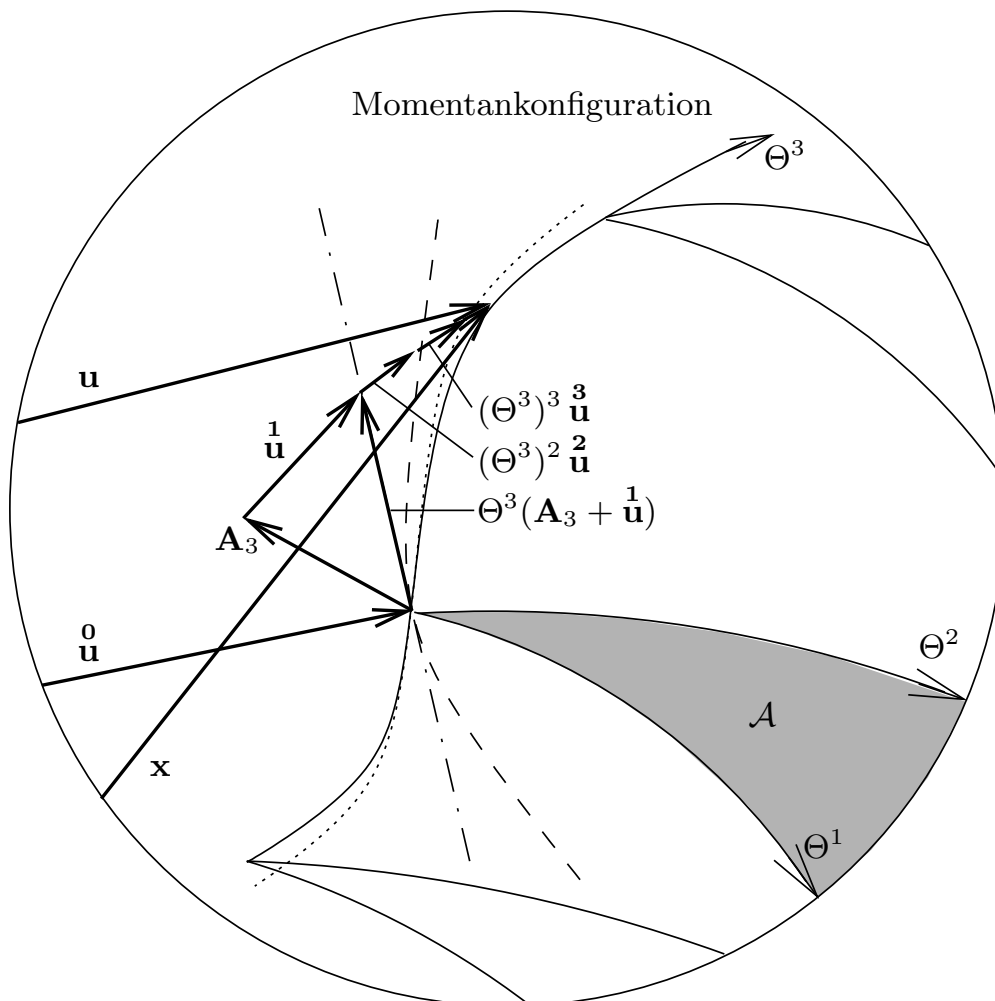
$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \mathbf{u}^k(\Theta^\alpha) \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}^k(\Theta^\alpha) = u_\alpha^k \mathbf{A}^\alpha + u_3^k \mathbf{A}^3, \quad (3.27)$$

wobei sich die Komponenten des Vektors auf die kontravarianten Basen der Schalenmittelfläche beziehen.

Die hierarchischen Schalenmodelle, die sich aus dem so definierten Verschiebungsvektor herleiten lassen, basieren auf der Idee, dass die kinematische Beschreibung eines Modells in dem nächst höheren Modell vollständig enthalten ist. Das Modell  $nk$  ist das nächst höhere des Modells  $nk - 1$ . Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}^{nk}$  ist zur Beschrei-

bung der Gesamtverschiebung im Vergleich zu dem Modell  $nk - 1$  hinzugekommen. Dieser Verschiebungsvektor, auch Direktor genannt, wird durch drei kovariante Komponenten bezüglich der Basen der unverformten Mittelfläche beschrieben. Es kommen also drei zu approximierende Unbekannte bei einer Erhöhung der Modellnummer hinzu. Da in dieser Theorie keine Rotationsvariablen verwendet werden, kann sie gut auf eine Theorie großer Deformationen erweitert werden. Bei Verwendung von Rotationsvariablen ist dies nicht ohne Weiteres möglich, da große Rotationen nicht in einer willkürlichen Weise addiert werden können.

Es ist sinnvoll die Verschiebungen  $\mathbf{u}^k$  immer vollständig in allen drei Koordinatenrichtungen der Schalenmittelfläche zu beschreiben. So wird eine Transformation des Gleichungssystems in das globale Koordinatensystem eindeutig und invertierbar. Soll jedoch ein reduziertes Modell untersucht werden, das zum Beispiel mehr Verschiebungsvariablen in Dickenrichtung als in Mittelflächenrichtung aufweist, so kann die Reduktion der Variablen durch eine kinematische Nebenbedingung über das verallgemeinerte Prinzip der virtuellen Arbeit von HU-WASHIZU eingebaut werden. Es ist vergleichbar mit dem PENALTY-Verfahren, das in der numerischen Umsetzung für den Einbau der Verschiebungsrandbedingungen verwendet wird.



**Abb. 3.2:** Verschiebungsvektoren der hierarchischen Schalenmodelle

Mit Gleichung (2.15) und (3.27) definiert sich der Ortsvektor des verformten Kontinuums zu:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} = (\overset{0}{\mathbf{X}} + \overset{0}{\mathbf{u}}) + \Theta^3(\mathbf{A}^3 + \overset{1}{\mathbf{u}}) + \sum_{k=2}^{nk} (\Theta^3)^k \overset{k}{\mathbf{u}}(\Theta^\alpha). \quad (3.28)$$

Aus dieser Gleichung wird die Bedeutung der einzelnen Verschiebungsvektoren ersichtlich. In Abbildung 3.2, die einen Ausschnitt der Abbildung 3.1 darstellt, wird die Kinematik über die Dicke grafisch dargestellt. Es wird deutlich, dass der Verschiebungsvektor  $\overset{0}{\mathbf{u}}$  die Verschiebungen der Mittelfläche und somit eine konstante Verschiebung des Querschnittes beschreibt. Der Vektor  $\overset{1}{\mathbf{u}}$  bewirkt eine Rotation und eine lineare Streckung der Normalen  $\mathbf{A}_3$  der unverformten Mittelfläche. Der Querschnitt der verformten Schale folgt der Strichpunktlinie in Abbildung 3.2. Der Vektor  $\overset{2}{\mathbf{u}}$  verursacht eine Krümmung dieser Strichpunktlinie und eine quadratische Dickenänderung, sodass sich der Querschnitt auf die strichlierte Linie verändert hat. Die punktierte Linie als Querschnittsverlauf der Schale stellt sich durch den Verschiebungsvektor  $\overset{3}{\mathbf{u}}$  ein. Alle weiteren Verschiebungsvektoren bestimmen eine analoge Kinematik, das heißt, eine entsprechende Veränderung der Normalen der Mittelfläche und eine polynomiale Dickenänderung.

Für die folgende Herleitung der Deformation der Schale werden nur die in Abschnitt 2.7 geometrisch linearisierten Gleichungen verwendet. Dabei sollen alle Tensoren mit Hilfe des Shifters  $\mathbf{Z}$  auf die unverformte Mittelfläche der Schale transformiert und mit  $\overline{(\cdot)}$  gekennzeichnet werden.

Die Metrik des unverformten Kontinuums bezogen auf die Mittelfläche  $\overline{\mathbf{G}}$  ergibt sich wie folgt:

$$\mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \mathbf{Z}^{-T} \overline{\mathbf{G}} \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Z} \overline{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{Z}^T \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \overline{\mathbf{G}} &= G_{ij} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{A} - \Theta^3(\mathbf{B}^T + \mathbf{B}) + (\Theta^3)^2 \mathbf{B}^T \mathbf{B} \\ \overline{\mathbf{G}}^{-1} &= G^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{Z}^{-T}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Zur Beschreibung des Materialverhaltens wird der Metriktensor 4. Stufe  $\mathbf{G}$  aus Gleichung (2.188) ebenfalls auf die Mittelfläche der Schale zu  $\overline{\mathbf{G}}^{-1}$  geschiftet. Hierfür wird der neu definierte Operator  $\overset{\rightarrow}{\cdot}$  bzw.  $\overset{\leftarrow}{\cdot}$ , der eine einfache Überschiebung von links bzw. rechts mit der zweiten Basis des Tensors in Pfeilrichtung beschreibt, verwendet.

$$\mathbf{G} = G^{im} G^{jn} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_m \otimes \mathbf{G}_n = \mathbf{Z} \overset{\rightarrow}{\cdot} \mathbf{Z} \overline{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{Z}^T \overset{\leftarrow}{\cdot} \mathbf{Z}^T \quad (3.31)$$

$$\text{mit } \overline{\mathbf{G}}^{-1} = G^{im} G^{jn} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}_m \otimes \mathbf{A}_n \quad (3.32)$$

Zur Berechnung des Gradienten des Verschiebungsvektors wird die kovariante Ableitung des Verschiebungsvektors nach den krummlinigen Koordinaten benötigt. Sie ist

gleich der partiellen Ableitung des Vektors. Die kovariante Ableitung der Vektorkomponenten berechnet sich mit Hilfe der in (3.11) definierten CHRISTOFFEL-Symbole.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}|_\alpha = \mathbf{u}_{,\alpha} &= \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \mathbf{u}^k|_\alpha \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}^k|_\alpha = (u_\beta \mathbf{A}^\beta + u_3 \mathbf{A}^3)|_\alpha \\
&= (u_\beta|_\alpha - u_3 B_{\alpha\beta}) \mathbf{A}^\beta + (u_\beta B_{\beta\alpha} + u_3|_\alpha) \mathbf{A}^3 \\
u_\beta|_\alpha &= u_{\beta,\alpha} - u_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, \quad u_3|_\alpha = u_{3,\alpha}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}|_3 = \mathbf{u}_{,3} &= \sum_{k=0}^{nk} k (\Theta^3)^{k-1} \mathbf{u}^k = \sum_{k=1}^{nk} k (\Theta^3)^{k-1} \mathbf{u}^k = \sum_{l=0}^{nk-1} (l+1) (\Theta^3)^l \mathbf{u}^{(l+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{nk} (k+1) (\Theta^3)^k \mathbf{u}^{(k+1)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}^{(nk+1)} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Der Gradient des Verschiebungsvektors bezogen auf die Basen der Schalenmittelfläche  $\overline{\text{GRADu}}$  ergibt sich somit zu

$$\text{GRADu} = \mathbf{u}_{,i} \otimes \mathbf{G}^i = \mathbf{u}_{,i} \otimes (\mathbf{Z}^{-T} \mathbf{A}^i) = \mathbf{u}_{,i} \otimes \mathbf{A}^i \mathbf{Z}^{-1} = \overline{\text{GRADu}} \mathbf{Z}^{-1} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit} \quad \overline{\text{GRADu}} &= \mathbf{u}_{,\alpha} \otimes \mathbf{A}^\alpha + \mathbf{u}_{,3} \otimes \mathbf{A}^3 \\
&= \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \left( \mathbf{u}_{,\alpha}^k \otimes \mathbf{A}^\alpha + (k+1) \mathbf{u}^{(k+1)} \otimes \mathbf{A}^3 \right) \\
\text{und} \quad \mathbf{u}^{(nk+1)} &= \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{3.36}$$

wodurch sich der Deformationsgradient  $\overline{\mathbf{F}}$  mit Gleichung (2.18) durch den Shifter  $\mathbf{Z}$  und eine Summe über die Dickenkoordinate  $\Theta^3$  in Abhängigkeit von der Modellnummer  $nk$  beschreiben lässt.

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \text{GRADu} = \overline{\mathbf{F}} \mathbf{Z}^{-1} \tag{3.37}$$

$$\text{mit} \quad \overline{\mathbf{F}} = \mathbf{Z} + \overline{\text{GRADu}} = \mathbf{Z} + \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \mathbf{F}^k \tag{3.38}$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{F}^k = \mathbf{u}_{,\alpha}^k \otimes \mathbf{A}^\alpha + (k+1) \mathbf{u}^{(k+1)} \otimes \mathbf{A}^3 \quad \text{und} \quad \mathbf{u}^{(nk+1)} = \mathbf{0} \tag{3.39}$$

### 3.1.4 Verzerrungsmaß

Hierarchische Schalenmodelle werden über den polynomialen Ansatz der Verschiebungen über die Dicke in Gleichung (3.27) beschrieben. Durch diese Summenformulierung des Verschiebungsvektors kann der linearisierte Verzerrungstensor in (2.165), und bei linearem Materialverhalten der Spannungstensor in (2.183), ebenfalls durch eine Summe über die Dicke dargestellt werden, wie aus dem folgenden Abschnitt hervor geht.

Der linearisierte rechte CAUCHY-GREEN-Tensor in (2.163) kann mit Hilfe der Gleichungen (3.35), (3.36) und (3.29), (3.30) bezogen auf die Basen der Mittelfläche zu  $\overline{\mathbf{C}}$  bestimmt werden.

$$\mathbf{C} = \mathbf{G} + \text{GRAD}\mathbf{u} + \text{GRAD}^T\mathbf{u} = \mathbf{Z}^{-T} \overline{\mathbf{C}} \mathbf{Z}^{-1} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \overline{\mathbf{C}} &= \overline{\mathbf{G}} + \mathbf{Z}^T \overline{\text{GRAD}\mathbf{u}} + \overline{\text{GRAD}\mathbf{u}}^T \mathbf{Z} \\ &= \overline{\mathbf{G}} + \left( \mathbf{A}^T - \Theta^3 \mathbf{B}^T \right) \left( \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{k}} \right) + \left( \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{k}T} \right) \left( \mathbf{A} - \Theta^3 \mathbf{B} \right) \\ &= \overline{\mathbf{G}} + \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \left( \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{k}} + \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{k}T} \right) - \sum_{l=0}^{nk} (\Theta^3)^{(l+1)} \left( \mathbf{B}^T \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{l}} + \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{l}T} \mathbf{B} \right) \\ &= \overline{\mathbf{G}} + \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \left( \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{k}} + \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{k}T} \right) - \sum_{k=1}^{nk+1} (\Theta^3)^k \left( \mathbf{B}^T \overline{\mathbf{F}}^{(\mathbf{k}-1)} + \overline{\mathbf{F}}^{(\mathbf{k}-1)T} \mathbf{B} \right) \\ &= \overline{\mathbf{G}} + \sum_{k=0}^{nk+1} (\Theta^3)^k \left( \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{k}} + \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{k}T} - \left( \mathbf{B}^T \overline{\mathbf{F}}^{(\mathbf{k}-1)} + \overline{\mathbf{F}}^{(\mathbf{k}-1)T} \mathbf{B} \right) \right) \\ &\quad \text{mit } \overline{\mathbf{F}}^{-1} = \overline{\mathbf{F}}^{(\mathbf{nk}+1)} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.165) und (3.35), (3.36) kann der linearisierte Verzerrungstensor der Schalenmittelfläche  $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  formuliert werden.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{GRAD}\mathbf{u} + \text{GRAD}^T\mathbf{u}) = \mathbf{Z}^{-T} \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Z}^{-1} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{Z}^T \overline{\text{GRAD}\mathbf{u}} + \overline{\text{GRAD}\mathbf{u}}^T \mathbf{Z}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{nk+1} (\Theta^3)^k \left( - \left( \mathbf{B}^T \overline{\mathbf{F}}^{(\mathbf{k}-1)} + \overline{\mathbf{F}}^{(\mathbf{k}-1)T} \mathbf{B} \right) + \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{k}} + \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{k}T} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{nk+1} (\Theta^3)^k \text{sym} \left( - \mathbf{B}^T \overline{\mathbf{F}}^{(\mathbf{k}-1)} + \overline{\mathbf{F}}^{\mathbf{k}} \right) \\ &\quad \text{mit } \overline{\mathbf{F}}^{-1} = \overline{\mathbf{F}}^{(\mathbf{nk}+1)} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Aus dieser Gleichung wird deutlich, dass der linearisierte Verzerrungstensor  $\bar{\varepsilon}$  als Summe eines Polynoms von Verzerrungstensoren über  $k = 0$  bis  $nk + 1$  dargestellt werden kann. Er ist also um einen Polynomgrad höher als der Verschiebungsvektor des gewählten Modells  $nk$ . Die kovarianten Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors bezogen auf die unverformte Mittelfläche werden als kinematische Variablen bezeichnet und berechnen sich zu:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon} &= \sum_{k=0}^{nk+1} (\Theta^3)^k \bar{\varepsilon}^{\mathbf{k}} = \sum_{k=0}^{nk+1} (\Theta^3)^k \bar{\varepsilon}_{ij}^{\mathbf{k}} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^j \\ \text{mit } \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}^{\mathbf{k}} &= -\frac{1}{2} (B_{\cdot\alpha}^{\pi} u_{\pi}^{(k-1)} |_{\beta} + B_{\cdot\beta}^{\pi} u_{\pi}^{(k-1)} |_{\alpha}) + B_{\alpha\pi} B_{\cdot\beta}^{\pi} u_3^{(k-1)} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\dot{u}_{\alpha}^{\mathbf{k}} |_{\beta} + \dot{u}_{\beta}^{\mathbf{k}} |_{\alpha}) - B_{\alpha\beta} u_3^{\mathbf{k}} \\ \bar{\varepsilon}_{\alpha 3}^{\mathbf{k}} &= \bar{\varepsilon}_{3\beta}^{\mathbf{k}} = -\frac{1}{2} (k-1) B_{\cdot\alpha}^{\pi} u_{\pi}^{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} u_3^{\mathbf{k}} |_{\alpha} + \frac{1}{2} (k+1) u_{\alpha}^{(k+1)} \\ \bar{\varepsilon}_{33}^{\mathbf{k}} &= (k+1) u_3^{(k+1)} \\ \text{mit } u_{\alpha}^{-1} &= u_3^{-1} = u_{\alpha}^{(nk+1)} = u_3^{(nk+1)} = u_{\alpha}^{(nk+2)} = u_3^{(nk+2)} = 0.\end{aligned}\tag{3.44}$$

Die  $C^0$ -Stetigkeit der hierarchischen Schalenmodelle ist an dieser Stelle ersichtlich, da nur die erste kovariante Ableitung der Verschiebungskomponenten verwendet wird. Des Weiteren ist anzumerken, dass keine Anteile in  $\Theta^3$  vernachlässigt wurden und der volle dreidimensionale Verzerrungstensor, der sich aus der Wahl des Modells in Gleichung (3.27) ergibt, berücksichtigt wurde. Herkömmliche Schalentheorien vernachlässigen an dieser Stelle die Dehnungsanteile mit  $k = nk$  und  $k = nk + 1$ . Ferner wird deutlich, dass der Verlauf der Verzerrung  $\bar{\varepsilon}_{33}$  über die Dicke immer um einen Grad niedriger in  $\Theta^3$  ist als der Verlauf der übrigen Verzerrungskomponenten.

### 3.1.5 Verzerrungsrate

Wird der linearisierte Geschwindigkeitsgradient in (2.166) auf die Basen der Mittelfläche bezogen, so ergibt sich

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} = \text{GRAD}\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_{,i} \otimes \mathbf{G}^i = \dot{\mathbf{u}}_{,i} \otimes \mathbf{A}^i \mathbf{Z}^{-1} = \overline{\text{GRAD}\dot{\mathbf{u}}} \mathbf{Z}^{-1}\tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}\text{mit } \overline{\text{GRAD}\dot{\mathbf{u}}} &= \dot{\mathbf{u}}_{,\alpha} \otimes \mathbf{A}^{\alpha} + \dot{\mathbf{u}}_{,3} \otimes \mathbf{A}^3 \\ &= \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \left( \dot{\mathbf{u}}_{,\alpha}^{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{A}^{\alpha} + (k+1) \dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{k}} \otimes \mathbf{A}^3 \right)\end{aligned}\tag{3.46}$$

$$\text{und } \dot{\mathbf{u}}^{\mathbf{(nk+1)}} = \mathbf{0},$$

wodurch sich die Verzerrungsrate bezogen auf die Mittelfläche durch  $\dot{\bar{\varepsilon}}$  mit Gleichung (2.167) berechnen lässt.

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \text{GRAD}\dot{\mathbf{u}} + \text{GRAD}^T \dot{\mathbf{u}} \right) = \mathbf{Z}^{-T} \dot{\bar{\varepsilon}} \mathbf{Z}^{-1}\tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{Z}^T \overline{\text{GRAD} \dot{\mathbf{u}}} + \overline{\text{GRAD} \dot{\mathbf{u}}}^T \mathbf{Z}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{nk+1} (\Theta^3)^k \left( - (\mathbf{B}^T \overset{(k-1)}{\dot{\mathbf{F}}} + \overset{(k-1)}{\dot{\mathbf{F}}}^T \mathbf{B}) + \overset{k}{\dot{\mathbf{F}}} + \overset{k}{\dot{\mathbf{F}}}^T \right) \\
&= \sum_{k=0}^{nk+1} (\Theta^3)^k \text{sym} \left( - \mathbf{B}^T \overset{(k-1)}{\dot{\mathbf{F}}} + \overset{k}{\dot{\mathbf{F}}} \right) \\
&\quad \text{mit } \overset{-1}{\dot{\mathbf{F}}} = \overset{(nk+1)}{\dot{\mathbf{F}}} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

## 3.2 Dynamische Beziehungen

### 3.2.1 Belastungen

In der linearisierten Form A des Prinzips der virtuellen Verschiebungen in Gleichung (2.179) werden die virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  verwendet. Diese ergeben sich durch Variation des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}$  in (3.27) und beziehen sich auf die kontravarianten Basen der Schalenmittelfläche. Daher wird der Vektor der äußeren Belastungen  $\mathbf{T}^*$  und der Vektor der Volumenkraft pro Dichte  $\mathbf{K}$  auf die kovarianten Basen der Schalenmittelfläche bezogen, um bei einer einfachen Überschiebung keine Metrikannteile berücksichtigen zu müssen.

Die virtuelle Arbeit der Oberflächenlasten kann nun in drei Anteile bezogen auf die definierten Teilflächen  $dS_0^i$  in Gleichung (3.25) aufgespalten werden.

$$\begin{aligned}
\int_{S_0^T} \delta \mathbf{u} \mathbf{T}^* dS_0^T &= \int_{S_0^3} \delta \mathbf{u} \mathbf{T}^3 dS_0^3 + \int_{S_0^2} \delta \mathbf{u} \mathbf{T}^2 dS_0^2 + \int_{S_0^1} \delta \mathbf{u} \mathbf{T}^1 dS_0^1 \\
\text{mit } \mathbf{T}^* &= \mathbf{T}^3 + \mathbf{T}^2 + \mathbf{T}^1 = T^{*i} \mathbf{A}_i
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Das erste Integral stellt die virtuelle Arbeit der Oberflächenlasten auf der Ober- bzw. Unterseite der Schale dar und wird im Folgenden Oberflächenlasten genannt. Das zweite und dritte Integral der virtuellen Arbeit der Oberflächenlasten wirkt auf die Randflächen der Schale. Diese können nur an Rändern des Berechnungsgebietes wirken und werden im Folgenden Randlasten genannt.

Mit der Definition des verwendeten Flächendifferentials in (3.25) ergibt sich die virtuelle Arbeit aus Oberflächenlasten zu:

$$\begin{aligned}
\int_{S_0^3} \delta \mathbf{u} \mathbf{T}^3 dS_0^3 &= \int_{\mathcal{A}_0} \delta \mathbf{u} \mathbf{T}^3 \det \mathbf{Z} d\mathcal{A}_0 \\
&= \int_{\mathcal{A}_0} \sum_{k=0}^{nk} f_O(k) \delta \overset{k}{\mathbf{u}} \mathbf{T}^3 d\mathcal{A}_0 .
\end{aligned} \tag{3.50}$$



Der Faktor  $f_O(k)$  ist abhängig von der gewählten Ober- bzw. Unterseite der Schale.

$$\begin{aligned} f_O(k) &= (\Theta^3)^k \det \mathbf{Z} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{h}{2}\right)^k - 2H \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} + K \left(\frac{h}{2}\right)^{k+2} & \text{für } \Theta^3 = \frac{h}{2} \\ (-1)^k \left(\left(\frac{h}{2}\right)^k + 2H \left(\frac{h}{2}\right)^{k+1} + K \left(\frac{h}{2}\right)^{k+2}\right) & \text{für } \Theta^3 = -\frac{h}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Die beiden Integrale der virtuellen Arbeit aus Randlasten lassen sich mit (3.25) und (3.23) zusammenfassen.

$$\begin{aligned} \int_{S_0^1} \delta \mathbf{u} \mathbf{T}^1 dS_0^1 + \int_{S_0^2} \delta \mathbf{u} \mathbf{T}^2 dS_0^2 &= \int_{\mathcal{L}} \int_{\Theta^3} \delta \mathbf{u} \mathbf{T}^\alpha d\Theta^3 d\mathcal{L} \\ &= \int_{\mathcal{L}} \int_{\Theta^3} \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \delta \mathbf{u}^k \mathbf{T}^\alpha d\Theta^3 d\mathcal{L} \\ &\text{mit } \Theta^\alpha = \Theta^{Rand} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Hierbei wird die Einschränkung verwendet, dass der Spannungsvektor aus Randlasten  $\mathbf{T}^\alpha$  maximal linear über  $\Theta^3$  verläuft.

$$\mathbf{T}^\alpha = \overset{0}{\mathbf{T}}^\alpha + \Theta^3 \frac{2}{h} \overset{1}{\mathbf{T}}^\alpha \quad (3.53)$$

Der konstante Spannungsvektor am Rand  $\overset{0}{\mathbf{T}}^\alpha$  bildet somit Normal- und Querkräfte und der lineare Spannungsvektor  $\overset{1}{\mathbf{T}}^\alpha$  die Momente am Rand ab. Die Eingabe der Randlasten bezieht sich entweder auf das globale Koordinatensystem oder das orthonormale Koordinatensystem der Kante. Diese Werte müssen mit einer Koordinatentransformation in kovariante Komponenten umgerechnet werden.

Die Randlasten können analytisch über die Dickenkoordinate  $\Theta^3$  von  $-\frac{h}{2}$  bis  $\frac{h}{2}$  integriert werden. Das differentielle Linienelement in (3.23) ist jedoch von den kontravarianten Komponenten der Metrik des Kontinuums abhängig, die aus einem quadratischen Polynom in  $\Theta^3$  im Zähler und einem Polynom vierten Grades in  $\Theta^3$  im Nenner bestehen, wie aus Gleichung (3.21) und (3.19) deutlich wird. Dieser Ausdruck ist nicht einfach analytisch integrierbar und wird deshalb mit der Annahme  $G^{ij} \cong A^{ij}$  vereinfacht. Diese verwendete Näherung geht auf KOITER und NAGHDI zurück und ist Teil der *ersten Approximation der Schalentheorie* [8].

$$d\mathcal{L} = \sqrt{G^{\beta\beta}} \det \mathbf{Z} \sqrt{A} d\Theta^\alpha \cong \det \mathbf{Z} \sqrt{A^{\beta\beta}} \sqrt{A} d\Theta^\alpha \quad (3.54)$$

Mit diesen Vereinfachungen lässt sich die Integration über die Dicke für das Integral der virtuellen Arbeit aus Randlasten durchführen.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} \int_{\Theta^3} \delta \mathbf{u} \mathbf{T}^\alpha d\Theta^3 d\mathcal{L} &= \int_{\Theta^\alpha} \sum_{k=0}^{nk} \delta \mathbf{u}^k \left( f(k) \overset{0}{\mathbf{T}}^\alpha + f(k+1) \frac{2}{h} \overset{1}{\mathbf{T}}^\alpha \right) \sqrt{A^{\beta\beta}} \sqrt{A} d\Theta^\alpha \\ &\text{mit } \Theta^\alpha = \Theta^{Rand} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Der Faktor  $f$  ist durch die Integration über  $\Theta^3$  von  $-\frac{h}{2}$  bis  $\frac{h}{2}$  definiert.

$$\begin{aligned}
f(i) &= \int_{\Theta^3} (\Theta^3)^i \det \mathbf{Z} \, d\Theta^3 \\
&= \frac{1 + (-1)^i \left(\frac{h}{2}\right)^{i+1}}{i+1} - 2H \frac{1 + (-1)^{i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{i+2}}{i+2} \\
&\quad + K \frac{1 + (-1)^{i+2} \left(\frac{h}{2}\right)^{i+3}}{i+3} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{i+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{i+1} + K \frac{2}{i+3} \left(\frac{h}{2}\right)^{i+3} & \text{für } i \text{ gerade} \\ -2H \frac{2}{i+2} \left(\frac{h}{2}\right)^{i+2} & \text{für } i \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Der Vektor  $\mathbf{K}$  definiert die Kraft pro Masse bzw. die Beschleunigung des wirkenden Feldes und bezieht sich auf die kovarianten Basen der Schalenmittelfläche. Die Eingabwerte sollen sich auf das globale Koordinatensystem beziehen und werden deshalb durch eine Koordinatentransformation auf das kovariante Koordinatensystem der Schalenmittelfläche umgerechnet. Durch eine analytische Integration der virtuellen Arbeit aus Volumenlasten über die Dicke  $\Theta^3$  ergibt sich mit Hilfe des Faktors  $f(k)$  in Gleichung (3.56)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}_0} \rho_0 \delta \mathbf{u} \mathbf{K} \, d\mathcal{V}_0 &= \int_{\mathcal{A}_0} \int_{\Theta^3} \rho_0 \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \delta \mathbf{u}^{\mathbf{k}} \mathbf{K} \det \mathbf{Z} \, d\Theta^3 \, d\mathcal{A}_0 \\
&= \int_{\mathcal{A}_0} \rho_0 \sum_{k=0}^{nk} f(k) \delta \mathbf{u}^{\mathbf{k}} \mathbf{K} \, d\mathcal{A}_0
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\text{mit } \mathbf{K} = K^i \mathbf{A}_i = \overset{e}{K}^j \mathbf{i}_j \Leftrightarrow K^i = (\mathbf{A}^i \cdot \mathbf{i}_j) \overset{e}{K}^j .$$

### 3.2.2 Spannungen

Aus der Gleichung (2.172) geht hervor, dass zu der geometrisch linearisierten Verzerrungsrate  $\dot{\mathbf{e}}$  der Spannungstensor  $\mathbf{S}$  die energetisch konjugierte Größe ist. Da die Komponenten der Verzerrungsrate kovariant definiert wurden, ist es sinnvoll die Komponenten des Spannungstensors kontravariant zu definieren, damit bei einer doppelten Überschiebung der beiden Tensoren keine Einträge der Metrik zu berücksichtigen sind.

Der lineare Spannungstensor  $\mathbf{S}$  wird auf die kovarianten Basen der Schalenmittelfläche bezogen, sodass sich  $\bar{\mathbf{S}}$  ergibt.

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{Z}^T \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{S}} = S^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \tag{3.58}$$

### 3.3 Materialmodelle

#### 3.3.1 Lineare Elastizität

Aus Abschnitt 2.8.1.1 folgt der lineare und invertierbare Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor  $\mathbf{S}$  und dem Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.59)$$

Der Tensor der Spannungen und Verzerrungen wurde durch Gleichung (3.58) und (3.42) auf die Basen der Schalenmittelfläche transformiert. Mit dem neu definierten Operator  $\vec{\cdot}$  bzw.  $\overleftarrow{\cdot}$ , der eine einfache Überschiebung von links bzw. rechts mit der zweiten Basis des Tensors in Pfeilrichtung beschreibt, folgt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Z}^{-T} \vec{\cdot} \mathbf{Z}^{-T} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{und} \quad \mathbf{S} = \mathbf{Z} \vec{\cdot} \mathbf{Z} \bar{\mathbf{S}}. \quad (3.60)$$

Der linear-elastische Materialtensor  $\bar{\mathbf{C}}$ , der sich auf die Mittelfläche der Schale bezieht, berechnet sich mit Gleichung (2.188), (3.29) und (3.31) zu

$$\mathbf{C} = \mathbf{Z} \vec{\cdot} \mathbf{Z} \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Z}^T \overleftarrow{\cdot} \mathbf{Z}^T \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} &= \mathbb{C}^{ijmn} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}_m \otimes \mathbf{A}_n = \lambda \bar{\mathbf{G}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{G}}^{-1} + 2\mu \bar{\mathbf{G}}^{-1} \\ \text{mit } \mathbb{C}^{ijmn} &= \lambda G^{ij} G^{mn} + 2\mu G^{im} G^{jn}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

und kann in einen deviatorischen und einen sphärischen Anteil aufgespalten werden.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} &= \text{sph} \bar{\mathbf{C}} + \text{dev} \bar{\mathbf{C}} \\ &= \kappa \bar{\mathbf{G}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{G}}^{-1} + 2\mu \left( \bar{\mathbf{G}}^{-1} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{G}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{G}}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

Aus Gleichung (3.59) folgt mit Gleichung (3.60) und (3.61), die Beziehung zwischen dem Spannungs-, Verzerrungs- und Materialtensor bezogen auf die Basen der Mittelfläche.

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.64)$$

Wie bei der Berechnung der Randlasten werden in Gleichung (3.62) die kontravarianten Komponenten der Metrik des Kontinuums benötigt. Für eine analytische Integration des linear-elastischen Stoffgesetzes von HOOKE wird auch hier die Näherung von KOITER und NAGHDI mit  $G^{ij} \cong A^{ij}$  verwendet.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}} &\cong \bar{\mathbb{C}}^{ijkl} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \otimes \mathbf{A}_k \otimes \mathbf{A}_l \\ \text{mit } \bar{\mathbb{C}}^{ijkl} &= \lambda A^{ij} A^{kl} + 2\mu A^{ik} A^{jl}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Aus Gleichung (3.64) und dem linear-elastischen Stoffgesetz in (3.65) ergibt sich mit der polynomialen Beschreibung des Verzerrungstensors  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  über die Koordinate

$\Theta^3$  in Gleichung (3.44), dass der Spannungstensor  $\bar{\mathbf{S}}$  ebenfalls als Polynom über die Dickenkoordinate beschrieben werden kann.

$$\bar{\mathbf{S}} = \sum_{k=0}^{nk+1} (\Theta^3)^k \bar{\mathbf{S}}^{\mathbf{k}} = \sum_{k=0}^{nk+1} (\Theta^3)^k \bar{S}^{ij} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_j \quad (3.66)$$

mit  $\bar{S}^{ij} = \bar{\mathbb{C}}^{ijmn} \bar{\varepsilon}_{mn}$

### 3.3.2 Plastizität

Die Umsetzung inelastischer Materialmodelle für hierarchische Schalenmodelle wird am Beispiel der VON MISES Fließfläche mit isotroper Verfestigung aus Abschnitt 2.8.2.2 gezeigt. Hierfür werden die benötigten Gleichungen mit Hilfe des Shiftes  $\mathbf{Z}$  bezogen auf die Schalenmittelfläche formuliert. Da sich das Materialmodell auf das Kontinuum bezieht, müssen in diesem Abschnitt die geshifteten Metriken des Kontinuums in Gleichung (3.30) berücksichtigt werden.

Die Kinematik der hierarchischen Schalenmodelle ändert sich nicht für ein nichtlineares Materialverhalten, da Kinematik und Stoffgesetz prinzipiell voneinander entkoppelt sind. Der Verzerrungstensor  $\varepsilon$  bzw.  $\bar{\varepsilon}$  in Gleichung (3.42) und (3.43) kann daher weiterhin als Polynom über die Dicke formuliert werden. Da sich die Verzerrungen der Schale auf die Mittelfläche beziehen, wird die additive Aufspaltung der Verzerrungen in (2.197) ebenfalls mit Hilfe des Shifters  $\mathbf{Z}$  auf die Mittelfläche transformiert.

$$\varepsilon = \varepsilon_r + \varepsilon_i = \mathbf{Z}^{-T} \bar{\varepsilon} \mathbf{Z}^{-1} \quad \text{mit} \quad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_r + \bar{\varepsilon}_i \quad \text{und} \quad \bar{\varepsilon}_r = \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_i \quad (3.67)$$

Die reversiblen und irreversiblen Anteile des Verzerrungstensors  $\bar{\varepsilon}_r$  bzw.  $\bar{\varepsilon}_i$  sind jedoch nicht mehr als Polynom über die Dicke darstellbar, da sie vom vorhandenen Materialgesetz an jedem Punkt über die Dicke der Schale abhängig sind.

Der reversible Anteil des Verzerrungstensors  $\bar{\varepsilon}_r$ , der sich auf die Basen der Mittelfläche bezieht und mit kovarianten Komponenten festgelegt wurde, wird in einen deviatorischen und einen sphärischen Anteil aufgespalten.

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r &= \text{sph}(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_i) + \text{dev}(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_i) \\ \text{mit} \quad \text{sph} \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{3} (\bar{\varepsilon} : \bar{\mathbf{G}}^{-1}) \bar{\mathbf{G}} \quad , \quad \text{sph} \bar{\varepsilon}_i = \mathbf{0} \\ \text{dev}(\bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_i) &= \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_i - \text{sph} \bar{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Es gilt  $\text{sph} \bar{\varepsilon}_i = \mathbf{0}$ , da die Entwicklung der inelastischen Dehnungen durch die assoziierte Fließregel nach Gleichung (2.217) nur von den deviatorischen Spannungen abhängig ist.

Aufgrund des nichtlinearen Materialverhaltens kann der Spannungstensor  $\bar{\mathbf{S}}$  bezogen auf die Mittelfläche der Schale aus Gleichung (3.58) nicht mehr als Polynom über die

Dickenkoordinate  $\Theta^3$  dargestellt werden. Eine Aufspaltung in einen deviatorischen und einen sphärischen Anteil ergibt

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \text{sph}\bar{\mathbf{S}} + \text{dev}\bar{\mathbf{S}} \\ \text{mit } \text{sph}\bar{\mathbf{S}} &= \frac{1}{3}(\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{G}}) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \quad , \quad \text{dev}\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}} - \text{sph}\bar{\mathbf{S}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

wobei der Spannungstensor in kontravariante Komponenten festgelegt wurde. Die Spannungen können nach Gleichung (2.200) aus dem reversiblen Anteil der Verzerrungen und dem linear-elastischen Materialgesetz bezogen auf die Basen der Schalenmittelfläche bestimmt werden

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r = \bar{\mathbf{C}} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i) \quad , \quad (3.70)$$

wodurch sich mit Gleichung (3.68) und (3.63) der deviatorische und sphärische Anteil des Spannungstensors  $\bar{\mathbf{S}}$  berechnen lässt.

$$\text{sph}\bar{\mathbf{S}} = \kappa \bar{\mathbf{G}}^{-1} \text{sph}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \quad , \quad \text{dev}\bar{\mathbf{S}} = 2\mu \bar{\mathbf{G}}^{-1} \text{dev}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i) \bar{\mathbf{G}}^{-1} \quad (3.71)$$

Wird der normierte deviatorische Spannungstensor  $\mathbf{n}$  in Gleichung (2.212) auf die Mittelfläche der Schale bezogen, folgt

$$\mathbf{n} = \mathbf{Z} \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{S}}} \mathbf{Z}^T = \mathbf{Z}^{-T} \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \mathbf{Z}^{-1} \quad (3.72)$$

$$\text{mit } \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{S}}} = \frac{\text{dev}\bar{\mathbf{S}}}{\|\bar{\mathbf{G}} \text{dev}\bar{\mathbf{S}}\|} \quad , \quad \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{\text{dev}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i)}{\|\text{dev}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i) \bar{\mathbf{G}}^{-1}\|} \quad , \quad \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{S}}} \bar{\mathbf{G}} \quad . \quad (3.73)$$

Er wird mit kovarianten Komponenten als  $\bar{\mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  zur Berechnung der irreversiblen Verzerrungsrate und mit kontravarianten Komponenten als  $\bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{S}}}$  für die Berechnung des tangentialen Steifigkeitstensors benötigt. Der Unterschied zwischen der ko- und kontravarianten Darstellung entsteht durch die Festlegung der Komponenten des Spannungs- und des Verzerrungstensors.

Die Fließbedingung nach VON MISES in Gleichung (2.216) bezogen auf die Mittelfläche lautet

$$F(\text{dev}\bar{\mathbf{S}}, \bar{\alpha}) = \|\bar{\mathbf{G}} \text{dev}\bar{\mathbf{S}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} K(\bar{\alpha}) = 0 \quad . \quad (3.74)$$

Die irreversiblen Verzerrungsraten können ebenfalls auf die Mittelfläche transformiert werden und ergeben sich zu:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \mathbf{Z}^{-T} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_i \mathbf{Z}^{-1} \quad \text{mit} \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_i = \gamma \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad . \quad (3.75)$$

Die Evolutionsgleichung der internen Variable ist ein skalarwertiger Ausdruck und muss daher nicht auf die Basen der Mittelfläche transformiert werden.

$$\dot{\alpha} = \dot{\bar{\alpha}} = \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \quad . \quad (3.76)$$

### 3.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in Gleichung (2.179) lässt sich bezogen auf die Mittelfläche der Schale mit den Gleichungen (3.42) und (3.58) für den Verzerrungs- und Spannungstensor und den Gleichungen (3.49), (3.50), (3.55) und (3.57) für die virtuelle Arbeit aus Oberflächen-, Rand- und Volumenlasten definieren.

$$\begin{aligned}
 & -\delta W + \delta A = 0 \\
 \text{mit } \delta W &= \int_{\mathcal{A}_0} \int_{\Theta^3} \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\mathbf{S}} \det \mathbf{Z} d\Theta^3 d\mathcal{A}_0 \\
 \delta A &= \int_{\mathcal{A}_0} \rho_0 \sum_{k=0}^{nk} f(k) \delta \mathbf{u}^{\mathbf{k}} \mathbf{K} d\mathcal{A}_0 + \int_{\mathcal{A}_0} \sum_{k=0}^{nk} f_O(k) \delta \mathbf{u}^{\mathbf{k}} \mathbf{T}^3 d\mathcal{A}_0 \\
 & \quad + \int_{\Theta^\alpha} \sum_{k=0}^{nk} \delta \mathbf{u}^{\mathbf{k}} \left( f(k) \mathbf{T}^{\alpha 0} + f(k+1) \frac{2}{h} \mathbf{T}^{\alpha 1} \right) \sqrt{A^{\beta\beta}} \sqrt{A} d\Theta^\alpha \quad \cancel{\mathcal{I}_\beta} \cancel{\mathcal{I}_\alpha}
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

Für die virtuelle Arbeit aus äußeren Belastungen ist die Integration über die Dickenkoordinate  $\Theta^3$  schon durchgeführt. Liegt ein elastisches Materialverhalten zugrunde, so kann diese Integration für die virtuelle Formänderungsenergie ebenfalls analytisch durchgeführt werden. Für das verallgemeinerte Materialgesetz von HOOKE in Gleichung (3.64) mit der Vereinfachung in (3.65) lässt sich die virtuelle Formänderungsenergie mit der Definition des Faktors  $f$  in (3.56) herleiten.

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int_{\mathcal{A}_0} \int_{\Theta^3} \left( \sum_{k=0}^{nk+1} (\Theta^3)^k \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{k}} \right) : \bar{\mathbf{C}} : \left( \sum_{l=0}^{nk+1} (\Theta^3)^l \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{l}} \right) \det \mathbf{Z} d\Theta^3 d\mathcal{A}_0 \\
 &= \int_{\mathcal{A}_0} \sum_{k=0}^{nk+1} \sum_{l=0}^{nk+1} \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{k}} : \bar{\mathbf{C}}^{\mathbf{k+l}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{l}} d\mathcal{A}_0 \\
 \text{mit } \bar{\mathbf{C}}^{\mathbf{k+l}} &= f(k+l) \bar{\mathbf{C}}
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

Hierbei stellt der elastische Materialtensor  $\bar{\mathbf{C}}^{\mathbf{k+l}}$  die integrierte Schalensteifigkeit über die Dicke dar.

Bei dem in dieser Arbeit zu untersuchenden plastischen Materialmodell mit isotroper Verfestigung ist der Zusammenhang zwischen dem Spannungs- und Verzerrungstensor über die Fließbedingung, die Konsistenzbedingung, die inelastische Verzerrungsrate und die Evolutionsgleichung der internen Variable  $\bar{\alpha}$  gegeben. Daraus ergibt sich ein bereichsweise definierter funktionaler Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verzerrungen über die Dicke der Schale, der sich auf einen linear-elastischen und einen plastischen Bereich bezieht. Dieser nichtlineare Zusammenhang muss iterativ für jeden Punkt über die Dicke der Schale gelöst werden, sodass eine analytische

Integration des Stoffgesetzes über die Dicke nicht mehr möglich ist. Somit sind die Spannungen auch nicht mehr durch ein Polynom über die Dicke beschreibbar.

Die Integration über die Dickenkoordinate  $\Theta^3$  kann jedoch entkoppelt von der Integration über die Schalenmittelflächenkoordinaten  $\Theta^\alpha$  durchgeführt werden. Hierfür müssen die Spannungen  $\bar{\mathbf{S}}$  über die Dicke bekannt sein, die bei einer numerischen Integration zum Beispiel an den Gaußpunkten über die Dicke gegeben sind. Eine Vorabintegration des Stoffgesetzes für jeden Punkt der Schalenmittelfläche ist so möglich.

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \int_{\mathcal{A}_0} \int_{\Theta^3} \left( \sum_{k=0}^{nk+1} (\Theta^3)^k \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{k}} \right) : \bar{\mathbf{S}} \det \mathbf{Z} d\Theta^3 d\mathcal{A}_0 \\
 &= \int_{\mathcal{A}_0} \sum_{k=0}^{nk+1} \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{k}} : \left( \int_{\Theta^3} (\Theta^3)^k \bar{\mathbf{S}} \det \mathbf{Z} d\Theta^3 \right) d\mathcal{A}_0
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

## 4 Modelldiskussion

In Abschnitt 3 wurde ein universelles hierarchisches Schalenmodell, basierend auf einem zweidimensionalen, krummlinigen Kontinuum, definiert. In diesem Abschnitt soll nun die Qualität einzelner Modelle untersucht werden und mit Schalentheorien, die aus der Literatur bekannt sind, verglichen werden. In einer verkürzten Form wurden diese Ergebnisse von der Autorin in [70] veröffentlicht.

Die untersuchten Modelle gliedern sich in zwei Modelltypen: die vollständigen Modelle, bei denen alle Komponenten des Verschiebungsvektors vollständig berücksichtigt werden, und die reduzierten Modelle, bei denen der Verschiebungsvektor um einige Komponenten der Direktoren reduziert wird. Die Modellnummer  $nk$  der vollständigen Modelle gibt dabei den Grad des Polynomes der Verschiebung über die Dicke der Schale an, der für alle Komponenten des Verschiebungsvektors  $\mathbf{u}$  gleich ist. Die Bezeichnung der reduzierten Modelle  $(nk(u_1), nk(u_2), nk(u_3))$  beinhaltet den Polynomansatz über die Dicke der Schale jeder Verschiebungskomponente. Die Direktoren sind hierbei bis zum maximalen Polynomgrad  $nk_{max} = \max(nk(u_1), nk(u_2), nk(u_3))$  vorhanden, wobei die Komponenten eines höheren Polynomgrades zu null gesetzt werden. In der Literatur sind häufig die Modelle  $(nk_{max} - 1, nk_{max} - 1, nk_{max})$  und  $(nk_{max}, nk_{max}, nk_{max} - 1)$  zu finden. Für Plattenprobleme wurden diese Modelle schon Anfang der 90er Jahre von BABUŠKA [5] untersucht und Mitte der 90er von SCHWAB [79] aufgenommen. Für Schalen wurden zwei Modelle von SZABÓ und SCHWAB in [77] numerisch untersucht.

Die Komponenten des Verschiebungsvektors ergeben sich beispielsweise für das vollständige Modell 2 zu

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} + \Theta^3 \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ 1 \\ u_2 \\ 1 \\ u_3 \end{pmatrix} + (\Theta^3)^2 \begin{pmatrix} 2 \\ u_1 \\ 2 \\ u_2 \\ 2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

und für das reduzierte Modell (1, 1, 2) mit  $nk_{max} = 2$  zu

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} + \Theta^3 \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ 1 \\ u_2 \\ 1 \\ u_3 \end{pmatrix} + (\Theta^3)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Um die Diskussion übersichtlicher zu gestalten beschränken sich die untersuchten Geometrien auf ein orthogonales Koordinatensystem  $\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3$ . Die kovarianten Basen in Gleichung (3.2) und die Metrik der Mittelfläche in (3.3) vereinfachen sich daher zu

$$\mathbf{A} = A_{ii} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}^i = A^{ii} \mathbf{A}_i \otimes \mathbf{A}_i \quad \text{mit} \quad (4.3)$$

$$A_{11} = \frac{1}{A^{11}} = (|\mathbf{A}_1|)^2, \quad A_{22} = \frac{1}{A^{22}} = (|\mathbf{A}_2|)^2, \quad A_{33} = 1.$$



Für die Definition der Komponenten des linearisierten Verzerrungstensors in (3.44) ergibt sich mit der getroffenen Vereinfachung

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ij} &= \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \bar{\varepsilon}_{ij}^k \\ \text{mit } \bar{\varepsilon}_{11}^k &= -B_{.1}^1 \binom{k-1}{u_1}|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \binom{k-1}{u_3} + \binom{k}{u_1}|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \binom{k}{u_3} \\ \bar{\varepsilon}_{22}^k &= -B_{.2}^2 \binom{k-1}{u_2}|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \binom{k-1}{u_3} + \binom{k}{u_2}|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \binom{k}{u_3} \\ \bar{\varepsilon}_{33}^k &= (k+1) \binom{k+1}{u_3} \\ \bar{\varepsilon}_{12}^k &= -\frac{1}{2} (B_{.1}^1 \binom{k-1}{u_1}|_2 + B_{.2}^2 \binom{k-1}{u_2}|_1) + \frac{1}{2} (\binom{k}{u_1}|_2 + \binom{k}{u_2}|_1) \\ \bar{\varepsilon}_{23}^k &= -\frac{1}{2} (k-1) B_{.2}^2 \binom{k}{u_2} + \frac{1}{2} \binom{k}{u_3}|_2 + \frac{1}{2} (k+1) \binom{k+1}{u_2} \\ \bar{\varepsilon}_{13}^k &= -\frac{1}{2} (k-1) B_{.1}^1 \binom{k}{u_1} + \frac{1}{2} \binom{k}{u_3}|_1 + \frac{1}{2} (k+1) \binom{k+1}{u_1} . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Des Weiteren wird das allgemeine Stoffgesetz von HOOKE mit den in Abschnitt 3.3.1 aufgeführten Vereinfachungen verwendet. Für eine Geometrie mit orthogonalen Basen berechnet sich das Stoffgesetz für die kontravarianten Komponenten des Spannungstensors mit (3.64) und (3.65) zu:

$$\begin{aligned} \bar{S}^{ij} &= \bar{\mathbb{C}}^{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbb{C}}^{ijkl} = \lambda A^{ij} A^{kl} + 2\mu A^{ik} A^{jl} \\ \bar{S}^{11} &= \frac{1}{A_{11}} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{1}{A_{11}} \bar{\varepsilon}_{11} + \lambda \frac{1}{A_{22}} \bar{\varepsilon}_{22} + \lambda \bar{\varepsilon}_{33} \right) \\ \bar{S}^{22} &= \frac{1}{A_{22}} \left( \lambda \frac{1}{A_{11}} \bar{\varepsilon}_{11} + (\lambda + 2\mu) \frac{1}{A_{22}} \bar{\varepsilon}_{22} + \lambda \bar{\varepsilon}_{33} \right) \\ \bar{S}^{33} &= \lambda \frac{1}{A_{11}} \bar{\varepsilon}_{11} + \lambda \frac{1}{A_{22}} \bar{\varepsilon}_{22} + (\lambda + 2\mu) \bar{\varepsilon}_{33} \\ \bar{S}^{12} &= \frac{1}{A_{11} A_{22}} 2\mu \bar{\varepsilon}_{12} \\ \bar{S}^{23} &= \frac{1}{A_{22}} 2\mu \bar{\varepsilon}_{23} \\ \bar{S}^{13} &= \frac{1}{A_{11}} 2\mu \bar{\varepsilon}_{13} . \end{aligned} \quad (4.5)$$

In diesem Abschnitt wird überprüft, ob die untersuchten Modelle einen reinen Membranspannungszustand und einen reinen Biegespannungszustand abbilden können. Beide Zustände sollen dabei aus einer Randlast und einer Flächenlast erzeugbar sein, wodurch die Randbedingung der Normalspannung  $\bar{S}^{33}$  an der Ober- und Unterseite der Schale festgelegt ist. Hierbei ist anzumerken, dass für Schalen fast nie ein reiner Biegespannungszustand vorliegt, da die meisten Belastungen aufgrund der gekrümmten Struktur durch Membranspannungen abgetragen werden. Platten hingegen werden durch einen reinen Biegespannungszustand beschrieben. Sie stellen eine

Unterklasse der Schalen dar, bei der die Krümmung null ist und die Flächenlasten senkrecht zur Mittelfläche der Struktur wirken. Daher soll im Folgenden der reine Biegespannungszustand auch für Schalen untersucht werden.

Die zu untersuchenden Spannungszustände sind

1. reiner Membranspannungszustand

$$\Rightarrow \bar{S}^{11} = \textit{konst.} \quad \text{und} \quad \bar{S}^{22} = \textit{konst.}$$

- (a) erzeugt durch Randlasten, wie zum Beispiel bei einem Zylinder unter Zug oder Torsion.

$$\Rightarrow \bar{S}^{33}(\Theta^3 = \pm \frac{h}{2}) = 0$$

- (b) erzeugt durch Flächenlasten, wie zum Beispiel bei einer Kugel oder einem Zylinder unter Innendruck.

$$\Rightarrow \bar{S}^{33}(\Theta^3 = +\frac{h}{2}) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{S}^{33}(\Theta^3 = -\frac{h}{2}) = p$$

2. reiner Biegespannungszustand

$$\Rightarrow \bar{S}^{11} = \textit{linear} \quad \text{und} \quad \bar{S}^{22} = \textit{linear}$$

- (a) erzeugt durch Randlasten, wie zum Beispiel bei einer Platte mit Streckenmoment.

$$\Rightarrow \bar{S}^{33}(\Theta^3 = \pm \frac{h}{2}) = 0$$

- (b) erzeugt durch Flächenlasten, wie zum Beispiel bei einer Platte mit Flächenlast.

$$\Rightarrow \bar{S}^{33}(\Theta^3 = +\frac{h}{2}) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{S}^{33}(\Theta^3 = -\frac{h}{2}) = p$$

Durch die Vorgabe der Spannungsverläufe ergeben sich Beziehungen zwischen den Verschiebungskomponenten und deren Ableitungen. Werden diese Beziehungen in die Definition der Verzerrungen des Modells eingesetzt, ergeben sich die abbildbaren Verzerrungsverläufe über die Dickenkoordinate  $\Theta^3$  des gewählten Modells. Diese Verläufe müssen aus anschaulichen Gründen einen Mindestpolynomgrad über die Dicke aufweisen. Für die oben genannten Fälle gilt bei

1. reinem Membranspannungszustand

$$\Rightarrow \bar{\epsilon}_{11}, \bar{\epsilon}_{22} \text{ und } \bar{\epsilon}_{33} \text{ mindestens konstant über die Dicke}$$

2. reinem Biegespannungszustand

$$\Rightarrow \bar{\epsilon}_{11}, \bar{\epsilon}_{22} \text{ und } \bar{\epsilon}_{33} \text{ mindestens linear über die Dicke.}$$

Ist dieser Mindestpolynomgrad der Verzerrungsverläufe unterschritten, weist das gewählte Modell eine Versteifung auf. Der Grund für diese Versteifung ist eine zu niedrige Modellwahl, das heißt, der Polynomgrad der Verschiebungen über die Dicke ist zu klein gewählt. Dieser Effekt wird von RAMM in [17] anhand eines Balkens mit reiner Biegebeanspruchung erläutert und von BISCHOFF in [17, 14, 73] POISSON-THICKNESS-Locking genannt und diskutiert.

## 4.1 Modell 0

Das Modell 0 basiert auf dem gleichen Verschiebungsvektor wie die Membrantheorie (siehe Anhang B.2), wobei er aus drei konstanten Verschiebungskomponenten über die Dicke besteht. Eine Verdrehung des Querschnittes bei der Verformung ist hier nicht enthalten. Für das Modell 0 wird allerdings das allgemeine dreidimensionale Materialmodell verwendet. Die Membrantheorie hingegen ist auf einem reduzierten Materialmodell aufgebaut, wie es in Anhang B.2 erläutert ist.

Die Komponenten des Verschiebungsvektors lauten also

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

wodurch sich die ersten drei Komponenten des Verzerrungstensors in Gleichung (4.4) zu

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= u_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 u_3 \\ &\quad + \Theta^3 \left( -B_{.1}^1 u_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 u_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= u_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 u_3 \\ &\quad + \Theta^3 \left( -B_{.2}^2 u_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 u_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

ergeben. Bei diesem Modell berechnen sich die Verzerrungen in Dickenrichtung  $\bar{\varepsilon}_{33}$  zu null, wodurch das POISSON-THICKNESS-Locking dieses Modells ersichtlich ist. Die Verzerrungen  $\bar{\varepsilon}_{11}$  und  $\bar{\varepsilon}_{22}$  sind linear veränderlich über die Dicke, sodass sich mit Gleichung (4.5) lineare Spannungsverläufe für  $\bar{S}^{11}$ ,  $\bar{S}^{22}$  und  $\bar{S}^{33}$  über die Dicke der Schale ergeben.

### 4.1.1 Membranspannungszustand

Bei einem Membranspannungszustand sind die Spannungsverläufe für  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  konstant über die Dicke, das heißt, die linearen Anteile in den Spannungen müssen sich zu null ergeben. Aus dieser Bedingung ergibt sich

$$u_1|_1 = A_{11} B_{.1}^1 u_3 \quad \text{und} \quad u_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 u_3 \quad (4.8)$$

und die Normalverzerrungen in (4.7) berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Schubverzerrungen bleiben unverändert. Da sich für das Modell 0 bei einem Membranspannungszustand alle Normalverzerrungen zu null ergeben, sie allerdings aus anschaulichen Gründen mindestens konstant über die Dicke verlaufen müssen, enthält dieses Modell das POISSON-THICKNESS-Locking und ist somit unbrauchbar.

Bei der Membrantheorie tritt dieser Effekt nicht auf, da sie die linearen Terme in  $\Theta^3$  in den Verzerrungen vernachlässigt und sich mit dem modifizierten Materialmodell in Anhang B.1 konstante Normalspannungen ergeben. Eine Aufstellung der Gleichungen der Membrantheorie befindet sich im Anhang B.2.

### 4.1.2 Biegespannungszustand

Für einen reinen Biegespannungszustand werden die konstanten Anteile in den Spannungen  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  zu null gesetzt, wodurch sich

$${}^0u_{1|1} = A_{11} B_{.1}^1 {}^0u_3 \quad \text{und} \quad {}^0u_{2|2} = A_{22} B_{.2}^2 {}^0u_3 \quad (4.10)$$

ergibt und sich alle Normalverzerrungen in (4.7) zu null berechnen. Auch hier ist das POISSON-THICKNESS-Locking des Modells ablesbar, da die Normaldehnungen mindestens linear über die Dicke der Schale verlaufen müssen.

Die Membrantheorie kann keinen Biegespannungszustand abbilden, da sie nur konstante Spannungsverläufe über die Dicke beschreiben kann.

## 4.2 Modell 1

Der Verschiebungsvektor des Modells 1 ist vergleichbar zu dem der NAGHDI-Schalentheorie im Anhang B.4, wobei er die dritte Komponente des zweiten Direktors, die die Dickenänderung verursacht, mit berücksichtigt.

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} {}^0u_1 \\ {}^0u_2 \\ {}^0u_3 \end{pmatrix} + \Theta^3 \begin{pmatrix} {}^1u_1 \\ {}^1u_2 \\ {}^1u_3 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Mit diesen Verschiebungen ergeben sich die Normalverzerrungen wie folgt:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= {}^0u_{1|1} - A_{11} B_{.1}^1 {}^0u_3 \\ &\quad + \Theta^3 \left( -B_{.1}^1 {}^0u_{1|1} + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 {}^0u_3 + {}^1u_{1|1} - A_{11} B_{.1}^1 {}^1u_3 \right) \\ &\quad + (\Theta^3)^2 \left( -B_{.1}^1 {}^1u_{1|1} + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 {}^1u_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= {}^0u_{2|2} - A_{22} B_{.2}^2 {}^0u_3 \\ &\quad + \Theta^3 \left( -B_{.2}^2 {}^0u_{2|2} + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 {}^0u_3 + {}^1u_{2|2} - A_{22} B_{.2}^2 {}^1u_3 \right) \\ &\quad + (\Theta^3)^2 \left( -B_{.2}^2 {}^1u_{2|2} + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 {}^1u_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= {}^1u_3 . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dieses Modell kann nur konstante Normalverzerrungen in Dickenrichtung mit  $\bar{\varepsilon}_{33}$  darstellen, sodass das POISSON-THICKNESS-Locking deutlich wird. Durch den quadratischen Verlauf der Verzerrungen  $\bar{\varepsilon}_{11}$  und  $\bar{\varepsilon}_{22}$  über die Dicke der Schale folgen mit Gleichung (4.5) quadratische Normalspannungsverläufe für  $\bar{S}^{11}$ ,  $\bar{S}^{22}$  und  $\bar{S}^{33}$ .

#### 4.2.1 Membranspannungszustand

Werden nur konstante Spannungsverläufe für  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  über die Dicke berücksichtigt, so ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} {}^1u_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 {}^1u_3 & \text{und} & & {}^1u_2|_2 &= A_{22} B_{.2}^2 {}^1u_3 \\ {}^0u_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 {}^0u_3 & \text{und} & & {}^0u_2|_2 &= A_{22} B_{.2}^2 {}^0u_3, \end{aligned} \quad (4.13)$$

wodurch sich die Normalverzerrungen in (4.12) zu

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= {}^1u_3 \end{aligned} \quad (4.14)$$

berechnen. Eine Versteifung des Modells ist ersichtlich, da sich bei konstanten Membranspannungen keine Verzerrungen in Richtung der Schalenmittelfläche einstellen. Das Modell enthält noch das POISSON-THICKNESS-Locking und ist somit unbrauchbar.

Die NAGHDI-Schalentheorie umgeht diesen Effekt, indem sie die quadratischen Anteile der Verzerrungen über die Dicke vernachlässigt. Des Weiteren wird ein modifiziertes Materialmodell verwendet. Anhang B.4 zeigt, dass die NAGHDI-Theorie frei von Versteifungseffekten ist.

#### 4.2.2 Biegespannungszustand

Werden die konstanten und quadratischen Anteile der Spannungen über die Dicke zu null gesetzt, folgt

$$\begin{aligned} {}^1u_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 {}^1u_3 & \text{und} & & {}^1u_2|_2 &= A_{22} B_{.2}^2 {}^1u_3 \\ {}^0u_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 {}^0u_3 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_{11} {}^1u_3 & \text{und} & & {}^0u_2|_2 &= A_{22} B_{.2}^2 {}^0u_3 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_{22} {}^1u_3 \end{aligned} \quad (4.15)$$

und die Normalverzerrungen in (4.12) berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= A_{11} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( -{}^1u_3 + \Theta^3 B_{.1}^1 {}^1u_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= A_{22} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( -{}^1u_3 + \Theta^3 B_{.2}^2 {}^1u_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= {}^1u_3. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die Normalverzerrung in Dickenrichtung verläuft nicht linear in  $\Theta^3$ , wie es für einen Biegespannungszustand gefordert wird. Modell 1 enthält also das POISSON-THICKNESS-Locking und ist unbrauchbar zur Abbildung dreidimensionaler Spannungszustände.

### 4.3 Modell 2

Mit dem quadratischen Verschiebungsvektor in Dickenrichtung des Modells 2

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} + \Theta^3 \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ 1 \\ u_2 \\ 1 \\ u_3 \end{pmatrix} + (\Theta^3)^2 \begin{pmatrix} 2 \\ u_1 \\ 2 \\ u_2 \\ 2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

berechnen sich die Normalverzerrungen zu:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= \overset{0}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 \\ &\quad + \Theta^3 \left( -B_{.1}^1 \overset{0}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 + \overset{1}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 \right) \\ &\quad + (\Theta^3)^2 \left( -B_{.1}^1 \overset{1}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 + \overset{2}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 \right) \\ &\quad + (\Theta^3)^3 \left( -B_{.1}^1 \overset{2}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \overset{0}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 \\ &\quad + \Theta^3 \left( -B_{.2}^2 \overset{0}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 + \overset{1}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 \right) \\ &\quad + (\Theta^3)^2 \left( -B_{.2}^2 \overset{1}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 + \overset{2}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 \right) \\ &\quad + (\Theta^3)^3 \left( -B_{.2}^2 \overset{2}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= \overset{1}{u}_3 + \Theta^3 (2 \overset{2}{u}_3) . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dieses Modell kann als Erstes linear veränderliche Normaldehnungen in Dickenrichtung abbilden. Die Normalspannungen in Gleichung (4.5) ergeben sich mit (4.18) zu einem kubischen Verlauf über die Dicke.

#### 4.3.1 Membranspannungszustand

Die folgenden Beziehungen ergeben sich indem die linearen, quadratischen und kubischen Anteile der Spannungsverläufe  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  zu null gesetzt werden.

$$\begin{aligned} \overset{2}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{2}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 \\ \overset{1}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{1}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 \\ \overset{0}{u}_1|_1 &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{A_{11}}{B_{.1}^1} \overset{2}{u}_3 + A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{0}{u}_2|_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{A_{22}}{B_{.2}^2} \overset{2}{u}_3 + A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Normalverzerrungen in (4.18) berechnen sich mit diesen Bedingungen zu einem linearen Verlauf über die Dicke und zeigen somit noch keine Versteifung auf.

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11} &= A_{11} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left( \frac{1}{B_{.1}^1} u_3 - \Theta^3 u_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= A_{22} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left( \frac{1}{B_{.2}^2} u_3 - \Theta^3 u_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= u_3 + \Theta^3 (2 u_3)\end{aligned}\tag{4.20}$$

#### 4.3.1.1 Membranspannungszustand aus Randlasten

Wird der Membranspannungszustand aus Randlasten bewirkt, so folgt aus der Randbedingung  $\bar{S}^{33}(\Theta^3 = \pm \frac{h}{2}) = 0$

$$u_3^1 = 0 \quad \text{und} \quad u_3^2 = 0\tag{4.21}$$

und die Normalverzerrungen ergeben sich zu null. Mit dieser Belastungsart tritt das POISSON-THICKNESS-Locking auf und das Modell wird unbrauchbar.

#### 4.3.1.2 Membranspannungszustand aus Flächenlasten

Anders verhält sich der Membranspannungszustand aus Flächenlasten. Aus den Randbedingungen  $\bar{S}^{33}(\Theta^3 = \frac{h}{2}) = 0$  und  $\bar{S}^{33}(\Theta^3 = -\frac{h}{2}) = p$ , wobei  $p$  eine konstante Flächenlast in  $\Theta^3$ -Richtung darstellt, folgt

$$u_3^1 = \frac{p}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \left( \frac{1}{B_{.1}^1} + \frac{1}{B_{.2}^2} \right) \frac{1}{h} \right) \quad \text{und} \quad u_3^2 = \frac{p(\lambda + \mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{1}{h}\tag{4.22}$$

und die Normalverzerrungen weisen einen linearen Verlauf in  $\Theta^3$  über die Schalendicke auf. Diese Belastungsart bewirkt also kein POISSON-THICKNESS-Locking.

#### 4.3.2 Biegespannungszustand

Für einen reinen Biegezustand werden nur die linearen Anteile der Normalspannungen berücksichtigt. Die restlichen Anteile werden zu null gesetzt.

$$\begin{aligned}u_{1|1}^2 &= A_{11} B_{.1}^1 u_3^2 \quad \text{und} \quad u_{2|2}^2 = A_{22} B_{.2}^2 u_3^2 \\ u_{1|1}^1 &= A_{11} B_{.1}^1 u_3^1 \quad \text{und} \quad u_{2|2}^1 = A_{22} B_{.2}^2 u_3^1 \\ u_{1|1}^0 &= A_{11} B_{.1}^1 u_3^0 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_{11} u_3^1 \quad \text{und} \quad u_{2|2}^0 = A_{22} B_{.2}^2 u_3^0 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_{22} u_3^1\end{aligned}\tag{4.23}$$

Die Normalverzerrungen in (4.18) vereinfachen sich dann zu:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11} &= A_{11} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( -\overset{1}{u}_3 + \Theta^3 B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= A_{22} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( -\overset{1}{u}_3 + \Theta^3 B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= \overset{1}{u}_3 + \Theta^3 2 \overset{2}{u}_3 .\end{aligned}\tag{4.24}$$

Es ergeben sich lineare Verläufe der Normaldehnungen über die Dicke, die noch kein POISSON-THICKNESS-Locking verdeutlichen.

#### 4.3.2.1 Biegespannungszustand aus Randlasten

Mit den Randbedingungen  $\bar{S}^{33}(\Theta^3 = \pm \frac{h}{2}) = 0$  für den Biegespannungszustand aus Randlasten folgt

$$\overset{1}{u}_3 = 0 \quad \text{und} \quad \overset{2}{u}_3 = 0\tag{4.25}$$

und die Normalverzerrungen berechnen sich zu null. Mit dieser Belastungsart tritt das POISSON-THICKNESS-Locking auf und das Modell wird unbrauchbar.

#### 4.3.2.2 Biegespannungszustand aus Flächenlasten

Bei einem Biegespannungszustand aus Flächenlasten ergibt sich aus den Randbedingungen  $\bar{S}^{33}(\Theta^3 = \frac{h}{2}) = 0$  und  $\bar{S}^{33}(\Theta^3 = -\frac{h}{2}) = p$

$$\overset{1}{u}_3 = \frac{p(\lambda + \mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \quad \text{und} \quad \overset{2}{u}_3 = \frac{p}{2(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{1}{h} - \frac{\lambda^2}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} (B_{.1}^1 + B_{.2}^2) \right).\tag{4.26}$$

Die Normalverzerrungen verlaufen linear in  $\Theta^3$  über die Schalendicke, sodass diese Belastungsart kein POISSON-THICKNESS-Locking bewirkt.

### 4.4 Modell 3

Der Verschiebungsvektor ist für dieses Modell kubisch in Dickenrichtung

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} + \Theta^3 \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ 1 \\ u_2 \\ 1 \\ u_3 \end{pmatrix} + (\Theta^3)^2 \begin{pmatrix} 2 \\ u_1 \\ 2 \\ u_2 \\ 2 \\ u_3 \end{pmatrix} + (\Theta^3)^3 \begin{pmatrix} 3 \\ u_1 \\ 3 \\ u_2 \\ 3 \\ u_3 \end{pmatrix},\tag{4.27}$$



wodurch sich die Normalverzerrungen in (4.4) wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{11} &= \overset{0}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 \\
&+ \Theta^3 \left( -B_{.1}^1 \overset{0}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 + \overset{1}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^2 \left( -B_{.1}^1 \overset{1}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 + \overset{2}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^3 \left( -B_{.1}^1 \overset{2}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 + \overset{3}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{3}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^4 \left( -B_{.1}^1 \overset{3}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{3}{u}_3 \right) \\
\bar{\varepsilon}_{22} &= \overset{0}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 \\
&+ \Theta^3 \left( -B_{.2}^2 \overset{0}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 + \overset{1}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^2 \left( -B_{.2}^2 \overset{1}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 + \overset{2}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^3 \left( -B_{.2}^2 \overset{2}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 + \overset{3}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{3}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^4 \left( -B_{.2}^2 \overset{3}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{3}{u}_3 \right) \\
\bar{\varepsilon}_{33} &= \overset{1}{u}_3 + \Theta^3 (2 \overset{2}{u}_3) + (\Theta^3)^2 (3 \overset{3}{u}_3) .
\end{aligned} \tag{4.28}$$

#### 4.4.1 Membranspannungszustand

Wird nur der konstante Spannungsverlauf von  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  in (4.5) mit (4.28) berücksichtigt, ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\overset{3}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{3}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{3}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{3}{u}_3 \\
\overset{2}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{2}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 \\
\overset{1}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 + \frac{3\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{A_{11}}{B_{.1}^1} \overset{3}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{1}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 + \frac{3\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{A_{22}}{B_{.2}^2} \overset{3}{u}_3 \\
\overset{0}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{A_{11}}{B_{.1}^1} \overset{2}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{0}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{A_{22}}{B_{.2}^2} \overset{2}{u}_3 \\
&+ \frac{3\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{A_{11}}{B_{.1}^1 B_{.1}^1} \overset{3}{u}_3 \quad \quad \quad + \frac{3\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{A_{22}}{B_{.2}^2 B_{.2}^2} \overset{3}{u}_3 ,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

wodurch mit Gleichung (4.28) ein quadratischer Verlauf der Normalverzerrungen über die Dicke folgt.

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{11} &= A_{11} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( \frac{2}{B_{.1}^1} \overset{2}{u}_3 + \frac{3}{B_{.1}^1 B_{.1}^1} \overset{3}{u}_3 - \Theta^3 2 \overset{2}{u}_3 - (\Theta^3)^2 3 \overset{3}{u}_3 \right) \\
\bar{\varepsilon}_{22} &= A_{22} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( \frac{2}{B_{.2}^2} \overset{2}{u}_3 + \frac{3}{B_{.2}^2 B_{.2}^2} \overset{3}{u}_3 - \Theta^3 2 \overset{2}{u}_3 - (\Theta^3)^2 3 \overset{3}{u}_3 \right) \\
\bar{\varepsilon}_{33} &= \overset{1}{u}_3 + \Theta^3 2 \overset{2}{u}_3 + (\Theta^3)^2 3 \overset{3}{u}_3
\end{aligned} \tag{4.30}$$

#### 4.4.1.1 Membranspannungszustand aus Randlasten

Wird der Membranspannungszustand durch Randlasten erzeugt, so ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} \overset{2}{u}_3 &= 0 \\ \text{und } \overset{3}{u}_3 &= -\frac{4(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu) B_{.1}^1 B_{.1}^1 B_{.2}^2 B_{.2}^2}{3(2\lambda^2(B_{.1}^1 B_{.1}^1 + B_{.2}^2 B_{.2}^2) + \mu(3\lambda + 2\mu) B_{.1}^1 B_{.1}^1 B_{.2}^2 B_{.2}^2 h^2)} \overset{1}{u}_3 \end{aligned} \quad (4.31)$$

und die Normalverzerrungen sind quadratisch in  $\Theta^3$ . Das Modell weist also keine Versteifung auf.

#### 4.4.1.2 Membranspannungszustand aus Flächenlasten

Bei einem Membranspannungszustand aus Flächenlasten gilt

$$\begin{aligned} \overset{1}{u}_3 &= \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} \left( \left( -\frac{3\lambda^2}{\lambda + \mu} \left( \frac{1}{B_{.1}^1 B_{.1}^1} + \frac{1}{B_{.2}^2 B_{.2}^2} \right) - \frac{3\mu(3\lambda + 2\mu)}{2(\lambda + \mu)} h^2 \right) \overset{3}{u}_3 \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 + \frac{\lambda^2}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \left( \frac{1}{B_{.1}^1} + \frac{1}{B_{.2}^2} \right) \frac{1}{h} \right) p \right) \\ \text{und } \overset{2}{u}_3 &= \frac{(\lambda + \mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{1}{h} p, \end{aligned} \quad (4.32)$$

sodass die Normalverzerrungen quadratisch in Dickenrichtung verlaufen. Diese Belastungsart bewirkt kein POISSON-THICKNESS-Locking für das Modell 3.

#### 4.4.2 Biegespannungszustand

Hier werden nur die linearen Anteile der Spannungen  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  berücksichtigt und es berechnen sich die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \overset{3}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{3}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{3}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{3}{u}_3 \\ \overset{2}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{2}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 \\ \overset{1}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 + \frac{3\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{A_{11}}{B_{.1}^1} \overset{3}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{1}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 + \frac{3\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{A_{22}}{B_{.2}^2} \overset{3}{u}_3 \\ \overset{0}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_{11} \overset{1}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{0}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_{22} \overset{1}{u}_3. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Werden diese Beziehungen in die Normalverzerrungen in (4.28) eingesetzt, so ergibt sich ein quadratischer Verlauf über die Koordinate  $\Theta^3$ .

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= A_{11} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( -\overset{1}{u}_3 + \Theta^3 \left( B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 + \frac{3}{B_{.1}^1} \overset{3}{u}_3 \right) - (\Theta^3)^2 3\overset{3}{u}_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= A_{22} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( -\overset{1}{u}_3 + \Theta^3 \left( B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 + \frac{3}{B_{.2}^2} \overset{3}{u}_3 \right) - (\Theta^3)^2 3\overset{3}{u}_3 \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\bar{\varepsilon}_{33} = {}^1u_3 + \Theta^3 2 {}^2u_3 + (\Theta^3)^2 3 {}^3u_3$$

#### 4.4.2.1 Biegespannungszustand aus Randlasten

Aus den Randbedingungen für den Biegespannungszustand aus Randlasten folgt

$$\begin{aligned} {}^2u_3 &= \frac{\lambda^2}{4(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)} \left( 4 \left( \frac{1}{B_{.1}^1} + \frac{1}{B_{.2}^2} \right) \frac{1}{h^2} - (B_{.1}^1 + B_{.2}^2) \right) {}^1u_3 \\ \text{und } {}^3u_3 &= -\frac{4}{3h^2} {}^1u_3, \end{aligned} \quad (4.35)$$

wodurch sich der Verlauf der Normalverzerrungen quadratisch über  $\Theta^3$  ergibt. Das Modell kann somit diesen Lastfall abbilden.

#### 4.4.2.2 Biegespannungszustand aus Flächenlasten

Wird der Biegespannungszustand aus Flächenlasten verursacht, so lassen sich aus den Randbedingungen die Beziehungen

$$\begin{aligned} {}^2u_3 &= \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} \\ &\left( \left( \frac{2\lambda^2(3 + 2\mu)}{(\lambda + \mu)(3\lambda + 2\mu)} \left( \frac{1}{B_{.1}^1} + \frac{1}{B_{.2}^2} \right) \frac{1}{h^2} - \frac{\lambda^2}{2(\lambda + \mu)} (B_{.1}^1 + B_{.2}^2) \right) {}^1u_3 \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{\lambda^2(1 + \mu)}{(\lambda + \mu)(3\lambda + 2\mu)} \left( \frac{1}{B_{.1}^1} + \frac{1}{B_{.2}^2} \right) \right) \frac{1}{h} p \right) \\ \text{und } {}^3u_3 &= -\frac{4}{3h^2} {}^1u_3 + \frac{2(\lambda + \mu)}{3\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{1}{h^2} p \end{aligned} \quad (4.36)$$

bestimmen. Auch hier stellt sich ein quadratischer Verlauf der Normalverzerrungen in  $\Theta^3$  ein und das Modell kann den Lastfall ohne Versteifung beschreiben.

### 4.5 Modell (1,1,2)

Aus der allgemeinen Gleichung der Verzerrungen in (3.44) wird deutlich, dass der Verlauf der Normaldehnungen  $\bar{\varepsilon}_{33}$  in  $\Theta^3$  immer um einen Grad niedriger ist als der Verlauf der Normaldehnungen  $\bar{\varepsilon}_{11}$  und  $\bar{\varepsilon}_{22}$ . Da die Normaldehnung in Dickenrichtung nur von den Verschiebungskomponenten  ${}^{(k+1)}u_3$  abhängen, wird der Polynomansatz für die Verschiebungskomponente  $u_3$  höher gewählt, als der der Verschiebungskomponenten  $u_1$  und  $u_2$ . Des Weiteren werden mindestens lineare Normaldehnungen in Dickenrichtung für  $\bar{\varepsilon}_{33}$  benötigt, um die Biegespannungszustände zu erfassen. Das

Modell (1, 1, 2) ist daher das niedrigste Modell der reduzierten Modelle und entsteht aus dem Verschiebungsvektor

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} + \Theta^3 \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ 1 \\ u_2 \\ 1 \\ u_3 \end{pmatrix} + (\Theta^3)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

wodurch sich die Normalverzerrungen in Gleichung (4.4) zu

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= u_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 u_3 \\ &+ \Theta^3 (-B_{.1}^1 u_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 u_3 + u_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 u_3) \\ &+ (\Theta^3)^2 (-B_{.1}^1 u_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 u_3 - A_{11} B_{.1}^2 u_3) \\ &+ (\Theta^3)^3 (A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^2 u_3) \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= u_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 u_3 \\ &+ \Theta^3 (-B_{.2}^2 u_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 u_3 + u_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 u_3) \\ &+ (\Theta^3)^2 (-B_{.2}^2 u_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 u_3 - A_{22} B_{.2}^2 u_3) \\ &+ (\Theta^3)^3 (A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 u_3) \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= u_3 + \Theta^3 (2 u_3) \end{aligned} \quad (4.38)$$

berechnen. Die Normalspannungen ergeben sich kubisch über die Dickenkoordinaten  $\Theta^3$ .

#### 4.5.1 Membranspannungszustand

Werden die linearen, quadratischen und kubischen Anteile der Spannungsverläufe  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  zu null gesetzt, folgt

$$\begin{aligned} u_3^2 &= 0 \\ u_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 u_3 \quad \text{und} \quad u_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 u_3 \\ u_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 u_3 \quad \text{und} \quad u_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 u_3, \end{aligned} \quad (4.39)$$

wodurch sich die Normalverzerrungen in (4.38) zu

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= 0 \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= u_3 \end{aligned} \quad (4.40)$$

ergeben. Die Normalverzerrungen der Schalenmittelfläche sollten mindestens konstant über die Dicke verlaufen und zeigen daher das POISSON-THICKNESS-Locking dieses Modells auf.

### 4.5.2 Biegespannungszustand

Für einen reinen Biegezustand werden die konstanten, quadratischen und kubischen Anteile der Spannungsverläufe  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  zu null gesetzt und es resultieren die Beziehungen

$$\begin{aligned} \overset{2}{u}_3 &= 0 \\ \overset{1}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{1}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 \\ \overset{0}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_{11} \overset{1}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{0}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_{22} \overset{1}{u}_3. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Die Normalverzerrungen in (4.38) vereinfachen sich dadurch zu:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= A_{11} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( -\overset{1}{u}_3 + \Theta^3 B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= A_{22} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( -\overset{1}{u}_3 + \Theta^3 B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= \overset{1}{u}_3. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Das POISSON-THICKNESS-Locking wird hier für die Normalverzerrung in Dickenrichtung deutlich, da diese keinen linearen Anteil in  $\Theta^3$  enthält.

Dieses Modell ist nicht geeignet zur Verwendung eines dreidimensionalen Materialmodells. Werden jedoch die quadratischen und kubischen Anteile der Verzerrungsverläufe über die Dicke in (4.38) vernachlässigt, so kann gezeigt werden, dass das Modell alle Spannungszustände mit den entsprechenden Belastungen abbilden kann. Das so entstandene Modell (1, 1, 2) mit linearen Verzerrungen in  $\Theta^3$  ist vergleichbar mit dem 7-Parameter-Modell von BÜCHTER und RAMM in [24]. Für große Formänderungen wurde das Modell (1, 1, 2) erfolgreich von SANSOUR in [78] verwendet.

Diese Reduktion der Verzerrungen ist willkürlich gewählt, da sie mathematisch nicht begründbar ist. Sie bewirkt eine Veränderung der polynomialen Beschreibung der Kinematik in Dickenrichtung. Eine bessere Möglichkeit wäre die polynomiale Beschreibung des Verschiebungsvektors in Dickenrichtung nicht auf Monomen, sondern auf LEGENDRE-Polynomen oder besser auf hierarchischen Ansatzfunktionen aufzubauen.

## 4.6 Modell (2,2,3)

Die Komponenten des Verschiebungsvektors des nächst höheren Modells (2, 2, 3) lauten

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} \overset{0}{u}_1 \\ \overset{0}{u}_2 \\ \overset{0}{u}_3 \end{pmatrix} + \Theta^3 \begin{pmatrix} \overset{1}{u}_1 \\ \overset{1}{u}_2 \\ \overset{1}{u}_3 \end{pmatrix} + (\Theta^3)^2 \begin{pmatrix} \overset{2}{u}_1 \\ \overset{2}{u}_2 \\ \overset{2}{u}_3 \end{pmatrix} + (\Theta^3)^3 \begin{pmatrix} \overset{3}{u}_1 \\ \overset{3}{u}_2 \\ \overset{3}{u}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

wodurch die Normalverzerrungen in (4.4) wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{11} &= \overset{0}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 \\
&\quad + \Theta^3 \left( -B_{.1}^1 \overset{0}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 + \overset{1}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 \right) \\
&\quad + (\Theta^3)^2 \left( -B_{.1}^1 \overset{1}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 + \overset{2}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 \right) \\
&\quad + (\Theta^3)^3 \left( -B_{.1}^1 \overset{2}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{3}{u}_3 \right) \\
&\quad + (\Theta^3)^4 \left( A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{3}{u}_3 \right) \\
\bar{\varepsilon}_{22} &= \overset{0}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 \\
&\quad + \Theta^3 \left( -B_{.2}^2 \overset{0}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 + \overset{1}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 \right) \\
&\quad + (\Theta^3)^2 \left( -B_{.2}^2 \overset{1}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 + \overset{2}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 \right) \\
&\quad + (\Theta^3)^3 \left( -B_{.2}^2 \overset{2}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{3}{u}_3 \right) \\
&\quad + (\Theta^3)^4 \left( A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{3}{u}_3 \right) \\
\bar{\varepsilon}_{33} &= \overset{1}{u}_3 + \Theta^3 (2 \overset{2}{u}_3) + (\Theta^3)^2 (3 \overset{3}{u}_3).
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Die Normalspannungen werden mit Gleichung (4.5) und (4.44) durch ein Polynom vierten Grades über die Dickenkoordinate  $\Theta^3$  beschrieben.

#### 4.6.1 Membranspannungszustand

Für den Membranspannungszustand ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\overset{3}{u}_3 &= 0 \\
\overset{2}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{2}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 \\
\overset{1}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{1}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 \\
\overset{0}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{A_{11}}{B_{.1}^1} \overset{2}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{0}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{A_{22}}{B_{.2}^2} \overset{2}{u}_3
\end{aligned} \tag{4.45}$$

und die Normalverzerrungen in (4.44) berechnen sich zu:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{11} &= A_{11} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left( \frac{1}{B_{.1}^1} \overset{2}{u}_3 - \Theta^3 \overset{2}{u}_3 \right) \\
\bar{\varepsilon}_{22} &= A_{22} \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left( \frac{1}{B_{.2}^2} \overset{2}{u}_3 - \Theta^3 \overset{2}{u}_3 \right) \\
\bar{\varepsilon}_{33} &= \overset{1}{u}_3 + \Theta^3 2 \overset{2}{u}_3.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Der Verlauf der Normalverzerrungen weist an dieser Stelle noch keinen Versteifungseffekt auf.

#### 4.6.1.1 Membranspannungszustand aus Randlasten

Resultiert der Membranspannungszustand aus aufgetragenen Randlasten, so gilt

$${}^1u_3 = 0 \quad \text{und} \quad {}^2u_3 = 0 \quad (4.47)$$

und die Normalverzerrungen ergeben sich über die gesamte Dicke der Schale zu null. Das POISSON-THICKNESS-Locking ist also in diesem Modell noch vorhanden.

#### 4.6.1.2 Membranspannungszustand aus Flächenlasten

Bei einem Membranspannungszustand aus Flächenlasten ergeben sich die Bedingungen

$$\begin{aligned} {}^1u_3 &= \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{\lambda^2}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{B_{.1}^1} + \frac{1}{B_{.2}^2} \right) + 1 \right) p \\ \text{und} \quad {}^2u_3 &= \frac{\lambda + \mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{1}{h} p \end{aligned} \quad (4.48)$$

und die Normalverzerrungen verlaufen linear über die Koordinate  $\Theta^3$ . Für diese Belastungsart ist das Modell frei von Versteifungen.

#### 4.6.2 Biegespannungszustand

Für einen reinen Biegespannungszustand werden alle außer die linearen Anteile der Spannungsverläufe  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  zu null gesetzt und es ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} {}^3u_3 &= 0 \\ {}^2u_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 {}^2u_3 \quad \text{und} \quad {}^2u_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 {}^2u_3 \\ {}^1u_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 {}^1u_3 \quad \text{und} \quad {}^1u_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 {}^1u_3 \\ {}^0u_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 {}^0u_3 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_{11} {}^1u_3 \quad \text{und} \quad {}^0u_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 {}^0u_3 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_{22} {}^1u_3. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Die Normalverzerrungen in (4.44) vereinfachen sich damit zu:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= A_{11} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( -{}^1u_3 + \Theta^3 B_{.1}^1 {}^1u_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= A_{22} \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left( -{}^1u_3 + \Theta^3 B_{.2}^2 {}^1u_3 \right) \\ \bar{\varepsilon}_{33} &= {}^1u_3 + \Theta^3 {}^2u_3 \end{aligned} \quad (4.50)$$

und weisen noch kein POISSON-THICKNESS-Locking auf.

#### 4.6.2.1 Biegespannungszustand aus Randlasten

Treten bei einem Biegespannungszustand nur Randlasten auf, so ergibt sich aus den Randbedingungen des Spannungsverlaufes  $\bar{S}^{33}$

$${}^2u_3 = 0 \quad \text{und} \quad {}^1u_3 = 0 \quad (4.51)$$

und die Normalverzerrungen in (4.44) berechnen sich zu null, wodurch das POISSON-THICKNESS-Locking des Modells sichtbar wird.

#### 4.6.2.2 Biegespannungszustand aus Flächenlasten

Wird der Biegespannungszustand aus Flächenlasten bewirkt, so folgen aus den Randbedingungen die Beziehungen

$$\begin{aligned} {}^2u_3 &= -\frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{\lambda^2}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} (B_{.1}^1 + B_{.2}^2) + \frac{1}{h} \right) p \\ \text{und} \quad {}^1u_3 &= \frac{\lambda + \mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} p \end{aligned} \quad (4.52)$$

und die Normalverzerrungen verlaufen linear über die Dickenkoordinate  $\Theta^3$ .

Das Modell ist durch das auftretende POISSON-THICKNESS-Locking nicht geeignet ein dreidimensionales Materialmodell zu berücksichtigen. Werden jedoch die Verzerrungen auf einen maximal kubischen Verlauf in  $\Theta^3$  reduziert, so tritt bei diesem Modell kein POISSON-THICKNESS-Locking mehr auf.

Wie im vorherigen Abschnitt angesprochen ist diese Reduktion des Verzerrungstensors nicht erwünscht, da sie einen willkürlichen und physikalisch unbegründeten Eingriff in die Kinematik der hierarchischen Schalenmodelle darstellt.

### 4.7 Modell (3,3,4)

Der Verschiebungsvektor des Modells (3, 3, 4) lautet

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} + \Theta^3 \begin{pmatrix} 1 \\ u_1 \\ 1 \\ u_2 \\ 1 \\ u_3 \end{pmatrix} + (\Theta^3)^2 \begin{pmatrix} 2 \\ u_1 \\ 2 \\ u_2 \\ 2 \\ u_3 \end{pmatrix} + (\Theta^3)^3 \begin{pmatrix} 3 \\ u_1 \\ 3 \\ u_2 \\ 3 \\ u_3 \end{pmatrix} + (\Theta^3)^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

und enthält einen kubischen Verlauf der Mittelflächenverschiebungen in Dickenrichtung und eine Dickenverschiebung vierten Grades in  $\Theta^3$ .



Daraus berechnen sich die Verzerrungen in Gleichung (4.4) zu:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{11} &= \overset{0}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 \\
&+ \Theta^3 \left( -B_{.1}^1 \overset{0}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 + \overset{1}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^2 \left( -B_{.1}^1 \overset{1}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 + \overset{2}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^3 \left( -B_{.1}^1 \overset{2}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 + \overset{3}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{3}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^4 \left( -B_{.1}^1 \overset{3}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{3}{u}_3 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{4}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^5 \left( A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{4}{u}_3 \right) \\
\bar{\varepsilon}_{22} &= \overset{0}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 \\
&+ \Theta^3 \left( -B_{.2}^2 \overset{0}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 + \overset{1}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^2 \left( -B_{.2}^2 \overset{1}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 + \overset{2}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^3 \left( -B_{.2}^2 \overset{2}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 + \overset{3}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{3}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^4 \left( -B_{.2}^2 \overset{3}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{3}{u}_3 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{4}{u}_3 \right) \\
&+ (\Theta^3)^5 \left( A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{4}{u}_3 \right) \\
\bar{\varepsilon}_{33} &= \overset{1}{u}_3 + \Theta^3 (2 \overset{2}{u}_3) + (\Theta^3)^2 (3 \overset{3}{u}_3) + (\Theta^3)^3 (4 \overset{4}{u}_3) .
\end{aligned} \tag{4.54}$$

#### 4.7.1 Membranspannungszustand

Werden nur die konstanten Anteile der Spannungsverläufe  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  in  $\Theta^3$  berücksichtigt, ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\overset{4}{u}_3 &= 0 \\
\overset{3}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{3}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{3}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{3}{u}_3 \\
\overset{2}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{2}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{2}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{2}{u}_3 \\
\overset{1}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{1}{u}_3 + \frac{3\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{A_{11}}{B_{.1}^1} \overset{3}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{1}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{1}{u}_3 + \frac{3\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{A_{22}}{B_{.2}^2} \overset{3}{u}_3 \\
\overset{0}{u}_1|_1 &= A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{A_{11}}{B_{.1}^1} \overset{2}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{0}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{A_{22}}{B_{.2}^2} \overset{2}{u}_3 \\
&+ \frac{3\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{A_{11}}{B_{.1}^1 B_{.1}^1} \overset{3}{u}_3 \quad \quad \quad + \frac{3\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{A_{22}}{B_{.2}^2 B_{.2}^2} \overset{3}{u}_3 ,
\end{aligned} \tag{4.55}$$

wodurch sich ein quadratischer Verlauf der Normalverzerrungen aus (4.54) über die Dicke ergibt. Dieser ist gleich mit den Normalverzerrungen des Modells 3 in 4.4.1. Da dort durch Randlasten bzw. Flächenlasten kein POISSON-THICKNESS-Locking aufgetreten ist, wird dieses Modell auch frei von Versteifungen bei membrandominierten Schalen sein.

### 4.7.2 Biegespannungszustand

Hier werden nur die linearen Anteile der Spannungen  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  berücksichtigt und es berechnen sich die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}_3^4 = 0 \\
 & \bar{u}_1^3|_1 = A_{11} B_{.1}^1 \bar{u}_3^3 \quad \text{und} \quad \bar{u}_2^3|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \bar{u}_3^3 \\
 & \bar{u}_1^2|_1 = A_{11} B_{.1}^1 \bar{u}_3^2 \quad \text{und} \quad \bar{u}_2^2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \bar{u}_3^2 \quad (4.56) \\
 & \bar{u}_1^1|_1 = A_{11} B_{.1}^1 \bar{u}_3^1 + \frac{3\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{A_{11}}{B_{.1}^1} \bar{u}_3^3 \quad \text{und} \quad \bar{u}_2^1|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \bar{u}_3^1 + \frac{3\lambda}{2(\lambda + \mu)} \frac{A_{22}}{B_{.2}^2} \bar{u}_3^3 \\
 & \bar{u}_1^0|_1 = A_{11} B_{.1}^1 \bar{u}_3^0 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_{11} \bar{u}_3^1 \quad \text{und} \quad \bar{u}_2^0|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \bar{u}_3^0 - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_{22} \bar{u}_3^1.
 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen dieser Beziehungen in die Normalverzerrungen in (4.54) ergeben sich die gleichen Verzerrungsverläufe wie in Abschnitt 4.4.2. Da bei dem Modell 3 keine Versteifungen durch einen Biegespannungszustand aus Randlasten bzw. Flächenlasten entstanden ist, wird auch das Modell (3, 3, 4) kein POISSON-THICKNESS-Locking aufweisen. Das Modell kann also alle Spannungszustände ohne Versteifungen mit einem dreidimensionalen Materialverhalten abbilden.

## 4.8 Ergebnisse

In diesem Abschnitt wurde das POISSON-THICKNESS-Locking für zwei Modelltypen der hierarchischen Schalenmodelle untersucht. Die folgende Tabelle zeigt den Polynomgrad der Normalverzerrungen in Dickenrichtung der untersuchten Modelle, der sich bei einem Membran- und Biegespannungszustand einstellt. An dieser Stelle wurden noch nicht die Randbedingungen aus den zwei Lastfällen Rand- und Flächenlasten berücksichtigt.

Modell	Membranspannungszustand			Biegespannungszustand		
	$\bar{\varepsilon}_{11}$	$\bar{\varepsilon}_{22}$	$\bar{\varepsilon}_{33}$	$\bar{\varepsilon}_{11}$	$\bar{\varepsilon}_{22}$	$\bar{\varepsilon}_{33}$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	konst.	lin.	lin.	konst.
2	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.
3	quad.	quad.	quad.	quad.	quad.	quad.
(1, 1, 2)	0	0	konst.	lin.	lin.	konst.
(2, 2, 3)	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.	lin.
(3, 3, 4)	quad.	quad.	quad.	quad.	quad.	quad.

**Tab. 4.1:** Polynomgrad der Normalverzerrungen in Dickenrichtung für Membran- und Biegespannungszustand

Wie in der Einführung dieses Abschnittes erwähnt, müssen sich die Normalverzerrungsverläufe bei einem Membranspannungszustand mindestens konstant und bei

einem Biegespannungszustand mindestens linear über die Dicke der Schale ergeben. Kann dieser Verlauf der Verzerrungen von dem gewählten Modell nicht abgebildet werden, weist dieses Modell eine Versteifung, das sogenannte POISSON-THICKNESS-Locking, auf. In Tabelle 4.1 wird deutlich, dass die Modelle 2 und (2, 2, 3) als Erste diese Bedingungen erfüllen. Sie und alle nächst höheren Modelle sind nach diesem Kriterium frei vom POISSON-THICKNESS-Locking-Effekt.

Jedoch ist in dieser Deutung der Ergebnisse noch nicht berücksichtigt worden, welche Randbedingungen der Spannungsverlauf  $\bar{S}^{33}$  an der Ober- und Unterseite der Schale erfüllen muss, um einen solchen Spannungszustand zu reproduzieren. Diese Randbedingungen werden durch den Lastfall Rand- und Flächenlasten gesetzt. Die Ergebnisse der einzelnen Modelle für die verschiedenen Lastfälle werden in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Modell	Membranspannungszustand aus		Biegespannungszustand aus	
	Randlasten	Flächenlasten	Randlasten	Flächenlasten
0	vorh.	vorh.	vorh.	vorh.
1	vorh.	vorh.	vorh.	vorh.
2	vorh.	nicht vorh.	vorh.	nicht vorh.
3	nicht vorh.	nicht vorh.	nicht vorh.	nicht vorh.
(1, 1, 2)	vorh.	vorh.	vorh.	vorh.
(2, 2, 3)	vorh.	nicht vorh.	vorh.	nicht vorh.
(3, 3, 4)	nicht vorh.	nicht vorh.	nicht vorh.	nicht vorh.

**Tab. 4.2:** POISSON-THICKNESS-Locking der untersuchten Modelle

Aus dem Verhalten der Modelle 2 und (2, 2, 3) in Tabelle 4.2 ist ersichtlich, dass die Abbildung eines Membran- oder Biegespannungszustand aus Randlasten die größten Probleme bereitet. Werden also die Randbedingungen der Normalspannung in Dickenrichtung mit berücksichtigt, tritt bei diesen Modellen eine Versteifung auf, während ein Membran- oder Biegespannungszustand aus Flächenlasten schon gut abgebildet werden kann. Des Weiteren ist ersichtlich, dass die vollständigen Modelle das POISSON-THICKNESS-Locking ab dem Modell 3 vollkommen überwunden haben und die reduzierten ab dem Modell (3, 3, 4).

Anzumerken ist, dass der Verschiebungsvektor des reduzierten Modells (3, 3, 4) eine zu approximierende Verschiebungskomponente mehr als der Verschiebungsvektor des vollständigen Modells 3 enthält. Durch die Reduktion des Modells können keine Freiheitsgrade eingespart werden, da beide Modelle das gleiche Ergebnis erzielen. Bei dem hier getesteten hierarchischen Schalenmodell ist die Reduktion der Komponenten der Direktoren also überflüssig.

## 5 Finite-Element Methode

Aus der allgemeinen Kontinuumsmechanik ist die starke Form des Randwertproblems in den Gleichungen (2.135) bis (2.138) gegeben. In den meisten Fällen lässt sich dieses Problem nicht analytisch lösen. Nur für sehr einfache Systeme und entsprechend gewählte Vereinfachungen des dreidimensionalen Verhaltens können analytische Lösungen gefunden werden. Sollen komplexere Probleme gelöst werden, wird ein Variationsprinzip und eine entsprechende numerische Methode gewählt, mit denen das vorliegende Randwertproblem gelöst werden kann.

Für diese Arbeit wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für hierarchische Schalenmodelle verwendet. Das entsprechende Variationsprinzip in Gleichung (3.77) wird mit der Finite-Element Methode gelöst. Sie stellt eine Aufbereitung dieser Gleichung dar, die eine numerische und computergestützte Lösung des Problems ermöglicht. Das Berechnungsgebiet wird in eine beliebige Anzahl von Finite-Elementen diskretisiert. Über jedes Element werden die Verschiebungen durch gewählte Ansatzfunktionen approximiert und die Geometrie mit einer Abbildungsfunktion dargestellt. Die Wahl der Elementanzahl, der Ansatzfunktionen und der Abbildungsfunktion bestimmt die Güte des Ergebnisses.

Die Finite-Element Methode kann in drei Gruppen unterteilt werden: die  $h$ -Version, die  $p$ -Version und die  $hp$ -Version, wobei die  $hp$ -Version der Finite-Element Methode eine Kombination aus  $h$ - und  $p$ -Version darstellt und von ihrer Methodik zur  $p$ -Methode gezählt werden kann. Bei der  $h$ -Version werden die Verschiebungen über das Element meist mit linearen oder quadratischen Funktionen angenähert. Die Abbildung der Geometrie wird für isoparametrische Elemente mit den gleichen Funktionen definiert. Aufgrund der niedrigen Approximation der Verschiebungen und der Geometrie ist die Abmessung der Elemente klein. Eine Konvergenz der Lösung wird durch eine Verfeinerung des Finite-Element Netzes erzielt.

Die  $p$ -Version der Finite-Element Methode verwendet einen beliebigen Polynomgrad für die Approximation der Verschiebungen. Die Geometrie wird exakt mit der *Blending-Function*-Methode beschrieben. Durch die genauere Approximation der Verschiebungen und der Abbildung der Geometrie können die Elemente sehr viel größer gewählt werden als bei der  $h$ -Methode. Eine Konvergenz der Lösung wird durch die sukzessive Erhöhung des Polynomgrades auf einem bestehenden Netz erreicht. Eine zeitaufwendige Neuvernetzung ist bei dieser Methode nicht notwendig. Sie beinhaltet aber eine *a priori* Fehlerschätzung, um Singularitäten und Randstörungen der Lösung, sogenannte Layerbereiche, mit einer  $hp$ -Verfeinerung aufzulösen, so dass eine optimale Konvergenz der Lösung erzielt werden kann. Eine Verbindung beider Vorgehensweisen stellt die  $hp$ -Version der Finite-Element Methode dar. Hier wird das Netz verfeinert und der Polynomgrad erhöht.

Konvergenzstudien der  $h$ -,  $p$ - und  $hp$ -Methode haben gezeigt, dass der relative Fehler in der Energienorm bei glatten Lösungen und einer gleichmäßigen Netzverfeinerung

bei der  $p$ -Methode exponentiell und bei der  $h$ -Methode algebraisch und erheblich langsamer fällt [7, 94, 96, 80]. Mit der  $p$ -Version der Finite-Element Methode kann sogar bei Singularitäten im Berechnungsgebiet eine exponentielle Konvergenz erzielt werden, wenn das FE-Netz eine  $hp$ -Verfeinerung in diesem Bereich enthält [92, 96]. Durch das bessere Konvergenzverhalten und den gegebenen Kontrollmechanismus bei steigendem Polynomgrad wird die  $p$ -Version der Finite-Element Methode gewählt, um den in der Einleitung in Abbildung 1.1 beschriebenen Prozess der Lösungsfindung zu kontrollieren und den Fehler in der Berechnung zu minimieren.

In diesem Abschnitt wird zunächst das in Gleichung (3.77) aufgestellte Variationsprinzip für hierarchische Schalenmodelle in eine Matrixschreibweise umgeformt. Danach werden die Diskretisierung der Finite-Element Methode, der gewählte Finite-Element Ansatz und die Abbildungsfunktion eines Schalenelementes ebenso wie eine mögliche Anbindung an ein CAD-Programm erläutert.

## 5.1 Matrixformulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

### 5.1.1 Verschiebungsvektor

Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  in Gleichung (3.27) bezieht sich auf die Basen der Schalenmittelfläche und ist in kontravarianten Komponenten definiert. Diese werden in dem Verschiebungsvektor  $[\mathbf{u}]$  zusammengefasst, der sich aus der Matrix  $[\mathbf{N}_u]$ , die den Polynomansatz über die Koordinate  $\Theta^3$  in Dickenrichtung beinhaltet, und dem Vektor  $[\mathbf{u}^{hsm}]$ , der die Komponenten der Direktoren des Modells  $nk$  zusammenfasst, berechnet. Jeder Vektor  $[\mathbf{u}]^k$  enthält die drei kovarianten Verschiebungskomponenten des Direktors  $\mathbf{u}^k$ .

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{u}] &= [\mathbf{N}_u] \cdot [\mathbf{u}^{hsm}] \\
 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{nk} \\ [\mathbf{N}_u] & [\mathbf{N}_u] & \dots & [\mathbf{N}_u] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [\mathbf{u}] \\ \mathbf{1} \\ [\mathbf{u}] \\ \vdots \\ \mathbf{nk} \\ [\mathbf{u}] \end{pmatrix} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } [\mathbf{N}_u]^k = \begin{pmatrix} (\Theta^3)^k & 0 & 0 \\ 0 & (\Theta^3)^k & 0 \\ 0 & 0 & (\Theta^3)^k \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{u}]^k = \begin{pmatrix} k \\ u_1 \\ k \\ u_2 \\ k \\ u_3 \end{pmatrix}$$

### 5.1.2 Verzerrungsvektor

Der lineare Verzerrungstensor  $\bar{\epsilon}$  in Gleichung (3.44) bezogen auf die Mittelfläche ist in kovarianten Komponenten definiert, die im Vektor  $[\bar{\epsilon}]$  zusammengefasst werden. Da der Verzerrungstensor symmetrisch ist enthält der entsprechende Vektor sechs

Einträge. Zu beachten ist hier, dass die Schubverzerrungen mit zwei multipliziert werden. Die entsprechenden Stellen in der Materialmatrix werden mit einhalb multipliziert, sodass sichergestellt ist, dass die Schubanteile in der Deformationsenergie doppelt berücksichtigt werden. Der Vektor der Verzerrungen kann ebenfalls in eine Matrix  $[\mathbf{N}_{\bar{\epsilon}}]$ , die den Polynomansatz über die Dicke beschreibt, und in einen hierarchischen Verzerrungsvektor  $[\bar{\epsilon}^{hsm}]$  aufgeteilt werden. Die Verzerrungsvektoren  $[\bar{\epsilon}]^k$  im hierarchischen Verzerrungsvektor sind von 0 bis  $nk + 1$  definiert.

$$\begin{aligned}
[\bar{\epsilon}] &= (\bar{\epsilon}_{11} \quad \bar{\epsilon}_{22} \quad \bar{\epsilon}_{33} \quad 2\bar{\epsilon}_{12} \quad 2\bar{\epsilon}_{13} \quad 2\bar{\epsilon}_{23})^T \\
[\bar{\epsilon}] &= [\mathbf{N}_{\bar{\epsilon}}] \cdot [\bar{\epsilon}^{hsm}] \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{nk} & \mathbf{(nk+1)} \\ [\mathbf{N}_{\bar{\epsilon}}] & [\mathbf{N}_{\bar{\epsilon}}] & & [\mathbf{N}_{\bar{\epsilon}}] & [\mathbf{N}_{\bar{\epsilon}}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [\bar{\epsilon}] \\ \mathbf{1} \\ [\bar{\epsilon}] \\ \vdots \\ \mathbf{nk} \\ [\bar{\epsilon}] \\ \mathbf{(nk+1)} \\ [\bar{\epsilon}] \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (5.2) \\
[\mathbf{N}_{\bar{\epsilon}}]^k &= \begin{pmatrix} (\Theta^3)^k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\Theta^3)^k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\Theta^3)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\Theta^3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\Theta^3)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\Theta^3)^k \end{pmatrix}, \quad [\bar{\epsilon}]^k = \begin{pmatrix} k \\ \bar{\epsilon}_{11} \\ k \\ \bar{\epsilon}_{22} \\ k \\ \bar{\epsilon}_{33} \\ 2k \\ \bar{\epsilon}_{12} \\ k \\ 2\bar{\epsilon}_{13} \\ k \\ 2\bar{\epsilon}_{23} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Durch Umformen von Gleichung (3.44) ergibt sich für den hierarchischen Verzerrungsvektor  $[\bar{\epsilon}^{hsm}]$  der Operator  $[\mathbf{L}]$ , der auf den hierarchischen Verschiebungsvektor  $[\mathbf{u}^{hsm}]$  angewendet wird.

$$\begin{aligned}
[\bar{\epsilon}^{hsm}] &= [\mathbf{L}] \cdot [\mathbf{u}^{hsm}] \\
\text{mit } [\mathbf{L}] &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & \\ [\mathbf{L}_2] & [\mathbf{L}_3] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \dots & [\mathbf{0}] \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & & & \\ [\mathbf{L}_1] & [\mathbf{L}_2] & [\mathbf{L}_3] & [\mathbf{0}] & & [\mathbf{0}] \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & & & \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{L}_1] & [\mathbf{L}_2] & [\mathbf{L}_3] & & [\mathbf{0}] \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & & \mathbf{(nk-1)} & \mathbf{(nk-1)} & \mathbf{(nk-1)} \\ & & & [\mathbf{L}_1] & [\mathbf{L}_2] & [\mathbf{L}_3] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \dots & [\mathbf{0}] & \mathbf{nk} & \mathbf{nk} \\ & & & & [\mathbf{L}_1] & [\mathbf{L}_2] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \mathbf{(nk+1)} \\ & & & & & [\mathbf{L}_1] \end{pmatrix} \quad (5.3)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{[L_1]}^{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} (B_{.1}^1 \Gamma_{11}^1 + B_{.1}^2 \Gamma_{21}^1) & (B_{.1}^1 \Gamma_{11}^2 + B_{.1}^2 \Gamma_{21}^2) & (B_{.1}^1 B_{11} + B_{.1}^2 B_{12}) \\ -B_{.1}^1 d\Theta^1 & -B_{.1}^2 d\Theta^1 & \\ (B_{.2}^1 \Gamma_{12}^1 + B_{.2}^2 \Gamma_{22}^1) & (B_{.2}^1 \Gamma_{12}^2 + B_{.2}^2 \Gamma_{22}^2) & (B_{.2}^1 B_{21} + B_{.2}^2 B_{22}) \\ -B_{.2}^1 d\Theta^2 & -B_{.2}^2 d\Theta^2 & \\ 0 & 0 & 0 \\ ((B_{.1}^1 + B_{.2}^2) \Gamma_{12}^1 & ((B_{.1}^1 + B_{.2}^2) \Gamma_{12}^2 & \\ + B_{.2}^1 \Gamma_{11}^1 + B_{.1}^2 \Gamma_{22}^1) & + B_{.2}^1 \Gamma_{11}^2 + B_{.1}^2 \Gamma_{22}^2) & 2(B_{.2}^1 B_{11} + B_{.2}^2 B_{12}) \\ -B_{.2}^1 d\Theta^1 - B_{.1}^1 d\Theta^2 & -B_{.2}^2 d\Theta^1 - B_{.1}^2 d\Theta^2 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{[L_2]}^{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} d\Theta^1 - \Gamma_{11}^1 & -\Gamma_{11}^2 & -B_{11} \\ -\Gamma_{22}^1 & d\Theta^2 - \Gamma_{22}^2 & -B_{22} \\ 0 & 0 & 0 \\ d\Theta^2 - 2\Gamma_{12}^1 & d\Theta^1 - 2\Gamma_{12}^2 & -2B_{12} \\ (1-k)B_{.1}^1 & (1-k)B_{.1}^2 & d\Theta^1 \\ (1-k)B_{.2}^1 & (1-k)B_{.2}^2 & d\Theta^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{[L_3]}^{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+k) \\ (1+k) & 0 & 0 \\ 0 & (1+k) & 0 \end{pmatrix}$$

Der Operator  $[\mathbf{L}]$  setzt sich aus den hierarchischen Operatoren  $[\mathbf{L}]^{\mathbf{k}}$  zusammen, die sich in drei Teiloperatoren  $[\mathbf{L}_1]^{\mathbf{k}}$ ,  $[\mathbf{L}_2]^{\mathbf{k}}$  und  $[\mathbf{L}_3]^{\mathbf{k}}$  aufspalten lassen. Die hierarchischen Teiloperatoren berücksichtigen die CHRISTOFFEL-Symbole in (3.11) der kovarianten Ableitungen, die in Gleichung (3.44) verwendet wurden. Die so entstandenen partiellen Ableitungen der Komponenten des Verschiebungsvektors  $[\mathbf{u}^{hsm}]$  werden mit  $d\Theta^1$  und  $d\Theta^2$  gekennzeichnet.

### 5.1.3 Materialmatrix

Der linear-elastische Materialtensor  $\bar{\mathbf{C}}$ , der in Gleichung (3.64) mit (3.65) definiert ist, reduziert sich mit der Symmetrie des Spannungs- und des Dehnungstensors und der Existenz einer elastischen Potentialfunktion von 81 auf 21 unabhängige Komponenten [13], die in der Matrix  $[\bar{\mathbf{C}}]$  enthalten sind. Diese Matrix wird in eine Materialmatrix bezogen auf die Materialbasen  $\mathbf{E}_i$  und in eine Transformationsmatrix, die die Materialbasen  $\mathbf{E}_i$  in die kovarianten Basen  $\mathbf{A}_i$  abbildet, aufgespalten. Werden nur orthonormale Materialbasen berücksichtigt, so enthält die Materialmatrix  $[\bar{\mathbf{C}}_{\perp}]$  nur noch neun unabhängige Komponenten. Die orthonormalen Materialbasen sind in der Abbildung 5.1 definiert.

In dieser Arbeit wird ein isotropes Materialverhalten betrachtet, bei dem die Komponenten der Matrix  $[\bar{\mathbf{C}}_{\perp}]$  durch die zwei unabhängigen Materialkennwerte  $\lambda$  und  $\mu$  beschrieben werden können.

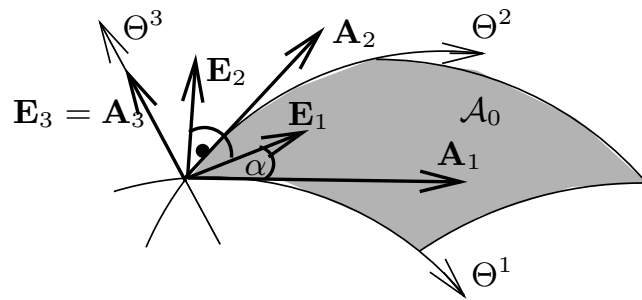


Abb. 5.1: Orthonormale Materialbasen

$$\begin{aligned}
 [\bar{\mathbf{C}}] &= [\mathbf{T}_{\bar{\mathbf{C}}}]^T \cdot [\bar{\mathbf{C}}_{\perp}] \cdot [\mathbf{T}_{\bar{\mathbf{C}}}] \quad \text{mit} \\
 [\bar{\mathbf{C}}_{\perp}] &= \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \mu \end{pmatrix} \quad (5.5) \\
 [\mathbf{T}_{\bar{\mathbf{C}}}] &= \begin{pmatrix} \frac{T_1^2}{AA^{22}} & A^{22} \sin^2 \alpha & 0 & \frac{T_1 \sin \alpha}{\sqrt{A}} & 0 & 0 \\ \frac{T_2^2}{AA^{22}} & A^{22} \cos^2 \alpha & 0 & \frac{T_2 \cos \alpha}{\sqrt{A}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2T_1 T_2}{AA^{22}} & 2A^{22} \sin \alpha \cos \alpha & 0 & \frac{T_1 \cos \alpha + T_2 \sin \alpha}{\sqrt{A}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T_1}{\sqrt{A} \sqrt{A^{22}}} & \sqrt{A^{22}} \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{T_2}{\sqrt{A} \sqrt{A^{22}}} & \sqrt{A^{22}} \cos \alpha \end{pmatrix} \\
 \text{mit } T_1 &= \sqrt{A} A^{12} \sin \alpha + \cos \alpha \quad , \quad T_2 = \sqrt{A} A^{12} \cos \alpha - \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Die letzten drei Einträge auf der Hauptdiagonalen der Matrix  $[\bar{\mathbf{C}}_{\perp}]$  sind mit einhalb multipliziert, da die Schubanteile im Dehnungsvektor doppelt berücksichtigt sind. Der Schubkorrekturfaktor  $\kappa$  nähert den Schubspannungsverlauf über die Dicke der Schale, der sich durch das gewählte Modell ergibt, einem parabelförmigen Verlauf an. Mit Modell 1 ergibt sich ein konstanter Verlauf der Schubspannungen über die Dicke und mit Modell 2 ein linearer. Alle höheren Modelle können mindestens einen quadratischen Schubspannungsverlauf über die Dicke abbilden, wodurch der Schubkorrekturfaktor  $\kappa$  überflüssig wird. Nach dem Handbuch des Programmes STRESSCHECK [36] und einer Veröffentlichung von YOSIBASH [101] ist der Schubkorrekturfaktor für hierarchische Modelle auch von der Querdehnungszahl  $\nu$  abhängig. Dieser Einfluss wird in dieser Arbeit vernachlässigt.

$$\kappa = \begin{cases} \frac{5}{6} & 0 \leq nk \leq 2 \\ 1 & 3 \leq nk \end{cases} . \quad (5.6)$$



Durch die Definition der Materialbasen  $\mathbf{E}_i$  mit Hilfe des Winkels  $\alpha$  kann ein orthotropes, linear-elastisches Materialverhalten in der Matrix  $[\bar{\mathbf{C}}_{\perp}]$  berücksichtigt werden. Bei Schalenkonstruktionen tritt häufig eine Transversalisotropie auf, die ein unterschiedliches Materialverhalten in Dickenrichtung zu den zwei Mittelflächenrichtungen beschreibt. Anwendung findet diese im Flugzeugbau, bei Faserkunststoffen und bei neuen Glasentwicklungen. Der hierfür benötigte Aufbau der Materialmatrix  $[\bar{\mathbf{C}}_{\perp}]$  kann dem Buch von GREEN und ZERNA [44] entnommen werden. Die Beschreibung der Matrixeinträge durch die verschiedenen Elastizitätsmoduli und Querkontraktionszahlen finden sich in JONES [53].

Durch die Integration der virtuellen Formänderungsenergie über die Dicke der Schale ergibt sich in Gleichung (3.78) der Tensor der integrierten Schalensteifigkeit  $\bar{\mathbf{C}}^{\mathbf{k}+1}$ . Dieser wird mit der hierarchischen Materialmatrix  $[\bar{\mathbf{C}}^{hsm}]$  beschrieben, die den in Gleichung (3.56) definierten Faktor  $f(i)$  und die Materialmatrix  $[\bar{\mathbf{C}}]$  in Gleichung (5.5) beinhaltet.

$$[\bar{\mathbf{C}}^{hsm}] = \begin{pmatrix} f(0) [\bar{\mathbf{C}}] & f(1) [\bar{\mathbf{C}}] & \cdots & f(nk+1) [\bar{\mathbf{C}}] \\ f(1) [\bar{\mathbf{C}}] & f(2) [\bar{\mathbf{C}}] & & f(nk+2) [\bar{\mathbf{C}}] \\ \vdots & & \ddots & \\ f(nk+1) [\bar{\mathbf{C}}] & f(nk+2) [\bar{\mathbf{C}}] & & f(2(nk+1)) [\bar{\mathbf{C}}] \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

#### 5.1.4 Spannungsvektor

Die sechs unabhängigen kontravarianten Komponenten des Spannungstensors  $\bar{\mathbf{S}}$  in (3.58) bezogen auf die Mittelfläche sind in dem Spannungsvektor  $[\bar{\mathbf{S}}]$  enthalten.

$$[\bar{\mathbf{S}}] = \left( \bar{S}^{11} \quad \bar{S}^{22} \quad \bar{S}^{33} \quad \bar{S}^{12} \quad \bar{S}^{13} \quad \bar{S}^{23} \right)^T \quad (5.8)$$

Für ein linear-elastisches Materialverhalten kann der Spannungsvektor, analog zum Verzerrungsvektor  $[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}]$ , als Polynom über die Dicke in die Matrix  $[\mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}]$  und den hierarchischen Spannungsvektor  $[\bar{\mathbf{S}}^{hsm}]$  aufgeteilt werden.

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{S}}] &= [\mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}] \cdot [\bar{\mathbf{S}}^{hsm}] \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{nk} & \mathbf{(nk+1)} \\ [\mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}] & [\mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}] & & [\mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}] & [\mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ [\bar{\mathbf{S}}] \\ \mathbf{1} \\ [\bar{\mathbf{S}}] \\ \vdots \\ \mathbf{nk} \\ [\bar{\mathbf{S}}] \\ \mathbf{(nk+1)} \\ [\bar{\mathbf{S}}] \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad [\bar{\mathbf{S}}] = \begin{pmatrix} \frac{k}{\bar{S}^{11}} \\ \frac{k}{\bar{S}^{22}} \\ \frac{k}{\bar{S}^{33}} \\ \frac{k}{\bar{S}^{12}} \\ \frac{k}{\bar{S}^{13}} \\ \frac{k}{\bar{S}^{23}} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Der hierarchische Spannungsvektor  $[\bar{\mathbf{S}}^{hsm}]$  lässt sich aus dem hierarchischen Dehnungsvektor  $[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{hsm}]$  und dem Materialtensor  $[\bar{\mathbf{C}}_{\bar{\mathbf{S}}}^{hsm}]$  berechnen.

$$[\bar{\mathbf{S}}^{hsm}] = [\bar{\mathbf{C}}_{\bar{\mathbf{S}}}^{hsm}] \cdot [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{hsm}]$$

$$\text{mit } [\bar{\mathbf{C}}_{\bar{\mathbf{S}}}^{hsm}] = \begin{pmatrix} [\bar{\mathbf{C}}] & [\mathbf{0}] & \cdots & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\bar{\mathbf{C}}] & & [\mathbf{0}] \\ \vdots & & \ddots & \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & & [\bar{\mathbf{C}}] \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

### 5.1.5 Lastvektoren

Die Lastvektoren  $\mathbf{T}^3$  aus Oberflächen- und  $\mathbf{T}^{\alpha k}$  aus Randlasten in Gleichung (3.49) und (3.53) und der Lastvektor  $\mathbf{K}$  aus Volumenlast in Gleichung (3.57) werden auf die kontravarianten Basen bezogen, sodass in den Lastvektoren  $[\mathbf{T}^3]$ ,  $[\mathbf{T}^{\alpha k}]$  und  $[\mathbf{K}]$  kovariante Komponenten stehen.

$$[\mathbf{T}^3] = (T^{31} \quad T^{32} \quad T^{33})^T$$

$$[\mathbf{T}^{\alpha k}] = (T^{\alpha 1 k} \quad T^{\alpha 2 k} \quad T^{\alpha 3 k})^T$$

$$[\mathbf{K}] = (K^1 \quad K^2 \quad K^3)^T \quad (5.11)$$

Um die Faktoren  $f(i)$  und  $f_O(i)$  in Gleichung (3.77) zu berücksichtigen, werden die Matrizen  $[f]$ ,  $[f_R]$  und  $[f_O]$  definiert.

$$[f] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{nk} \\ [f] & [f] & \cdots & [f] \end{pmatrix} \quad \text{mit } [f] = \begin{pmatrix} f(k) & 0 & 0 \\ 0 & f(k) & 0 \\ 0 & 0 & f(k) \end{pmatrix}$$

$$[f_R] = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} [f] & \frac{2}{h} [f] & \cdots & \frac{\mathbf{nk}+1}{h} [f] \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

$$[f_O] = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \cdots & \mathbf{nk}+1 \\ [f_O] & [f_O] & \cdots & [f_O] \end{pmatrix} \quad \text{mit } [f_O] = \begin{pmatrix} f_O(k) & 0 & 0 \\ 0 & f_O(k) & 0 \\ 0 & 0 & f_O(k) \end{pmatrix}$$

### 5.1.6 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Aus der Definition aller benötigten Matrizen und Vektoren ergibt sich das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in Gleichung (3.77) zu:

$$-\delta W + \delta A = 0 \quad (5.13)$$

$$\text{mit } \delta W = \int_{\Theta^2} \int_{\Theta^1} \int_{\Theta^3} \delta[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}]^T \cdot [\bar{\mathbf{S}}] \det \mathbf{Z} d\Theta^3 \sqrt{A} d\Theta^1 d\Theta^2 \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}
\text{und } \delta A &= \int_{\Theta^2} \int_{\Theta^1} \rho_0 \delta[\mathbf{u}^{hsm}]^T \cdot [f]^T \cdot [\mathbf{K}] \sqrt{A} \, d\Theta^1 d\Theta^2 \\
&+ \int_{\Theta^2} \int_{\Theta^1} \delta[\mathbf{u}^{hsm}]^T \cdot [f_O]^T \cdot [\mathbf{T}^3] \sqrt{A} \, d\Theta^1 d\Theta^2 \\
&+ \int_{\Theta^\alpha} \delta[\mathbf{u}^{hsm}]^T \cdot ([f]^T \cdot [\mathbf{T}^\alpha] + [f_R]^T \cdot [\mathbf{T}^\alpha]) \sqrt{A^{\beta\beta}} \sqrt{A} \, d\Theta^\alpha \quad \cancel{\beta} \quad \cancel{\alpha} \quad .
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Die virtuelle Formänderungsenergie lässt sich für ein elastisches Materialgesetz nach Gleichung (3.78) zu

$$\delta W = \int_{\Theta^2} \int_{\Theta^1} \delta[\mathbf{u}^{hsm}]^T \cdot [\mathbf{L}]^T \cdot [\bar{\mathbf{C}}^{hsm}] \cdot [\mathbf{L}] \cdot [\mathbf{u}^{hsm}] \sqrt{A} \, d\Theta^1 d\Theta^2 \tag{5.16}$$

und für ein inelastisches Materialgesetz nach Gleichung (3.79) zu

$$\delta W = \int_{\Theta^2} \int_{\Theta^1} \delta[\mathbf{u}^{hsm}]^T \cdot [\mathbf{L}]^T \cdot \left( \int_{\Theta^3} [\mathbf{N}_\varepsilon]^T \cdot [\bar{\mathbf{S}}] \det \mathbf{Z} \, d\Theta^3 \right) \sqrt{A} \, d\Theta^1 d\Theta^2 \tag{5.17}$$

definieren.

## 5.2 Die Finite-Element-Approximation

Das Berechnungsgebiet  $\mathcal{A}_0$ , das die Mittelfläche der Schale beschreibt, wird in eine Summe von beliebig vielen, viereckigen Elementen unterteilt. Diese sind abhängig vom Standardkoordinatensystem  $\Theta^1 = \xi$ ,  $\Theta^2 = \eta$  und  $\Theta^3 = \frac{h}{2}\zeta$  im Bereich  $\Omega_{St}^q = \{\xi, \eta \mid -1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1\}$  und  $\{\zeta \mid -1 \leq \zeta \leq 1\}$ . Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen lässt sich nun in einer Summe über alle Teilbereiche von  $e = 1$  bis  $ne$  darstellen.

$$\begin{aligned}
\delta W(\mathcal{A}_0, \zeta) &= \delta A(\mathcal{A}_0) \\
\sum_{e=1}^{ne} \delta W(\Omega_{St}^q, \zeta) &= \sum_{e=1}^{ne} \delta A(\Omega_{St}^q)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

An dieser Stelle tritt noch kein Approximationsfehler auf.

### 5.2.1 Approximation der Verschiebungen

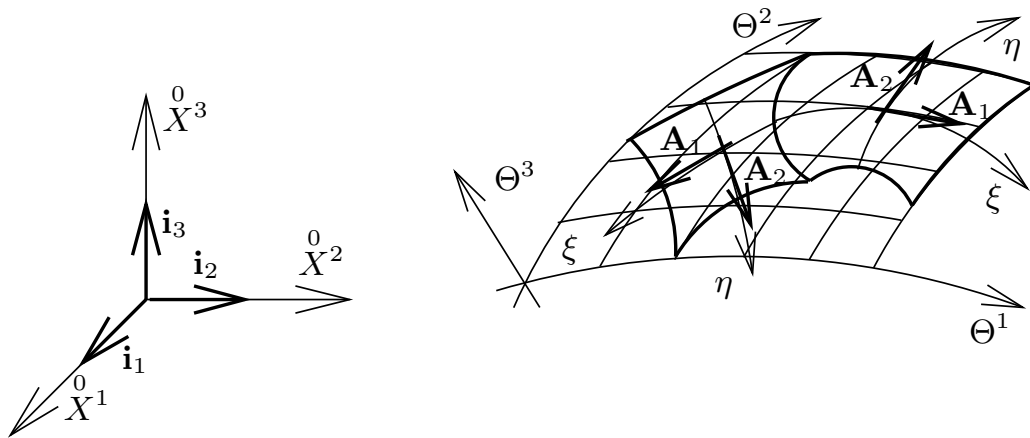
Für die Finite-Element Methode werden die Vektoren  $[\mathbf{u}]^{\mathbf{k}}$ , die die kovarianten Verschiebungskomponenten der Direktoren  $\mathbf{u}^{\mathbf{k}}$  beinhalten, durch die Methode von GALERKIN über eine Summe von Funktionen multipliziert mit den gesuchten Koeffizienten

angenähert. Bei der Finite-Element Methode werden als Funktionen die Standardansatzfunktionen  $N_n(\xi, \eta)$  gewählt, sodass die Berechnung besser schematisiert werden kann.

$$[\mathbf{u}]^{\mathbf{k}} \approx \sum_{n=1}^{nans} [\mathbf{N}_n]^{\mathbf{k}} \cdot [\mathbf{b}^n]^{\mathbf{k}}$$

$$[\mathbf{N}_n]^{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} N_n(\xi, \eta) & 0 & 0 \\ 0 & N_n(\xi, \eta) & 0 \\ 0 & 0 & N_n(\xi, \eta) \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{b}^n]^{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} b_1^n \\ b_2^n \\ b_3^n \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Der Vektor  $[\mathbf{b}^n]^{\mathbf{k}}$  enthält die lokalen Koeffizienten der  $n$ -ten zweidimensionalen Standardansatzfunktion  $N_n(\xi, \eta)$ . Da sich die Verschiebungskomponenten und somit auch die gesuchten Koeffizienten auf das Standardkoordinatensystem beziehen, müssen diese erst in das globale Koordinatensystem transformiert werden, um eine spätere Assemblierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix zu ermöglichen. Dieses Problem wird in Abbildung 5.2 veranschaulicht, in der die lokalen Richtungen zweier Elemente entgegengesetzt definiert sind.



**Abb. 5.2:** Lokales Standardkoordinatensystem zweier Elemente

Die Vektoren  $[\mathbf{a}^n]^{\mathbf{k}}$ , die die globalen Koeffizienten bezogen auf die Basen  $\mathbf{i}_i$  beinhalten, werden definiert und mit Hilfe der Matrix  $[\boldsymbol{\lambda}]$  in das Standardkoordinatensystem transformiert.

$$[\mathbf{u}]^{\mathbf{k}} \approx \sum_{n=1}^{nans} [\mathbf{N}_n]^{\mathbf{k}} \cdot [\boldsymbol{\lambda}] \cdot [\mathbf{a}^n]^{\mathbf{k}} = [\boldsymbol{\lambda}] \cdot \sum_{n=1}^{nans} [\mathbf{N}_n]^{\mathbf{k}} \cdot [\mathbf{a}^n]^{\mathbf{k}}$$

mit

$$[\boldsymbol{\lambda}] = \begin{pmatrix} A_1^{(1)}(\xi, \eta) & A_1^{(2)}(\xi, \eta) & A_1^{(3)}(\xi, \eta) \\ A_2^{(1)}(\xi, \eta) & A_2^{(2)}(\xi, \eta) & A_2^{(3)}(\xi, \eta) \\ A_3^{(1)}(\xi, \eta) & A_3^{(2)}(\xi, \eta) & A_3^{(3)}(\xi, \eta) \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{a}^n]^{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} k_n \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Die Transformationsmatrix  $[\boldsymbol{\lambda}]$  enthält die Komponenten ( $i$ ) der kovarianten Basen  $\mathbf{A}_j$  und ist abhängig vom Standardkoordinatensystem  $\xi, \eta$ . Es ist zu beachten, dass

bei der Berechnung der partiellen Ableitungen der Direktoren die Produktregel verwendet werden muss und so ein erweiterter Operator  $[\mathbf{L}]$  entsteht.

Der Verschiebungsvektor des hierarchischen Schalenmodells berechnet sich aus der Approximation der einzelnen Direktoren zu:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{u}^{hsm}] &\approx [\mathbf{T}] \cdot \sum_{n=1}^{nans} [\mathbf{N}_n] \cdot [\mathbf{a}^n] = [\mathbf{T}] \cdot [\mathbf{N}] \cdot [\mathbf{a}] \\
 \text{mit } [\mathbf{N}] &= ([\mathbf{N}_1] \quad [\mathbf{N}_2] \quad \cdots \quad [\mathbf{N}_{nans}]) \quad , \\
 [\mathbf{T}] &= \begin{pmatrix} [\lambda] & [\mathbf{0}] & \cdots & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\lambda] & & [\mathbf{0}] \\ \vdots & & \ddots & \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & & [\lambda] \end{pmatrix} \quad , \quad [\mathbf{a}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{a}^1] \\ [\mathbf{a}^2] \\ \vdots \\ [\mathbf{a}^{nans}] \end{pmatrix} \\
 [\mathbf{N}_n] &= \begin{pmatrix} [\mathbf{N}_n^0] & [\mathbf{0}] & \cdots & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{N}_n^1] & & [\mathbf{0}] \\ \vdots & & \ddots & \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & & [\mathbf{N}_n^{nk}] \end{pmatrix} \quad , \quad [\mathbf{a}^n] = \begin{pmatrix} [\mathbf{a}^n_0] \\ [\mathbf{a}^n_1] \\ \vdots \\ [\mathbf{a}^n_{nk}] \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

### 5.2.2 L-Operator für globale Verschiebungskoeffizienten

In dem  $[\mathbf{L}]$  Operator in (5.3) mit (5.4) stehen die partiellen Ableitungen der Komponenten des hierarchischen Verschiebungsvektors  $[\mathbf{u}^{hsm}]$ . Um diese zu berechnen muss wie oben angemerkt die Produktregel angewendet werden. Das Ergebnis bezüglich der globalen Koeffizienten und Standardansatzfunktionen wird in dem neuen Operator  $[\mathbf{L}^{hsm}]$  definiert, der die partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen mit  $d\xi$  und  $d\eta$  bezüglich des Standardkoordinatensystems beinhaltet.

$$\begin{aligned}
 [\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{hsm}] &= [\mathbf{L}] \cdot [\mathbf{u}^{hsm}] \approx [\mathbf{L}] \cdot ([\mathbf{T}] \cdot [\mathbf{N}] \cdot [\mathbf{a}]) = [\mathbf{L}^{hsm}] \cdot [\mathbf{N}] \cdot [\mathbf{a}] \\
 [\mathbf{L}^{hsm}] &= \begin{pmatrix} [\mathbf{L}_2^{hsm}] & [\mathbf{L}_3^{hsm}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{L}_1^{hsm}] & [\mathbf{L}_2^{hsm}] & [\mathbf{L}_3^{hsm}] & [\mathbf{0}] & \cdots & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{L}_1^{hsm}] & [\mathbf{L}_2^{hsm}] & [\mathbf{L}_3^{hsm}] & & [\mathbf{0}] \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & & [\mathbf{L}_1^{hsm}] & [\mathbf{L}_2^{hsm}] & [\mathbf{L}_3^{hsm}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & \cdots & [\mathbf{0}] & [\mathbf{L}_1^{hsm}] & [\mathbf{L}_2^{hsm}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & & [\mathbf{0}] & [\mathbf{0}] & [\mathbf{L}_1^{hsm}] \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{5.22}$$



$$\begin{aligned}
[\mathbf{L}_2^{k, hsm}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [A_{1,1}^{(1)} - \Gamma_{11}^1 A_1^{(1)} - \Gamma_{11}^2 A_2^{(1)} - B_{11} A_3^{(1)}] + [A_1^{(1)}] d\xi & [A_{1,1}^{(2)} - \Gamma_{11}^1 A_1^{(2)} - \Gamma_{11}^2 A_2^{(2)} - B_{11} A_3^{(2)}] + [A_1^{(2)}] d\xi & [A_{1,1}^{(3)} - \Gamma_{11}^1 A_1^{(3)} - \Gamma_{11}^2 A_2^{(3)} - B_{11} A_3^{(3)}] + [A_1^{(3)}] d\xi \\ [A_{2,2}^{(1)} - \Gamma_{22}^1 A_1^{(1)} - \Gamma_{22}^2 A_2^{(1)} - B_{22} A_3^{(1)}] + [A_2^{(1)}] d\eta & [A_{2,2}^{(2)} - \Gamma_{22}^1 A_1^{(2)} - \Gamma_{22}^2 A_2^{(2)} - B_{22} A_3^{(2)}] + [A_2^{(2)}] d\eta & [A_{2,2}^{(3)} - \Gamma_{22}^1 A_1^{(3)} - \Gamma_{22}^2 A_2^{(3)} - B_{22} A_3^{(3)}] + [A_2^{(3)}] d\eta \\ 2[A_{1,2}^{(1)} - \Gamma_{12}^1 A_1^{(1)} - \Gamma_{12}^2 A_2^{(1)} - B_{12} A_3^{(1)}] + [A_2^{(1)}] d\xi + [A_1^{(1)}] d\eta & 2[A_{1,2}^{(2)} - \Gamma_{12}^1 A_1^{(2)} - \Gamma_{12}^2 A_2^{(2)} - B_{12} A_3^{(2)}] + [A_2^{(2)}] d\xi + [A_1^{(2)}] d\eta & 2[A_{1,2}^{(3)} - \Gamma_{12}^1 A_1^{(3)} - \Gamma_{12}^2 A_2^{(3)} - B_{12} A_3^{(3)}] + [A_2^{(3)}] d\xi + [A_1^{(3)}] d\eta \\ [-k(B_{1,1}^1 A_1^{(1)} + B_{1,1}^2 A_2^{(1)})] + [A_3^{(1)}] d\xi & [-k(B_{1,1}^1 A_1^{(2)} + B_{1,1}^2 A_2^{(2)})] + [A_3^{(2)}] d\xi & [-k(B_{1,1}^1 A_1^{(3)} + B_{1,1}^2 A_2^{(3)})] + [A_3^{(3)}] d\xi \\ [-k(B_{1,2}^1 A_1^{(1)} + B_{1,2}^2 A_2^{(1)})] + [A_3^{(1)}] d\eta & [-k(B_{1,2}^1 A_1^{(2)} + B_{1,2}^2 A_2^{(2)})] + [A_3^{(2)}] d\eta & [-k(B_{1,2}^1 A_1^{(3)} + B_{1,2}^2 A_2^{(3)})] + [A_3^{(3)}] d\eta \end{pmatrix} \\
[\mathbf{L}_3^{k, hsm}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [(1+k)A_3^{(1)}] & [(1+k)A_3^{(2)}] & [(1+k)A_3^{(3)}] \\ 0 & 0 & 0 \\ [(1+k)A_1^{(1)}] & [(1+k)A_1^{(2)}] & [(1+k)A_1^{(3)}] \\ [(1+k)A_2^{(1)}] & [(1+k)A_2^{(2)}] & [(1+k)A_2^{(3)}] \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.24}$$

### 5.2.3 B-Matrix hierarchischer Schalenmodelle

Mit Hilfe des Operators  $[\mathbf{L}^{hsm}]$  kann nun die Matrix  $[\mathbf{B}^{hsm}]$  zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix definiert werden.

$$[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{hsm}] \approx [\mathbf{L}^{hsm}] \cdot \sum_{n=1}^{nans} [\mathbf{N}_n] \cdot [\mathbf{a}^n] = \sum_{n=1}^{nans} [\mathbf{B}_n^{hsm}] \cdot [\mathbf{a}^n] = [\mathbf{B}^{hsm}] \cdot [\mathbf{a}] \quad (5.25)$$

mit  $[\mathbf{B}^{hsm}] = ([\mathbf{B}_1^{hsm}] \quad [\mathbf{B}_2^{hsm}] \quad \cdots \quad [\mathbf{B}_{nans}^{hsm}])$  ,

$$[\mathbf{B}_n^{hsm}] = [\mathbf{L}^{hsm}] \cdot [\mathbf{N}_n]$$

### 5.3 Steifigkeitsmatrix und Lastvektor eines hierarchischen Schalenelementes

Wird die Finite-Element Approximation mit den daraus resultierenden Beziehungen aus Abschnitt 5.2 in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen eingesetzt, ergibt sich für elastisches Materialverhalten:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta[\mathbf{a}]^T \cdot [\mathbf{k}] \cdot [\mathbf{a}] = \sum_{e=1}^{ne} \delta[\mathbf{a}]^T \cdot [\mathbf{f}] \quad (5.26)$$

mit  $[\mathbf{k}] = \int_{\eta} \int_{\xi} [\mathbf{B}^{hsm}]^T \cdot [\bar{\mathbf{C}}^{hsm}] \cdot [\mathbf{B}^{hsm}] \sqrt{A} \, d\xi \, d\eta$

$$[\mathbf{f}] = [\mathbf{f}_V] + [\mathbf{f}_O] + [\mathbf{f}_R]$$

$$[\mathbf{f}_V] = \int_{\eta} \int_{\xi} \rho_0 [\mathbf{N}]^T \cdot [\mathbf{T}]^T \cdot [f]^T \cdot [\mathbf{K}] \sqrt{A} \, d\xi \, d\eta$$

$$[\mathbf{f}_O] = \int_{\eta} \int_{\xi} [\mathbf{N}]^T \cdot [\mathbf{T}]^T \cdot [f_O]^T \cdot [\mathbf{T}^3] \sqrt{A} \, d\xi \, d\eta \quad (5.27)$$

$$[\mathbf{f}_R] = \int_{\xi} [\mathbf{N}]^T \cdot [\mathbf{T}]^T \cdot ([f]^T \cdot [\mathbf{T}^1] + [f_R]^T \cdot [\mathbf{T}^1]) \sqrt{A^{22}} \sqrt{A} \, d\xi$$

$$+ \int_{\eta} [\mathbf{N}]^T \cdot [\mathbf{T}]^T \cdot ([f]^T \cdot [\mathbf{T}^2] + [f_R]^T \cdot [\mathbf{T}^2]) \sqrt{A^{11}} \sqrt{A} \, d\eta .$$

Die Matrix  $[\mathbf{k}]$  steht für die Elementsteifigkeitsmatrix und der Vektor  $[\mathbf{f}]$  für den Elementlastvektor, der sich aus dem Volumenlastvektor  $[\mathbf{f}_V]$ , dem Flächenlastvektor  $[\mathbf{f}_O]$  und dem Randlastvektor  $[\mathbf{f}_R]$  zusammensetzt. Nach einer Assemblierung der Elemente ergibt sich ein Gesamtgleichungssystem, indem die virtuellen Koeffizienten  $\delta[\mathbf{a}]^T$  gekürzt werden können.



## 5.4 Hierarchische Ansatzfunktionen

Die  $p$ -Version der Finite-Element Methode basiert auf hierarchischen Ansatzfunktionen, die die Approximation des Verschiebungsfeldes beschreiben. Die Variation des approximierten, hierarchischen Verschiebungsvektors wird mit den sogenannten Testfunktionen angenähert, die gleich zu den Ansatzfunktionen gewählt werden. Die hierarchischen Ansatzfunktionen bilden eine Familie von Funktionen, in der alle Ansatzfunktionen niedrigerer Ordnung in der Menge der Ansatzfunktionen höherer Ordnung enthalten sind. Dabei wird  $p$  als Ansatzgrad bezeichnet.

Aus der Wahl der Ansatzfunktionen ergibt sich, dass die gesuchten Koeffizienten des hierarchischen Verschiebungsvektors keine physikalische Bedeutung haben. Sie entsprechen also nicht bestimmten Knotenverschiebungen, wie es in der  $h$ -Version der Finite-Element Methode der Fall ist. Zur Berechnung der Verschiebungen der hierarchischen Schalenmodelle muss Gleichung (5.21) ausgewertet werden.

### 5.4.1 Eindimensionale Ansatzfunktionen

Die eindimensionalen hierarchischen Ansatzfunktionen sind über das Standardelement  $\Omega_{St}^l = \{\xi \mid -1 \leq \xi \leq 1\}$  definiert und lauten für den Ansatzraum  $\mathcal{S}^p(\Omega_{St}^l)$

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \\ N_i(\xi) &= \phi_{i-1}(\xi) \quad \text{für } i = 3, \dots, p+1, \end{aligned} \quad (5.28)$$

wobei  $p$  den Polynomgrad des Ansatzraumes darstellt. Sie sind über die Funktionen  $\phi_j(\xi)$  definiert, die sich aus den LEGENDRE-Polynomen  $P_l$  zusammensetzen.

$$\begin{aligned} \phi_j(\xi) &= \sqrt{\frac{2j-1}{2}} \int_{-1}^{\xi} P_{j-1}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{4j-2}} (P_j(\xi) - P_{j-2}(\xi)) \quad \text{für } j = 2, \dots, p \end{aligned} \quad (5.29)$$

Die LEGENDRE-Polynome können mit Hilfe der BONNET-Rekursionsformel wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} (n+1)P_{n+1}(\xi) &= (2n+1)\xi P_n(\xi) - nP_{n-1}(\xi) \\ &\text{für } n = 1, 2, \dots \quad \text{mit } P_0(\xi) = 1, P_1(\xi) = \xi. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Eine Studie über hierarchische Ansatzfunktionen basierend auf LAGRANGE-, LEGENDRE- und CHEBYSHEV-Funktionen hat ergeben, dass die Konditionszahl von Elementen mit verschiedenen Geometrien am niedrigsten bei einer Elementsteifigkeitsmatrix ist, die mit LEGENDRE-Polynomen als Ansatzfunktionen erstellt wurde [35]. Sie verhält sich fast konstant für steigenden Polynomgrad, sodass die Qualität der numerischen Lösung des Gleichungssystems nicht durch die Erhöhung des Polynomgrades fällt.

### 5.4.2 Zweidimensionale Ansatzfunktionen

Das zweidimensionale Standardelement ist definiert über  $\Omega_{St}^q = \{\xi, \eta \mid -1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1\}$ . Die zweidimensionalen Ansatzfunktionen können über ein Tensorprodukt der eindimensionalen Ansatzfunktionen in  $\xi$ - und  $\eta$ -Richtung formuliert werden, sodass sich der volle Ansatzraum  $\mathcal{S}^p(\Omega_{St}^q)$  von SZABÓ und BABUŠKA [96] ergibt.

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} N_1(\xi) \\ N_2(\xi) \\ N_3(\xi) \\ \vdots \\ N_{p+1}(\xi) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} N_1(\eta) \\ N_2(\eta) \\ N_3(\eta) \\ \vdots \\ N_{p+1}(\eta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{cc} N_1(\xi)N_1(\eta) & N_1(\xi)N_2(\eta) \\ N_2(\xi)N_1(\eta) & N_2(\xi)N_2(\eta) \end{array} & \begin{array}{ccc} N_1(\xi)N_3(\eta) & \cdots & N_1(\xi)N_{p+1}(\eta) \\ N_2(\xi)N_3(\eta) & \cdots & N_2(\xi)N_{p+1}(\eta) \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} N_3(\xi)N_1(\eta) & N_3(\xi)N_2(\eta) \\ \vdots & \vdots \\ N_{p+1}(\xi)N_1(\eta) & N_{p+1}(\xi)N_2(\eta) \end{array} & \begin{array}{ccc} N_3(\xi)N_3(\eta) & \cdots & N_3(\xi)N_{p+1}(\eta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{p+1}(\xi)N_3(\eta) & \cdots & N_{p+1}(\xi)N_{p+1}(\eta) \end{array} \\ \hline \end{array} \tag{5.31}
 \end{aligned}$$

Der Ansatzraum  $\mathcal{S}^p(\Omega_{St}^q)$  setzt sich aus den folgenden drei Gruppen von Ansatzfunktionen zusammen :

- *Knotenmoden* oder auch *basic modes*

Diese entsprechen den bilinearen Standardansatzfunktionen und sind an einem Knoten eins und an allen anderen Knoten null. Sie entstehen aus dem Tensorprodukt zweier linearer eindimensionaler Ansatzfunktionen und sind in der Matrix in (5.31) oben links eingerahmt.

$$\begin{aligned}
 N_1^{k1} &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\
 N_2^{k2} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\
 N_3^{k3} &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \\
 N_4^{k4} &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

- *Kantenmoden* oder auch *edge modes*

Sie entstehen aus dem Tensorprodukt einer hierarchischen eindimensionalen Ansatzfunktion längs einer Kante mit einer linearen Ansatzfunktion senkrecht

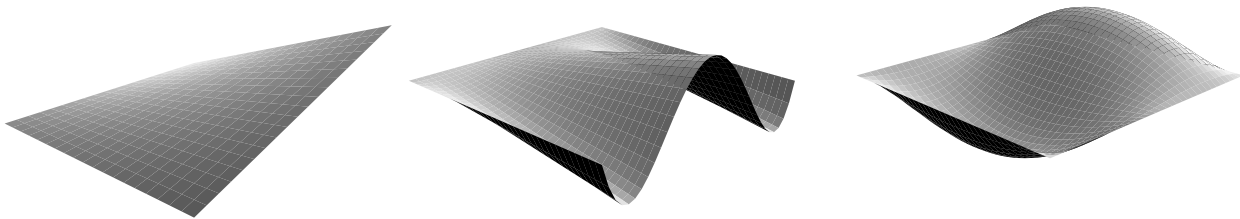
zur Elementkante. Sie sind nur an einer der vier Elementkanten ungleich null und befinden sich oben rechts und unten links in der zuvor aufgestellten Matrix in Gleichung (5.31). Für  $p > 1$  gibt es  $4 \cdot (p - 1)$  Kantenmoden.

$$\begin{aligned} N_{i-1}^{e1} &= \frac{1}{2}(1 - \eta)\phi_i(\xi) \\ N_{i-1}^{e2} &= \frac{1}{2}(1 + \xi)\phi_i(\eta) \\ N_{i-1}^{e3} &= \frac{1}{2}(1 + \eta)\phi_i(\xi) \\ N_{i-1}^{e4} &= \frac{1}{2}(1 - \xi)\phi_i(\eta) \end{aligned} \quad \text{mit } i = 2, \dots, p \quad (5.33)$$

- *Innere Moden* oder auch *bubble modes*

Sie entstehen aus der Multiplikation hierarchischer eindimensionaler Ansatzfunktionen längs und senkrecht zur Kante und sind auf allen Elementkanten null. In der Ansatzfunktionenmatrix in Gleichung (5.31) befinden sie sich in dem rechts unten gerahmten Bereich. Der reduzierte Ansatzraum entsteht, indem die grau unterlegten Ansatzfunktionen vernachlässigt werden. Für  $p > 3$  existieren für den reduzierten Ansatzraum  $(p - 2) \cdot (p - 3)/2$  innere Moden.

$$\begin{aligned} N_k^{in} &= \phi_i(\xi)\phi_j(\eta) \quad \text{mit } i, j = 2, \dots, p - 2 \\ &\quad \text{und } i + j = 4, \dots, p \end{aligned} \quad (5.34)$$



**Abb. 5.3:** Hierarchische Ansatzfunktionen: Knoten-, Kanten-, innerer Mode

## 5.5 Die Abbildungsfunktion

Aufgrund der sehr genauen Approximation des Verschiebungsfeldes im Inneren eines Elementes können die Elementabmessungen der  $p$ -Version größer gewählt werden als bei der  $h$ -Version. Bei einer adaptiven  $p$ -Version wird im Unterschied zur  $h$ -Version der Finite-Element Methode der Polynomgrad der Berechnung gesteigert und die Diskretisierung des Gebietes beibehalten. Daher muss die Geometriebeschreibung, die über das Element definiert ist, unabhängig von der Elementanzahl sein. Um eine Konvergenz der Ergebnisse bei adaptiver Berechnung zu erzielen, in der sich der Fehler der Geometrieabbildung bezogen auf den Gesamtfehler nicht mit steigendem Ansatzgrad vergrößert, muss eine exakte Abbildungsfunktion verwendet werden.

Das in Abschnitt 3 hergeleitete hierarchische Schalenmodell ist in den Basen der Schalenmittelfläche  $\mathbf{A}_i$  bzw.  $\mathbf{A}^i$  definiert, die der ersten Ableitung der Abbildungsfunktion nach den Standardkoordinaten  $\xi, \eta$  entsprechen. Des Weiteren wird für die

Beschreibung des Shifters  $\mathbf{Z}$  und des linearen Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  der Krümmungstensor  $\mathbf{B}$  benötigt, der die zweiten Ableitungen der Abbildungsfunktion beinhaltet. Eine weitere Restriktion für die Abbildung hierarchischer Schalenelemente ist also, dass sie mindestens im Inneren eines Elementes, sowie auf den Elementkanten  $C^2$ -stetig sein muss.

In diesem Abschnitt wird aus einer dreidimensionalen Abbildungsfunktion für Hexaederelemente die Abbildungsfunktion für hierarchische Schalenelemente hergeleitet. Danach werden Abbildungsvorschriften für unterschiedliche Geometrien und eine mögliche Anbindung an ein CAD-Programm aufgezeigt.

### 5.5.1 Herleitung der Abbildungsfunktion für Schalenelemente

#### 5.5.1.1 Abbildungsfunktion eines Hexaederelementes

SZABÓ stellt in [55] eine Abbildungsfunktion für ein Hexaederelement mittels der dreidimensionalen, linearen *Blending-Function*-Methode vor. Die allgemeine Form lautet:

$$\mathbf{X} := \mathbf{Q}_{Hex}^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^8 \mathbf{n}_i(\xi, \eta, \zeta) - \sum_{i=1}^{12} \mathbf{e}_i(\xi, \eta, \zeta) + \sum_{i=1}^6 \mathbf{f}_i(\xi, \eta, \zeta). \quad (5.35)$$

Hierbei stellt  $\mathbf{n}_i(\xi, \eta, \zeta)$  den Vektor der trilineare Abbildung eines Hexaeders und  $\mathbf{f}_i(\xi, \eta, \zeta)$  den Vektor der hinzukommenden Anteile aus dem 'Blenden' der Flächenfunktionen dar. Da nun an einer Kante zwei Flächen aneinander grenzen, die die exakten, gekrümmten Kantenfunktionen beinhalten, muss der hinzukommende Anteil der 'geblendeten' Kante  $\mathbf{e}_i(\xi, \eta, \zeta)$  einmal je Kante abgezogen werden.

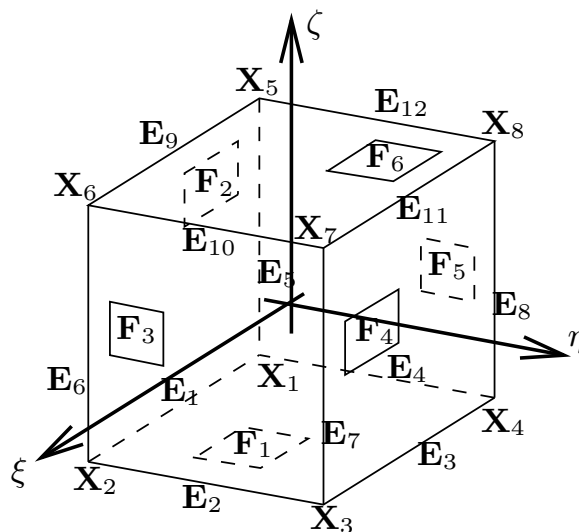


Abb. 5.4: Das Hexaederelement

Nach Umformen von Gleichung (5.35) ergibt sich eine Darstellung, die die globalen Vektoren der Flächenfunktionen  $\mathbf{F}_i$  und Kantenfunktionen  $\mathbf{E}_i$  in Abhängigkeit

von den Standardkoordinaten  $(\xi, \eta, \zeta)$  beinhaltet. Die Definitionen der Flächen- und Kantenfunktionen sowie der Knoten sind in Abbildung 5.4 dargestellt.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} := \mathbf{Q}_{Hex}^e(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{X}_i - \sum_{i=1}^{12} B_i^E(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{E}_i \\ &+ \sum_{i=1}^6 B_i^F(\xi, \eta, \zeta) \mathbf{F}_i \end{aligned} \quad (5.36)$$

Dabei steht  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  für die trilinearen Standardansatzfunktionen.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) & N_5 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) & N_6 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) & N_7 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) & N_8 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Die bilinearen Blending-Funktionen der Kanten  $B_i^E$  ergeben sich für die zugehörige Kante zu eins und für die diagonal gegenüberliegende Kante und den daran angrenzenden Flächen zu null. Der lineare Blending-Term der Flächen  $B_i^F$  ist für die zugehörige Fläche eins und für die gegenüberliegende Fläche null.

$$\begin{aligned} B_1^E &= \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 - \zeta) & B_7^E &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) & B_1^F &= \frac{1}{2}(1 - \zeta) \\ B_2^E &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \zeta) & B_8^E &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) & B_2^F &= \frac{1}{2}(1 - \eta) \\ B_3^E &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 - \zeta) & B_9^E &= \frac{1}{4}(1 - \eta)(1 + \zeta) & B_3^F &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \\ B_4^E &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \zeta) & B_{10}^E &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \zeta) & B_4^F &= \frac{1}{2}(1 + \eta) \\ B_5^E &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & B_{11}^E &= \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 + \zeta) & B_5^F &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ B_6^E &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) & B_{12}^E &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \zeta) & B_6^F &= \frac{1}{2}(1 + \zeta) \end{aligned} \quad (5.38)$$

### 5.5.1.2 Abbildungsfunktion eines Schalenelemente

Für eine Überführung dieser Hexaederabbildung in eine Flächenabbildung im Raum wird die Annahme getroffen, dass die Dicke des Hexaeders gegen Null geht, d.h. es gilt  $\zeta \rightarrow 0$ .

Die Knotenwerte  $\mathbf{X}_i$  der Abbildungsfunktion verschieben sich durch diese Annahme in die Mittelebene des Hexaederelementes, die bei  $\zeta = 0$  liegt. Die neuen Ortsvektoren

der Knoten können aus dem arithmetischen Mittel der zur Mittelfläche des Hexaeders gegenüberliegenden Knoten berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_1 &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_5) & \mathbf{X}_5 &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_5) \\
\mathbf{X}_2 &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_6) & \mathbf{X}_6 &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_6) \\
\mathbf{X}_3 &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_7) & \mathbf{X}_7 &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_7) \\
\mathbf{X}_4 &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_8) & \mathbf{X}_8 &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_8)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Die Kantenfunktionen  $\mathbf{E}_1$  bis  $\mathbf{E}_4$  und  $\mathbf{E}_9$  bis  $\mathbf{E}_{12}$  verschieben sich ebenfalls in die Mittelebene des Hexaeders und können nach dem gleichen Prinzip wie die Knoten überführt werden. Die Kanten  $\mathbf{E}_5$  bis  $\mathbf{E}_8$  hingegen reduzieren sich zu einem Knoten in der Mittelebene, dessen Vektor durch das arithmetische Mittel der beiden Endknoten der jeweiligen Kante berechnet werden kann.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1(\xi) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1(\xi) + \mathbf{E}_9(\xi)) & \mathbf{E}_7(\zeta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{X}_3 + \mathbf{X}_7) \\
\mathbf{E}_2(\eta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_2(\eta) + \mathbf{E}_{10}(\eta)) & \mathbf{E}_8(\zeta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{X}_4 + \mathbf{X}_8) \\
\mathbf{E}_3(\xi) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_3(\xi) + \mathbf{E}_{11}(\xi)) & \mathbf{E}_9(\xi) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1(\xi) + \mathbf{E}_9(\xi)) \\
\mathbf{E}_4(\eta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_4(\eta) + \mathbf{E}_{12}(\eta)) & \mathbf{E}_{10}(\eta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_2(\eta) + \mathbf{E}_{10}(\eta)) \\
\mathbf{E}_5(\zeta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_5) & \mathbf{E}_{11}(\xi) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_3(\xi) + \mathbf{E}_{11}(\xi)) \\
\mathbf{E}_6(\zeta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_6) & \mathbf{E}_{12}(\eta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_4(\eta) + \mathbf{E}_{12}(\eta))
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Die Flächenfunktionen  $\mathbf{F}_2$  bis  $\mathbf{F}_5$ , die von der Koordinate  $\zeta$  abhängen, gehen über in eine Kantenfunktion in der Mittelebene des Hexaederelementes. Diese Kantenfunktionen können aus dem arithmetische Mittel der beiden angrenzenden Kanten der Fläche, für die  $\zeta = -1$  und  $\zeta = 1$  gilt, gebildet werden. Die beiden übrigen Flächenfunktionen  $\mathbf{F}_1$  und  $\mathbf{F}_6$  verschieben sich in die Mittelebene und können analog zu den Knotenwerten aus ihrem arithmetischen Mittel berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_1(\xi, \eta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1(\xi, \eta) + \mathbf{F}_6(\xi, \eta)) & \mathbf{F}_4(\xi, \zeta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_3(\xi) + \mathbf{E}_{11}(\xi)) \\
\mathbf{F}_2(\xi, \zeta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_1(\xi) + \mathbf{E}_9(\xi)) & \mathbf{F}_5(\eta, \zeta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_4(\eta) + \mathbf{E}_5(\xi)) \\
\mathbf{F}_3(\eta, \zeta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{E}_2(\eta) + \mathbf{E}_{10}(\eta)) & \mathbf{F}_6(\xi, \eta) &\rightarrow \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1(\xi, \eta) + \mathbf{F}_6(\xi, \eta))
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Durch die Annahme, dass die Dicke des Hexaeders gegen null geht, liegen alle geo-

metrischen Elemente in der Mittelebene und es ergeben sich folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_5 &= \mathbf{X}_1 & \mathbf{E}_9 &= \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{X}_6 &= \mathbf{X}_2 & \mathbf{E}_{10} &= \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{X}_7 &= \mathbf{X}_3 & \mathbf{E}_{11} &= \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{X}_8 &= \mathbf{X}_4 & \mathbf{E}_{12} &= \mathbf{E}_4 \end{aligned} \quad \mathbf{F}_6 = \mathbf{F}_1 . \quad (5.42)$$

Werden die Gleichungen aus (5.42) in die Gleichungen (5.39), (5.40) und (5.41) eingesetzt, und die Ergebnisse in die allgemeine Abbildungsfunktion für Hexaeder in (5.36) eingesetzt, so ergibt sich für die Abbildungsfunktion eines Schalenelementes:

$$\overset{0}{\mathbf{X}} := \mathbf{Q}_{Shell}^e(\xi, \eta) = \mathbf{F}_1(\xi, \eta) . \quad (5.43)$$

Die Abbildung eines Schalenelementes, das auf der Mittelfläche der Schale definiert ist, kann also durch die Flächenfunktion im Raum, die die exakten Kantenfunktionen beinhaltet, vollständig dargestellt werden.

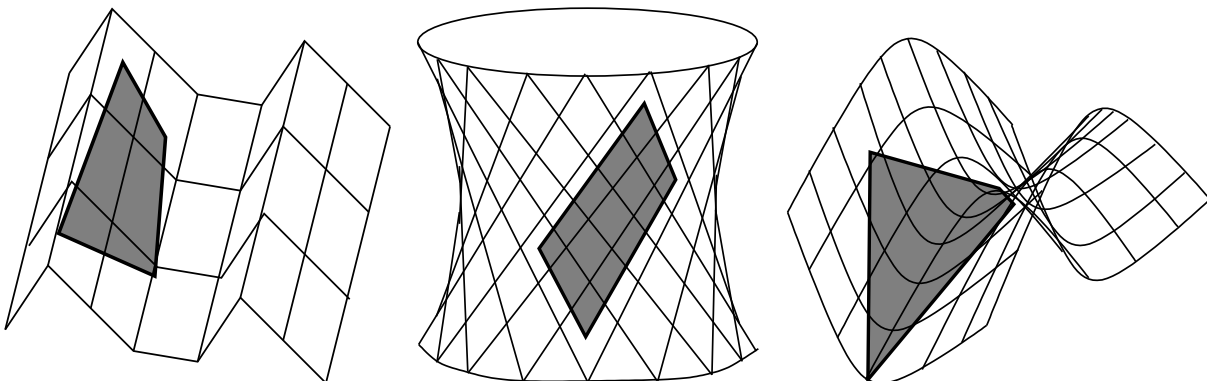
## 5.5.2 Abbildungsfunktionen für verschiedene Schalengeometrien

### 5.5.2.1 Die bilineare Abbildung

Die Abbildung von Faltwerkselementen, hyperbolischen Hyperboloiden oder auch einschaligen Hyperboloiden kann durch eine bilineare Abbildungsfunktion im  $R^3$  exakt erfasst werden. Bei hyperbolischen Hyperboloiden und einschaligen Hyperboloiden gilt dies jedoch nur, wenn die Elementkanten parallel zu den zwei Scharen von geradlinigen Erzeugenden verlaufen. Daher ist es besser für die Vernetzung dieser beiden Geometrien die Abbildungsvorschrift parametrischer Flächen zu verwenden, damit die Ausrichtung der Elementkanten beliebig gewählt werden kann.

$$\mathbf{Q}_{lin}^e(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \overset{0}{\mathbf{X}}_i \quad (5.44)$$

$N_i$  steht für die bilinearen Ansatzfunktionen in Abhängigkeit von den Standardkoordinaten  $\xi, \eta$ .

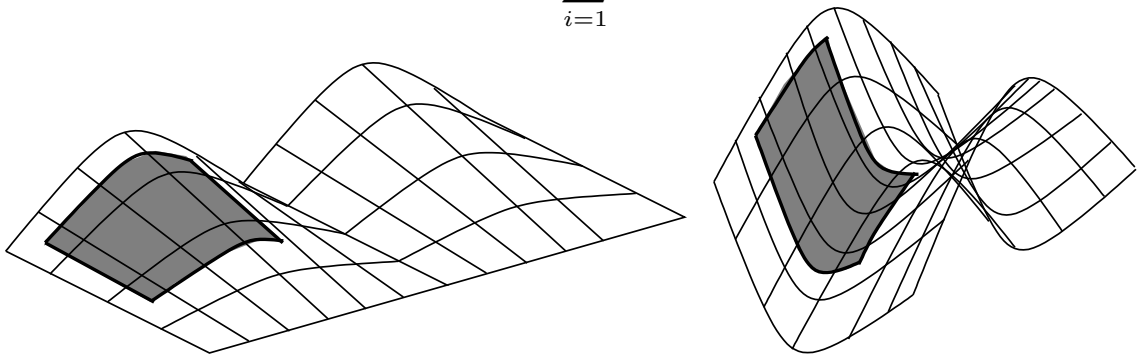


**Abb. 5.5:** Beispiele für bilineare Abbildungen: Faltwerk, Hyperboloid (einschalig), hyperbolisches Hyperboloid

### 5.5.2.2 Die parametrische Abbildung

Diese Abbildungsfunktion wird vorwiegend bei isoparametrischen Elementen verwendet. Dabei werden die LEGENDRE-Polynome  $N_i^L$ , die biquadratisch oder maximal bikubisch sind, mit den Knotenkoordinaten der Geometrie multipliziert. Mit dieser Abbildungsfunktion können Regelflächen, deren Erzeugende eine Gerade und deren Leitkurve maximal vom Grad der Abbildungsfunktion ist, exakt dargestellt werden. Auch Elemente eines parabolischen Paraboloids können mit Hilfe eines neunten Knotens im Inneren des Elementes abgebildet werden, wenn die Elementkanten entlang der Parabellinien verlaufen.

$$\mathbf{Q}_{iso}^e(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 N_i^L(\xi, \eta) \overset{\mathbf{0}}{\mathbf{X}}_i \quad (5.45)$$



**Abb. 5.6:** Beispiele für parametrische Abbildungen: Sheaddach, parabolisches Paraboloid

### 5.5.2.3 Abbildung parametrischer Flächen

Die geometrischen Grundlagen parametrischer Flächen sind in den Büchern von HOSCHEK und LASSER [51] und FARIN [37] zu finden.

Eine parametrische Fläche im  $R^3$  ist dadurch definiert, dass für sie ein Urbild im  $R^2$  existiert. Dieses Urbild wird durch die Parameter  $\mathbf{u} = (u, v)^T$  beschrieben. Die Parameterdarstellung der Fläche stellt eine Abbildung vom Urbild in das globale Koordinatensystem dar, die den Ortsvektor der Fläche  $\overset{\mathbf{0}}{\mathbf{X}}(u, v)$  beschreibt. Die Abbildung ist regulär, wenn gilt

$$\left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} \right| \neq 0, \quad (5.46)$$

das heißt, wenn die Tangentialvektoren der Parameterlinien im  $R^3$  nicht parallel verlaufen. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so liegt eine Singularität der Fläche vor. Sie kann geometrischer Art sein, wie zum Beispiel die Spitze eines Kegels, oder durch die parametrische Flächenbeschreibung hervorgerufen werden, wie es bei den Polen einer Kugel der Fall ist. Letztere kann durch eine Umparametrisierung der Abbildungsfunktion umgangen werden.

$$u = u(u^*, v^*) \quad \text{und} \quad v = v(u^*, v^*) \quad (5.47)$$

Im Folgenden werden einige Sonderfälle von parametrischen Flächen aufgezeigt.



**Translationsfläche:** Die Translationsfläche entsteht, indem eine Kurve  $\mathbf{E}_a^{\mathbf{X}}(u)$  entlang einer zweiten Kurve  $\mathbf{E}_b^{\mathbf{X}}(v)$  im Raum verschoben wird.

$$\mathbf{F}_{trans}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}_a^{\mathbf{X}}(u) + \mathbf{E}_b^{\mathbf{X}}(v) \quad (5.48)$$

Sie findet ihre Anwendung zum Beispiel bei der geometrischen Beschreibung von Teilen einer Autokarosserie, Teilen von Werkzeugen und Formen für Plastikteile mit Hilfe eines CAD-Programmes.

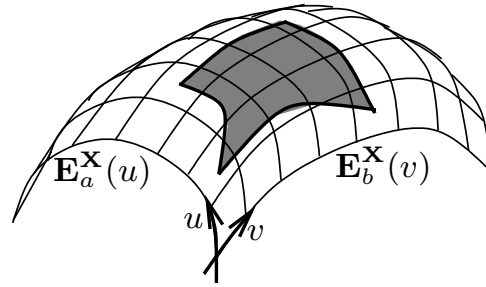


Abb. 5.7: Beispiel einer Translationsfläche

**Verbindungsfläche:** Eine Variante der Translationsfläche ist die Verbindungsfläche, die zwei nichtkongruente Kurven im Raum  $\mathbf{E}_a^{\mathbf{X}}(u)$  und  $\mathbf{E}_b^{\mathbf{X}}(u)$  zum Beispiel durch einen linearen Übergang ineinander überführt.

$$\mathbf{F}_{coup}(\mathbf{u}) = (1 - v) \cdot \mathbf{E}_a^{\mathbf{X}}(u) + v \cdot \mathbf{E}_b^{\mathbf{X}}(u) \quad (5.49)$$

mit  $0 \leq v \leq 1$

Auch diese Flächenbeschreibung ist ein wichtiger Bestandteil der Karosseriemodellierung.

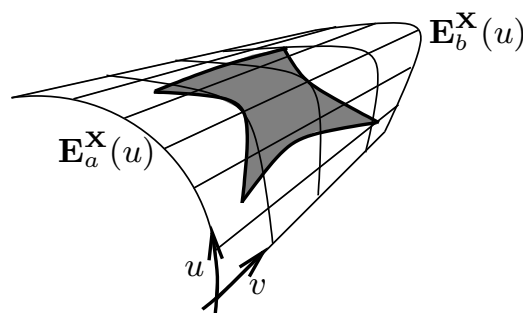


Abb. 5.8: Beispiel einer Verbindungsfläche

**Regelfläche:** Der Sonderfall der linearen Verbindungsfläche stellt eine Regelfläche dar. Eine Regelfläche wird durch die stetige Bewegung einer Geraden im Raum aufgespannt.

$$\mathbf{F}_{reg}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}_a^{\mathbf{X}}(u) + v \cdot \mathbf{E}_b^{\mathbf{X}}(u) \quad (5.50)$$

Zu den Regelflächen zählen der elliptische, hyperbolische und parabolische Zylinder, der elliptische Kegel und das einschalige Hyperboloid.

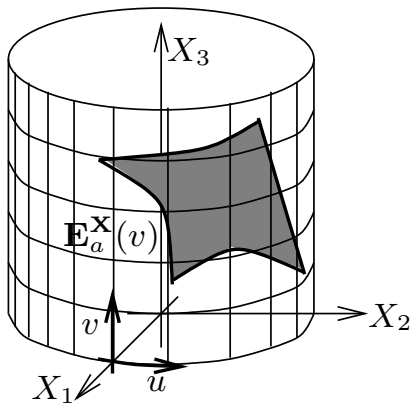
**Rotationsflächen:** Die Rotationsflächen sind eine weitere Sonderklasse der parametrischen Flächen. Sie entstehen durch Rotation einer ebenen Kurve im Raum um eine Achse, die in der gleichen Ebene liegt. Ist die Rotationsachse zum Beispiel die  $z$ -Achse und liegt die Kurve  $\mathbf{E}_a^{\mathbf{X}}(u)$  in der  $xz$ -Ebene, ergibt sich für die Abbildungsvorschrift:

$$\mathbf{F}_{rot}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_a^{(X_1)}(v) \\ \mathbf{E}_a^{(X_1)}(v) \\ \mathbf{E}_a^{(X_3)}(v) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

$$\text{mit } \mathbf{E}_a^{\mathbf{X}}(v) = \begin{pmatrix} X_1(v) \\ 0 \\ X_3(v) \end{pmatrix} \quad \text{und } 0 \leq u \leq 2\pi .$$

Zu den gängigen Rotationsflächen zählen der Rotationszylinder, der Rotationskegel, das Rotationsellipsoid, mit dem Sonderfall Kugel, der Torus, das ein- und zweischalige Rotationshyperboloid und -paraboloid. Im Folgenden werden einige davon aufgeführt.

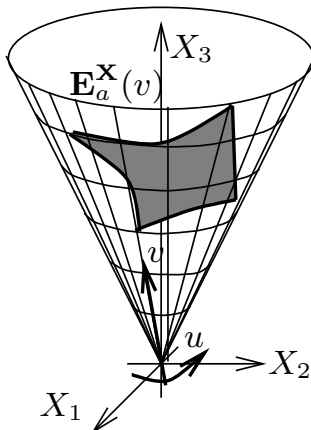
Rotationszylinder:



$$\mathbf{F}_{cyl}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r_{cyl} \cos(u) \\ r_{cyl} \sin(u) \\ v \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

$$\text{mit } \mathbf{E}_a^{\mathbf{X}}(v) = \begin{pmatrix} r_{cyl} \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

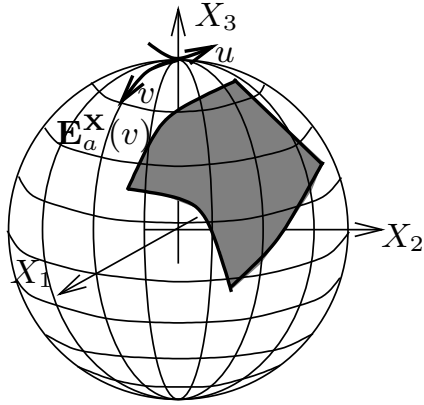
Rotationskegel:



$$\mathbf{Q}_{co}^e(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r_{co} v \cos(u) \\ r_{co} v \sin(u) \\ v \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

$$\text{mit } \mathbf{E}_a^{\mathbf{X}}(v) = \begin{pmatrix} r_{co} v \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

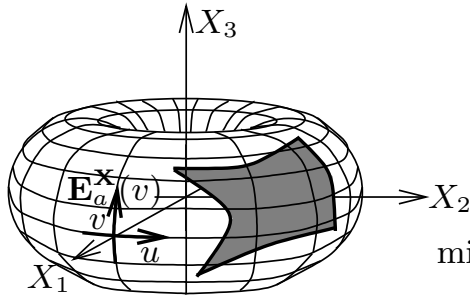
Kugel:



$$\mathbf{F}_s(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} r_s \sin(v) \cos(u) \\ r_s \sin(v) \sin(u) \\ r_s \cos(v) \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

mit  $\mathbf{E}_a^{\mathbf{X}}(v) = \begin{pmatrix} r_s \sin(v) \\ 0 \\ r_s \cos(v) \end{pmatrix}, 0 \leq u \leq 2\pi$

Torus:



$$\mathbf{F}_t(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} (r_m + r_t \cos(v)) \cos(u) \\ (r_m + r_t \cos(v)) \sin(u) \\ r_t \sin(v) \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

mit  $\mathbf{E}_a^{\mathbf{X}}(v) = \begin{pmatrix} r_m + r_t \cos(v) \\ 0 \\ r_t \sin(v) \end{pmatrix}, 0 \leq u \leq 2\pi$

#### 5.5.2.4 Die *Blending-Function*-Methode

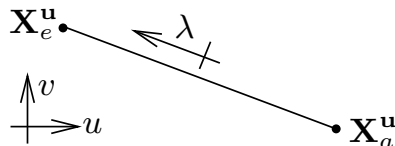
Für die Abbildung des Standardelementes in das Urbild der parametrischen Flächen kann die von GORDON und HALL entwickelte *Blending-Function*-Methode [42, 43] verwendet werden. Sie besteht aus einer bilinearen Abbildungsfunktion im  $R^2$  zu der die Differenz zwischen der geraden Kante und der exakten Parameterfunktion  $\mathbf{E}_i^{\mathbf{u}}$  der Kante  $i$  im Urbild, die mit einem Blending-Term multipliziert wird, addiert wird. Dabei hat sich eine Abbildungsfunktion, die lineare Blending-Terme verwendet, als ausreichend genau erwiesen. Die Abbildung des Standardelementes in das globale Koordinatensystem ergibt sich dann mit den Gleichungen aus Abschnitt 5.5.2.3 wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^e(\xi, \eta) &= \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) \\ \text{mit } \mathbf{u}(\xi, \eta) &= \begin{pmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \left[ (1 - \eta) \mathbf{E}_1^{\mathbf{u}}(\xi) + (1 + \xi) \mathbf{E}_2^{\mathbf{u}}(\eta) \right. \\ &\quad \left. + (1 + \eta) \mathbf{E}_3^{\mathbf{u}}(\xi) + (1 - \xi) \mathbf{E}_4^{\mathbf{u}}(\eta) \right] - \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \mathbf{X}_i^{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Hierbei steht  $N_i(\xi, \eta)$  für die bilinearen Standardansatzfunktionen. Der Vektor  $\overset{0}{\mathbf{X}}_i^u$  der Knotenkoordinaten ist im  $uv$ -Koordinatensystem definiert und muss daher aus dem globalen Vektor der Knotenkoordinaten  $\overset{0}{\mathbf{X}}_i$  durch eine inverse, parametrische Flächenbeschreibung bestimmt werden. Die Parameterfunktion der Kanten  $\mathbf{E}_i^u$  sind ebenfalls im  $uv$ -Koordinatensystem definiert. Für sie liegt nur in Ausnahmefällen eine exakte Beschreibung im globalen Koordinatensystem vor, die durch die inverse, parametrische Flächenbeschreibung in das  $uv$ -Koordinatensystem transformiert werden kann.

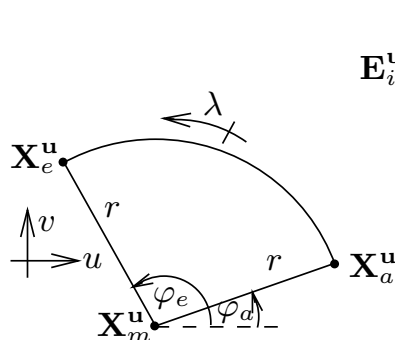
Im Folgenden sind verschiedene Parameterfunktionen der Kanten  $\mathbf{E}_i^u(\lambda)$  mit  $\lambda = \xi$  für  $i = 1, 3$  und  $\lambda = \eta$  für  $i = 2, 4$  aufgeführt. Hierbei steht  $\mathbf{X}_a^u$  für den Anfangsknoten der Kante und  $\mathbf{X}_e^u$  für den Endknoten der Kante im Urbild. Da die Abbildung eines Schalelementes  $C^2$ -stetig sein muss, sollen auch die Kantenfunktionen eine geschlossen analytische Lösung für ihre erste und zweite Ableitung ergeben.

**Gerade:** Wird die Geradenfunktion (5.57) für alle Kanten in (5.56) eingesetzt, so ergibt sich die bilineare Abbildungsfunktion eines Elementes. Mit den zuvor beschriebenen parametrischen Flächenbeschreibungen bilden die Kanten auf einem Zylinder eine Schraubenlinie und auf einer Kugel eine Loxodrome. Im Rahmen dieser Arbeit wurde diese Abbildungsfunktion für einen rotationssymmetrischen Zylinder, Kegel und Kugel implementiert. Die verwendeten Abbildungsfunktionen sind in [69] und [71] veröffentlicht.



$$\mathbf{E}_i^u(\lambda) = \frac{1}{2}(1 - \lambda)\mathbf{X}_a^u + \frac{1}{2}(1 + \lambda)\mathbf{X}_e^u \quad (5.57)$$

**Kreis:** Die Gleichung (5.58) beschreibt einen Kreisbogen, bei dem der Mittelpunkt  $\mathbf{X}_m^u$  gegeben ist. Hier können keine Rückschlüsse über die Kantenfunktion auf der entsprechenden parametrischen Fläche im  $R^3$  gemacht werden.



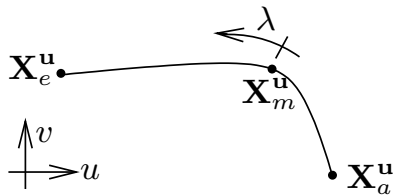
$$\mathbf{E}_i^u(\lambda) = \mathbf{X}_m^u + r \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{1}{2}(1 - \lambda)\varphi_a + \frac{1}{2}(1 + \lambda)\varphi_e \right) \\ \sin \left( \frac{1}{2}(1 - \lambda)\varphi_a + \frac{1}{2}(1 + \lambda)\varphi_e \right) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } r = |\mathbf{X}_a^u - \mathbf{X}_m^u| = |\mathbf{X}_e^u - \mathbf{X}_m^u| \quad (5.58)$$

$$\varphi_a = \arctan \left( \frac{\mathbf{X}_a^v - \mathbf{X}_m^v}{\mathbf{X}_a^u - \mathbf{X}_m^u} \right)$$

$$\varphi_e = \arctan \left( \frac{\mathbf{X}_e^v - \mathbf{X}_m^v}{\mathbf{X}_e^u - \mathbf{X}_m^u} \right)$$

**Parabel:** Mit Hilfe eines Zwischenpunktes und den quadratischen, eindimensionalen LEGENDRE-Ansatzfunktionen  $N_i^L$  ergibt sich die parabelförmige Kantenfunktion in Gleichung (5.59). Wird in Gleichung (5.56) für jede Kante eine parabelförmige Funktion eingesetzt, so ergibt sich für  $\mathbf{u}(\xi, \eta)$  die parametrische Abbildung im  $R^2$ .



$$\mathbf{E}_i^u(\lambda) = \sum_{i=a,m,e} N_i^L \mathbf{X}_i^u$$

mit

$$N_a = N_1^L = -\frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)$$

$$N_m = N_2^L = (1-\lambda)(1+\lambda)$$

$$N_e = N_3^L = \frac{1}{2}\lambda(1+\lambda)$$
(5.59)

Hierbei ist jedoch keine Äquidistanz des Parameters  $\lambda$  bezüglich der Bogenlänge gegeben, wodurch es zu Verzerrungen in der Abbildungsfunktion kommen kann. Dies führt in der Regel zu Genauigkeitsverlusten in den Berechnungsergebnissen.

Durch eine Umparametrisierung von  $\lambda$  auf  $\mu$ , wobei der Parameter  $\mu$  proportional zur Bogenlänge  $L_E$  ist, ergibt sich folgende Beziehung

$$\frac{L(\lambda)}{L_E} = \frac{1+\mu}{2} := L(\mu) \quad \text{mit} \quad -1 \leq \mu \leq 1$$
(5.60)

mit der Bogenlänge

$$L(\lambda) = \int_{\lambda=-1}^{\lambda} ds \quad \text{und} \quad L_E = L(\lambda=1)$$

$$\text{mit} \quad ds = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{E}_i^u}{\partial \lambda}\right)^2} d\lambda = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{E}_i^{(u)}}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{E}_i^{(v)}}{\partial \lambda}\right)^2} d\lambda,$$
(5.61)

wobei  $ds$  die Wurzel aus einer quadratischen Funktion von  $\lambda$  ist. Durch Integration dieses Ausdruckes setzt sich  $L(\lambda)$  aus einem Wurzelausdruck und dem Logarithmus eines zweiten Ausdruckes zusammen. Diese Funktion  $L(\lambda)$  ist nur noch numerisch invertierbar und die Umparametrisierung auf einen zur Bogenlänge proportionalen Parameter ist mit einem erheblich größeren Rechenaufwand verbunden.

**Kürzeste Entfernung:** Die kürzeste Entfernung zweier Punkte auf einer Fläche im Raum ist durch die geodätische Linie definiert, die als Kantenfunktion gewählt werden kann. Die Hauptnormale dieser Funktion im Raum ist in jedem Punkt identisch zur Flächennormale. Für eine Kugelfläche ist die geodätische Linie eine Orthodrome, für eine Zylinderfläche eine Schraubenlinie, d.h. im Urbild eine Gerade.

Für eine Fläche  $\mathbf{F}(u, v)$  im Urbild, für die die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten  $(u_a, v_a)$  und  $(u_e, v_e)$  gesucht ist, muss das Integral des Linienelementes auf

der Fläche minimal werden:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_{s_a}^{s_e} ds = \int_{(u_a, v_a)}^{(u_e, v_e)} \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} dv\right)^2} = \int_{u_a}^{u_e} \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} v'\right)^2} du \\
 &= \int_{u_a}^{u_e} f(u, v, v') du = \text{Min.} \quad \text{mit} \quad v = v(u) \quad , \quad v' = \frac{\partial v}{\partial u} .
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Dieses Funktional lässt sich in die allgemeine EULER-Differentialgleichung der Variationsrechnung überführen, die eine Differentialgleichung zweiter Ordnung darstellt.

$$f_{,v} - f_{,uv'} - f_{,vv'} v' - f_{,v'v'} v'' = 0 \tag{5.63}$$

Für rotationssymmetrische Geometrien kann keine analytische Lösung dieser Gleichung gefunden werden, sodass auch diese Geometrie einer Kantenbeschreibung nur numerisch ermittelt werden kann. Auch hier ergibt sich ein erheblich größerer Rechenaufwand als bei einer analytischen Beschreibung der Kantenfunktion.

### 5.5.3 Kopplung CAD und FE-Programm

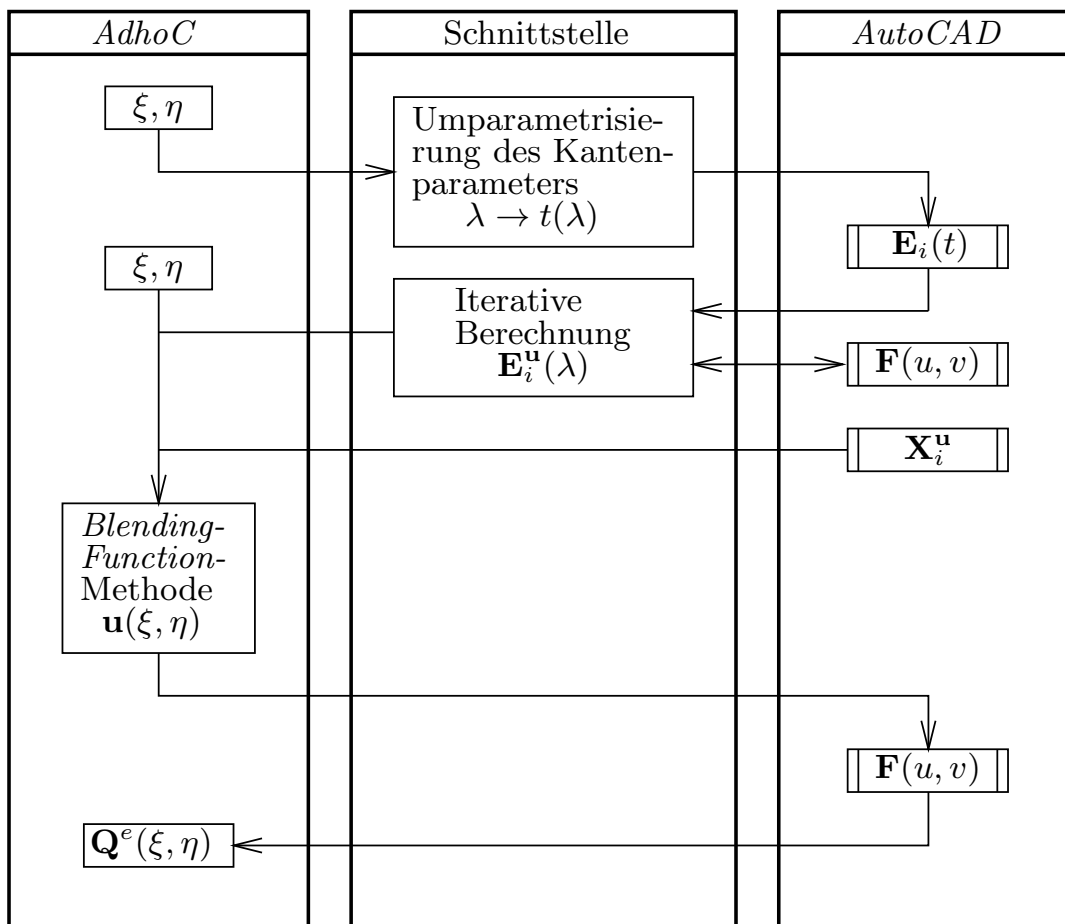
Die oben dargestellte Abbildung parametrischer Flächen stellt eine exakte Abbildung der Schalengeometrie mit beliebigen Kantenfunktionen dar. Wird in einem FE-Programm eine analytische Beschreibung der Flächen verwendet, so muss für jede Flächengeometrie eine Abbildungsfunktion und deren erste und zweite Ableitung implementiert werden. Um eine unbegrenzte Vielfalt an exakten Geometrien berechnen zu können, kann das FE-Programm mit einem CAD-Programm gekoppelt werden. Durch die einmalige Entwicklung einer Schnittstelle stehen alle neuen CAD-Techniken zur Darstellung von Geometrien zur Verfügung (wie zum Beispiel NURB-Flächen). Ein weiterer Vorteil wäre, dass bei kleinen Geometrieänderungen kein neues FE-Netz erstellt werden muss um das System neu auszuwerten.

Die meisten CAD-Programme basieren auf einer *Boundary Representation* Darstellung (B-rep) der Geometrie, die hierarchisch in Punkte, Kurven, Flächen und Körper unterteilt ist. Die in (5.56) dargestellte *Blending-Function*-Methode verwendet ebenfalls einen hierarchischen Aufbau der geometrischen Informationen des Schalenelementes. Sie benötigt die Knoten-, Kanten- und Flächeninformationen des Elementes. Durch die entkoppelte Beschreibung der geometrischen Informationen in der Abbildungsfunktion mit dem vergleichbaren hierarchischen Aufbau der Daten besteht die Möglichkeit ein kommerzielles CAD-Programm mit dem verwendeten FE-Programm *Adhoc* zu verbinden. Für Hexaeder-Elemente ist dies schon von BRÖKER in [18] realisiert worden. Wie dieses Konzept auf Schalen angewendet werden kann wird im Folgenden dargestellt.

### 5.5.3.1 Anbindung der Abbildung von *AdhoC* an *AutoCAD*

Das CAD-System *AutoCAD* verfügt über den Geometriemodellierkern ACIS, der die Implementation von Schnittstellen zu anderen Programmen ermöglicht. Hier liegen die Flächenbeschreibung der Schalengeometrie in ihrer Parameterdarstellung  $\mathbf{F}(u, v)$  vor, sowie ihre erste und zweite Ableitung nach den Parametern  $u, v$ .

Durch den hierarchischen Aufbau der topologischen Informationen ist ein Zugriff auf die Kurvenbeschreibungen im globalen Koordinatensystem  $\mathbf{E}_i(t)$  möglich. Der Parameter  $t$  ist meistens nicht uniform, das heißt, er wächst nicht proportional zur Bogenlänge der Kurve an. Dadurch können bei sehr stark konkav gekrümmten Elementrändern Probleme durch die Abbildungsfunktion entstehen, wie zum Beispiel Spannungskonzentrationen oder Singularitäten in der Abbildung. Durch eine im vorherigen Abschnitt angesprochene lineare Umparametrisierung der Kurve auf die Standardkoordinate  $\lambda$  ( $\lambda = \xi$  für  $i = 1, 3$  und  $\lambda = \eta$  für  $i = 2, 4$ ) wird dieses Problem minimiert.



**Abb. 5.9:** Anbindung der Abbildung von *AdhoC* an *AutoCAD*

Für die Abbildungsvorschrift in (5.56) werden jedoch nicht die globalen Kantenkoordinaten  $\mathbf{E}_i(\lambda)$  sondern die Koordinaten im Urbild  $\mathbf{E}_i^u(\lambda)$  benötigt. Als Voraussetzung gilt, dass die Kante Teil der Flächenfunktion  $\mathbf{F}(u, v)$  ist und nur eindeutige Flächen, die eine Umkehrabbildung  $\mathbf{F}^{-1}(u, v) = \mathbf{F}^u(\mathbf{X})$  besitzen, zugelassen sind. Diese Umkehrabbildung der Flächenfunktion liegt jedoch nicht explizit vor, kann aber durch

eine numerische Iteration bestimmt werden. Durch einen Vergleich der Ergebnisse kann die Kantenfunktion  $\mathbf{E}_i^u(\lambda)$  bestimmt werden. Der Algorithmus ist von BRÖKER in [18] entwickelt worden.

Die Knotenkoordinaten im Urbild  $\mathbf{X}_i^u$  sind über die topologischen Informationen der Fläche erhältlich. Der allgemeine Ablauf einer zu entwickelnden Schnittstelle für die Anbindung des Programmes *AdhoC* an das CAD-System *AutoCAD* ist in Abbildung 5.9 dargestellt.

### 5.5.3.2 Erste Ableitung der Abbildungsfunktion

Die kovarianten Basen der Schalenmittelfläche berechnen sich aus der ersten Ableitung der Abbildungsfunktion nach den Standardkoordinaten  $\xi$  und  $\eta$  und bilden ein totales Differential.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}^e}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{Q}^e}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \quad (5.64)$$

Die Ableitung der Flächenfunktionen nach den Parametern lautet

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} = \left( \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} ; \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v} \right) \quad (5.65)$$

und ist in *AutoCAD* gegeben. Die Ableitung der Parameter nach den Standardkoordinaten wird mit Hilfe der *Blending-Function*-Methode in Gleichung (5.56) gebildet.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ (1 - \eta) \frac{\partial \mathbf{E}_1^u(\xi)}{\partial \xi} + \mathbf{E}_2^u(\eta) + (1 + \eta) \frac{\partial \mathbf{E}_3^u(\xi)}{\partial \xi} - \mathbf{E}_4^u(\eta) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ (1 - \eta) \mathbf{X}_1^u - (1 - \eta) \mathbf{X}_2^u - (1 + \eta) \mathbf{X}_3^u + (1 + \eta) \mathbf{X}_4^u \right] \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ -\mathbf{E}_1^u(\xi) + (1 + \xi) \frac{\partial \mathbf{E}_2^u(\eta)}{\partial \eta} + \mathbf{E}_3^u(\xi) + (1 - \xi) \frac{\partial \mathbf{E}_4^u(\eta)}{\partial \eta} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ (1 - \xi) \mathbf{X}_1^u + (1 + \xi) \mathbf{X}_2^u - (1 + \xi) \mathbf{X}_3^u - (1 - \xi) \mathbf{X}_4^u \right] \end{aligned} \quad (5.66)$$

Hierfür werden die Ableitungen der Kantenfunktionen nach den Standardkoordinaten benötigt. Diese liegen im CAD-System nicht vor, können aber iterativ mit Hilfe eines rechts- und linksseitigen Differenzenquotienten bestimmt werden (siehe [18]).

### 5.5.3.3 Zweite Ableitung der Abbildungsfunktion

Die Basen des Schalenkontinuums werden mit Hilfe des Shifters  $\mathbf{Z}$ , der den Krümmungstensor  $\mathbf{B}$  der Schalenmittelfläche beinhaltet, formuliert. Hierfür werden die zweiten



Ableitungen der Abbildungsfunktion der Schalenmittelfläche benötigt.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{Q}^e}{\partial \xi^2} &= \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \right)^T \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}^2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi^2} \\
\frac{\partial^2 \mathbf{Q}^e}{\partial \eta^2} &= \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \right)^T \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}^2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta^2} \\
\frac{\partial^2 \mathbf{Q}^e}{\partial \xi \partial \eta} &= \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \right)^T \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}^2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi \partial \eta}
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Die zweiten Ableitungen der Flächenfunktion nach den Parametern  $u$  und  $v$  lauten

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial v^2} \end{pmatrix} \tag{5.68}$$

und liegen ebenfalls in *AutoCAD* vor. Die zweiten Ableitungen der Parameter nach den Standardkoordinaten ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi^2} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ (1 - \eta) \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1^u(\xi)}{\partial \xi^2} + (1 + \eta) \frac{\partial^2 \mathbf{E}_3^u(\xi)}{\partial \xi^2} \right] \\
\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \eta^2} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ + (1 + \xi) \frac{\partial^2 \mathbf{E}_2^u(\eta)}{\partial \eta^2} + (1 - \xi) \frac{\partial^2 \mathbf{E}_4^u(\eta)}{\partial \eta^2} \right] \\
\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi \partial \eta} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ - \frac{\partial \mathbf{E}_1^u(\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{E}_2^u(\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{E}_3^u(\xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathbf{E}_4^u(\eta)}{\partial \eta} \right] \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[ - \mathbf{X}_1^u + \mathbf{X}_2^u - \mathbf{X}_3^u + \mathbf{X}_4^u \right].
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Hierfür werden die zweiten Ableitungen der Kantenfunktionen nach den Standardkoordinaten benötigt. Auch diese liegen nicht in *AutoCAD* vor. Sie können jedoch mit einem geschachtelten, iterativen Verfahren bestimmt werden, mit dem auch schon die ersten Ableitungen berechnet werden konnten. Allerdings ist hierbei anzumerken, dass die Rechenzeit für die zweiten Ableitungen quadratisch ansteigt. Werden durchschnittlich  $n$  Iterationsschritte benötigt, um die Steigung der Schalenmittelfläche in einem Punkt zu berechnen, so werden zur Bestimmung der Krümmungen  $2n^2$  Iterationsschritte der gleichen Art durchlaufen. Nach [18] werden in der Regel 5 Iterationsschritte für die Steigung benötigt, das heißt, die Berechnung einer Krümmung in einem Punkt benötigt die 10-fache Rechenzeit.

Die Anbindung der in Gleichung (5.56) aufgeführten Abbildungsfunktion an ein CAD-Programm ist also möglich, jedoch mit einem großen Rechenaufwand verbunden.

## 5.6 Numerische Integration

Um die in Gleichung (5.27) aufgestellte Elementsteifigkeitsmatrix und den Elementlastvektor zu berechnen, müssen Integrale der Form

$$I = \int_{\xi} \int_{\eta} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \quad (5.70)$$

ausgewertet werden. Sie werden durch eine numerische Integration approximiert. In dieser Arbeit wurde die GAUSS-Quadratur gewählt, bei der die Lage der auszuwertenden Stützstellen  $(\xi_i, \eta_j)$  und die dazugehörigen Wichtungen  $w_{ij}$  optimiert ist. Ein Polynom vom Grad  $p$  kann mit  $m$  Stützstellen exakt integriert werden, wenn  $p = 2m - 1$  gilt [82]. Für das oben genannte Integral ergibt sich:

$$I \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_{ij} f(\xi_i, \eta_j) \quad \text{mit} \quad w_{ij} = w_i w_j. \quad (5.71)$$

Die NEWTON-COTES-Integration verwendet äquidistante Stützstellen und kann mit  $m$  Stützstellen ein Polynom vom Grad  $p$  mit  $p = m$  integrieren. Im Vergleich zur GAUSS-Quadratur benötigt sie für eine vergleichbare Genauigkeit der numerischen Integration etwa die doppelte Anzahl an Stützstellen, das heißt, die doppelte Rechenzeit.

## 5.7 Nichtlinearer Algorithmus

Das Grundproblem einer nichtlinearen Berechnung ist die Ermittlung des Gleichgewichtszustandes. Durch ein nichtlineares Materialmodell liegt ein nichtlinearer Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang vor, der zu einer nichtlinearen *schwachen Form* des Prinzips der virtuellen Verschiebungen in Gleichung (3.77) führt. Diese kann daher nur iterativ gelöst werden. Die Belastungen werden durch eine lineare Funktion der Zeit vorgegeben, sodass das Gleichgewicht zu jeder Zeit  $t$  erfüllt sein muss. Die internen Variablen, die das nichtlineare Materialverhalten beschreiben, sind ebenfalls von der Zeit  $t$  abhängig und somit indirekt von der aktuellen Belastung. Für die inkrementelle Lösung des zeitabhängigen Problems wird die Gesamtlast in einzelnen Lastschritten für den Zeitraum  $[t, t + \Delta t]$  auf das System aufgebracht, sodass sie indirekt die Veränderung der Zeit darstellt. Für jedes Inkrement wird nun mit Hilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens iterativ der Gleichgewichtszustand des aktuellen Systems zum Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  berechnet.

### 5.7.1 Das Newton-Raphson-Verfahren

Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren geht davon aus, dass zum Zeitpunkt  $(t)$  die Lösung bekannt ist [10, 72, 102], das heißt, dass die Variation der nichtlinearen Potentialfunktion  $\Phi(\mathbf{u}(t))$ , die das Gleichgewicht zu diesem Zeitpunkt beschreibt, erfüllt ist.

$$\delta\Phi(\mathbf{u}(t)) = -\delta W(\mathbf{u}(t)) + \delta A(\mathbf{u}(t)) = 0 \quad (5.72)$$

Die Belastung wird nun inkrementell auf das System aufgebracht, wobei eine lineare Belastungsfunktion in Abhängigkeit von der Zeit vorausgesetzt wird. Der Belastungsschritt ist also äquivalent zum Zeitschritt. Gesucht ist nun das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}$ , das das statische Gleichgewicht zum Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  erfüllt.

$$\delta\Phi(\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}) = -\delta W(\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}) + \delta A(\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}) = 0 \quad (5.73)$$

Das gesuchte Verschiebungsfeld wird mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren iterativ angenähert, sodass die Iterationsfolge nach der Vorschrift

$$\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i)} = \mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \Delta\mathbf{u} = -\frac{\delta\Phi(\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)})}{D\delta\Phi(\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)})}, \quad \mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(0)} = \mathbf{u}_{(t)} \quad (5.74)$$

gebildet wird. Mit der polynomialen Beschreibung der Verschiebungen über die Dicke der Schale in Gleichung (3.27) ergibt sich für hierarchische Schalenmodelle

$$\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{\mathbf{k}(i-1)}, \quad \Delta\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{nk} (\Theta^3)^k \Delta\mathbf{u}^{\mathbf{k}}. \quad (5.75)$$

Für den  $(i - 1)$ -ten Iterationsschritt lautet die Variation des Gesamtpotentials zum Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  mit Gleichung (3.77) für hierarchische Schalenmodelle

$$\begin{aligned} \delta\Phi(\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}) &= -\int_{\mathcal{A}_0} \int_{\Theta^3} \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} \det\mathbf{Z} d\Theta^3 d\mathcal{A}_0 \\ &+ \int_{\mathcal{A}_0} \rho_0 \sum_{k=0}^{nk} f(k) \delta\mathbf{u}^{\mathbf{k}} \mathbf{K}_{(t+\Delta t)} d\mathcal{A}_0 + \int_{\mathcal{A}_0} \sum_{k=0}^{nk} f_O(k) \delta\mathbf{u}^{\mathbf{k}} \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^3 d\mathcal{A}_0 \\ &+ \int_{\Theta^\alpha} \sum_{k=0}^{nk} \delta\mathbf{u}^{\mathbf{k}} (f(k) \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^\alpha + f(k+1) \frac{2}{h} \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^\alpha) \sqrt{A^{\beta\beta}} \sqrt{A} d\Theta^\alpha \\ \text{mit} \quad \mathbf{K}_{(t+\Delta t)} &= \mathbf{K}_{(t)} + \Delta\mathbf{K}, \quad \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^3 = \mathbf{T}_{(t)}^3 + \Delta\mathbf{T}^3 \\ \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^{\mathbf{k}\alpha} &= \mathbf{T}_{(t)}^{\mathbf{k}\alpha} + \Delta\mathbf{T}^{\mathbf{k}\alpha}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Hieraus kann mit der Definition von  $\Delta\mathbf{u}$  für die Iterationsfolge folgender Ausdruck ermittelt werden:

$$\begin{aligned} D\delta\Phi(\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}) \Delta\mathbf{u} &= \frac{\partial\delta\Phi(\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)})}{\partial\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}} \Delta\mathbf{u} \\ &= -\int_{\mathcal{A}_0} \int_{\Theta^3} \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \frac{\partial\bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}}{\partial\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}} : \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}}{\partial\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}} \Delta\mathbf{u} \det\mathbf{Z} d\Theta^3 d\mathcal{A}_0 \\ &= -\int_{\mathcal{A}_0} \int_{\Theta^3} \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\mathbf{C}}_{ep(t+\Delta t)}^{(i-1)} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\Delta\mathbf{u}) \det\mathbf{Z} d\Theta^3 d\mathcal{A}_0. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Mit dem Zusammenhang

$$-D\delta\Phi(\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}) \Delta \mathbf{u} = \delta\Phi(\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}) , \quad (5.78)$$

der sich aus der Iterationsfolge in (5.74) ergibt, folgt mit Gleichung (5.76) und (5.77) und dem Faktor  $f_{ep}(i)$

$$f_{ep}(i) = \frac{h}{2} \left( \frac{h}{2} \zeta \right)^i \det \mathbf{Z} = \frac{h}{2} \left( \left( \frac{h}{2} \zeta \right)^i - 2H \left( \frac{h}{2} \zeta \right)^{i+1} + K \left( \frac{h}{2} \zeta \right)^{i+2} \right) \quad (5.79)$$

für die Iterationsfolge die Vorschrift

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i)} &= \mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{u} \\ \text{mit } \int_{\mathcal{A}_0} \sum_{k=0}^{nk+1} \sum_{l=0}^{nk+1} \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{k}} : \int_{\Theta^3} f_{ep}(k+l) \bar{\mathbf{C}}_{ep(t+\Delta t)}^{(i-1)} d\Theta^3 : \frac{1}{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\Delta \mathbf{u}) d\mathcal{A}_0 \\ &= - \int_{\mathcal{A}_0} \sum_{k=0}^{nk+1} \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{k}} : \int_{\Theta^3} f_{ep}(k) \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} d\Theta^3 d\mathcal{A}_0 \\ &\quad + \int_{\mathcal{A}_0} \rho_0 \sum_{k=0}^{nk} f(k) \delta \bar{\mathbf{u}}^{\mathbf{k}} \mathbf{K}_{(t+\Delta t)} d\mathcal{A}_0 + \int_{\mathcal{A}_0} \sum_{k=0}^{nk} f_O(k) \delta \bar{\mathbf{u}}^{\mathbf{k}} \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^3 d\mathcal{A}_0 \\ &\quad + \int_{\Theta^\alpha} \sum_{k=0}^{nk} \delta \bar{\mathbf{u}}^{\mathbf{k}} \left( f(k) \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^0 + f(k+1) \frac{2}{h} \mathbf{T}_{(t+\Delta t)}^\alpha \right) \sqrt{A^{\beta\beta}} \sqrt{A} d\Theta^\alpha \\ \bar{\mathbf{C}}_{ep(t+\Delta t)}^{(i-1)} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}} , \end{aligned} \quad (5.80)$$

wobei  $\bar{\mathbf{C}}_{ep(t+\Delta t)}^{(i-1)}$  der konsistente Tangentensteifigkeitstensor und  $\bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}$  der Spannungstensor zum Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  für den Iterationsschritt  $(i - 1)$  ist. Als Abbruchkriterium der Iteration wird der Zuwachs der Länge des Verschiebungsvektor verwendet.

$$\frac{|\Delta \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i)}|} < \text{Tol} \quad (5.81)$$

### 5.7.2 Der Radial-Return-Algorithmus

Für den iterativen Lösungsprozess des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens müssen der konsistente Tangentensteifigkeitstensor  $\bar{\mathbf{C}}_{ep(t+\Delta t)}^{(i)}$  und der Spannungstensor  $\bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}$  für den Iterationsschritt  $(i)$  an jedem Integrationspunkt über die Dicke der Schale berechnet werden. Hierfür wird der RADIAL-RETURN-Algorithmus verwendet, der sich in [72] aus einem Vergleich mit zwei weiteren Algorithmen als effektivster herausgestellt hat. Die erste Anwendung wurde von WILKINS in [99] gezeigt.

Aus der Lösung des Gleichungssystems in (5.80) kann mit Gleichung (3.43) der Dehnungstensor der Schalenmittelfläche des Iterationsschrittes ( $i$ ) zum Zeitpunkt ( $t + \Delta t$ ) berechnet werden.

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)} = \frac{1}{2} (\mathbf{Z}^T \overline{\text{GRAD} \mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i)}} + \overline{\text{GRAD} \mathbf{u}_{(t+\Delta t)}^{(i)}}^T \mathbf{Z}) = \sum_{k=0}^{nk+1} (\Theta^3)^k \frac{\mathbf{k}}{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}} \quad (5.82)$$

Er ist mit Gleichung (5.75) als Polynom über die Dicke der Schale gegeben.

Für den Spannungstensor, der für jeden Punkt über die Dicke bestimmt werden muss, wird eine sich auf der sicheren Seite befindende Näherung des Spannungstensors, der sogenannte Trial-Spannungstensor, eingeführt.

$$\bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{Tr(i)} = \bar{\mathbf{C}} : (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i(t)}) \quad (5.83)$$

Für die VON MISES Fließfläche mit isotroper Verfestigung, die in Abschnitt 3.3.2 für hierarchische Schalen definiert wurde, kann die assoziierte Fließregel und die Evolutionsgleichung für den Zeitpunkt ( $t + \Delta t$ ) mit Hilfe des impliziten EULER-Verfahrens angenähert werden.

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i(t+\Delta t)}^{(i)} &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i(t)} + \Delta t \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{i(t+\Delta t)}^{(i)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i(t)} + \Delta \gamma \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}} \\ \bar{\alpha}_{(t+\Delta t)}^{(i)} &= \bar{\alpha}_{(t)} + \Delta t \dot{\bar{\alpha}}_{(t+\Delta t)}^{(i)} = \bar{\alpha}_{(t)} + \Delta \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \text{mit } \Delta \gamma &= \Delta t \gamma_{(t+\Delta t)}^{(i)} \end{aligned} \quad (5.84)$$

Die Identität

$$\bar{\mathbf{n}}_{\bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}} = \frac{\text{dev} \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}}{\|\bar{\mathbf{G}} \text{dev} \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}\|} = \frac{\text{dev} \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{Tr(i)}}{\|\bar{\mathbf{G}} \text{dev} \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{Tr(i)}\|} \quad (5.85)$$

kann mit Hilfe der Fließbedingung für Schalenmodelle in (3.74) gezeigt werden.

Zum Zeitpunkt ( $t + \Delta t$ ) muss die Fließbedingung in (3.74) erfüllt sein, wodurch sich mit Gleichung (3.70) die Bestimmungsgleichung für den Zuwachs des Konsistenzparameters  $\Delta \gamma$  ergibt.

$$F(\Delta \gamma) = \|\bar{\mathbf{G}} \text{dev} \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{Tr(i)}\| - 2 \mu \Delta \gamma - \sqrt{\frac{2}{3}} K(\bar{\alpha}_{(t+\Delta t)}^{(i)}) = 0 \quad (5.86)$$

Für eine exponentielle isotrope Verfestigungsfunktion

$$\begin{aligned} K(\bar{\alpha}) &= \sigma_0 + h \bar{\alpha} + (\sigma_\infty - \sigma_0)(1 - e^{(-\omega \bar{\alpha})}) \\ \text{mit } K_{,\bar{\alpha}}(\bar{\alpha}) &= h + \omega(\sigma_\infty - \sigma_0)e^{(-\omega \bar{\alpha})}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

die die Fließspannung  $\sigma_0$ , die Sättigungsspannung  $\sigma_\infty$ , die lineare Verfestigung  $h$  und den Verfestigungsexponenten  $\omega$  enthält, ergibt sich eine nichtlineare Bestimmungsgleichung für  $\Delta \gamma$ . Sie wird mit einem lokalen NEWTON-RAPHSON-Verfahren

iterativ angenähert, wobei der Startwert  $\Delta\gamma^{(0)} = 0$  gesetzt wird. Die Iterationsfolge für  $k = 1, 2, \dots$  berechnet sich nach der Vorschrift:

$$\Delta\gamma^{(k)} = \Delta\gamma^{(k-1)} - \frac{F(\Delta\gamma^{(k-1)})}{F'(\Delta\gamma^{(k-1)})} \quad (5.88)$$

$$\text{mit } F'(\Delta\gamma^{(k-1)}) = -2\mu - \frac{2}{3} K_{,\bar{\alpha}}(\bar{\alpha}_{(t+\Delta t)}^{(i)}) .$$

Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren weist in der Nähe einer Nullstelle eine quadratische Konvergenz auf, die nur wenige Iterationsschritte zur Berechnung des gesuchten Wertes  $\Delta\gamma$  erfordert. Als Abbruchkriterium wird das Erfüllen der Fließbedingung gewählt.

$$|F(\Delta\gamma^{(k)})| < \text{Tol} \quad (5.89)$$

Der gesuchte Spannungstensor berechnet sich nun durch die Vorschrift

$$\bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{(i)} = \kappa \bar{\mathbf{G}}^{-1} \text{sph} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)} \bar{\mathbf{G}}^{-1} + \text{dev} \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{Tr(i)} - 2\mu \Delta\gamma^{(k)} \bar{\mathbf{G}}^{-1} \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}} \bar{\mathbf{G}}^{-1} . \quad (5.90)$$

Es wird deutlich, dass der RADIAL-RETURN-Algorithmus implizit konsistent und ohne weitere Bedingungen stabil ist, da der gesuchte Spannungstensor  $\bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}$  die aktuelle Fließbedingung in (5.86) zum Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  erfüllt.

Mit Hilfe der Definition in (5.80) lässt sich nun mit Gleichung (5.90) der konsistente Tangentensteifigkeitstensor  $\bar{\mathbf{C}}_{ep(t+\Delta t)}^{(i)}$  aus der folgenden Gleichung berechnen.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{ep(t+\Delta t)}^{(i)} &= \frac{\kappa}{3} \frac{\partial \text{tr} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}} \otimes \bar{\mathbf{G}}^{-1} + \frac{\partial \text{dev} \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{Tr(i)}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}} \\ &\quad - 2\mu \left( \frac{\partial \Delta\gamma^{(k)}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}} \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}} + \Delta\gamma^{(k)} \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}}}{\partial \text{dev} \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{Tr(i)}} : \frac{\partial \text{dev} \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{Tr(i)}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}} \right) \end{aligned} \quad (5.91)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (5.83), (5.85) und (5.86) ergibt sich der aktuelle konsistente Tangentensteifigkeitstensor zum Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  nach der Darstellung von SIMO [87] zu:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}_{ep(t+\Delta t)}^{(i)} &= \text{sph} \bar{\mathbf{C}} + \Theta_{(t+\Delta t)}^{(i)} \text{dev} \bar{\mathbf{C}} - 2\mu \bar{\Theta}_{(t+\Delta t)}^{(i)} \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}} \otimes \bar{\mathbf{n}}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(t+\Delta t)}^{(i)}} \\ \text{mit } \Theta_{(t+\Delta t)}^{(i)} &= 1 - \frac{2\mu \Delta\gamma^{(k)}}{\|\bar{\mathbf{G}} \text{dev} \bar{\mathbf{S}}_{(t+\Delta t)}^{Tr(i)}\|} \\ \bar{\Theta}_{(t+\Delta t)}^{(i)} &= \left( 1 + \frac{K_{,\bar{\alpha}}(\bar{\alpha}_{(t+\Delta t)}^{(i)})}{3\mu} \right)^{-1} - (1 - \Theta_{(t+\Delta t)}^{(i)}) . \end{aligned} \quad (5.92)$$

Für Scheiben mit einem ebenen Spannungszustand wurde dieser Algorithmus von SIMO in [86] entwickelt.

### 5.7.3 Matrixformulierung des Newton-Raphson-Verfahrens

Für eine iterative Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems werden die Komponenten des Verschiebungsvektors  $\Delta \mathbf{u}$ , die in dem Vektor  $[\Delta \mathbf{u}]$  enthalten sind, mit den gleichen Ansatzfunktionen approximiert, mit denen auch der Vektor  $[\mathbf{u}]$  angenähert wurde.

$$[\Delta \mathbf{u}] = [\mathbf{N}_u] \cdot [\Delta \mathbf{u}^{hsm}] = [\mathbf{N}_u] \cdot [\mathbf{T}] \cdot [\mathbf{N}] \cdot [\Delta \mathbf{a}] \quad (5.93)$$

Der Vektor der Verschiebungen des  $(i)$ -ten Iterationsschrittes zum Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  lautet also

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} &= [\mathbf{u}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} + [\Delta \mathbf{u}] \\ &= [\mathbf{N}_u] \cdot [\mathbf{T}] \cdot [\mathbf{N}] \cdot \left( [\mathbf{a}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} + [\Delta \mathbf{a}] \right) \\ &= [\mathbf{N}_u] \cdot [\mathbf{T}] \cdot [\mathbf{N}] \cdot [\mathbf{a}]_{(t+\Delta t)}^{(i)}. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Für die Lastvektoren aus Volumen-, Flächen- und Randlasten wird vorausgesetzt, dass alle Lasten für das NEWTON-RAPHSON-Verfahren mit dem gleichen Lastkoeffizienten  $\lambda_{(t+\Delta t)}$  anwachsen. Er gibt den prozentualen Anteil der Gesamtbelastung an, der zum Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  auf das System wirkt. Die Iterationsfolge für die Koeffizienten des Verschiebungsvektors zum Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  lautet:

$$[\mathbf{a}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} = [\mathbf{a}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} + [\Delta \mathbf{a}]$$

mit 
$$\sum_{e=1}^{ne} \delta [\mathbf{a}]^T \cdot [\mathbf{k}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} \cdot [\Delta \mathbf{a}] = \sum_{e=1}^{ne} \delta [\mathbf{a}]^T \cdot \left( \lambda_{(t+\Delta t)} [\mathbf{f}] - [\mathbf{f}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} \right) \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } [\mathbf{k}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} &= \int_{\eta} \int_{\xi} [\mathbf{B}^{hsm}]^T \cdot \int_{\zeta} [\bar{\mathbf{C}}_{ep}^{hsm}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} d\zeta \cdot [\mathbf{B}^{hsm}] \sqrt{A} d\xi d\eta \\ [\mathbf{f}] &= [\mathbf{f}_V] + [\mathbf{f}_O] + [\mathbf{f}_R] \\ [\mathbf{f}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} &= \int_{\eta} \int_{\xi} [\mathbf{B}^{hsm}]^T \cdot \int_{\zeta} [f_{ep}]^T \cdot [\bar{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} d\zeta \sqrt{A} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Für die Auswertung dieser Iterationsfolge werden der Vektor der Spannungen  $[\bar{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}$  und die dazugehörige Matrix  $[f_{ep}]^T$ , sowie die tangentielle Steifigkeitsmatrix des hierarchischen Schalenelementes  $[\bar{\mathbf{C}}_{ep}^{hsm}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}$  benötigt.

Der Spannungsvektor ist weiterhin symmetrisch und enthält sechs unabhängige kontravariante Komponenten bezogen auf die Mittelfläche der Schale. Zum Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  lautet er für den  $(i - 1)$ -ten Iterationsschritt:

$$[\bar{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} = \left( \bar{S}_{11}^{(i-1)} \quad \bar{S}_{22}^{(i-1)} \quad \bar{S}_{33}^{(i-1)} \quad \bar{S}_{12}^{(i-1)} \quad \bar{S}_{13}^{(i-1)} \quad \bar{S}_{23}^{(i-1)} \right)_{(t+\Delta t)}^T. \quad (5.97)$$

Mit dem Faktor  $f_{ep}(i)$  aus Gleichung (5.79) ist die Matrix  $[f_{ep}]^T$  definiert, mit der nun der residuale Lastvektor  $[f_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}$  durch eine numerische Vorabintegration über die Dicke bestimmt werden kann.

$$[f_{ep}] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{nk+1} \\ [f_{ep}] & [f_{ep}] & \cdots & [f_{ep}] \end{pmatrix}$$

mit  $[f_{ep}]^{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} f_{ep}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{ep}(k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_{ep}(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_{ep}(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_{ep}(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{ep}(k) \end{pmatrix}$  (5.98)

Dieser Faktor wird auch für die Aufstellung der tangentialen Steifigkeitsmatrix des hierarchischen Schalenelementes benötigt.

$$[\bar{\mathbf{C}}_{ep}^{hsm}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} = \begin{pmatrix} f_{ep}(0) [\bar{\mathbf{C}}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} & f_{ep}(1) [\bar{\mathbf{C}}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} & \cdots & f_{ep}(nk+1) [\bar{\mathbf{C}}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} \\ f_{ep}(1) [\bar{\mathbf{C}}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} & f_{ep}(2) [\bar{\mathbf{C}}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} & & f_{ep}(nk+2) [\bar{\mathbf{C}}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} \\ \vdots & & \ddots & \\ f_{ep}(nk+1) [\bar{\mathbf{C}}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} & f_{ep}(nk+2) [\bar{\mathbf{C}}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} & & f_{ep}(2(nk+1)) [\bar{\mathbf{C}}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)} \end{pmatrix}$$
 (5.99)

Mit Hilfe dieser Steifigkeitsmatrix kann die Elementsteifigkeitsmatrix  $[\mathbf{k}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}$  in Gleichung (5.96) berechnet werden. Für die numerische Integration wird die GAUSS-Quadratur aus Abschnitt 5.6 gewählt. Es wird deutlich, dass die Integration über die Schalenmittelfläche und die Dicke der Schale geschachtelt sind. Bei einer Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix muss also an jedem Gaußpunkt der Schalenmittelfläche die numerische Integration über die Dicke der Schale nur einmal durchgeführt werden. Die zeitintensive Matrizenmultiplikation des Ausdruckes  $[\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{B}]$  wird also nur für die Gaußpunkte der Schalenmittelfläche durchgeführt. So bewirkt eine Erhöhung der Gaußpunktanzahl in Dickenrichtung auch keinen erheblich größeren Rechenaufwand.

Bei Volumenelementen hingegen, die in ihrer Elementformulierung eine Integration über das gesamte Volumen enthalten, muss die Matrizenmultiplikation  $[\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{B}]$  für jeden Gaußpunkt des Elementes durchgeführt werden. Die Rechenzeit einer Elementsteifigkeitsmatrix eines Volumenelementes ist also etwa um die Anzahl der Gaußpunkte in Dickenrichtung größer als die Rechenzeit der Elementsteifigkeitsmatrix eines hierarchischen Schalenelementes. Bei zunehmender Gaußpunktanzahl über die Dicke der Schale wächst die Rechenzeit für Volumenelemente linear an, wobei sie bei hierarchischen Schalenelementen fast konstant bleibt. Dies wurde anhand des 7-Parameter-Schalen- und Volumenelementes von RAMM in [15] gezeigt.

Die  $[\mathbf{B}]$ -Matrix der hierarchischen Schalenelemente wächst mit steigender Modellnummer an. Für Volumenelemente hingegen bleibt sie bei steigendem Polynomgrad



über die Dicke konstant. Daher ist der Vorteil der Vorabintegration für eine niedrige Modellnummer nicht vorhanden. Um den Spannungsverlauf in Dickenrichtung für ein nichtlineares Materialverhalten zu erfassen, werden mehr Gaußpunkte über die Dicke benötigt als für ein lineares Materialverhalten. Folglich sind hierarchische Schalenelemente bei inelastischen Materialverhalten effektiver als Volumenelemente.

#### 5.7.4 Matrixformulierung des Radial-Return-Algorithmus

Für jeden Gaußpunkt über die Schalendicke muss der Spannungsvektor  $[\bar{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}$  und die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $[\bar{\mathbf{C}}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i-1)}$  mit Hilfe des RADIAL-RETURN-Algorithmus bestimmt werden. Hierfür wird zunächst mit den aus Gleichung (5.95) berechneten Koeffizienten  $[\mathbf{a}]_{(t+\Delta t)}^{(i)}$  der Vektor der Gesamtdehnungen für den aktuellen Gaußpunkt berechnet.

$$[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} = [\mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}] \cdot [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{hsm}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} = [\mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}] \cdot [\mathbf{B}^{hsm}] \cdot [\mathbf{a}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} \quad (5.100)$$

Die Einträge der Matrix  $[\mathbf{N}_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}]$  werden für den aktuellen Gaußpunkt mit  $\zeta = \zeta^*$  ausgewertet.

Ein Hilfsvektor der Dehnungen wird zu  $[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{Tr}]$  definiert, der sich aus der Differenz der Gesamtdehnungen  $[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)}$  und den irreversiblen Dehnungen  $[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i]_{(t)}$  zum Zeitpunkt  $(t)$  zusammensetzt.

$$[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{Tr}] = [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} - [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i]_{(t)} \quad (5.101)$$

mit  $[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i]_{(t)} = (\bar{\varepsilon}_{i(t)11} \quad \bar{\varepsilon}_{i(t)22} \quad \bar{\varepsilon}_{i(t)33} \quad 2\bar{\varepsilon}_{i(t)12} \quad 2\bar{\varepsilon}_{i(t)13} \quad 2\bar{\varepsilon}_{i(t)23})^T$

Mit Hilfe dieses Dehnungsvektors wird der deviatorische Anteil des Trial-Spannungsvektors  $[\text{dev}\bar{\mathbf{S}}^{Tr}]_{(t+\Delta t)}^{(i)}$  berechnet. Hierbei wurden die in Gleichung (3.21) enthaltenen Nulleinträge schon berücksichtigt.

$$[\text{dev}\bar{\mathbf{S}}^{Tr}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} = 2\mu \left( [\bar{\mathbf{G}}^{-1}] \cdot [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{Tr}] - \frac{1}{3} ([\bar{\mathbf{G}}^{-1}]^T \cdot [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_r^{Tr}]) \cdot [\bar{\mathbf{G}}^{-1}] \right)$$

mit  $[\bar{\mathbf{G}}^{-1}] = \begin{pmatrix} G^{11} & G^{11} & G^{12} & G^{12} & 0 & G^{11} & G^{12} & 0 & 0 \\ G^{12} & G^{12} & G^{22} & G^{22} & 0 & G^{12} & G^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G^{11} & G^{12} & G^{12} & G^{22} & 0 & \frac{1}{2}(G^{11} & G^{22} + G^{12} & G^{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}G^{11} & \frac{1}{2}G^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}G^{12} & \frac{1}{2}G^{22} \end{pmatrix}$ 

$$[\bar{\mathbf{G}}^{-1}] = (G^{11} \quad G^{22} \quad 1 \quad G^{12} \quad 0 \quad 0)^T \quad (5.102)$$

In der Fließbedingung in Gleichung (5.86) wird die Norm des deviatorischen Anteils der Trial-Spannungen verwendet, die in der Variablen  $F_N^{(i)}_{(t+\Delta t)}$  definiert ist.

$$F_N^{(i)}_{(t+\Delta t)} = \sqrt{[\text{dev}\bar{\mathbf{S}}^{Tr}]^T_{(t+\Delta t)} \cdot [\bar{\mathbf{G}}_{Mat}] \cdot [\text{dev}\bar{\mathbf{S}}^{Tr}]_{(t+\Delta t)}^{(i)}}$$

mit  $[\bar{\mathbf{G}}_{Mat}] = \begin{pmatrix} G_{11} G_{11} & G_{12} G_{12} & 0 & 2 G_{11} G_{12} & 0 & 0 \\ G_{12} G_{12} & G_{22} G_{22} & 0 & 2 G_{12} G_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 G_{11} G_{12} & 2 G_{12} G_{22} & 0 & 2 (G_{11} G_{22} + G_{12} G_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 G_{11} & 2 G_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 G_{12} & 2 G_{22} \end{pmatrix}$  (5.103)

Nachdem mit Hilfe eines lokalen NEWTON-RAPHSON-Verfahrens in Gleichung (5.88) iterativ der Wert  $\Delta\gamma^{(k)}$  bestimmt wurde, können die interne Variable  $\bar{\alpha}^{(i)}_{(t+\Delta t)}$ , die gesuchten Spannungen  $[\bar{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)}$  und die tangentialsteifigkeitsmatrix  $[\bar{\mathbf{C}}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i)}$  neu berechnet werden. Hierfür wird der normierte Spannungsvektor  $[\bar{\mathbf{n}}_{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)}$  benötigt.

$$[\bar{\mathbf{n}}_{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} = \frac{1}{F_N^{(i)}_{(t+\Delta t)}} [\text{dev}\bar{\mathbf{S}}^{Tr}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} \quad (5.104)$$

Die interne Variable berechnet sich zu

$$\bar{\alpha}^{(i)}_{(t+\Delta t)} = \bar{\alpha}^{(i)}_{(t)} + \Delta\gamma^{(k)} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (5.105)$$

und der inelastische Dehnungsvektor folgt aus

$$[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i]_{(t+\Delta t)}^{(i)} = [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_i]_{(t)}^{(i)} + \Delta\gamma^{(k)} [\bar{\mathbf{G}}_{Mat}] \cdot [\bar{\mathbf{n}}_{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} \quad (5.106)$$

Aus dem sphärischen Anteil der inelastischen Dehnungen kann der Spannungsvektor  $[\bar{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)}$  berechnet werden.

$$[\bar{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} = \kappa [\bar{\mathbf{G}}_{Mat}^{-1}] \cdot [\text{sph}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} + [\text{dev}\bar{\mathbf{S}}^{Tr}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} - 2\mu \Delta\gamma^{(k)} [\bar{\mathbf{n}}_{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)}$$

mit  $[\text{sph}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} = \frac{1}{3} ([\bar{\mathbf{G}}^{-1}]^T \cdot [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)}) \cdot [\bar{\mathbf{G}}]$

$$[\bar{\mathbf{G}}_{Mat}^{-1}] = \begin{pmatrix} G^{11} G^{11} & G^{11} G^{22} & G^{11} & G^{11} G^{12} & 0 & 0 \\ G^{11} G^{22} & G^{22} G^{22} & G^{22} & G^{12} G^{22} & 0 & 0 \\ G^{11} & G^{22} & 1 & G^{12} & 0 & 0 \\ G^{11} G^{12} & G^{12} G^{22} & G^{12} & G^{12} G^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\bar{\mathbf{G}}] = (G_{11} \quad G_{22} \quad 1 \quad 2G_{12} \quad 0 \quad 0)^T \quad (5.107)$$

Für den Prediktorschritt des ersten Iterationsschrittes des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens wird die elastische Steifigkeitsmatrix  $\bar{\mathbf{C}}$  für jeden Gaußpunkt verwendet.

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)G^{11} G^{11} & \lambda G^{11} G^{22} & (\lambda + 2\mu)G^{11} G^{12} & 0 & 0 \\ \lambda G^{11} G^{22} & (\lambda + 2\mu)G^{22} G^{22} & (\lambda + 2\mu)G^{12} G^{22} & 0 & 0 \\ \lambda G^{11} G^{12} & (\lambda + 2\mu)G^{12} G^{22} & \lambda G^{12} G^{12} & 0 & 0 \\ (\lambda + 2\mu)G^{11} G^{12} & (\lambda + 2\mu)G^{12} G^{22} & (\lambda + \mu)G^{12} G^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\mu G^{11} G^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu G^{11} & \mu G^{12} \\ 0 & 0 & 0 & \mu G^{12} & \mu G^{22} \end{pmatrix} \quad (5.108)$$

Zum Schluss wird noch die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\bar{\mathbf{C}}_{ep}^{(i)}(t+\Delta t)$  an jedem Gauß-

punkt über die Dicke der Schale mit der folgenden Gleichung bestimmt.

$$[\bar{\mathbf{C}}_{ep}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} = [\text{sph}\bar{\mathbf{C}}] + \Theta_{(t+\Delta t)}^{(i)} [\text{dev}\bar{\mathbf{C}}] - \bar{\Theta}_{(t+\Delta t)}^{(i)} 2\mu [\bar{\mathbf{n}}_{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{(i)} \cdot [\bar{\mathbf{n}}_{\mathbf{S}}]_{(t+\Delta t)}^{T(i)}$$

mit

$$[\text{sph}\bar{\mathbf{C}}] = \kappa \begin{pmatrix} G^{11} G^{11} & G^{11} G^{22} & G^{11} & G^{11} G^{12} & 0 & 0 \\ G^{11} G^{22} & G^{22} G^{22} & G^{22} & G^{12} G^{22} & 0 & 0 \\ G^{11} & G^{22} & 1 & G^{12} & 0 & 0 \\ G^{11} G^{12} & G^{12} G^{22} & G^{12} & G^{12} G^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\text{dev}\bar{\mathbf{C}}] = 2\mu \begin{pmatrix} \frac{2}{3} G^{11} G^{11} & G^{12} G^{12} & -\frac{1}{3} G^{11} & \frac{2}{3} G^{11} G^{12} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} G^{11} G^{22} & \frac{2}{3} G^{22} G^{22} & -\frac{1}{3} G^{22} & \frac{2}{3} G^{12} G^{22} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} G^{11} & -\frac{1}{3} G^{22} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} G^{12} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} G^{11} G^{12} & \frac{2}{3} G^{12} G^{22} & -\frac{1}{3} G^{12} & \frac{1}{2}(G^{11} G^{22} + \frac{1}{3} G^{12} G^{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} G^{11} & \frac{1}{2} G^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} G^{12} & \frac{1}{2} G^{22} \end{pmatrix}$$

$$\Theta_{(t+\Delta t)}^{(i)} = 1 - \frac{2\mu \Delta\gamma^{(k)}}{F_{N(t+\Delta t)}^{(i)}}$$

$$\bar{\Theta}_{(t+\Delta t)}^{(i)} = \left(1 + \frac{1}{3\mu} (h + \omega(\sigma_\infty - \sigma_0) e^{(-\omega \bar{\alpha}_{(t+\Delta t)}^{(i)})})\right)^{-1} - \Theta_{(t+\Delta t)}^{(i)}$$

(5.109)

## 6 Numerische Untersuchungen

Das in Abschnitt 5 hergeleitete hierarchische Schalenelement ist in das  $p$ -FE-Programmsystem *AdhoC*, das von KRAUSE in [56] entwickelt und von weiteren Mitarbeitern von RANK ausgebaut wurde, implementiert. In diesem Abschnitt soll das Element überprüft und auf seine Leistungsfähigkeit getestet werden. Es werden zahlreiche Beispiele mit elastischem und plastischem Materialverhalten untersucht und mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen. In manchen Fällen stehen analytische Lösungen zur Verfügung. Ist dies nicht der Fall, so werden numerische Lösungen aus der Literatur verwendet, die meist nur die Ergebnisse der Verschiebungen beinhalten. Konvergenzstudien in der Dehnungsenergie, aus denen die exakte Lösung der Dehnungsenergie extrapoliert werden kann, sind selten zu finden. Ausgehend von der Konvergenz des hierarchischen Schalenelementes bei steigendem Polynomgrad und steigendem Modell zur dreidimensionalen Lösung des Problems wird daher eine Referenzlösung für eine hohe Auflösung des Problems bestimmt. Für die Ermittlung des relativen Fehlers in der Energienorm mit

$$\|e_r\|_{E(\Omega)} = \frac{\|\mathbf{u}_{\text{EX}} - \mathbf{u}_{\text{FE}}\|}{\|\mathbf{u}_{\text{EX}}\|} \quad (6.1)$$

wird diese Referenzlösung als Näherung der Lösung  $\mathbf{u}_{\text{EX}}$  verwendet. Um ein gutes Konvergenzverhalten zu erzielen, müssen Singularitäten und Randeffekte, die im Weiteren Layereffekte genannt werden, aufgelöst werden, da diese Bereiche einen großen Teil der Dehnungsenergie speichern. Eine  $hp$ -Verfeinerung eliminiert diese Effekte aus dem Inneren des Berechnungsgebietes, sodass der relative Fehler in der Dehnungsenergie eine exponentielle Konvergenz aufweist. Layereffekte können bei Schalen durch die gegebene Geometrie, das gewählte Modell und die Art der Lagerung entstehen. Ihre Breite ist für die jeweilige Geometriebeschreibung vorwiegend von der Dicke der Schale abhängig [66, 81].

Schalenelemente weisen bei einer zu geringen Approximation des Verschiebungsfeldes viele unterschiedliche Versteifungsarten auf. Der Ansatz der Verschiebungen kann das gegebene Problem nicht mehr hinreichend abbilden und die Ergebnisse in den Verschiebungen sind zu klein. Diese Versteifungen werden 'Locking' genannt und sind ein rein numerischer Defekt der Elementformulierung. Im Folgenden wird gezeigt, dass die  $p$ -Version der Finite-Element Methode das SHEAR-, MEMBRANE- und VOLUME-Locking mit der Erhöhung des Polynomgrades automatisch überwindet.

In der Literatur werden häufig Zylinder- oder Kugelschalen unter Einzellasten berechnet und die Verschiebungen unter den Lastangriffspunkten verglichen. Einzellasten stellen jedoch eine Singularität dar und die Lösung der Verschiebung strebt, wie von PITKÄRANTA in [45] gezeigt, an dieser Stelle gegen unendlich. Solche Beispiele stellen also keine sinnvollen Studien dar und sind aus diesem Grund in dieser Arbeit nicht berücksichtigt worden.

Des Weiteren werden in der Literatur üblicherweise Beispiele mit dünnen Schalen betrachtet, bei denen die Kinematik über die Dicke annähernd der NAGHDI Theorie in [59] folgt. Für die Überprüfung hoher hierarchischer Schalenmodelle, die bei dicken Schalen auftreten, wurde kein vergleichbares Beispiel gefunden. Das Modellverhalten und das auftretende POISSON-THICKNESS-Locking wird daher im ersten Abschnitt anhand einer Konvergenzstudie gegen die KIRCHHOFF-LOVE Theorie überprüft.

## 6.1 Poisson-Thickness-Locking

In der Einleitung des Abschnittes 4 wurde das POISSON-THICKNESS-Locking ausführlich erläutert. Hier noch einmal eine Kurzdefinition:

*Ein Schalenmodell mit einem gegebenen Spannungszustand kann die korrespondierenden Dehnungen nicht abbilden.*

Aus der theoretischen Modelldiskussion des Abschnittes 4 ging hervor, das sowohl bei den vollständigen als auch bei den reduzierten Modellen der Biegespannungszustand aus Randlasten der maßgebende Fall ist. Sollen die Randbedingungen des Spannungsverlaufes in Dickenrichtung der Schale erfüllt sein, so kann das POISSON-THICKNESS-Locking erst für das Modell 3 bzw. Modell (3,3,4) vollständig überwunden werden (siehe Abschnitt 4.8, Tabelle 4.2). Der Biegespannungszustand aus Flächenlast hingegen konnte schon mit dem Modell 2 bzw. Modell (2,2,3) abgebildet werden.

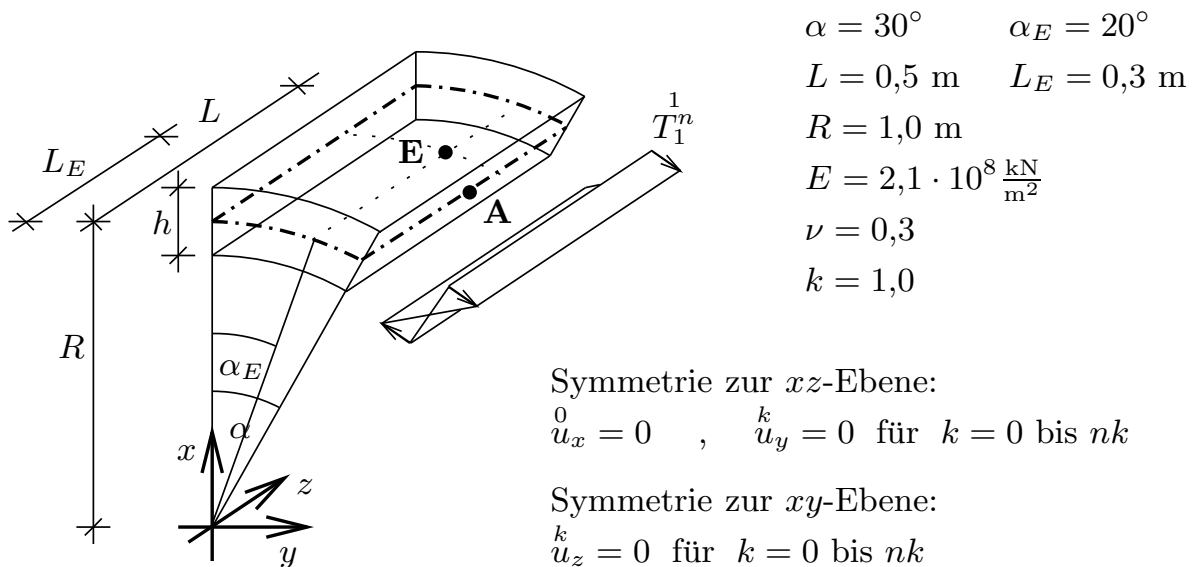
Fraglich ist nun, ob die Existenz der konstanten bzw. linearen Normaldehnung in Dickenrichtung ausreicht, um bei einer numerischen Untersuchung der einzelnen Modelle die jeweiligen Belastungsfälle abzubilden. Der maßgebende Fall des Biegespannungszustandes aus Randlasten könnte dann schon von dem Modell 2 bzw. Modell (2,2,3) abgebildet werden (siehe Abschnitt 4.8, Tabelle 4.1). Hierfür sollen nun der Biegespannungszustand aus Rand- und Flächenlasten untersucht werden. Auf die Untersuchung der Membranspannungszustände wird verzichtet, da ein Modell, das einen linearen Spannungsverlauf über die Dicke darstellen kann, auch einen konstanten Verlauf abbilden kann.

In diesem Abschnitt werden zwei Beispiele als Benchmark für das POISSON-THICKNESS-Locking ausgewählt. Beide bestehen aus einem unendlich langen Zylindersegment, aus dem ein Teilabschnitt mit entsprechenden Symmetrierandbedingungen berechnet wird. Das erste Beispiel ist mit einer symmetrischen Randbiegung belastet und das zweite mit einer symmetrischen Flächenlast. Durch die Symmetrierandbedingungen an drei Rändern des Berechnungsgebietes entstehen keine Layereffekte, so dass für beide Beispiele das Berechnungsgebiet mit nur einem Element der  $p$ -Version diskretisiert werden kann. Nachteilig ist jedoch, dass diese Beispiele keine doppelt gekrümmte Geometrie haben. Für die untersuchte Zylindergeometrie ergibt sich eine Hauptkrümmung zu null, wodurch Vereinfachungen in den Gleichungen des hierarchischen Schalenelementes entstehen. Daher sind die numerischen Ergebnisse nicht direkt mit den analytischen aus Abschnitt 4 zu vergleichen.

## 6.1.1 Biegespannungszustand aus Randlasten

### 6.1.1.1 Unendlich langes Zylindersegment mit Randbiegung

Für das in diesem Beispiel gewählte unendlich lange Zylindersegment liegt ein ebener Verzerrungszustand in  $z$ -Richtung vor, der mit den entsprechenden Randbedingungen an den Elementrändern parallel zur  $xy$ -Ebene erfasst wird. Aus Symmetriegründen zur  $xz$ -Ebene kann die Hälfte eines Teilabschnittes diskretisiert werden. Das Netz besteht aus einem Element in der Mittelfläche der Schale. Untersucht wird die Verschiebung der Mittelfläche in  $x$ -Richtung für den Punkt **A**, der in der Mitte der belasteten Kante liegt, und die Spannungsverteilung in Dickenrichtung für den Punkt **E** der Schalenmittelfläche. Auftretende Layerbereiche sind für die Auswertung dieser Ergebnisse zu vernachlässigen.



**Abb. 6.1:** Unendlich langes Zylindersegment mit Randbiegung

Der Schubkorrekturfaktor  $k$  wird für alle Modelle zu 1,0 gesetzt, da das reine Verhalten der Modelle betrachtet werden soll. Dieses Beispiel ist als Benchmark in [40] mit einem Radius-Dickenverhältnis von 100 und einer Belastung von  $6,0 \cdot 10^4$  vorgeschlagen.

$\frac{R}{h}$ [-]	5	25	100	5000
h [m]	0,2	0,04	0,01	0,0002
$T_1^n$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ ]	$1,2 \cdot 10^6$	$2,4 \cdot 10^5$	$6,0 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^3$

**Tab. 6.1:** Belastungen und Dicken der verglichenen Systeme

Die wirkenden Randbiegespannungen werden in Abhängigkeit von der Dicke der Schale so gewählt, dass die Lösung der Verschiebungen konstant bleibt. Die gewählten Belastungen und Dicken sind in Tabelle 6.1 aufgeführt. Für dünne Schalen konvergiert die Lösung des dreidimensionalen Problems gegen die KIRCHHOFF-LOVE Theo-

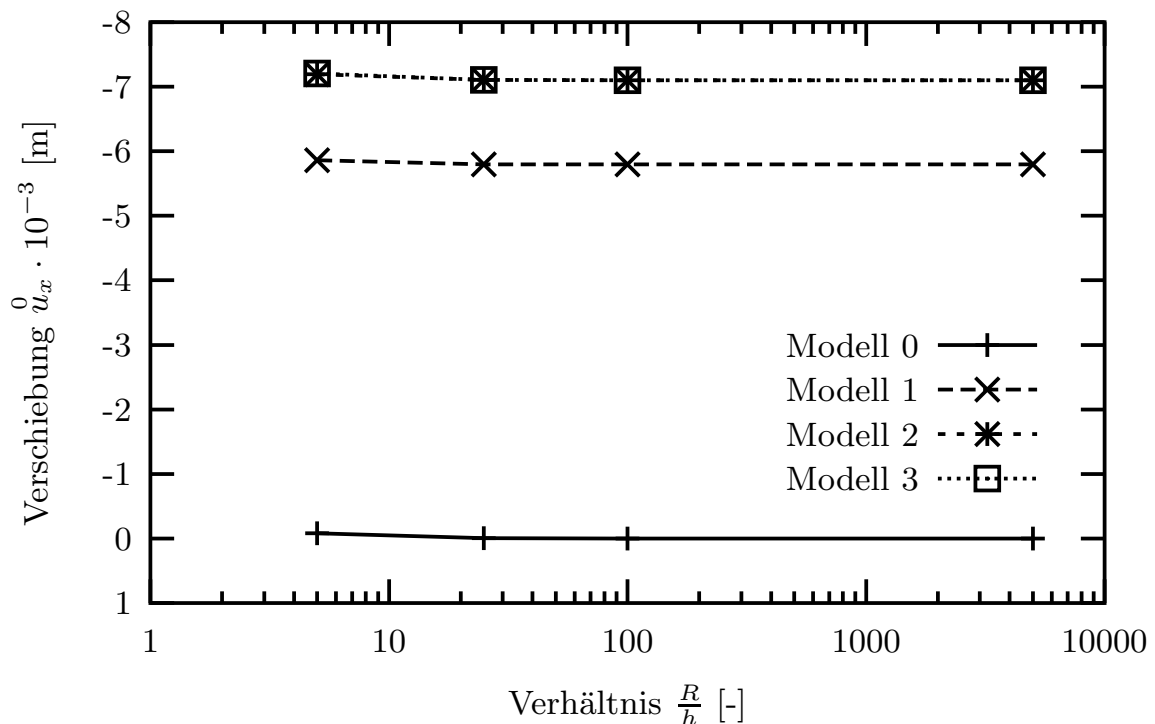
rie. Folglich müssen alle Modelle, die das POISSON-THICKNESS-Locking nicht enthalten, für immer dünner werdende Schalen gegen diese Lösung konvergieren. Um die Konvergenz des hierarchischen Schalenelementes zu untersuchen, werden folgende Belastungen und Dicken verwendet.

### 6.1.1.2 Konvergenzbetrachtung der Verschiebungen

Die vier Systeme, die sich mit Abbildung 6.1 und den Werten in Tabelle 6.1 ergeben, werden mit einem Element und einem Polynomgrad von  $p = 6$  des reduzierten Ansatzraumes für die vollständigen Modelle 0 bis 3 untersucht. Auf die numerische Untersuchung der reduzierten Modelle wird verzichtet, da sich aus der theoretischen Diskussion in Abschnitt 4.8 ergab, dass die Reduktion keine Einsparung von Freiheitsgraden und somit auch keine Einsparung an Rechenzeit ergibt.

Für eine Konvergenzstudie wird die Verschiebung des Punktes **A** in  $x$ -Richtung betrachtet. Wie aus Abbildung 6.2 gut ersichtlich ist, zeigen die Modelle 0 und 1 eine Versteifung auf. Modell 0 zeigt ein unendlich steifes Verhalten, da die Durchbiegung für jedes untersuchte System verschwinden. Modell 1 hingegen berechnet für dicke und dünne Schalen eine zu kleine Verschiebung. Eine Ausschnittvergrößerung von Abbildung 6.2 ist in Abbildung 6.3 gezeigt. Hieraus ist ersichtlich, dass die Modelle 2 und 3 für immer dünner werdende Schalen zur gleichen Lösung konvergieren.

Mit Modell 6 und einem Polynomgrad von  $p = 10$  des reduzierten Ansatzraumes wird für jedes der vier Systeme in Tabelle 6.1 eine Referenzlösung der Verschiebung im Punkt **A** berechnet. Hiermit lässt sich der relative Fehler der Verschiebung ermitteln,



**Abb. 6.2:** Verschiebungskonvergenz der Modelle im Punkt **A**



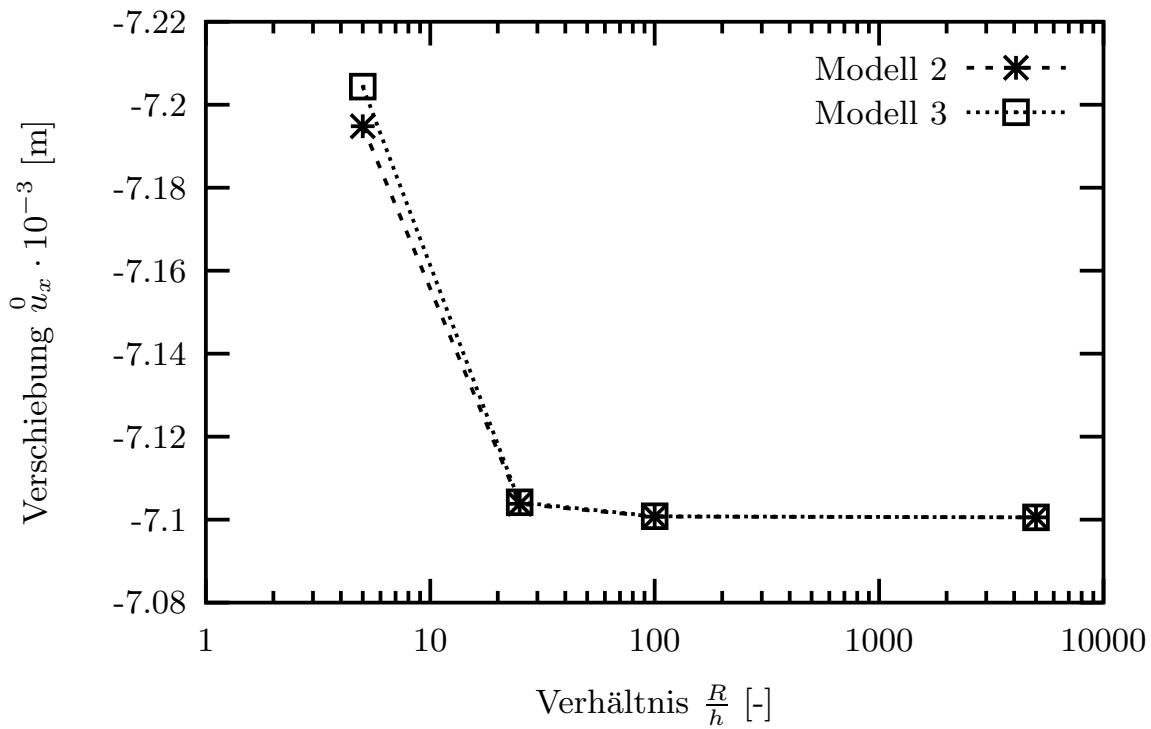


Abb. 6.3: Ausschnitt aus Abbildung 6.2

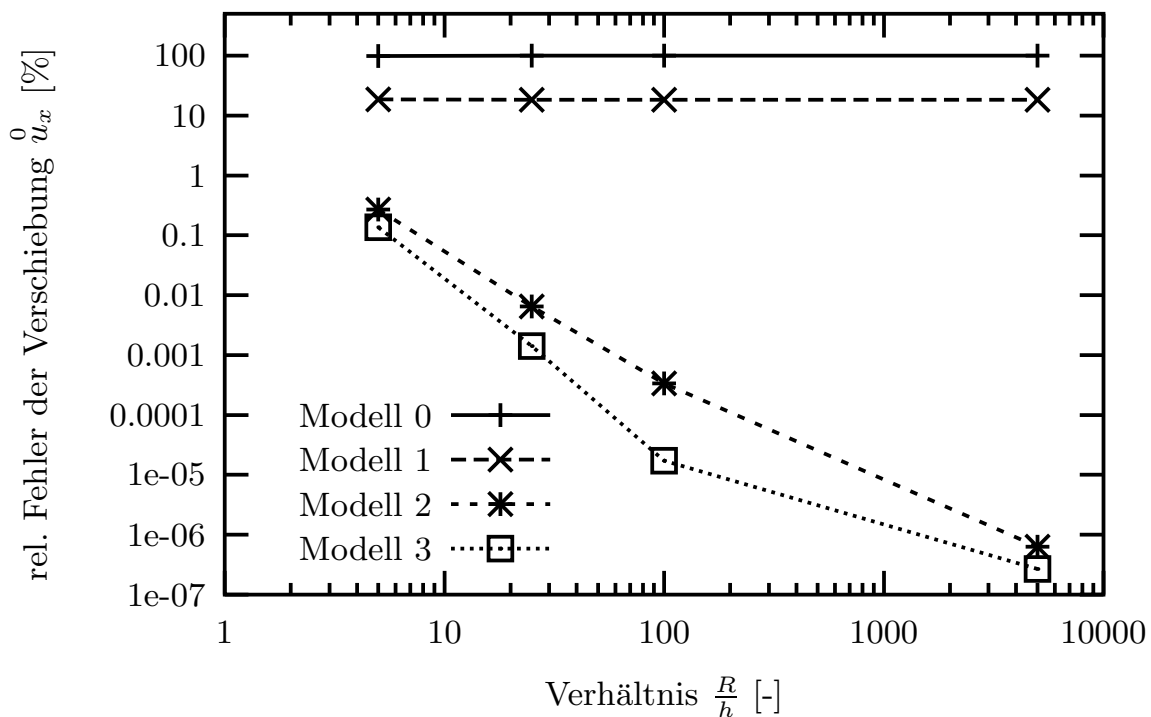


Abb. 6.4: Konvergenz des rel. Fehlers der Verschiebung im Punkt A

der in Abbildung 6.4 doppeltlogarithmisch aufgetragen ist. Modell 0 ergibt einen konstanten Fehler von 100% und Modell 1 von ca. 20%. Das Modell 2 weist schon für die dickste Schale mit einem Radius-Dicken-Verhältnis von 5 : 1 einen relativen Fehler in der Verschiebung von nur 0,27% auf. Modell 3 erzielt einen Fehler von 0,14% für das gleiche System. Der Fehler in der Verschiebung zeigt eine algebraische Konvergenz für dünner werdende Schalen. Grund dafür ist, dass bei dünnen Schalen die Kinematik über die Dicke mit niedrigeren Modellen immer besser angenähert werden kann, da die exakte dreidimensionale Lösung sich immer mehr der KIRCHHOFF-LOVE Theorie annähert.

### 6.1.1.3 Konvergenzbetrachtung der Spannungen über die Dicke

Für die Konvergenzbetrachtung der Spannungsverläufe im Punkt **E** über die Dicke der Schale werden die Systeme mit den Radius-Dicken-Verhältnissen von 5 : 1 und 5000 : 1 untersucht. Hier soll gezeigt werden, dass der Spannungsverlauf in Dickenrichtung  $\Theta^3$  für dünne und dicke Schalen gut abgebildet werden kann. Die Spannungen sind in Zylinderkoordinaten gegeben, wobei  $\varphi$  die Umfangsrichtung,  $z$  die Richtung der Rotationsachse und  $r$  die Dickenrichtung der Schale beschreibt. Die Ergebnisse der Spannungen in Abbildung 6.5 und 6.6 sind mit der Dicke  $h$  der Schale normiert, um vergleichbare Werte für die beiden ausgewählten Systeme zu erhalten.

Die Ergebnisse in Abbildung 6.5 und 6.6 zeigen, dass der Spannungsverlauf  $S_{\varphi\varphi}$  über die Dicke für dünne und dicke Schalen ab dem Modell 1 gut abgebildet werden kann. Für  $R/h = 5$  ergibt sich ein leicht quadratischer Verlauf über die Dicke, der für  $R/h = 5000$  linear verläuft.

In dem unendlich langen Zylindersegment liegt ein ebener Verzerrungszustand in  $z$ -Richtung vor, wodurch sich die Spannung  $S_{zz}$  in Richtung der Rotationsachse zu  $\nu \cdot S_{\varphi\varphi}$  ergeben muss. Ab dem Modell 2 wird diese Bedingung für beide Radius-Dicken-Verhältnisse gut approximiert.

Die Spannung  $S_{rr}$  muss sich an der Ober- und Unterseite der Schale bei  $\Theta^3 = \pm \frac{h}{2}$  zu null ergeben, da in diesem Beispiel keine Flächenbelastung vorhanden ist. Diese Bedingung wird ab dem Modell 2 hinreichend erfüllt.

Durch den ebenen Verzerrungszustand in  $z$ -Richtung ergeben sich die Verzerrungen  $\varepsilon_{zr}$  und  $\varepsilon_{\varphi z}$  zu null, wodurch sich die Spannungen  $S_{zr}$  und  $S_{\varphi z}$  für ein linear-elastisches Materialverhalten zu null berechnen. Alle Modelle können diese Bedingung für dünne und dicke Schalen erfüllen, da die gewählten Randbedingungen einen ebenen Verzerrungszustand bewirken.

Die Schubspannung  $S_{\varphi r}$  muss sich an der Ober- und Unterseite der Schale bei  $\Theta^3 = \pm \frac{h}{2}$  zu null berechnen, da die Schale keine Flächenschubbelastungen erfährt. Diese Bedingung kann bei beiden Radius-Dicken-Verhältnissen erst für das Modell 3 erfüllt werden. Sollen bei diesem Beispiel alle Spannungsverläufe über die Dicke der Schale die gegebenen Spannungsrandbedingungen erfüllen, so ist der Spannungsverlauf  $S_{\varphi r}$  für die Modellwahl maßgebend.

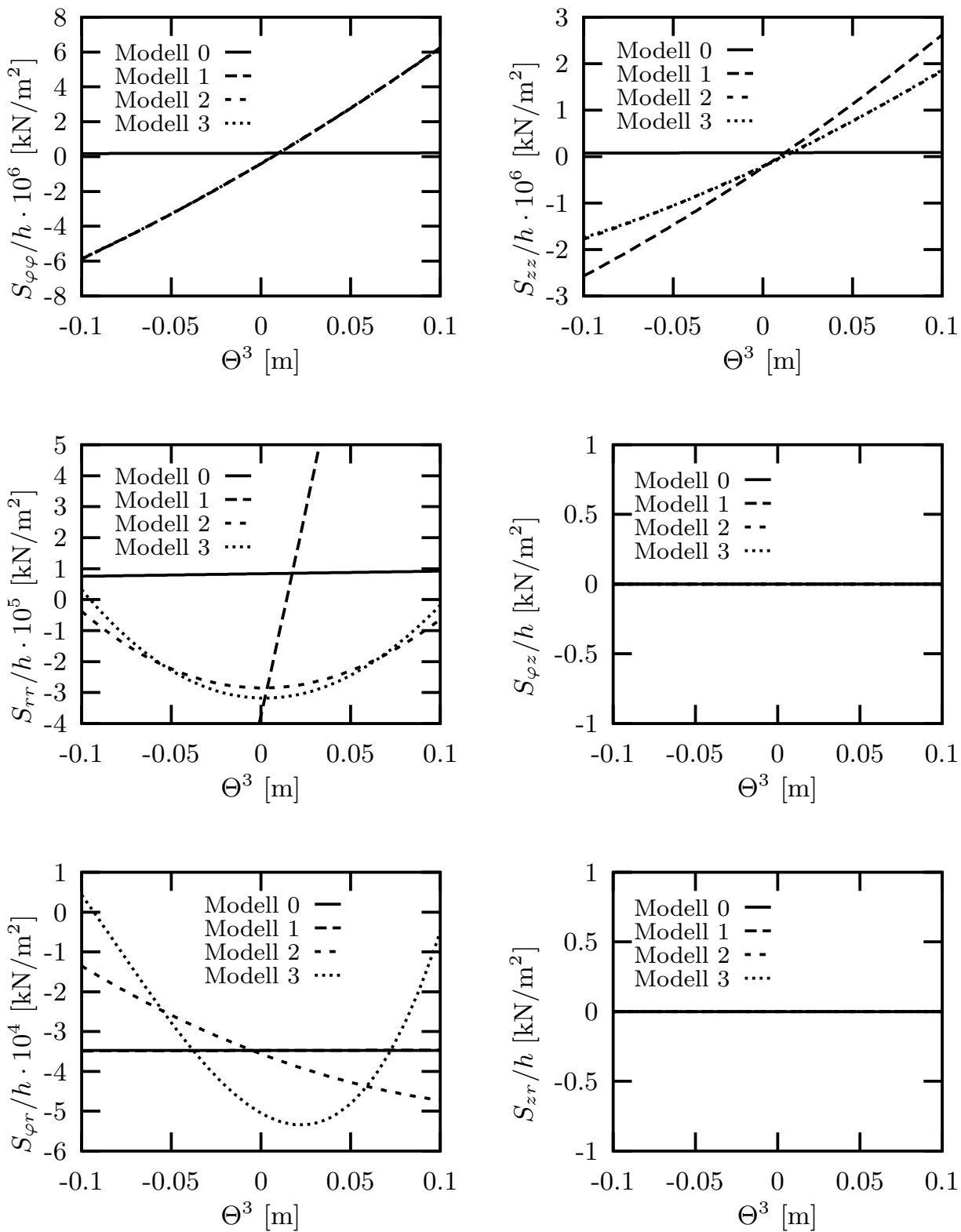


Abb. 6.5: Spannungsverläufe für  $R/h = 5$  im Punkt E

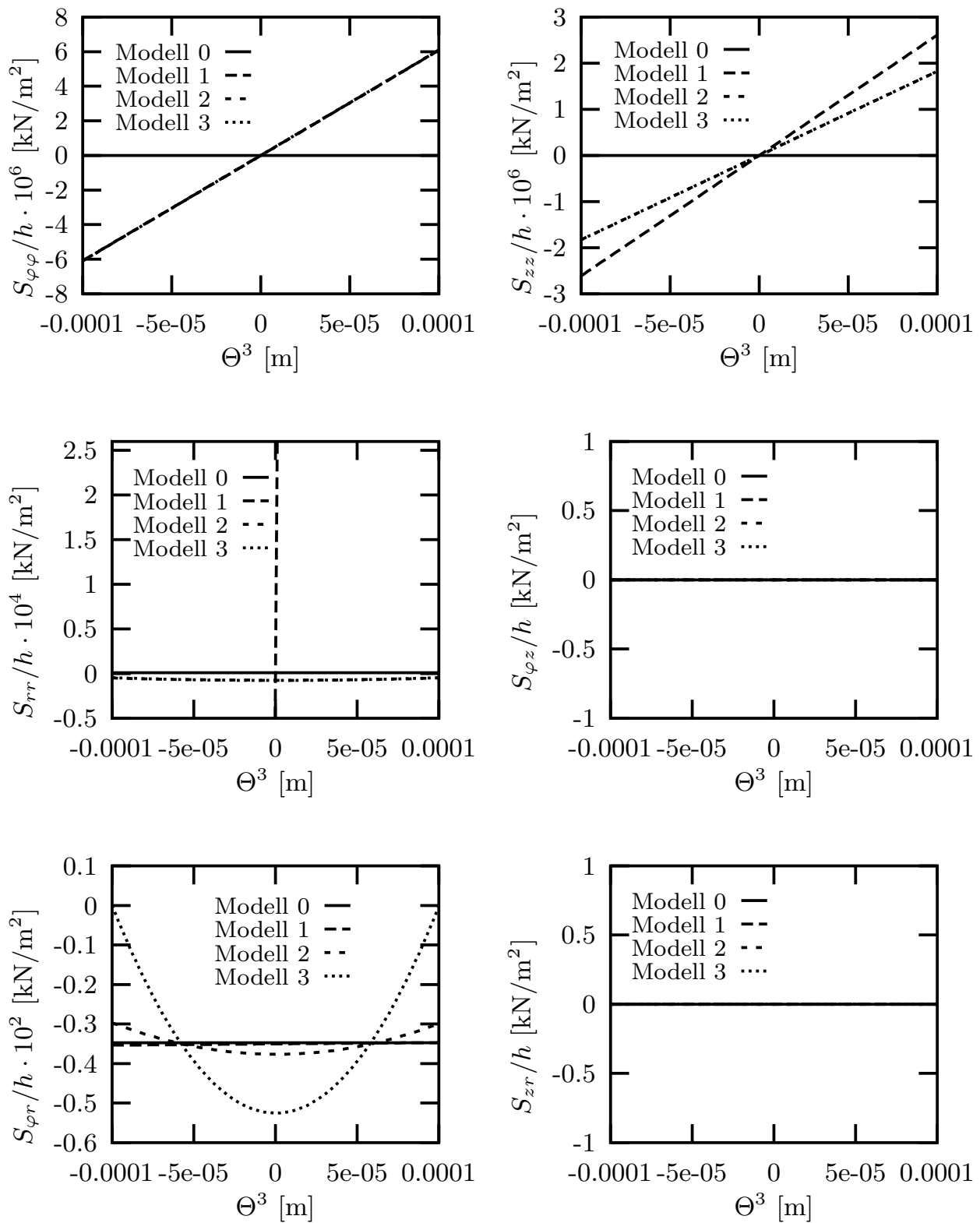
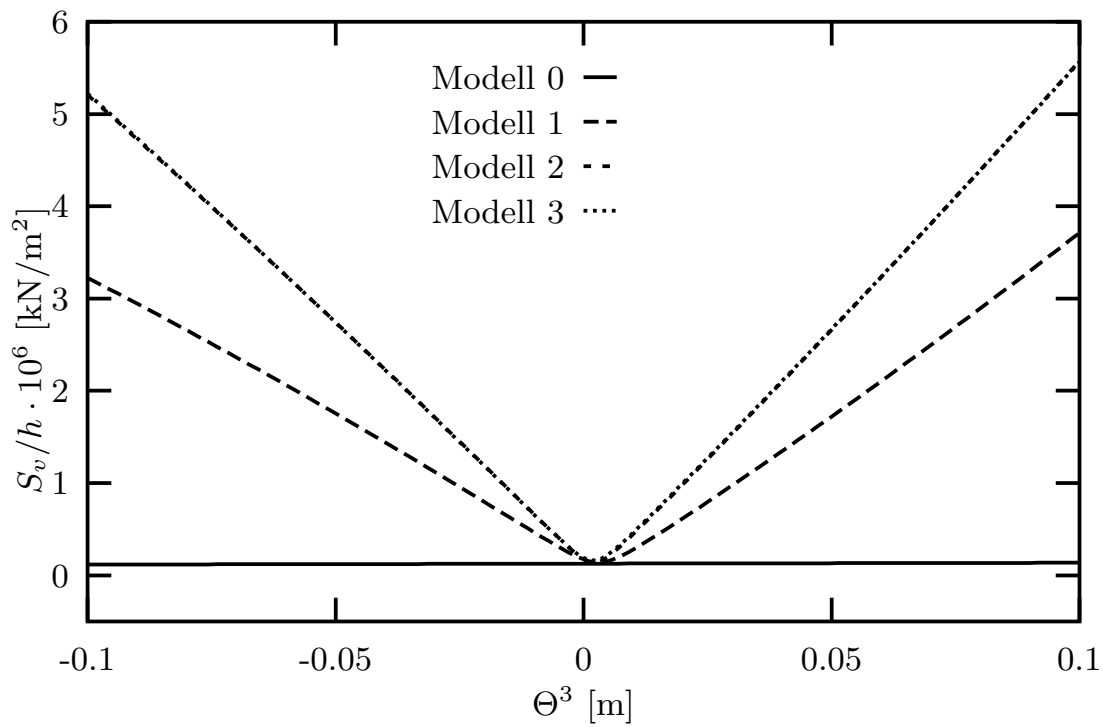
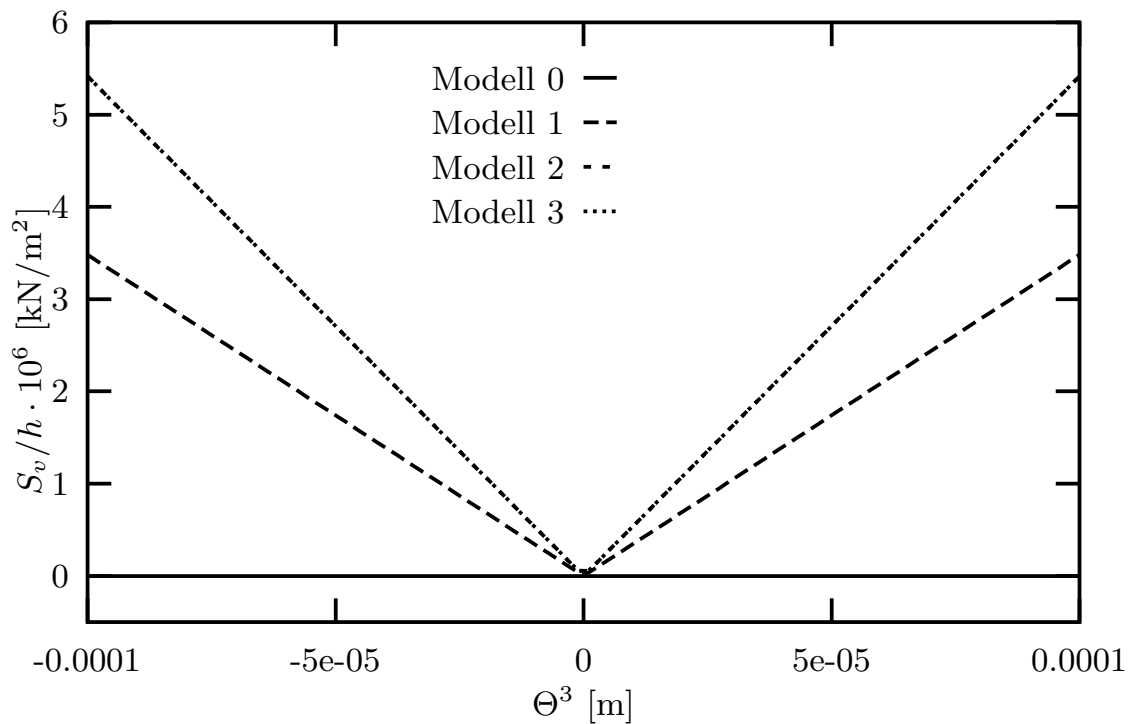


Abb. 6.6: Spannungsverläufe für  $R/h = 5000$  im Punkt **E**



**Abb. 6.7:** VON MISES Vergleichsspannung für  $R/h = 5$  im Punkt **E**

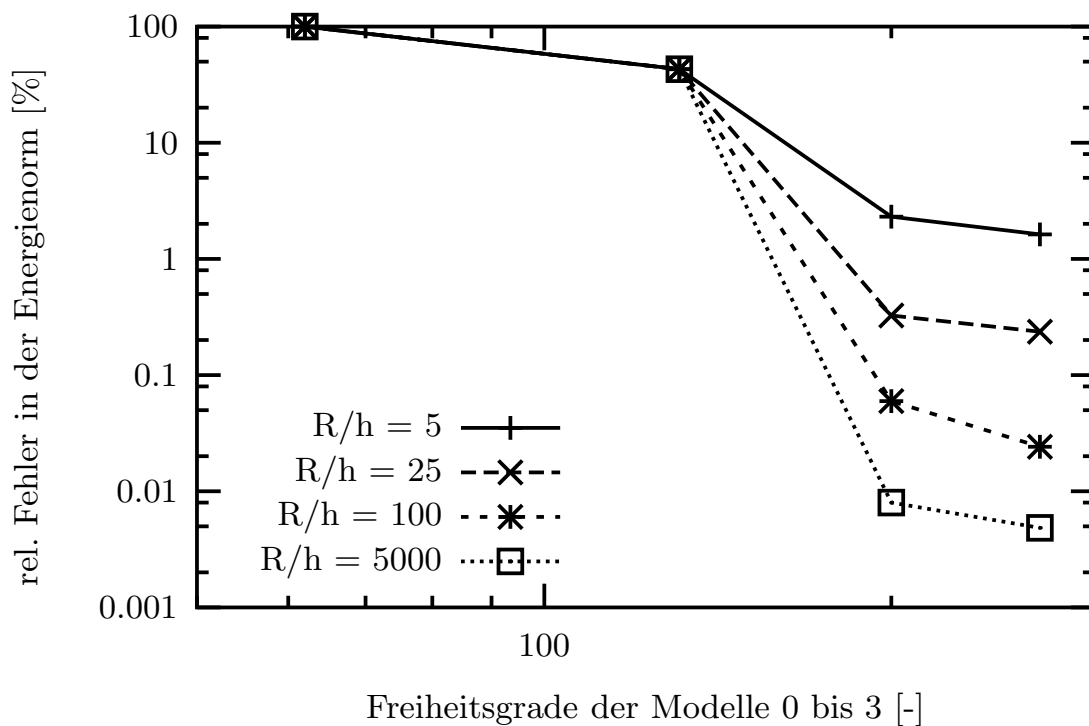


**Abb. 6.8:** VON MISES Vergleichsspannung für  $R/h = 5000$  im Punkt **E**

Meist ist bei einer Berechnung jedoch nur die gute Abbildung der VON MISES Vergleichsspannung  $S_v$  erforderlich, wie es bei einem nichtlinearen Materialverhalten benötigt wird. Aus einem Vergleich des Maximalwertes der Schubspannung  $S_{\varphi r}$  mit denen der Normalspannungen  $S_{\varphi\varphi}$  und  $S_{zz}$  ergibt sich, dass bei dicken Schalen dieser um zwei Größenordnungen und bei dünnen Schalen um vier Größenordnungen kleiner ist. Daher wird die Genauigkeit des Spannungsverlaufes  $S_{\varphi r}$  nur einen sehr geringen Einfluss auf die VON MISES Vergleichsspannung haben. Ausschlaggebend für den Verlauf der Vergleichsspannung über die Dicke ist die Approximation der Spannungen  $S_{\varphi\varphi}$  und  $S_{zz}$ . Aus Abbildung 6.7 und 6.8 wird deutlich, dass ab dem Modell 2 die VON MISES Vergleichsspannung für dünne und dicke Schalen gut abgebildet werden kann. Modell 1 zeigt auch in den Vergleichsspannungen zu kleine Ergebnisse, was auf das noch vorhandene POISSON-THICKNESS-Locking zurückzuführen ist.

#### 6.1.1.4 Konvergenz des relativen Fehlers in der Energienorm

Für jedes der vier Systeme wird mit dem Modell 6 und einem Polynomgrad von  $p = 10$  eine Referenzlösung der Dehnungsenergie berechnet. Mit den Ergebnissen in Tabelle 6.2 lässt sich der relative Fehler in der Energienorm ermitteln, der in Abbildung 6.9 doppeltlogarithmisch aufgetragen ist.



**Abb. 6.9:** Konvergenz des relativen Fehlers in der Energienorm

$\frac{R}{h}$ [-]	$E(\Omega)$ [kNm]
5	$5.977029622 \cdot 10^1$
25	$4.765302198 \cdot 10^{-1}$
100	$7.445148842 \cdot 10^{-3}$
5000	$5.956088834 \cdot 10^{-8}$

**Tab. 6.2:** Dehnungsenergie für Modell 6 mit  $p = 10$

Für das Radius-Dicken-Verhältnis von 5 : 1 ergibt sich mit dem Modell 2 und 3 noch ein relativer Fehler in der Energienorm von etwa 2%. Bei dünneren Schalen liegt der relative Fehler in der Energienorm für das Modell 2 und höher unter 1%. Ab dem Modell 2 verschlechtert sich die Konvergenz des Fehlers bei allen Schalendicken, da auftretende Layerbereiche an den Rändern des Elementes nicht mehr hinreichend genau abgebildet werden können. Für eine weitere Verbesserung muss das Netz an diesen Stellen verfeinert werden.

#### 6.1.1.5 Ergebnis des langen Zylindersegmentes unter Randbiegung

Aus der Konvergenzbetrachtung der Verschiebung in  $x$ -Richtung im Punkt **A** ergibt sich, dass ab dem Modell 2 für Zylinderschalen unter Randbiegung das POISSON-THICKNESS-Locking überwunden ist. Diese Modelle können die Systemantwort der gegebenen Belastung gut abbilden. Um eine gute Approximation der Vergleichsspannung über die Dicke zu erhalten, ist dieses Modell ebenfalls ausreichend. Sollen für dicke und dünne Schalen alle Spannungsverläufe über die Dicke die gegebenen Spannungsrandbedingungen des Systems einhalten, so muss mindestens das Modell 3 gewählt werden. Unabhängig vom untersuchten Radius-Dicken-Verhältnis wird mit Modell 2 ein relativer Fehler in der Energienorm von unter 3% erzielt.

Da Zylinderschalen nur eine einfach gekrümmte Geometrie haben ist dieses Ergebnis nicht zu verallgemeinern. Daher ist anzunehmen, dass bei doppelt gekrümmten Geometrien die minimale Modellnummer höher liegen kann.

Die Existenz der linearen Normalverzerrungen in Dickenrichtung, die in Abschnitt 4.8 in Tabelle 4.1 aufgeführt ist, ist also ausreichend, um das POISSON-THICKNESS-Locking zu überwinden.

### 6.1.2 Biegespannungszustand aus Flächenlasten

#### 6.1.2.1 Unendlich langes Zylindersegment mit horizontaler Flächenlast

In diesem Abschnitt wird ein unendlich langes Zylindersegment mit konstanter horizontaler Flächenbelastung in  $y$ -Richtung auf der Oberseite der Schale untersucht. Das System und die Belastung sind symmetrisch zur  $xz$ -Ebene und es liegt ein ebener Verzerrungszustand in  $z$ -Richtung vor, wodurch sich ein analoges Teilsystem zu dem in Abschnitt 6.1.1 verwendeten ergibt, das in Abbildung 6.10 dargestellt ist. Auch hier wird nur ein Element berechnet und Layerbereiche werden vernachlässigt, da

sie keine Auswirkungen auf die Verschiebungen im Punkt **A** und die Spannungen im Punkt **E** haben.

Die horizontale Flächenlast wird an der Oberseite der Schale in das System eingeleitet, dort wo sie als reale Belastung der Schale auftritt. Bei vielen gängigen Schalenelementen werden die Flächenlasten auf die Mittelfläche der Schale aufgebracht, sodass kein realitätsnaher Spannungsverlauf über die Dicke erzielt werden kann. Die Flächenlast in Tabelle 6.3 wurde in Abhängigkeit zur Dicke der Schale so gewählt, dass die Verschiebung im Punkt **A** für immer dünner werdende Schalen zur gleichen Lösung konvergiert. Auch in diesem Beispiel müssen alle Modelle, die das POISSON-THICKNESS-Locking überwinden, zur Lösung der KIRCHHOFF-LOVE Theorie konvergieren.

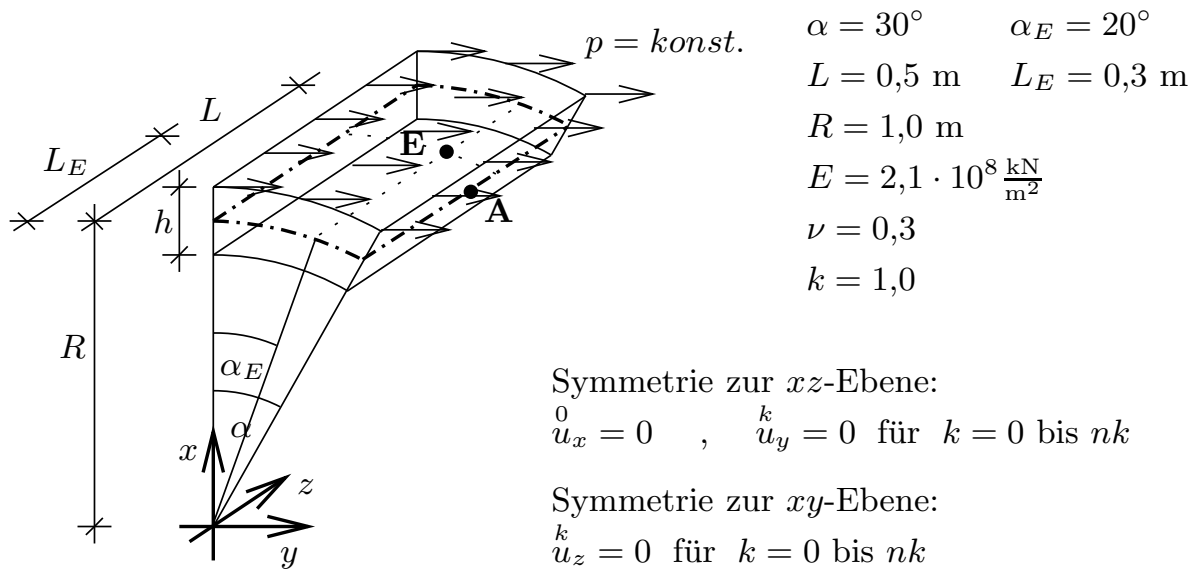


Abb. 6.10: Unendlich langes Zylindersegment mit horizontaler Flächenlast

$\frac{R}{h}$ [-]	5	25	100	5000
h [m]	0,2	0,04	0,01	0,0002
p [ $\frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ ]	$8,0 \cdot 10^5$	$6,4 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^2$	$8,0 \cdot 10^{-4}$

Tab. 6.3: Belastungen und Dicken der verglichenen Systeme

### 6.1.2.2 Konvergenzbetrachtung der Verschiebungen

Für die Konvergenzbetrachtung der Verschiebungen werden die vier Systeme in Tabelle 6.3 mit einem Element, einem Polynomgrad von  $p = 6$  des reduzierten Ansatzraumes und den vollständigen Modellen 0 bis 3 berechnet.

In Abbildung 6.11 ist die Verschiebung in  $x$ -Richtung im Punkt **A** zur Schlankheit  $R/h$  der Systeme für die verschiedenen Modelle aufgetragen. Modell 0 zeigt auch in diesem Beispiel ein unendlich steifes Verhalten, da die Verschiebung für jede Schlankheit verschwindet. Modell 1 konvergiert zu einer zu kleinen Lösung, wodurch



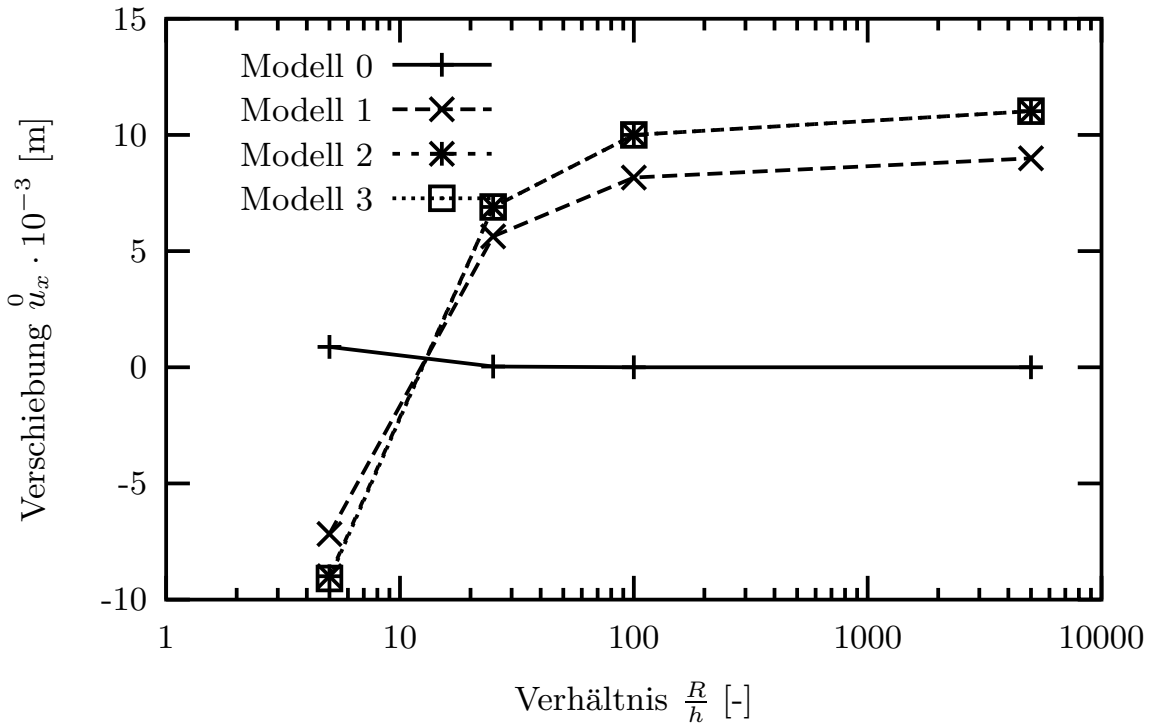


Abb. 6.11: Verschiebungskonvergenz der Modelle im Punkt A

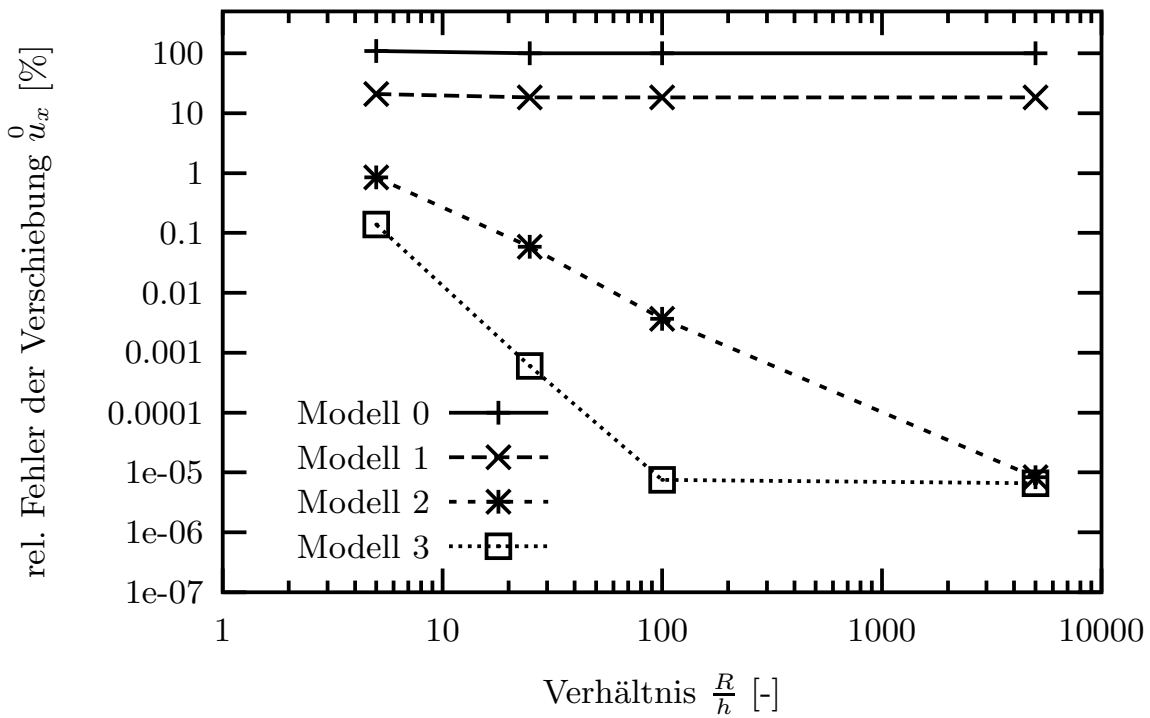


Abb. 6.12: Konvergenz des rel. Fehlers der Verschiebung im Punkt A

das POISSON-THICKNESS-Locking ersichtlich wird. Ab dem Modell 2 ist dieser Versteifungseffekt auch für dieses Beispiel in den Verschiebungen überwunden.

Bei zunehmender Schlankheit des Systems tritt ein Vorzeichenwechsel in der Lösung der Verschiebung auf, wodurch deutlich wird, dass in diesem Beispiel dicke Schalen ein anderes Lastabtragsverhalten im Vergleich zu dünnen Schalen aufweisen. Das im vorherigen Abschnitt 6.1.1 untersuchte Beispiel zeigt in Abbildung 6.2, dass bei einem konstanten Randmoment das Lastabtragsverhalten dünner und dicker Schalen gleich ist, da die Verschiebung nahezu gleich für jedes System ist.

Um den relativen Fehler in der Verschiebung im Punkt **A** zu bestimmen, ist eine Referenzlösung für jedes System mit dem Modell 6 und einem Polynomgrad von  $p = 10$  berechnet worden. Der relative Fehler in den Verschiebungen ist in Abbildung 6.12 doppeltlogarithmisch zum Radius-Dicken-Verhältnis aufgetragen. Modell 0 ergibt einen konstanten Fehler von 100% und Modell 1 noch einen Fehler über 20%. Ab dem Modell 2 liegt der Fehler in der Verschiebung für die dickste Schale unter 1% und sinkt mit dünner werdenden Schalen algebraisch. Modell 3 erzielt noch etwas bessere Ergebnisse für die ersten 3 Schlankheiten. Auch hier wird deutlich, dass für immer dünner werdende Schalen die Kinematik der KIRCHHOFF-LOVE Theorie angenähert wird, wodurch die Ergebnisse der Modelle bei schlankeren Schalen immer besser werden.

### 6.1.2.3 Konvergenzbetrachtung der Spannungen über die Dicke

Die in den folgenden Abbildungen dargestellten Spannungsverläufe sind in Zylinderkoordinaten definiert, wobei  $\varphi$  die Umfangsrichtung,  $z$  die Richtung der Rotationsachse und  $r$  die Dickenrichtung beschreibt. Die mit der Dicke  $h$  der Schale normierten Spannungsverläufe sind für das Radius-Dicken-Verhältnis 5 : 1 und 5000 : 1 über  $\Theta^3$  im Mittelflächenpunkt **E** in den Abbildungen 6.13 und 6.14 dargestellt.

Die Normalspannung  $S_{\varphi\varphi}$  in Umfangsrichtung erzielt für dünne und dicke Schalen ab dem Modell 1 gute Ergebnisse. Der Vorzeichenwechsel des Biegeanteils der Normalspannung ergibt sich aus dem unterschiedlichen Systemverhalten dicker und dünner Schalen in diesem Beispiel, das bei den Verschiebungen näher erläutert wurde.

Durch den gegebenen ebenen Verzerrungszustand in  $z$ -Richtung muss sich die Normalspannung  $S_{zz} = \nu \cdot S_{\varphi\varphi}$  einstellen. Dies ist ab dem Modell 2 gewährleistet.

Aus der gegebenen Flächenbelastung berechnen sich die Randwerte der Normalspannung in Dickenrichtung zu  $S_{rr}(\Theta^3 = -\frac{h}{2}) = 0$  und  $S_{rr}(\Theta^3 = +\frac{h}{2}) = p \cdot \sin 20^\circ$ . Für dicke Schalen wird diese Bedingung ab dem Modell 2 annähernd erfüllt. Für das Radius-Dicken-Verhältnis von 5000 : 1 kann diese Bedingung für keines der hier berechneten Modelle erfüllt werden.

Durch den gegebenen ebenen Verzerrungszustand in  $z$ -Richtung berechnen sich auch hier die Spannungen  $S_{zr}$  und  $S_{\varphi z}$  zu null. Alle Modelle können diese Bedingung für dünne und dicke Schalen erfüllen, da die gewählten Randbedingungen dieses Verhalten bewirken.

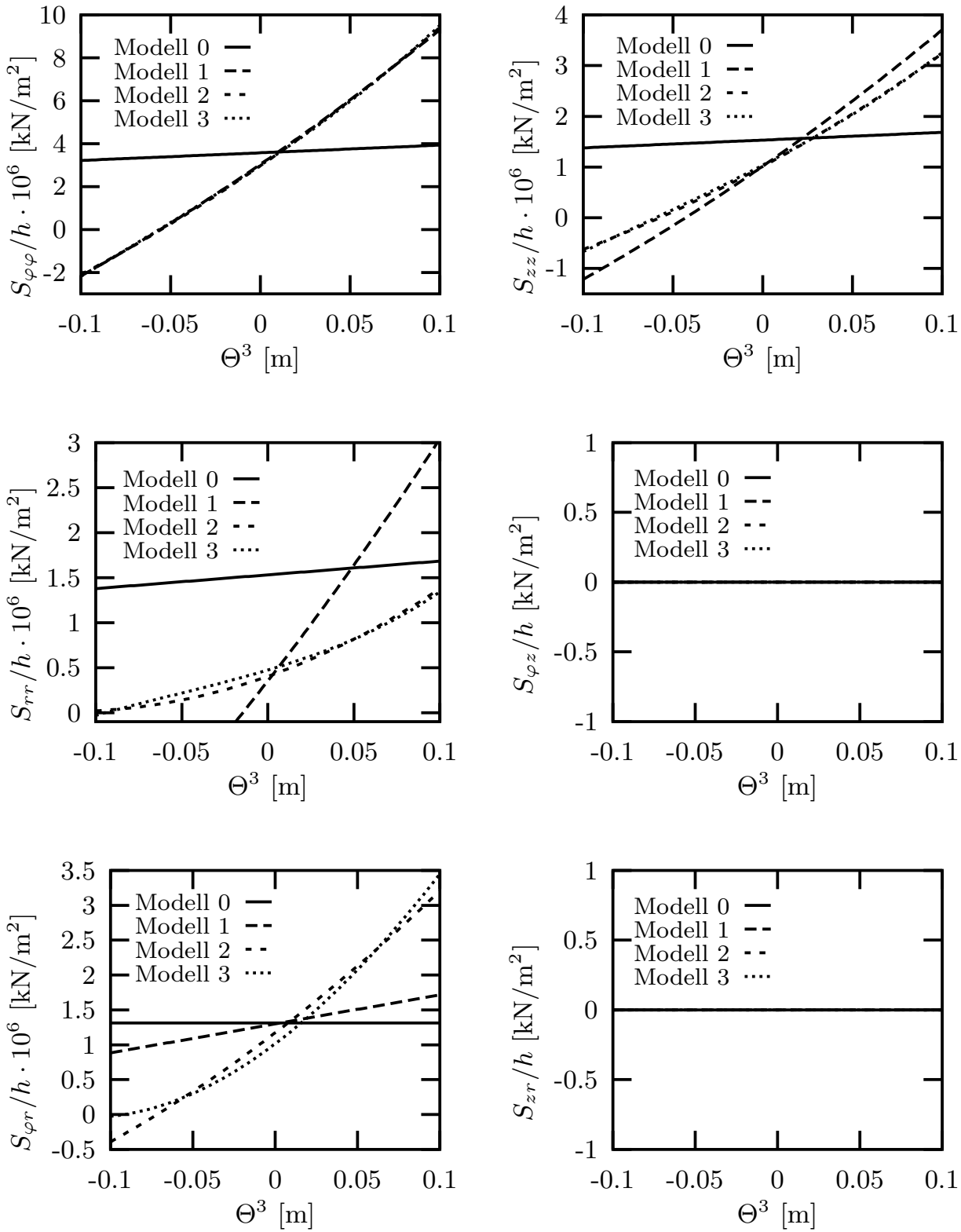


Abb. 6.13: Spannungsverläufe für  $R/h = 5$  im Punkt **E**

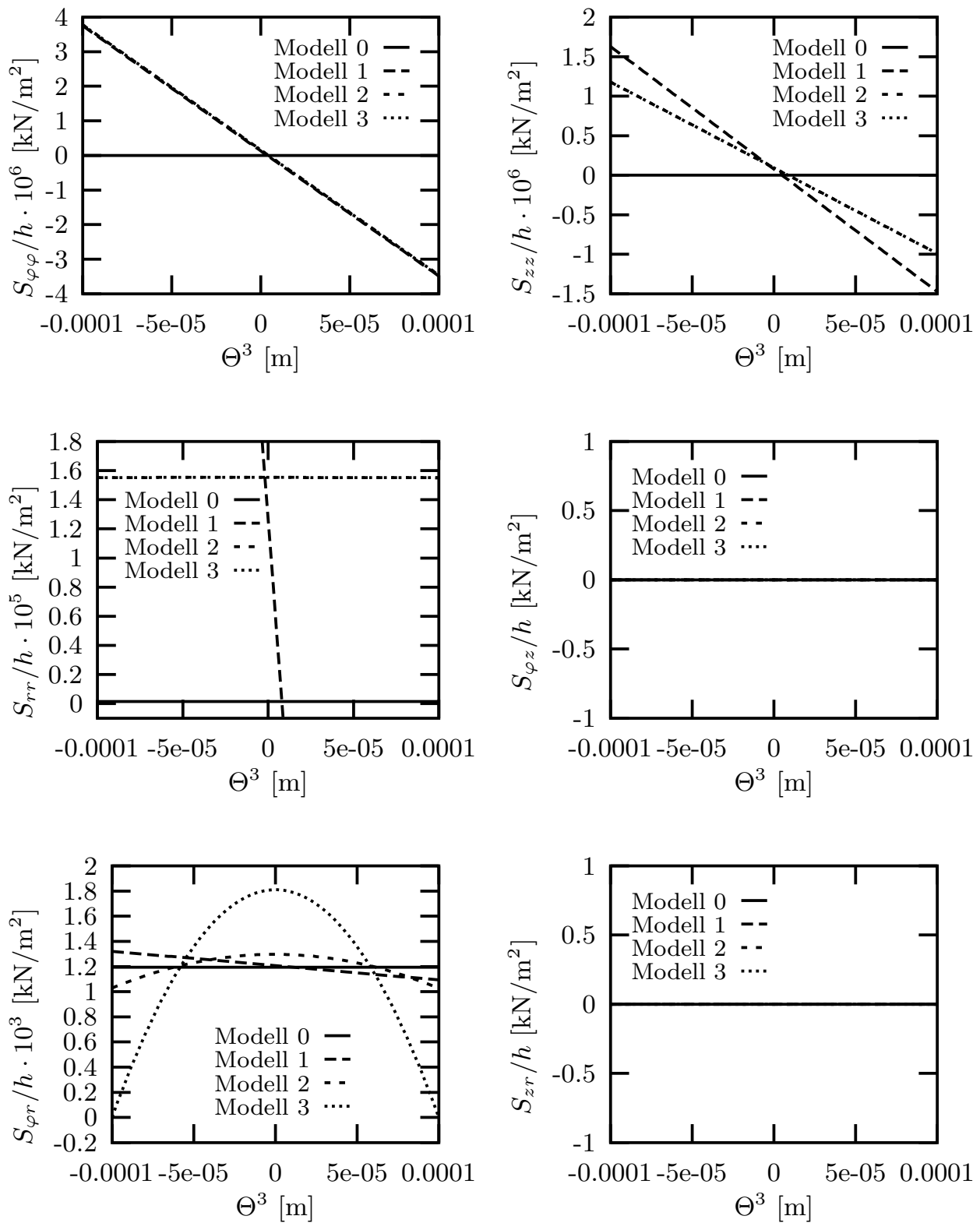


Abb. 6.14: Spannungsverläufe für  $R/h = 5000$  im Punkt E

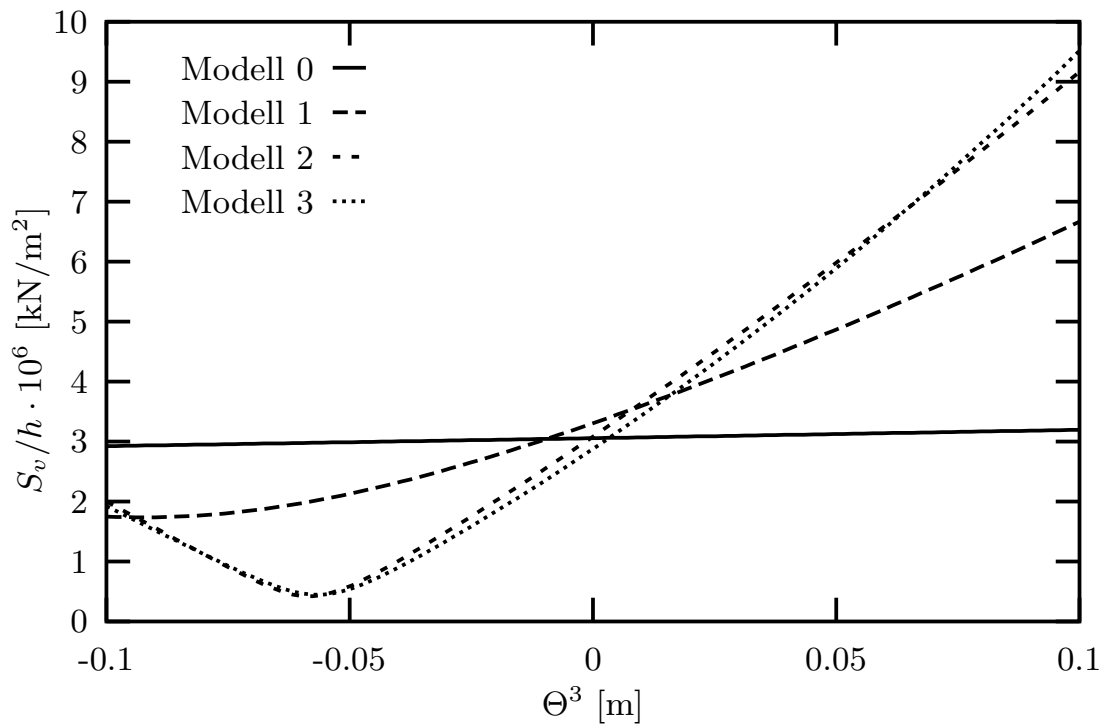


Abb. 6.15: Vergleichsspannung für  $R/h = 5$  im Punkt **E**

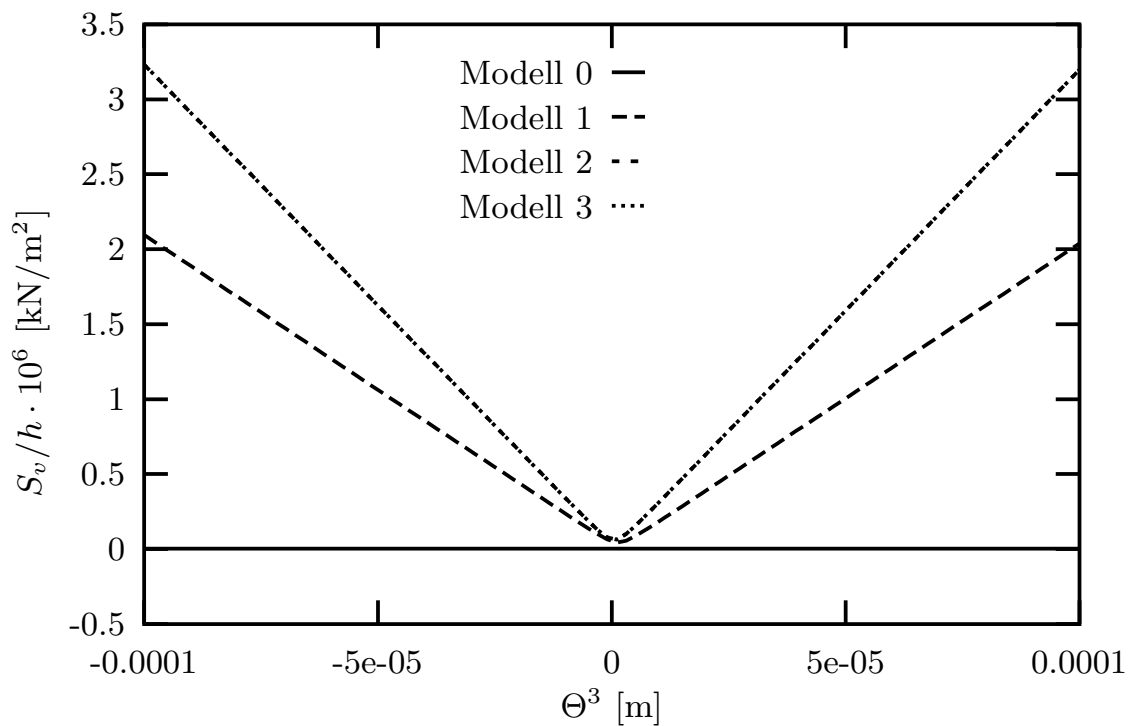


Abb. 6.16: Vergleichsspannung für  $R/h = 5000$  im Punkt **E**

Die Schubspannung  $S_{\varphi r}$  muss sich an der Unterseite der Schale bei  $\Theta^3 = -\frac{h}{2}$  zu null und an der Oberseite bei  $\Theta^3 = +\frac{h}{2}$  zu  $p \cdot \cos 20^\circ$  berechnen. Für ein Radius-Dicken-Verhältnis von 5 : 1 kann dies nur annähernd ab dem Modell 2 erfüllt werden und für  $R/h = 5000$  erst ab dem Modell 3.

Auch bei diesem Beispiel wird die VON MISES Vergleichsspannung untersucht, die für nichtlineare Berechnungen gut über die Dicke der Schale abgebildet werden muss. Aus Abbildung 6.15 und 6.16 ist abzulesen, dass für dicke und dünne Schalen der Verlauf der Vergleichsspannung  $S_v$  ab dem Modell 2 gut approximiert werden kann.

#### 6.1.2.4 Konvergenz des relativen Fehlers in der Energienorm

Die Referenzlösung der Dehnungsenergie ist für jedes der vier Systeme mit dem Modell 6 und einem Polynomgrad von  $p = 10$  ermittelt worden und in Tabelle 6.4 aufgelistet. Hieraus lässt sich der relative Fehler in der Energienorm ermitteln, der in Abbildung 6.17 doppeltlogarithmisch aufgetragen ist.

$\frac{R}{h}$ [-]	$E(\Omega)$ [kNm]
5	$3.008879266 \cdot 10^2$
25	$4.100495222 \cdot 10^{-1}$
100	$1.155928667 \cdot 10^{-2}$
5000	$1.115788607 \cdot 10^{-7}$

Tab. 6.4: Dehnungsenergie für Modell 6 mit  $p = 10$

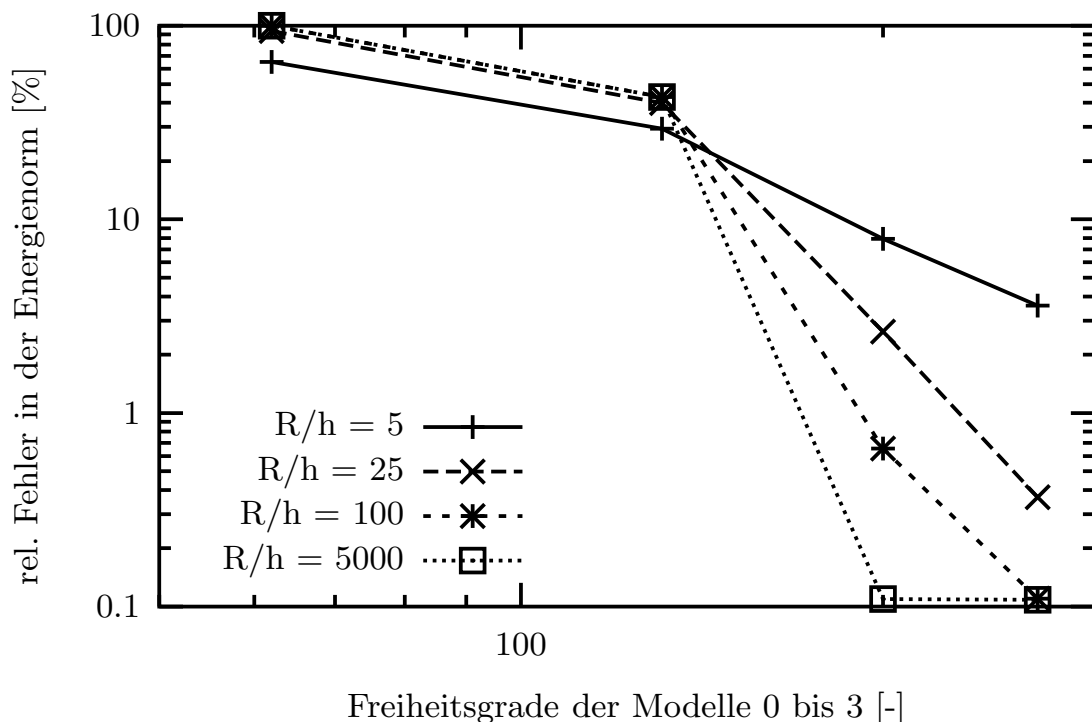


Abb. 6.17: Konvergenz des relativen Fehlers in der Energienorm

Für das Radius-Dicken-Verhältnis von 5 : 1 ergibt sich mit dem Modell 2 ein relativer Fehler in der Energienorm von 8% und mit Modell 3 von etwa 3,5%. Dieses Beispiel kann also für sehr dicke Schalen mit den hier ausgewerteten Modellen und einem Element noch nicht gut erfasst werden. Bei der nächst dünneren Schale berechnet sich der Fehler für Modell 2 zu 2,5% und für Modell 3 zu 0,35%. Ab einer Schlankheit von 100 : 1 kann ab dem Modell 2 in diesem Beispiel ein Fehler in der relativen Energienorm unter 1% erzielt werden.

#### 6.1.2.5 Ergebnis des langen Zylindersegmentes unter Flächenbiegung

Die Verschiebungen können für dieses Beispiel ab dem Modell 2 gut approximiert werden, da der relative Fehler in der Verschiebung in  $x$ -Richtung im Punkt **A** hier einen Fehler unter 1% aufweist. Ab diesem Modell ist somit das POISSON-THICKNESS-Locking überwunden. Die Vergleichsspannungen über die Dicke der Schale zeigen für dieses Modell ebenfalls eine gute Approximation. Falls alle Spannungsverläufe über die Dicke der Schale die gegebenen Spannungsrandbedingungen für dicke und dünne Strukturen erfüllen sollen, muss ein Modell größer 3 gewählt werden. Dieses Ergebnis zeigt auch die Untersuchung des relativen Fehlers in der Energienorm, der erst für sehr dünne Schalen ab dem Modell 2 unter 1% liegt.

## 6.2 Robustheit und Shear-Locking

Das SHEAR-Locking ist ein Versteifungseffekt, der bei biegedominierten Problemen auftritt, wenn bei dünner werdenden Strukturen das Ergebnis der Durchbiegungen zu klein approximiert wird. Die Lösung konvergiert nach SURI [91] nicht mehr gegen die KIRCHHOFF-Lösung, die für  $h = 0$  die exakte Lösung darstellt. Bei der KIRCHHOFF-Theorie sind die Schubdehnungen in Dickenrichtung der Platte null. Höhere Modelle berücksichtigen für die Schubdehnungen eine Funktion, die von den zu approximierenden Verschiebungen abhängt. Ist die Approximation des Verschiebungsfeldes zu gering, so kann sich die Funktion der Schubverzerrungen für eine Konvergenz der Dicke  $h \rightarrow 0$  nicht zu null einstellen. Das SHEAR-Locking ist also ein rein numerischer Effekt und sollte daher auch mit numerischen Lösungen behoben werden.

Die  $h$ -Version der Finite-Element Methode behebt das SHEAR-Locking durch die reduzierte Integration, auch selektive Integration genannt, oder die *Assumed-Natural-Strain*-Methode, die auf MACNEAL nach [57] zurückgeht und von DVORKIN und BATHÉ nach [33] bei Schalenelementen eingesetzt wurde. Bei der reduzierten Integration werden die in der Steifigkeitsmatrix störenden Polynomanteile durch eine numerische Unterintegration herauskondensiert. Die *Assumed-Natural-Strain*-Methode berechnet die Schubverzerrungen nicht an den Knoten, sondern an ausgesuchten Punkten, die ein korrektes Ergebnis liefern, und interpoliert diese Ergebnisse auf die Knoten. Die ANS-Methode und die selektive Integration stellen einen Eingriff in die theoretische Beschreibung des Elementes dar, da die Steifigkeitsmatrix verändert wird.

Bei der  $p$ -Version der Finite-Element Methode wird die theoretische Problembeschreibung nicht geändert. Da eine zu geringe Approximation des Verschiebungsfeldes das SHEAR-Locking verursacht hat, wird diese erhöht. Es hat sich gezeigt, dass bei einem REISSNER-MINDLIN-Plattenelement ab einem Polynomgrad von  $p = 4$  bis 5 kein Versteifungseffekt mehr vorhanden ist [68]. Für höhere Modelle hat ODEN gezeigt, dass sich das SHEAR-Locking in dem Grad der Auswirkung nicht verändert, das heißt, auch für höhere Modelle ist ein Polynomgrad von  $p = 4$  ausreichend [26]. Die Erhöhung des Modells hat ebenfalls keine positiven Auswirkungen auf das Locking gezeigt.

Ein weiterer Effekt ist bei stark verzerrten Elementen sichtbar. Sie können die Lösung des Problems nicht mehr gut approximieren und berechnen ein zu kleines Verschiebungsfeld. Die Robustheit der  $p$ -Version der Finite-Element Methode gegen verzerrte Elemente wurde für Scheiben von RANK in [74] und für Platten in [49] numerisch nachgewiesen.

### 6.2.1 Quadratische Platte mit Gleichflächenlast

Die Robustheit der  $p$ -Version gegen SHEAR-Locking und stark verzerrte Elemente soll in diesem Abschnitt für das hierarchische Schalenmodell numerisch nachgewiesen werden. Hierfür wird die quadratische Platte in Abbildung 6.18 unter Gleichflächenlast untersucht, die an ihren Rändern nur in der Plattenmittelfläche in  $z$ -Richtung gelagert ist. Für die Auswertung wird das Modell 3 mit dem Schubkorrekturfaktor  $k = 1,0$  gewählt, da sich für dieses Modell im vorherigen Abschnitt gute Spannungsverläufe über die Dicke bei biegedominierten Problemen aus Flächenlast ergeben haben.

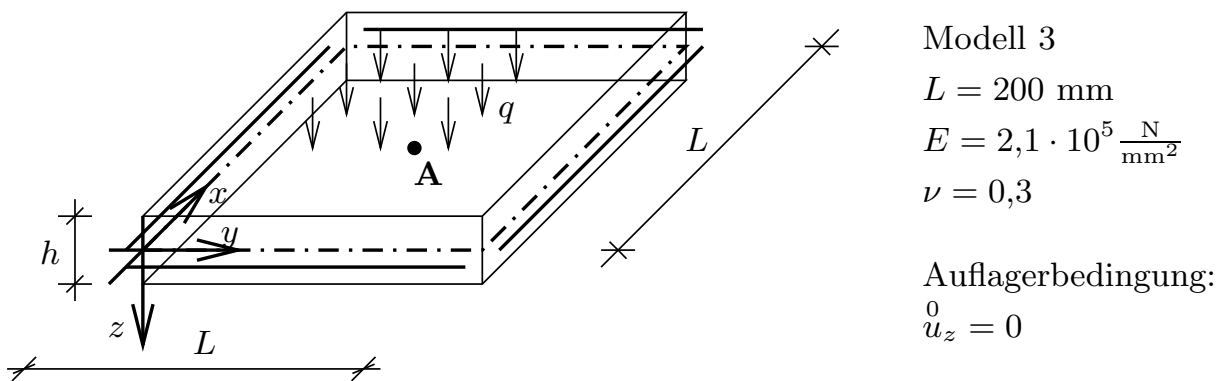


Abb. 6.18: Quadratische Platte mit Gleichflächenlast

Um das SHEAR-Locking zu untersuchen, werden vier verschiedenen Längen-Dicken-Verhältnisse  $L/h$  untersucht. Hier wurde die Gleichflächenlast  $q$  so gewählt, dass die Verschiebung des Mittelpunktes **A** der Plattenmittelfläche nach der KIRCHHOFF-Theorie für alle Systeme den gleichen Wert liefert. Die dafür verwendeten Belastungen  $q$  und Dicken  $h$  der Platte sind in Tabelle 6.5 aufgelistet.



$\frac{L}{h}$ [-]	5	25	100	5000
h [mm]	40	8	2	0,04
q [ $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ]	$1,0 \cdot 10^2$	$8,0 \cdot 10^{-1}$	$1,25 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-7}$

**Tab. 6.5:** Belastungen und Dicken der verglichenen Systeme

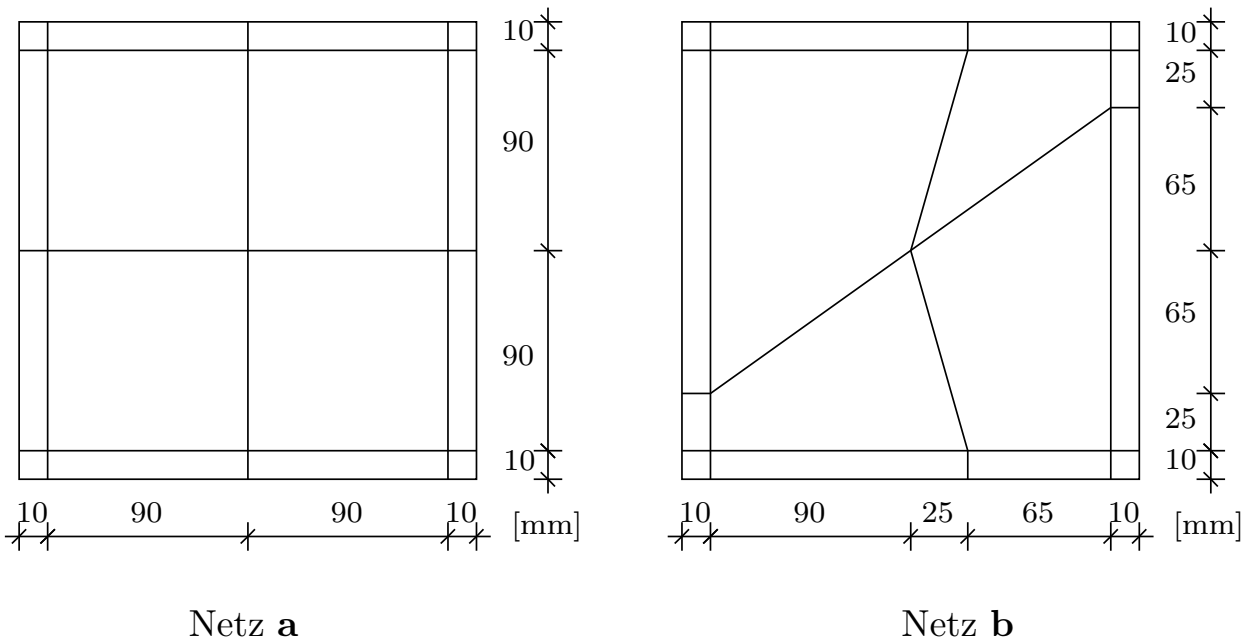
Die Lösung der Durchbiegung an einem beliebigen Punkt  $P(x, y)$  berechnet sich nach GIRKMANN [41] für die KIRCHHOFF-Theorie wie folgt:

$$w(x, y) = \frac{16 q}{B \pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right)}{m n \left( \left(\frac{m}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{L}\right)^2 \right)^2} \quad (6.2)$$

$$\text{mit } B = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad , \quad m, n = 1, 3, 5 \dots$$

Mit den Summationsgrenzen für  $m_{max}, n_{max} = 1801$  ergibt sich für das hier berechnete Beispiel im Mittelpunkt **A** der Plattenmittelfläche  $\overset{0}{u}_z = 0.528105845887759884$  mm.

Für die Untersuchung der Robustheit gegen verzerrte Elemente werden zwei Finite-Element Netze für die Berechnung ausgewählt, die in Abbildung 6.19 dargestellt sind. Netz **a** enthält nur rechtwinklige Elemente, die die besten Ergebnisse einer numerische Untersuchung liefern. Die Winkel, die von den Elementkanten in Netz **b** eingeschlossen werden, liegen zwischen  $27,63^\circ$  und  $152,36^\circ$ . Beide Netze enthalten an den Rändern des Berechnungsgebietes einen schmalen Elementlayer um Layerbereiche, die durch das Modell und die Lagerungsart auftreten, genauer aufzulösen. In diesem Bereich wird ein großer Teil der Gesamtdehnungsenergie gespeichert. Werden sie nicht durch Layerelemente aufgelöst, so kann dies zu Konvergenzschwierigkeiten in dem Fehler in der Energienorm führen. Für hierarchische Platten hat YOSIBASH in [101, 28] diese Bereiche aufgelöst.



**Abb. 6.19:** Finite-Element Netze

### 6.2.2 Konvergenzbetrachtung der Verschiebungen

Für die Konvergenzbetrachtung der maximalen Verschiebung der Plattenmittelfläche in  $z$ -Richtung im Punkt **A** werden die vier zuvor beschriebenen Systeme mit den Netzen **a** und **b** für den Polynomgrad  $p = 1$  bis 8 des reduzierten Ansatzraumes berechnet. Aus Abbildung 6.20 und 6.21 geht hervor, dass die Verschiebung im Punkt **A** für dicke Platten mit  $L/h = 5$  und moderat dicke Platten mit  $L/h = 25$  zu einer größeren Lösung konvergieren. Der Grund dafür ist, dass die KIRCHHOFF-Theorie vom senkrecht bleiben der Querschnitte ausgeht. Die Theorie ist schubstarr und liefert daher ein steiferes System, das zu kleineren Verschiebungen führt. Für dicke Platten kann diese Annahme nicht mehr getroffen werden, sodass sich ein weicherer System mit größeren Verschiebungen ergibt. Die Konvergenz der Systeme mit  $L/h = 5$  und  $L/h = 25$  zu einer größeren Durchbiegung des Mittelpunktes **A** ist daher richtig.

Bei der Verwendung von rechtwinkligen Elementen ist das SHEAR-Locking mit einem Polynomgrad von  $p = 4$  überwunden (siehe Abbildung 6.20). Ab diesem Polynomgrad ändert sich das Ergebnis der maximalen Verschiebung nur noch marginal. Abbildung 6.20 zeigt ebenfalls, dass bei sehr dünnen Platten das SHEAR-Locking stärker sichtbar wird. Hier wird die maximale Verschiebung im Punkt **A** für den Polynomgrad  $p = 1$  bis 3 zu null berechnet.

Wird das Netz **b** mit stark verzerrten Elementen für die numerische Auswertung verwendet, ergeben sich die in Abbildung 6.21 dargestellten Ergebnisse für die Verschiebung im Punkt **A**. Hier kann das SHEAR-Locking erst ab einem Polynomgrad von  $p = 5$  für alle Systeme überwunden werden. Es zeigt sich, dass die  $p$ -Version der Finite-Element Methode sehr robust gegen stark verzerrte Elemente ist. Aus einem Vergleich mit Abbildung 6.20 ergibt sich, dass für gleich gute Ergebnisse bei sehr stark verzerrten Netzen lediglich der Polynomgrad der Berechnung um eins höher gewählt werden muss.

### 6.2.3 Konvergenz des relativen Fehlers in der Energienorm

Für die Berechnung des relativen Fehlers in der Energienorm ist eine Referenzlösung für alle vier Systeme mit Netz **a**, einem Polynomgrad von  $p = 10$  und dem Modell 6 ermittelt worden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.6 aufgelistet.

$\frac{L}{h}$ [-]	$E(\Omega)$ [N mm]
5	$6.400940026 \cdot 10^5$
25	$3.704971398 \cdot 10^3$
100	$5.589018344 \cdot 10^1$
5000	$4.426657107 \cdot 10^{-4}$

**Tab. 6.6:** Dehnungsenergie für Modell 6 mit  $p = 10$

Die daraus berechneten relativen Fehler in der Energienorm sind für die Netze **a** und **b** in Abbildung 6.22 und 6.23 doppeltlogarithmisch aufgetragen. Der Verlauf ist

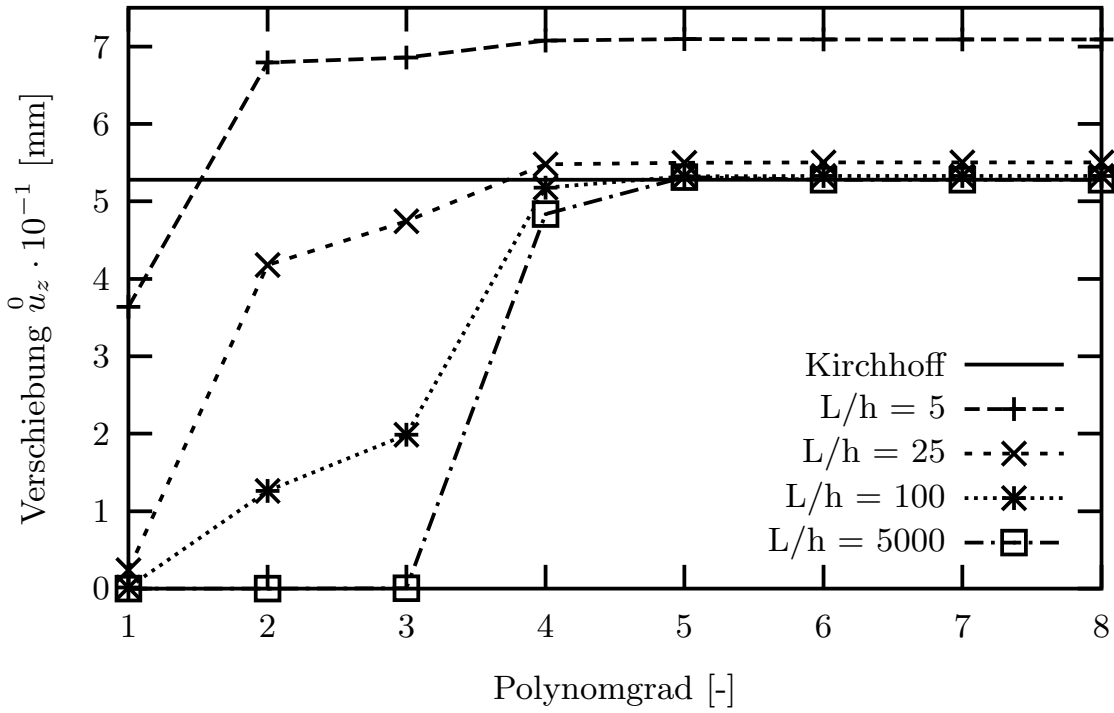


Abb. 6.20: Verschiebung des Punktes A, Netz a

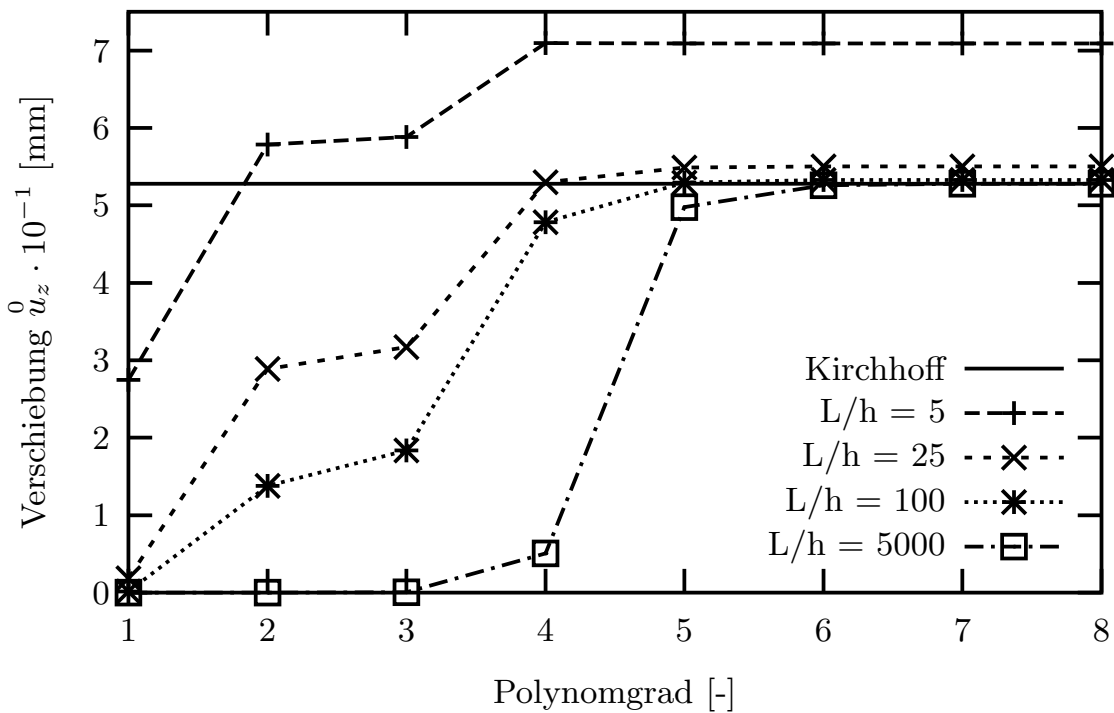


Abb. 6.21: Verschiebung des Punktes A, Netz b

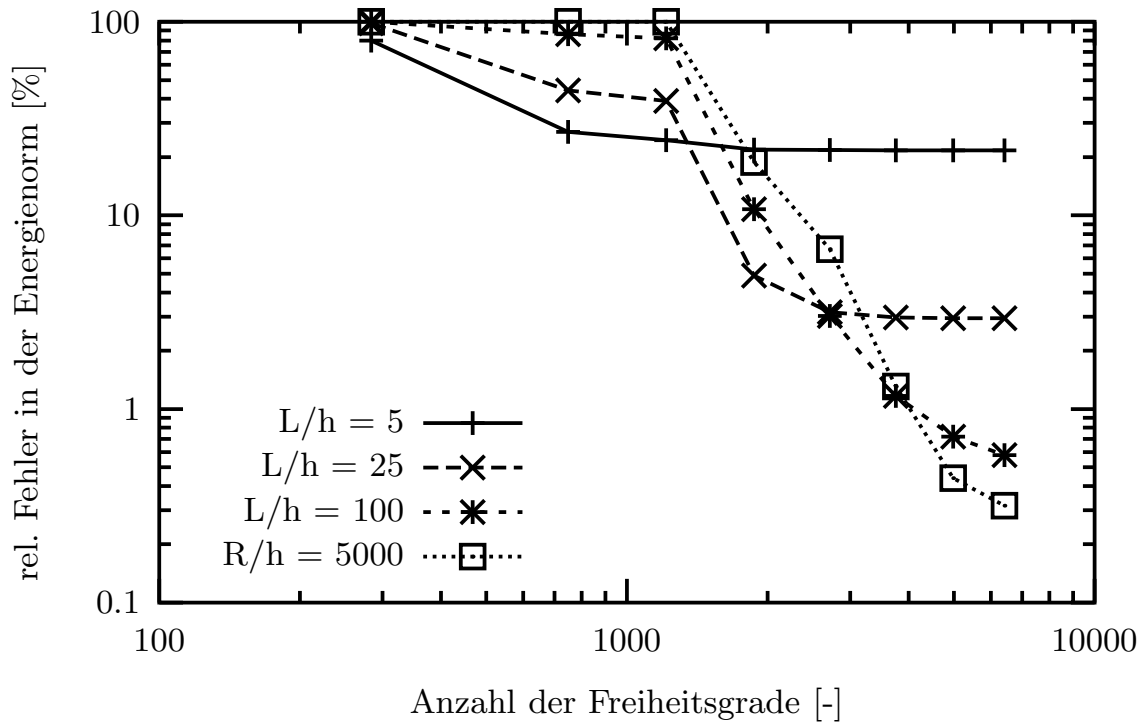


Abb. 6.22: Konvergenz des rel. Fehlers in der Energienorm, Netz a

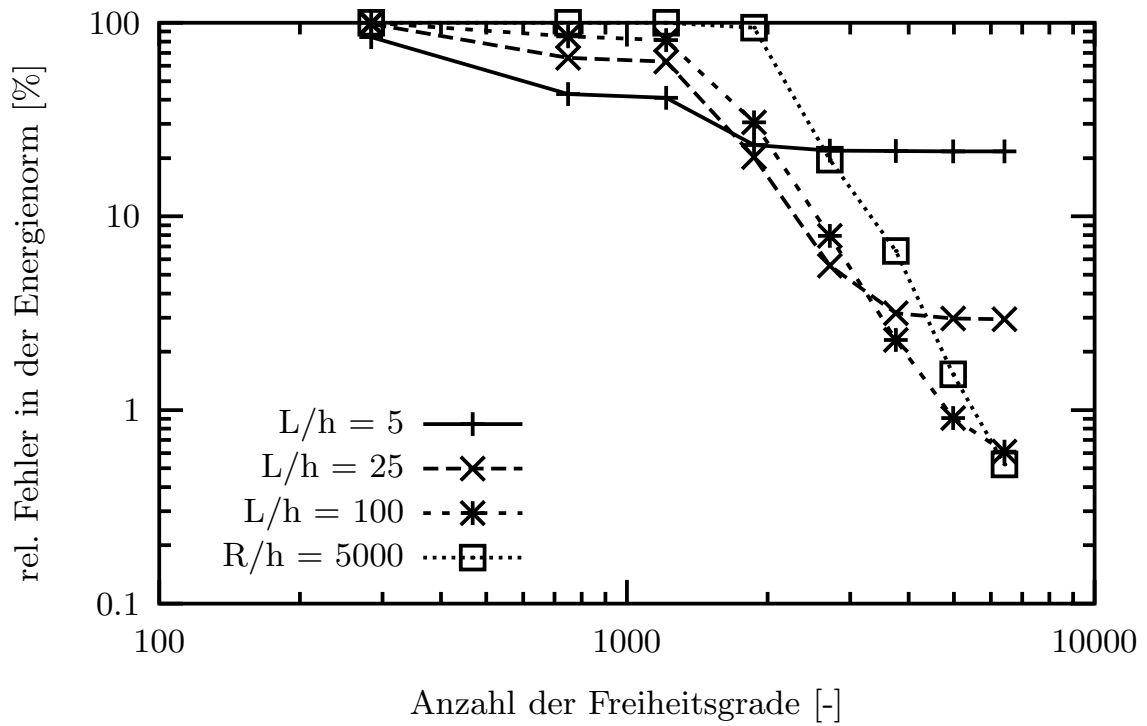


Abb. 6.23: Konvergenz des rel. Fehlers in der Energienorm, Netz b

abhängig vom Längen-Dicken-Verhältnis des Systems. Für das System mit  $L/h = 5$  kann für keines der beiden Netze der Fehler unter 22% bestimmt werden. Hier sind vorhandene Layerbereiche nicht gut genug aufgelöst worden. Des Weiteren zeigen die Systeme mit den Längen-Dicken-Verhältnissen  $L/h = 5$  und  $L/h = 25$  im unteren Bereich ihrer Kurven in Abbildung 6.22 und 6.23 eine fallende Konvergenz. Diese weist ebenfalls auf einen noch nicht sinnvoll oder vollständig aufgelösten Layereffekt an den gelagerten Rändern der Platte hin. Die Breite der Layerbereiche steigen mit zunehmender Dicke. Da für alle Systeme die gleichen Netze gewählt wurden und die Breite des Layers für das Längen-Dicken-Verhältnis  $L/h = 100$  optimal ist, ist eine fallende Konvergenz der beiden angesprochenen Systeme zu erwarten. Eine moderat dicke Platte mit  $L/h = 25$  kann mit Netz **a** und einem Polynomgrad von  $p = 4$  einen Fehler von 5% erzielen. Für die nächst dünnere Platte berechnet sich mit  $p = 5$  ein Fehler von 3%. Ein Fehler unter 5% kann für  $L/h = 5000$  erst mit  $p = 6$  für rechtwinklige Netze erzielt werden.

Die Konvergenz des relativen Fehlers in der Energienorm für das Netz **b** zeigt in Abbildung 6.23, dass vergleichbare Ergebnisse für ein stark verzerrtes Netz mit einem um eins höher gewählten Polynomgrad erzielt werden können.

#### 6.2.4 Ergebnis der quadratischen Platte unter Gleichflächenlast

Aus der Konvergenzbetrachtung der maximalen Verschiebung im Punkt **A** ergibt sich, dass das SHEAR-Locking für rechtwinklige Elemente mit einem Polynomgrad von  $p = 4$  und für stark verzerrte Netze mit einem Polynomgrad von  $p = 5$  überwunden werden kann. Dieses Ergebnis ist unabhängig vom Längen-Dicken-Verhältnis der Platte. Die  $p$ -Version der Finite-Element Methode kann das SHEAR-Locking ohne einen Eingriff in die Elementformulierung mit einem entsprechend hohen Polynomgrad beseitigen. Der numerische Defekt kann also mit einer genaueren Approximation des Verschiebungsfeldes beseitigt werden.

Soll der relative Fehler in der Energienorm unter 5% liegen, so ist dies für sehr dicke Platten mit diesem Modell und dem gewählten Finite-Element Netz noch nicht möglich. Für die Längen-Dickenverhältnisse  $L/h = 25, 100$  und  $5000$  kann diese Bedingung für das Modell 3 und einem Polynomgrad von  $p = 4, 5$  und  $6$  bei rechtwinkligen Netzen erfüllt werden. Stark verzerrte Netze erzielen dieses Ergebnis, indem der Polynomgrad um eins erhöht wird.

### 6.3 Membrane-Locking

Im folgenden Abschnitt soll das MEMBRANE-Locking untersucht werden. Dieser Versteifungseffekt wirkt sich bei membrandominierten Problemen sehr viel stärker auf die Struktur aus, als das SHEAR-Locking bei biegedominierten Problemen. Der Grund für das Versteifungsverhalten ist, dass die Normalverzerrungen der Mittelfläche mit den Schubverzerrungen gekoppelt sind [34]. Für eine zu niedrige Approximation des

Verschiebungsfeldes beeinflussen sich die Ergebnisse der Normal- und Schubverzerrungen zu stark, dass sich eine zu geringe Konvergenz zur dreidimensionalen Lösung einstellt. Das MEMBRANE-Locking ist also, genau wie das SHEAR-Locking, ein rein numerischer Effekt und sollte daher auch mit numerischen Lösungen behoben werden.

Die  $h$ -Version der Finite-Element Methode basiert auf einer linearen oder quadratischen Approximation des Verschiebungsfeldes. Das MEMBRANE-Locking kann nicht mit einer Reduktion der Methode, wie zum Beispiel durch die reduzierte Integration oder die ANS-Methode, die im vorherigen Abschnitt angesprochen wurden, beseitigt werden. Hier hat sich die *Enhanced-Assumed-Strain*-Methode von SIMO nach [85] bewährt, die den Ansatz der Verzerrungen der Schalenmittelfläche erweitert, sodass die Kopplung der Schub- und Normalverzerrungen geringer gegeben ist [2]. Sie wurde von BÜCHTER und RAMM in [24] auf Schalen geometrien angewendet.

Für die  $p$ -Version der Finite-Element Methode wird der Polynomgrad der Approximation gesteigert, wodurch die Beschreibung des Elementes unverändert bleibt und sich der Raum der approximierten Verschiebungen und somit auch der der Verzerrungen vergrößert. Die Schubverzerrungen haben dadurch die Möglichkeit bei einem membrandominierten Spannungszustand eine bessere Lösung zu erzielen, ohne dass die Normalverzerrungen zu klein approximiert werden. Von der Autorin wurde numerisch gezeigt, dass für ein NAGHDI-Schalenelement das MEMBRANE-Locking ab einem Polynomgrad von  $p = 5$  nicht mehr auftritt [69].

### 6.3.1 Die Scordelis & Lo Schale

Das Zylinderdach von SCORDELIS & LO [83] gilt als Benchmark für die Untersuchung des MEMBRANE-Lockings. Die Schale ist an den Endscheiben verschieblich in  $z$ -Richtung gelagert. Die Belastung aus Eigengewicht bewirkt Volumenlasten in negative  $x$ -Richtung, die mit dem vorliegenden hierarchischen Schalenmodell berücksichtigt werden können. Herkömmliche Schalenelemente vereinfachen die Volumenlast, indem eine Flächenlast auf der Oberseite oder der Mittelfläche der Schale berücksichtigt wird. Aus Symmetriegründen wird nur ein Viertel des Systems berechnet. Alle weiteren erforderlichen Angaben können Abbildung 6.24 entnommen werden.

Da die Zylinderschale durch ihre Geometrie und das gewählte Modell am freien Rand Layereffekte enthält, werden diese mit zwei Layerschichten, die eine Breite von  $\beta = 12^\circ$  und  $\gamma = 2^\circ$  haben, aufgelöst (siehe Abbildung 6.25). Die Breite der Layerelemente ist abhängig von der Dicke der Schale und dem Polynomgrad der Berechnung und wird für Schalen geometrien nach einer Empfehlung von SCHWAB in [81] ermittelt. Das gegebene Problem wird mit dem in Abbildung 6.25 dargestellten Netz und einem Polynomgrad von  $p = 1$  bis 8 ausgewertet.

Es hat sich gezeigt, dass eine höhere Modellwahl keine Verbesserung der Ergebnisse im Hinblick auf die Effizienz erzielt. Mit dem Radius-Dicken-Verhältnis von  $R/h = 100$  zählt die SCORDELIS & LO Schale zu den dünnen Schalen, bei denen niedrige Modelle ausreichen um den Spannungsverlauf über die Dicke abzubilden. Des

Weiteren ist dieses Beispiel ein membrandominiertes Problem, bei dem die Membranspannungen vorwiegend konstant über die Dicke verlaufen. Diese können von dem Modell 1, das sich für eine numerische Untersuchung als effektivstes erwiesen hat, abgebildet werden. Für eine bessere Approximation der Schubspannungen über die Dicke ist der Schubkorrekturfaktor zu  $k = 5/6$  gewählt.

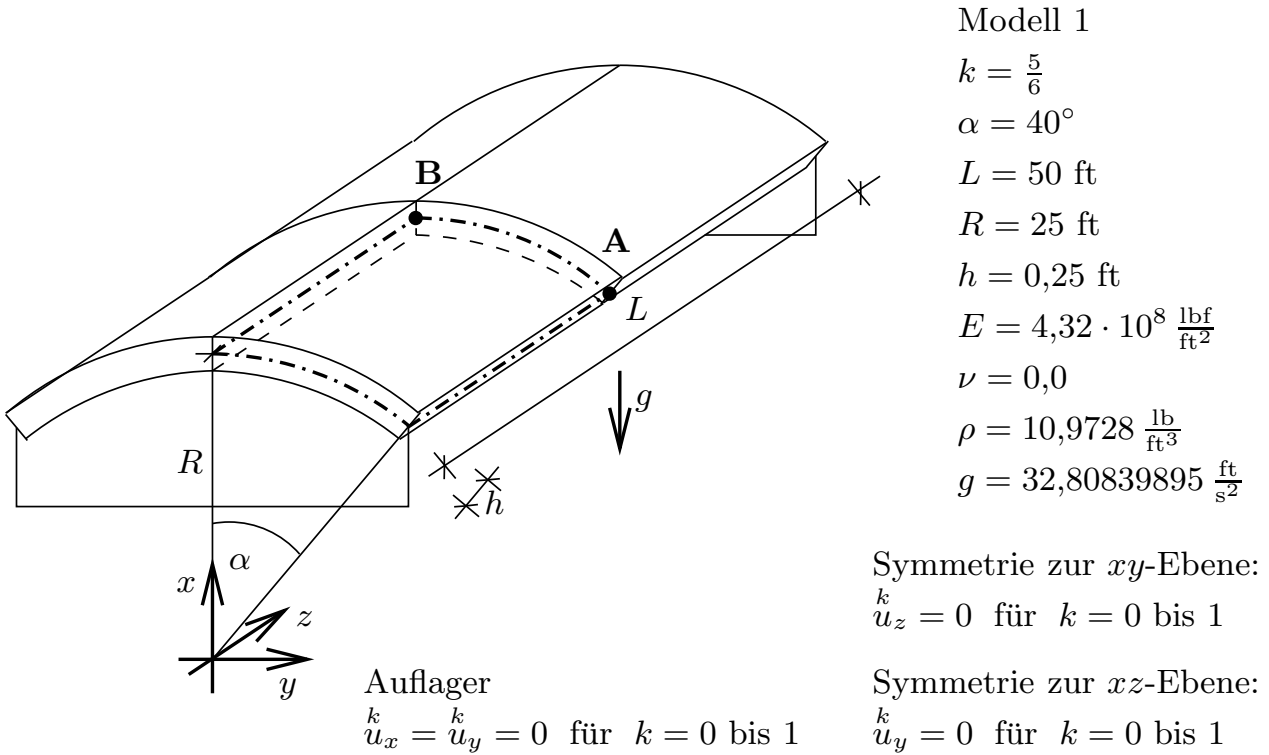


Abb. 6.24: SCORDELIS & LO Schale

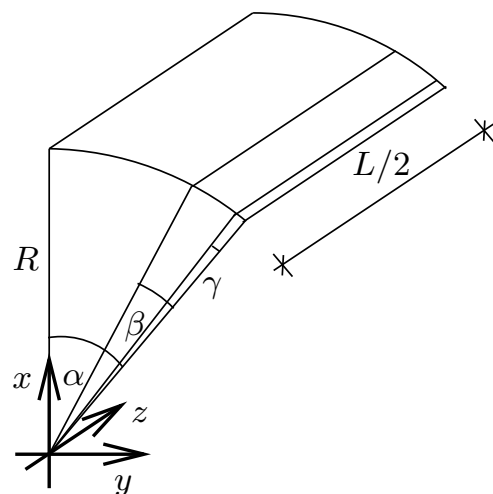


Abb. 6.25: Finite-Element Netz

Die Ergebnisse werden mit denen von DÜSTER in [29] verglichen, der mit der  $p$ -Version der Finite-Element Methode ein Volumenelement mit dem orthotropen Ansatzraum  $\mathcal{S}_{ts}^{p_\xi, p_\eta, p_\zeta}(\Omega_{st}^h)$  entwickelt hat. Der Polynomgrad ist in der Schalenmittelfläche von  $p_\xi = p_\eta = 1$  bis 8 und in Dickenrichtung von  $p_\zeta = 1$  bis 3 für die Berechnung

gesteigert worden. Das gewählte Finite-Element Netz besteht ebenfalls aus drei Elementen, jedoch sind die zwei Layerelemente schmaler gewählt worden. Des Weiteren ist die Belastung als Flächenlast auf der Oberseite der Schale aufgebracht worden. Die Symmetrie- und Auflagerbedingungen sind in beiden Untersuchungen gleich.

### 6.3.2 Konvergenzbetrachtung der Verschiebungen

Die Verschiebung des Punktes **A** und **B** der Schalenmittelfläche in  $x$ -Richtung sind für den Polynomgrad  $p = 1$  bis 8 in Abbildung 6.26 und 6.27 dargestellt. Zum Vergleich sind die Ergebnisse von COWPER nach [27], die mit 'Literatur' gekennzeichnet sind, aufgetragen. Sie ergeben sich aus der analytischen Lösung einer flachen Schale mit der Theorie von GIBSON zu  $u_x^0 \mathbf{B} = -3.0861 \cdot 10^{-1}$  ft und  $u_x^0 \mathbf{A} = 4.3745 \cdot 10^{-2}$  ft. Die Ergebnisse von DÜSTER nach [29] sind mit ' $\mathcal{S}_{ts}^{p_\xi, p_\eta, p_\zeta}(\Omega_{st}^h)$ ' gekennzeichnet.

An beiden Punkten der Schalenmittelfläche ist für Modell 1 abzulesen, dass das MEMBRANE-Locking ab einem Polynomgrad von  $p = 5$  überwunden ist, da sich die Lösung der Verschiebung für höhere Polynomgrade nur noch marginal ändert. Der Versteifungseffekt ist für die Verschiebung im Punkt **A** ausgeprägter, da die Verschiebung der ersten drei Berechnungen ein falsches Vorzeichen liefert. Beide Verschiebungskurven nähern sich gut an die analytische Lösung für flache Schalen an, wobei die numerische Lösung der Verschiebung des Punktes **B** etwas kleiner und die des Punktes **A** etwas größer ist. Dieses Ergebnis liegt an der unterschiedlichen theoretischen Formulierung der beiden Lösungen.

Ein Vergleich der Verschiebungsergebnisse des hierarchischen Schalenelementes mit den Ergebnissen des Volumenelementes ergibt für den Punkt **B**, dass das MEMBRANE-Locking des Volumenelementes stärker ausgeprägt ist als das des Modells 1. Dieses Ergebnis kann jedoch auf die effektivere Wahl des Finite-Element Netzes für Modell 1 zurückzuführen sein. Der Versteifungseffekt ist auch für das Volumenelement ab dem Ansatzraum  $p_\xi = p_\eta = 5$  und  $p_\zeta = 3$  nicht mehr sichtbar. Jedoch werden durch die höhere Approximation in Dickenrichtung mehr Freiheitsgrade für das Volumenelement benötigt, als für ein vergleichbar gutes Ergebnis mit Modell 1.

### 6.3.3 Konvergenzbetrachtung des relativen Fehlers in der Energienorm

Für eine Konvergenzbetrachtung des relativen Fehlers in der Energienorm wurde eine Referenzlösung mit dem Modell 6, einem Netz aus 48 Elementen und einem Polynomgrad von  $p = 8$  berechnet. Mit der daraus ermittelten Dehnungsenergie von  $\mathcal{U}(\mathbf{u}_{FE}) = 1208,854761$  lbf ft wird der relative Fehler in der Energienorm der zuvor durchgeführten Berechnungen bestimmt. Die Ergebnisse sind doppeltlogarithmisch gegen die Anzahl der Freiheitsgrade in Abbildung 6.28 aufgetragen. Mit dem Modell 1 und dem Polynomgrad  $p = 6$  ergibt sich bei nur 330 Freiheitsgraden ein Fehler von etwa 2%. Mit dem Polynomgrad  $p = 5$  berechnet sich der Fehler für 236 Freiheitsgrade noch zu etwa 8%. Höhere Modelle haben keine Verbesserung dieser Ergebnisse erzielt.



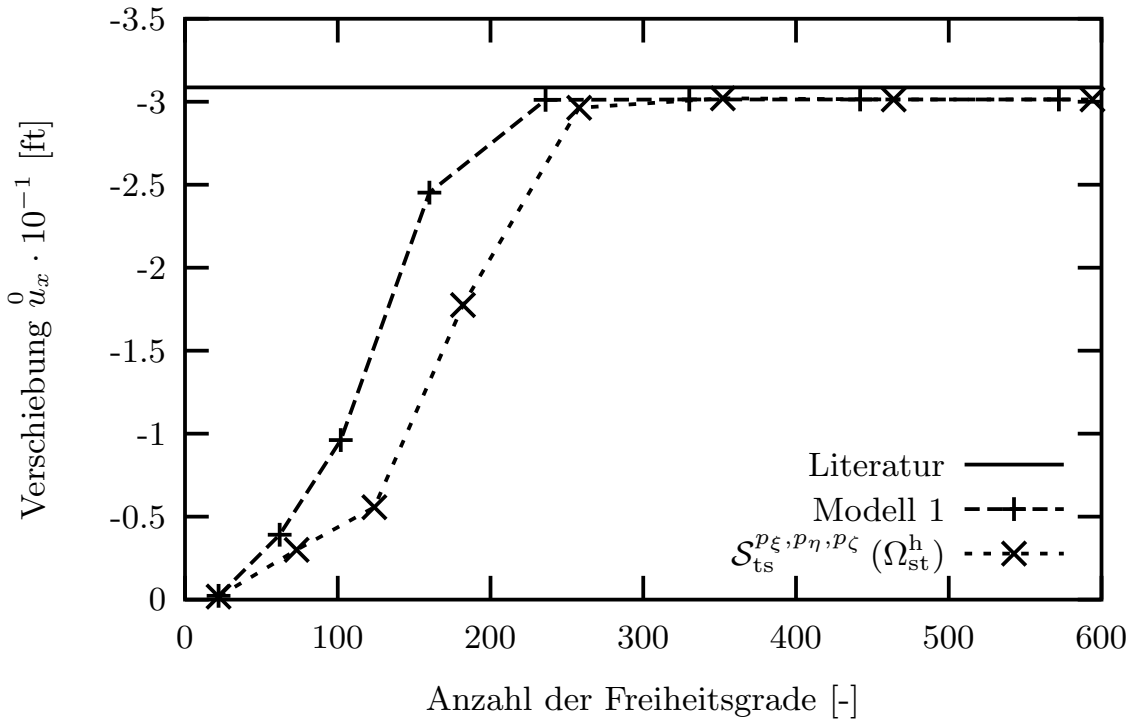


Abb. 6.26: Konvergenz der Verschiebung im Punkt B

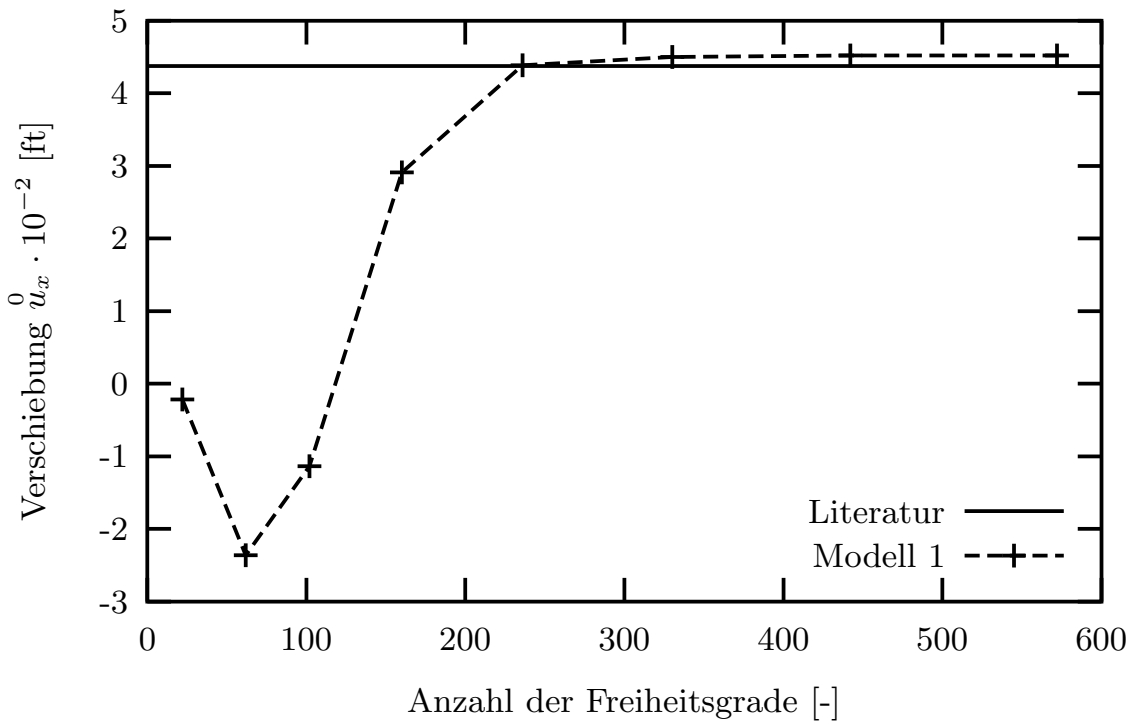


Abb. 6.27: Konvergenz der Verschiebung im Punkt A

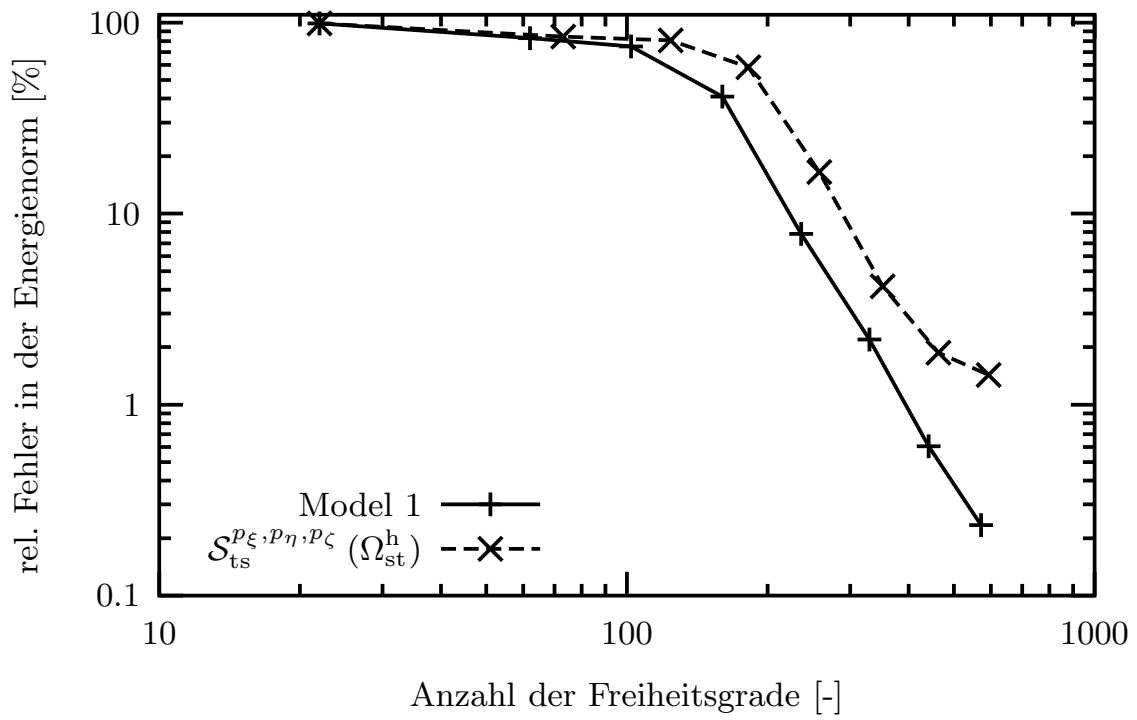


Abb. 6.28: Konvergenz des rel. Fehlers in der Energienorm

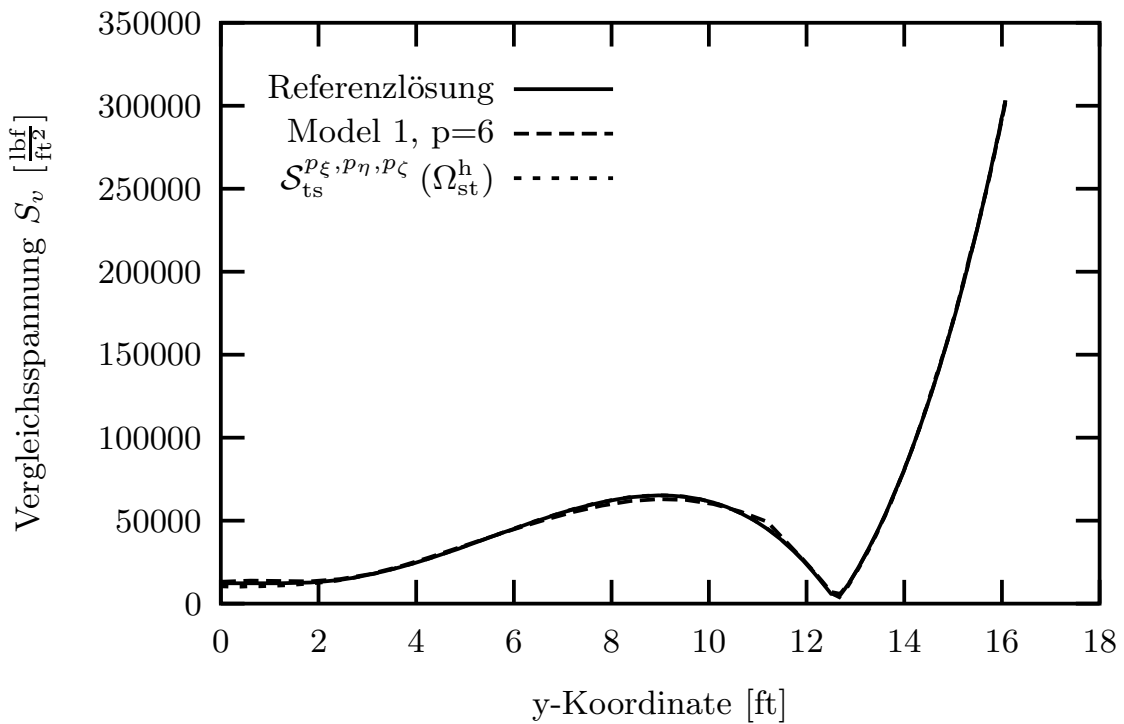


Abb. 6.29: Vergleichsspannung in der Mittelfläche von B nach A

Für das Volumenelement mit orthotropem Ansatzraum wurde die Referenzlösung der Dehnungsenergie mit einem Netz aus 84 Elementen, das in Dickenrichtung zwei Elementschichten enthält, und dem Polynomgrad  $p_\xi = p_\eta = p_\zeta = 8$  zu  $\mathcal{U}(\mathbf{u}_{\text{FE}}) = 1209,009850$  lbf ft ermittelt. Eine unterschiedliche Referenzdehnungsenergie ist hier zu erwarten, da die Lasten für beide Untersuchungen unterschiedlich aufgebracht sind. Die daraus berechneten relativen Fehler in der Energienorm sind ebenfalls in Abbildung 6.28 dargestellt. Das Volumenelement erzielt mit  $p_\xi = p_\eta = 6$  und  $p_\zeta = 3$  nur einen Fehler von etwa 4%. Höhere Approximationen ergeben einen Abfall in der Konvergenz, wodurch die noch nicht optimal gewählten Layerbreiten sichtbar werden.

Das hierarchische Schalenelement erzielt auch hier mit Modell 1 sichtbar bessere Ergebnisse und benötigt weniger Freiheitsgrade als das Volumenelement mit orthotropem Ansatzraum.

#### 6.3.4 Konvergenzbetrachtung der Spannungen

Abbildung 6.29 zeigt die VON MISES Vergleichsspannung in der Mittelfläche der Schale von Punkt **B** nach **A** in Abhängigkeit von der  $y$ -Koordinate. Es wurde die Referenzlösung des Modells 6 und die Lösung des Modells 1 mit  $p = 6$  abgebildet. Die ermittelte Vergleichsspannung des Volumenelementes ist für  $p_\xi = p_\eta = 8$  und  $p_\zeta = 3$  dargestellt. Alle Kurven sind fast identisch und es zeigt sich, dass auch für die Approximation der Spannungen das Modell 1 mit einem Polynomgrad von  $p = 6$  sehr gute Ergebnisse liefert.

#### 6.3.5 Ergebnis der Scordelis & Lo Schale

In diesem Beispiel wurde gezeigt, dass das MEMBRANE-Locking mit dem Modell 1 und einem Polynomgrad von  $p = 5$  überwunden werden kann. Mit einem Finite-Element Netz, das die Layerbereiche der Schale auflöst, kann mit  $p = 6$  der Fehler in der Energienorm unter 5% berechnet werden. Die Spannungsverläufe stimmen für diesen Polynomgrad mit der Referenzlösung und dem Ergebnis des Volumenelementes aus der Literatur überein.

Durch den orthotropen Ansatzraum des Volumenelementes, der in die lokalen Richtungen des Elementes optimal gewählt werden kann, ist dieses Element vergleichbar mit dem in dieser Arbeit entwickelten hierarchischen Schalenelement. Modell 1 erweist sich als effektiver, da es für vergleichbare Ergebnisse weniger Freiheitsgrade benötigt. Ein weiterer Vorteil des hierarchischen Schalenelementes ist, dass die Integration über die Dicke der Schale bei elastischem Materialverhalten analytisch durchgeführt ist. Hierfür wurde eine in Abschnitt 3.3.1 erläuterte Annahme getroffen, die in der numerischen Untersuchung keine Auswirkung gezeigt hat. Das analytisch integrierte Stoffgesetz erzielt die gleichen Spannungsergebnisse wie das dreidimensionale Stoffgesetz des Volumenelementes. Aufgrund der analytischen Vorabintegration muss die zeitaufwendige Matrizenmultiplikation zur Berechnung der Elementsteifig-

keitsmatrix, die schon in Abschnitt 5.7.3 näher erläutert wurde, nur über die Gaußpunkte der Schalenmittelfläche durchgeführt werden. Bei Volumenelementen ist diese Matrizenmultiplikation für jeden Gaußpunkt des Volumens durchzuführen. Für hierarchische Schalenelemente ist demnach eine geringere Rechenzeit zu erwarten, als für Volumenelemente mit orthotropem Ansatzraum.

## 6.4 Volume-Locking

Das VOLUME-Locking kann bei inkompressiblen und nahezu inkompressiblen Verzerrungszuständen auftreten, die bei gummiartigen Materialien mit der Querkontraktionszahl  $\nu \rightarrow 0,5$  und bei elasto-plastischen Untersuchungen mit großen plastischen Verzerrungen im Vergleich zu den elastischen gegeben sind. Dabei ist die Approximation der Schubverzerrungen zu gering, um die Zwangsbedingung, die bei inkompressiblen Verzerrungszuständen auftritt, abzubilden [34].

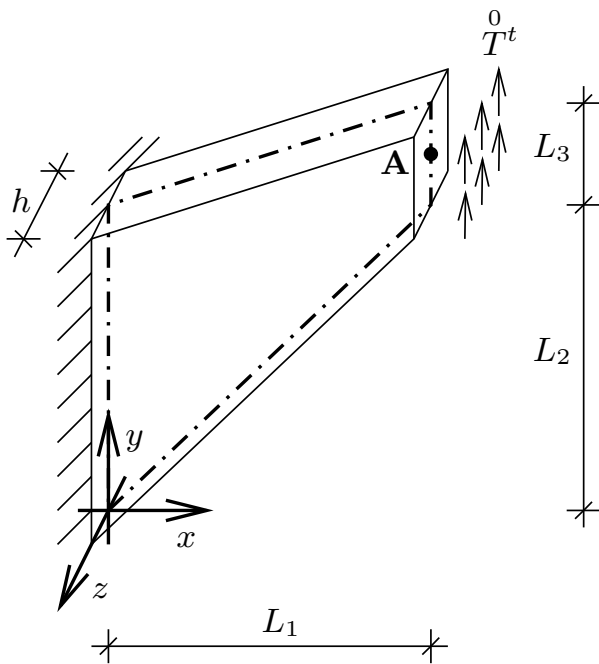
Die  $h$ -Version der Finite-Element Methode behebt diesen Versteifungseffekt durch eine selektive, reduzierte Integration, die auch für das SHEAR-Locking verwendet wird, oder eine gemischte Methode, in der der hydrostatische Druck zusätzlich approximiert wird [3, 103]. Die *Enhanced-Assumed-Strain*-Methode, die für die Behebung des MEMBRANE-Lockings verwendet wird, erweist sich auch hier als gute Methode [85]. Jedoch stellen diese Methoden einen Eingriff in die theoretische Beschreibung des Problems dar.

Wird die unzureichende Beschreibung der Schubverzerrungen durch eine Erhöhung des Polynomgrades der Verschiebungen verbessert, kann das VOLUME-Locking durch die direkte Behandlung der Ursache behoben werden. Dies ist das Vorgehen der  $p$ -Version der Finite-Element Methode, die auch bei diesem Versteifungseffekt gute Ergebnisse nach SURI in [91, 25] zeigt.

### 6.4.1 Die Cook Scheibe

Um das VOLUME-Locking der Schubverzerrungen in der Schalenmittelfläche zu überprüfen wird die COOK Scheibe mit einem dreidimensionalen Spannungszustand untersucht. Dieses Beispiel ist ebenfalls ein Benchmark für stark verzerrte Elemente, die schon in Abschnitt 6.2 untersucht wurden. Durch die konstante Schubspannung  $T^t$  am rechten Rand der Scheibe und die Einspannung am linken Rand liegt ein membrandominiertes Problem vor, das seine Belastungen vorwiegend durch Schubspannungen parallel zur Mittelfläche abträgt. Es hat sich gezeigt, dass das Modell 1 ausreichend ist, um das gegebene Problem abzubilden, da es konstante Spannungsverläufe über die Dicke abbilden kann.

Für die Untersuchung des VOLUME-Lockings wird das gegebene System in Abbildung 6.18 mit den Querkontraktionszahlen  $\nu = 1/3$ ,  $\nu = 0,4999$  und  $\nu = 0,499999999$  untersucht. Da in der einspringenden Ecke oben links eine Singularität der Lösung vorliegt [4], wird eine  $hp$ -Verfeinerung des Finite-Element Netzes, das in Abbildung 6.31 dargestellt ist, hin zu diesem Punkt gewählt.



Modell 1

$$L_1 = 48 \text{ mm}$$

$$L_2 = 44 \text{ mm}$$

$$L_3 = 16 \text{ mm}$$

$$h = 1 \text{ mm}$$

$$E = 1,0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$k = \frac{5}{6}$$

$$T^0 = 6,25 \cdot 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Auflagerbedingungen:

$$u_x^k = u_y^k = u_z^k = 0$$

für  $k = 0$  bis 1

Abb. 6.30: COOK Scheibe

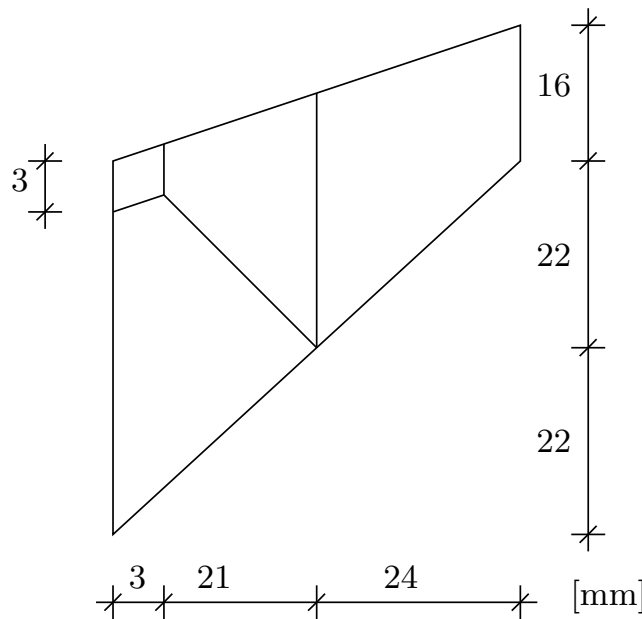


Abb. 6.31: Finite-Element Netz

### 6.4.2 Konvergenzbetrachtung der Verschiebungen

Die Autoren BERGAN und FELIPPA führen in [12] die Ergebnisse dieses Beispiels mit  $\nu = 1/3$  für verschiedene Scheibenelemente auf. Sie haben zum Vergleich eine Referenzlösung mit einem gleichmäßigen Netz aus  $32 \times 32$  quadratischen Elementen, die jeweils aus zwei Dreieckselementen bestehen, berechnet. Ein bilineares Scheibenelement mit zwei Verschiebungs- und einem Rotationsfreiheitsgrad je Knoten wurde

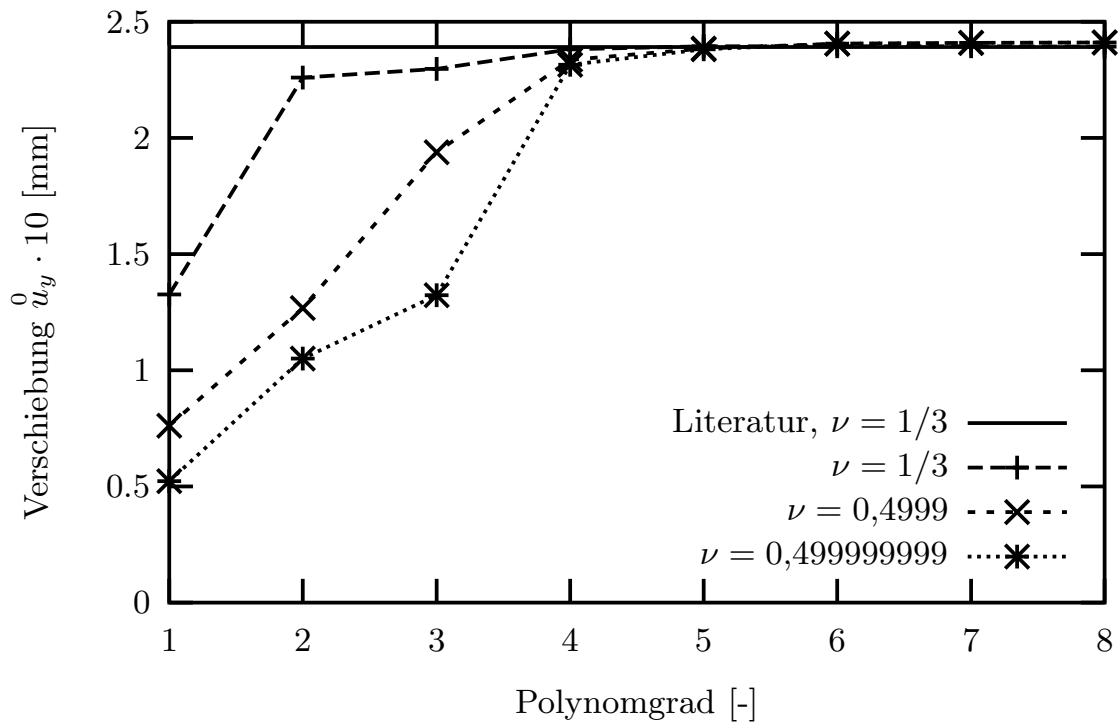


Abb. 6.32: Verschiebung des Punktes A

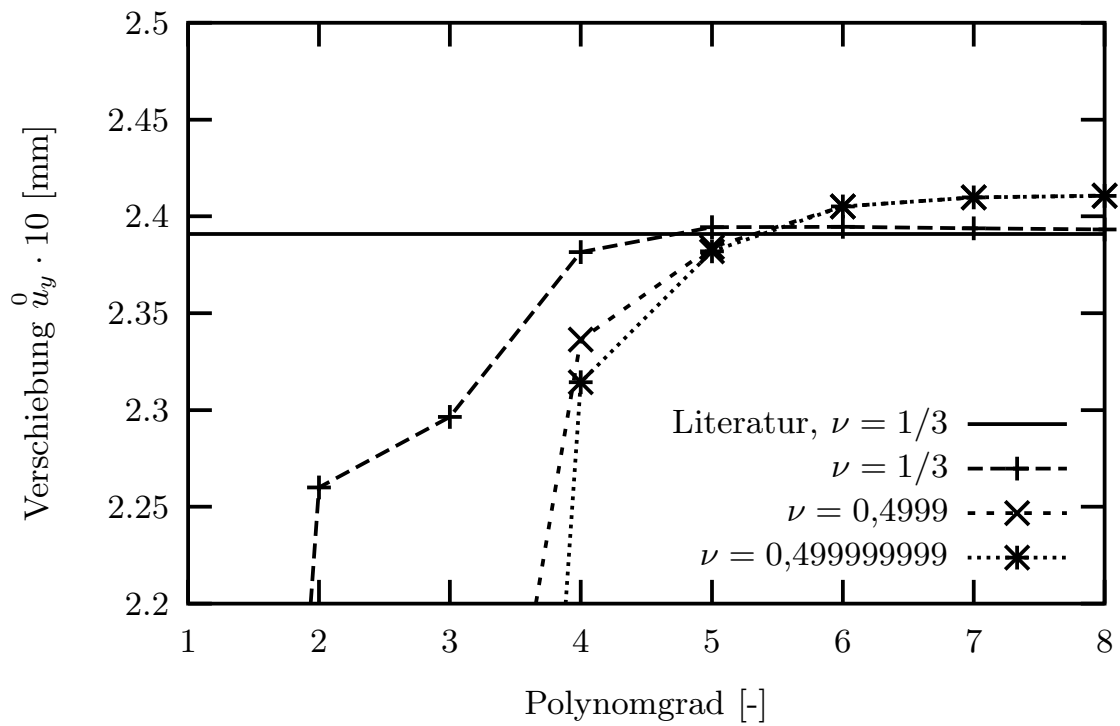


Abb. 6.33: Ausschnitt der Abbildung 6.32

hierfür verwendet. Die Verschiebung des Punktes **A** ergab sich mit 3267 Freiheitsgraden zu  $u_y = 23,91$  mm. Mit einem Netz aus  $16 \times 16$  gleichmäßigen Unterteilungen ergab sich bei 867 Freiheitsgraden eine Verschiebung von  $u_y = 23,79$  mm. Das Ergebnis der Referenzlösung aus der Literatur ist in Abbildung 6.32 und 6.33 zum Vergleich mit dargestellt.

Das gegebene System ist mit den drei Querkontraktionszahlen und einem steigenden Polynomgrad von  $p = 1$  bis 8 ausgewertet. Abbildung 6.32 zeigt, dass für alle drei Querkontraktionszahlen die Lösung dieser sehr dünnen Scheibe zu einem gleichen Wert konvergiert. Erst in Abbildung 6.33, die einen Teilbereich der Abbildung 6.32 darstellt, wird deutlich, dass das Ergebnis der Verschiebung in  $y$ -Richtung im Punkt **A** für  $\nu \rightarrow 0,5$  etwas größer ist als das für  $\nu = 1/3$ . Mit einem Polynomgrad von  $p = 5$  und 348 Freiheitsgraden ergibt sich mit  $\nu = 1/3$  die Lösung der Verschiebung zu  $u_y = 23,94419857$  mm. Dieses Ergebnis ist etwas größer als das der Referenzlösung in der Literatur. Der Grund ist ein weicherer System, da Modell 1 eine konstante Dickenänderung der Scheibe zulässt, und sich daher größere Verschiebungen einstellen. Für die  $p$ -Version sind für ein vergleichbar gutes Ergebnis also 519 Freiheitsgrade weniger nötig, woraus sich eine höhere Effizienz der Methode folgern lässt. Diese beträchtliche Verbesserung liegt jedoch auch an der  $hp$ -Verfeinerung des Finite-Element Netzes. Für einen gerechteren Vergleich der beiden Methoden hätte eine adaptive Netzverfeinerung bei der  $h$ -Version verwendet werden müssen.

Für ein nahezu inkompressibles Materialverhalten, bei dem  $\nu \rightarrow 0,5$  geht, ist in Abbildung 6.32 für den Polynomgrad  $p = 1$  bis 3 ein starker Abfall der Konvergenz der Verschiebungen zu erkennen. Steigt der Polynomgrad der Berechnung weiter an, so ändert sich ab  $p = 6$  die Lösung der Verschiebung kaum noch. Das VOLUME-Locking ist hier überwunden. Im Vergleich zu den Ergebnissen mit einer Querkontraktionszahl von  $\nu = 1/3$  muss der Polynomgrad etwa um zwei höher gewählt werden, um für das gleiche System mit  $\nu \rightarrow 0,5$  vergleichbar gute Ergebnisse in den Verschiebungen zu erhalten.

## 6.5 Plastisches Materialverhalten

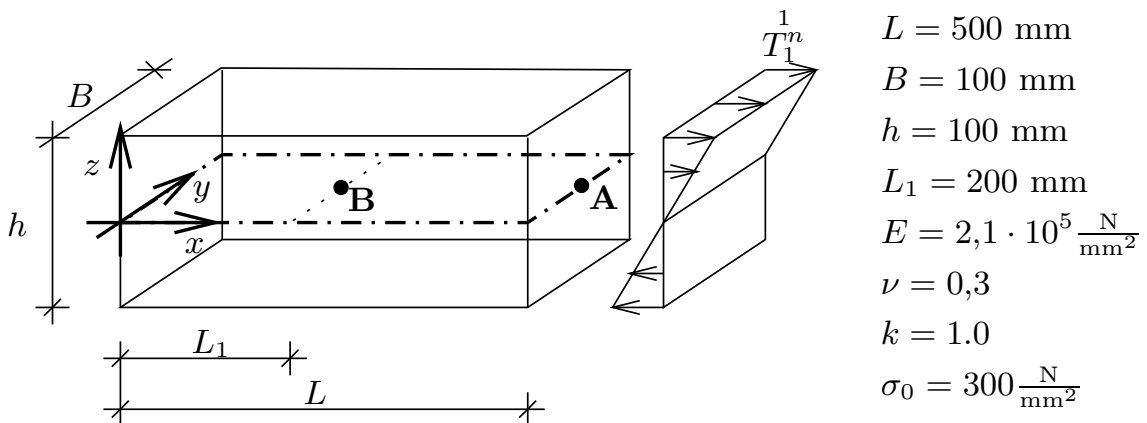
Wie schon im Abschnitt 6.4 erwähnt, kann das VOLUME-Locking bei einer zu geringen Approximation der Verschiebungen auftreten. Dies führt im Wesentlichen zu einer ungenauen Beschreibung der Schubverzerrungen. Im vorherigen Abschnitt wurde dies für die Schubverzerrungen in der Schalenmittelfläche überprüft, indem die Querkontraktionszahl  $\nu \rightarrow 0,5$  gewählt wurde.

In diesem Abschnitt wird dieser Versteifungseffekt anhand eines ideal-plastischen Materialverhaltens in Dickenrichtung der Schale untersucht. Im plastifizierten Teil des Querschnittes wachsen die inelastischen Verzerrungen weiter an, wobei die elastischen Anteile unverändert bleiben. Ihre Summe, die Gesamtdehnungen, folgen weiterhin der Kinematik des gewählten Modells über die Dicke. Für die inelastischen Verzerrungen gilt, wie es bei metallischen Werkstoffen erfüllt ist, dass sie keine volumetrischen Anteile enthalten, also volumenkonstant sind. Daraus folgt bei vernachlässigbaren

elastischen Verzerrungen, dass die Gesamtverzerrungen nahezu inkompressibel wird. Bei einer zu geringen Approximation der Verzerrungen tritt das VOLUME-Locking in den plastifizierten Bereichen des Querschnittes auf. Dieses Verhalten wird mit verschiedenen hierarchischen Schalenmodellen untersucht.

### 6.5.1 Reine Biegung mit ideal-plastischem Materialverhalten

Der in Abbildung 6.34 dargestellte unendlich lange Plattenstreifen unter reiner Biegebelastung hat ein Längen-Dickenverhältnis von  $L/h = 5$ . Es handelt sich also um eine sehr dicke Platte. In  $y$ -Richtung liegt ein ebener Verzerrungszustand vor. Wegen der Symmetrie zur  $yz$ -Ebene kann die Hälfte eines Plattenstreifens untersucht werden. Für den ebenen Verzerrungszustand werden alle Verschiebungsvariablen in  $y$ -Richtung an den Seiten parallel zur  $xz$ -Ebene zu null gesetzt. Das Netz besteht aus einem Element in der Mittelfläche der Schale und wird mit den Modellen 2, 4 und 6 untersucht. Da das SHEAR-Locking ab einem Polynomgrad von  $p = 4$  überwunden ist und gegen das VOLUME-Locking in der Mittelfläche der Polynomgrad um zwei höher gewählt werden soll, wird diese Untersuchung für alle Modelle mit einem Polynomgrad von  $p = 6$  durchgeführt. Der Schubkorrekturfaktor ist bei inelastischen Untersuchungen für alle Modelle zu  $k = 1$  gesetzt. Für die Berechnung werden für die Modelle 2 und 4 pro Gaußpunkt der Schalenmittelfläche 5, 10, 15 und 30 Gaußpunkte in Dickenrichtung der Platte gewählt und für das Modell 6 werden 7, 10, 15 und 30 Gaußpunkte über die Dicke ausgewertet. Die Last-Verschiebungskurve der Gesamtverschiebung des Punktes **A** und der Spannungsverlauf über die Dicke im Punkt **B** werden für die untersuchten Systeme aufgezeigt.



Symmetrie zur  $yz$ -Ebene:  
 ${}^0 u_z = 0$  ,  ${}^k u_x = 0$  für  $k = 0$  bis  $nk$

Symmetrie zur  $xz$ -Ebene:  
 ${}^k u_y = 0$  für  $k = 0$  bis  $nk$

**Abb. 6.34:** Unendlich lange Platte mit Randbiegung

### 6.5.2 Analytische Lösung

Das in Abbildung 6.34 beschriebene Problem ist von NAGTEGAAL ET.AL. in [60] untersucht worden. Hier wurde basierend auf der Scheibentheorie für einen ebenen



Verzerrungszustand ein Grenzmoment für das ideal-plastische Materialverhalten angegeben. Daraus lässt sich die Grenzbelastung  $T_1^{n\ 1\ pl, Nag}$  des dargestellten Systems zu

$$T_1^{n\ 1\ pl, Nag} = \frac{3}{\sqrt{3}} \sigma_0 \quad (6.3)$$

bestimmen. Dieses Ergebnis soll durch eine Herleitung verdeutlicht werden.

Für eine analytische Lösung werden die folgenden Spannungsannahmen getroffen:

$$\sigma_{xx} = \frac{2z}{h} T_1^{n\ 1} \quad \text{und} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0. \quad (6.4)$$

Aus dem linear-elastischen Stoffgesetz ergeben sich mit den Bedingungen des ebenen Verzerrungszustandes  $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xy} = 0$  die Beziehungen

$$\sigma_{yy} = \nu \sigma_{xx} = \nu \frac{2z}{h} T_1^{n\ 1} \quad \text{und} \quad \sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0. \quad (6.5)$$

Die elastische Grenzbelastung kann mit der VON MISES Fließbedingung für ideal plastisches Materialverhalten zu

$$T_1^{n\ 1\ el} = \frac{1}{\sqrt{1 - \nu + \nu^2}} \sigma_0 \quad (6.6)$$

berechnet werden.

Für den plastifizierten Bereich des Querschnittes wird die folgende Annahme getroffen: Ist an der Ober- und Unterseite des Plattenstreifens die Fließspannung erreicht, verändert sich der Spannungszustand in dieser Faser des Querschnittes bei einem ideal-plastischen Materialverhalten nicht mehr. Der Spannungsverlauf ist im plastischen Bereich des Querschnittes also konstant. Aufgrund dieser Überlegung wird der Zusammenhang  $\sigma_{yy} = \nu \sigma_{xx}$  auch für die plastische Zone des Querschnittes beibehalten. Es ist jedoch fraglich, ob diese Annahme in der dreidimensionalen Lösung widergespiegelt wird.

Die Höhe der elastischen Zone des Querschnittes, die den Übergang zur plastischen Zone angibt, berechnet sich aus diesen Überlegungen zu

$$z_F = \frac{h}{2} \sqrt{3 - \frac{2T_1^{n\ 1}}{\sigma_0} \sqrt{1 - \nu + \nu^2}} \quad (6.7)$$

und gibt somit den Spannungsverlauf über die Dicke des Querschnittes an.

$$\sigma_{xx} = \frac{z}{z_F} \frac{1}{\sqrt{1 - \nu + \nu^2}} \sigma_0 \quad , \quad \sigma_{yy} = \nu \sigma_{xx} \quad \text{für} \quad 0 \leq z \leq z_F \quad (6.8)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \nu + \nu^2}} \sigma_0 \quad , \quad \sigma_{yy} = \nu \sigma_{xx} \quad \text{für} \quad z_F \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (6.9)$$

Die plastische Grenzbelastung berechnet sich mit  $z_F = 0$  zu

$$T_{1\ pl}^n = \frac{3}{2\sqrt{1-\nu+\nu^2}} \sigma_0 . \quad (6.10)$$

Sie ist vorhanden, wenn der gesamte Querschnitt plastifiziert ist, sodass sich für idealplastisches Materialverhalten eine rechteckige Spannungsverteilung für  $\sigma_{xx}$  ergibt. Die Gesamtverzerrungen können folglich in jedem Punkt über die Dicke unendlich sein. Das idealplastische Materialmodell kann daher zu diesem Zeitpunkt die Natur nicht richtig widerspiegeln, da solche Verzerrungszustände nicht auftreten.

Für das idealplastische Materialmodell sind die inelastischen Verzerrungen zum Zeitpunkt des vollplastifizierten Querschnittes über die gesamte Dicke sehr viel größer als die elastischen. Das Materialverhalten ist nahezu inkompressibel und die Querkontraktionszahl kann in Gleichung (6.11) zu  $\nu = 0,5$  gesetzt werden, sodass sich das Ergebnis von NAGTEGAAL ET.AL. ergibt.

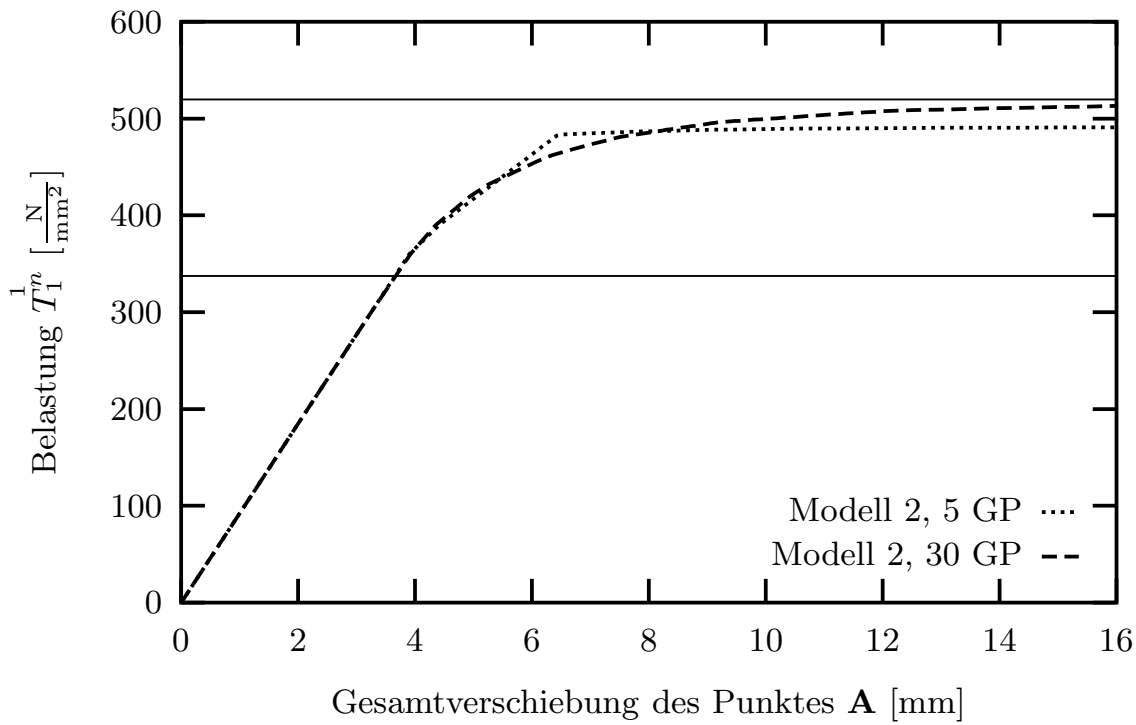
$$T_{1\ pl}^n = \frac{3}{\sqrt{3}} \sigma_0 . \quad (6.11)$$

### 6.5.3 Konvergenzbetrachtung der Last-Verschiebungskurve

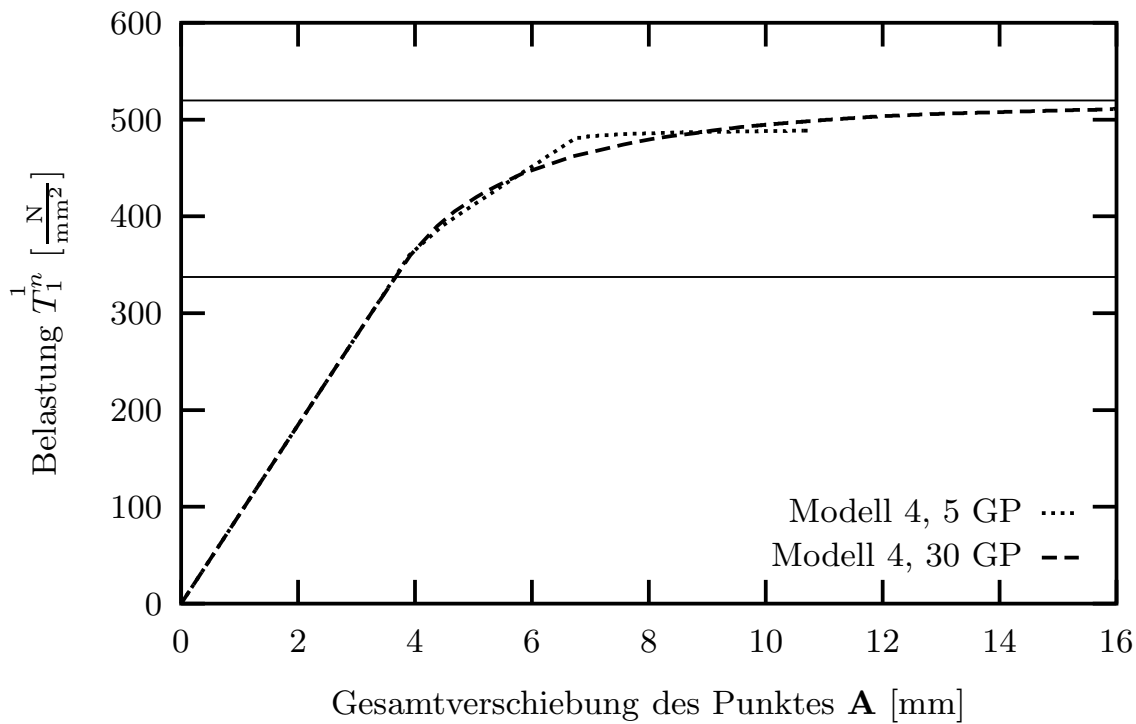
Abbildung 6.35, 6.36 und 6.37 zeigen die Last-Verschiebungskurve der Gesamtverschiebung des Punktes **A** der drei gewählten Modelle mit der niedrigsten und höchsten Integrationsordnung. Die analytische Lösung der elastischen Grenzbelastungen aus Gleichung (6.6) ist durch die untere horizontale Linie und die der plastischen Grenzbelastungen aus (6.11) durch die obere horizontale Linie gekennzeichnet. In Abbildung 6.38 ist ein Ausschnitt zwischen der elastischen und plastischen Grenzbelastung dargestellt, der die Ergebnisse für Modell 2, 4 und 6 mit 30 Gaußpunkten über die Dicke enthält. Die Auswirkungen der Erhöhung der Integrationsordnung auf die Last-Verschiebungskurve sind für zwei Modelle in den Abbildungen 6.39 und 6.40 dargestellt.

Im elastischen Bereich für  $0 \leq T_1^n \leq T_{1\ el}^n$  mit  $T_{1\ el}^n = 337,53 \frac{N}{mm^2}$  zeigen alle Modelle in Abbildung 6.35, 6.36 und 6.37 das gleiche Systemverhalten. Die Ergebnisse sind in diesem Bereich unabhängig von der Anzahl der Gaußpunkte über die Dicke, da hier die lineare Spannungs-Dehnungsbeziehung noch erfüllt ist. Modell 2 kann die exakte Systemantwort als niedrigstes Modell abbilden.

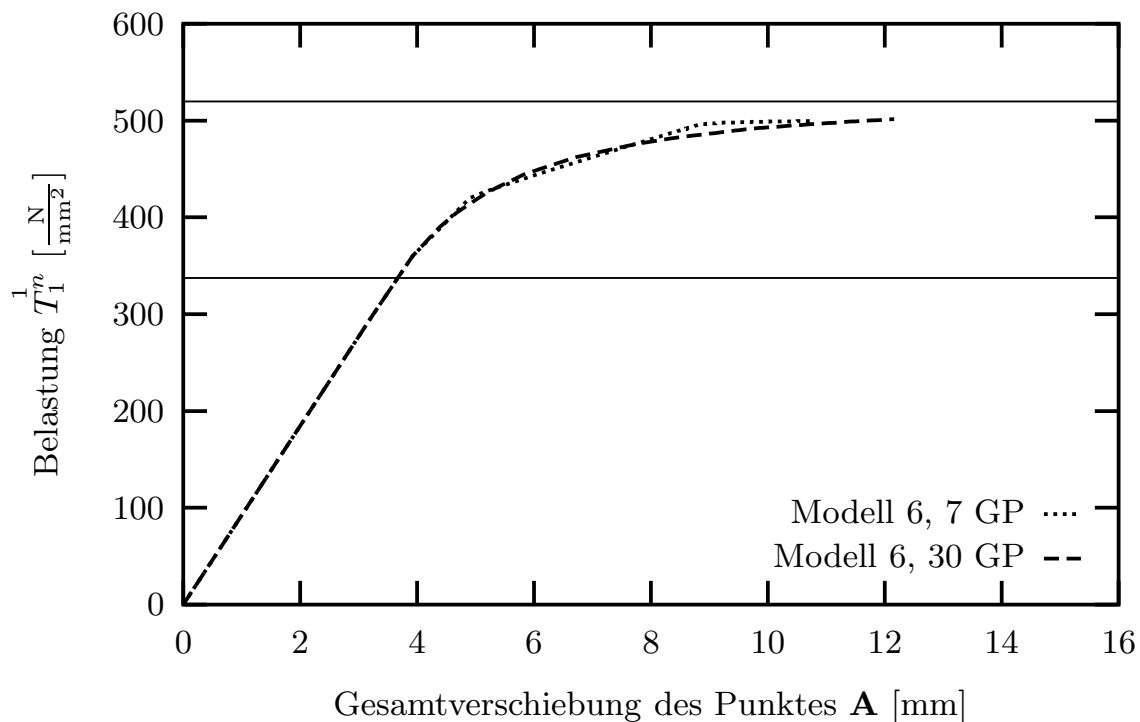
Die plastische Grenzbelastung in Gleichung (6.11) ist mit  $T_{1\ pl}^n = 519,62 \frac{N}{mm^2}$  für das untersuchte System gegeben. Für Modell 2 ist die Last-Verschiebungskurve für 5 und 30 Gaußpunkte über die Dicke in Abbildung 6.35 dargestellt. Mit 5 Gaußpunkten über die Dicke ergibt sich ein starker Knick zwischen dem teil- und vollplastifizierten System. Diese Systemantwort ist für den Vorgang der Plastifizierung zu steif und somit nicht realistisch angenähert. Die in Tabelle 6.7 aufgeführte Grenzbelastung dieser Integrationsordnung ergibt sich zu  $490,91 \frac{N}{mm^2}$  und ist wesentlich kleiner als die analytisch ermittelte Grenzbelastung. Mit 30 Gaußpunkten über die Dicke nähert



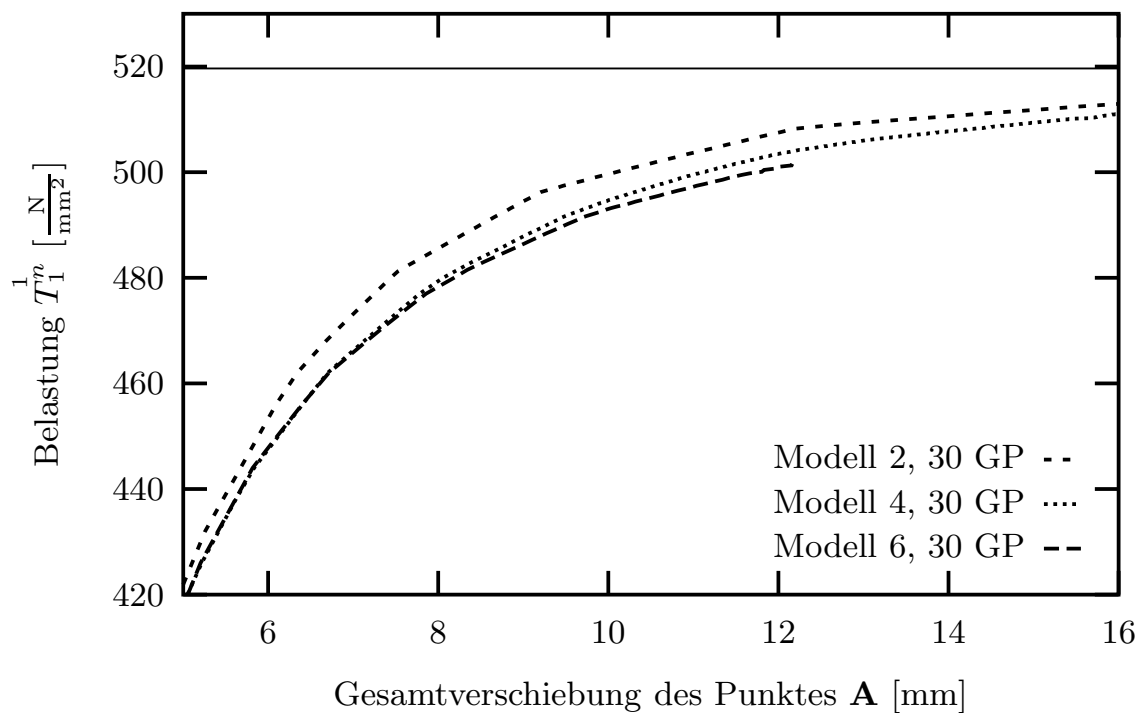
**Abb. 6.35:** Last-Verschiebungsdiagramm für Modell 2



**Abb. 6.36:** Last-Verschiebungsdiagramm für Modell 4



**Abb. 6.37:** Last-Verschiebungsdiagramm für Modell 6



**Abb. 6.38:** Last-Verschiebungsdiagramm für alle Modelle mit 15 Gaußpunkten

sich Modell 2 schon sehr gut an die Gerade an und ermittelt bei einer Verschiebung von 16,00 mm eine Belastung von  $512,93 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ . Die Konvergenz zur analytischen Lösung ist gegeben und es tritt kein VOLUME-Locking auf.

Mit Modell 4 ergibt sich mit 5 Gaußpunkten über die Dicke ebenfalls ein starker Knick in der Systemantwort, abzulesen aus der Last-Verschiebungskurve in Abbildung 6.36. Die plastische Grenzbelastung ist für eine Verschiebung von 16,00 mm zu etwa  $494,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  extrapoliert worden. Die Abweichung zur analytisch ermittelten Grenzbelastung liegt schon unter 5%, jedoch kann das Systemverhalten während der Plastifizierung nicht realistisch abgebildet werden. Mit 30 Gaußpunkten über die Dicke ist die stetige Konvergenz des Systemes zu einer Grenzbelastung von  $511,02 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  gegeben. Auch dieses Modell zeigt kein VOLUME-Locking im nahezu vollplastifizierten Bereich.

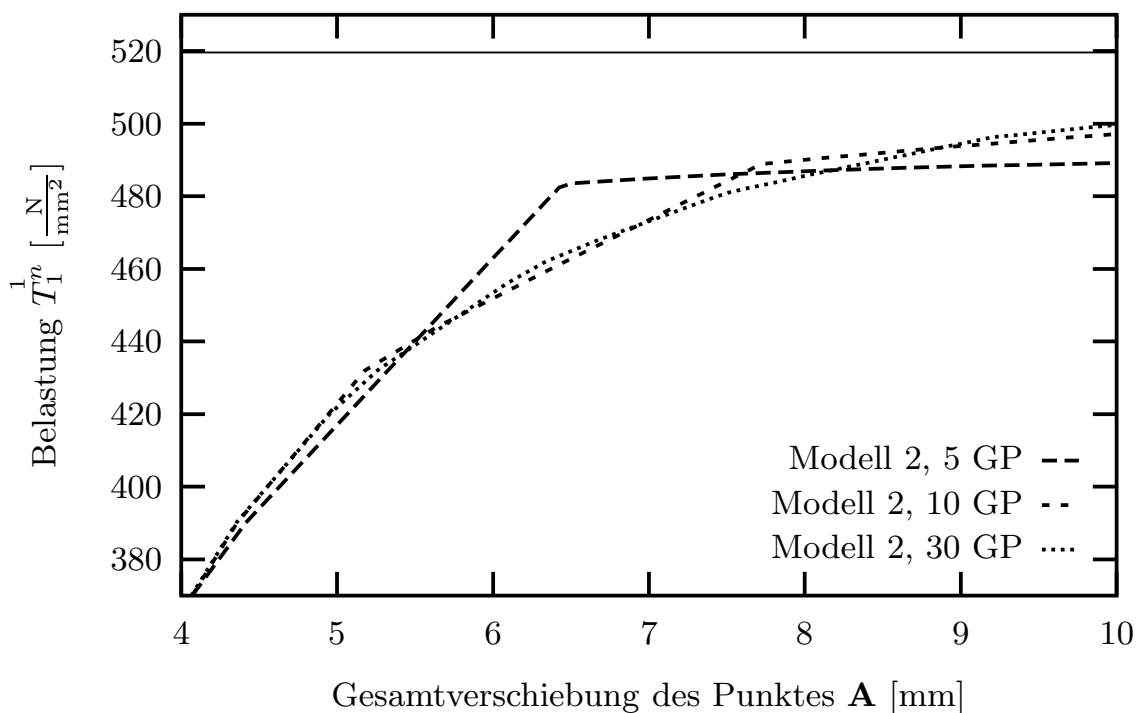
Die Last-Verschiebungskurve in 6.37 zeigt für Modell 6 mit 7 Integrationspunkten über die Dicke schon einen glatteren Verlauf, jedoch enthält sie immer noch unsteuige Bereiche. Die Grenzbelastung für dieses Modell extrapoliert sich für 7 Gaußpunkte zu  $502,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  und für 30 Gaußpunkte zu  $517,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ . Die Konvergenz zu einer Grenzbelastung ist in den Graphen gut sichtbar, sodass auch dieses Modell kein VOLUME-Locking zeigt.

Modell	Gaußpunkte	$T_{1\text{pl}}^1 [\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}]$	Gaußpunkte	$T_{1\text{pl}}^1 [\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}]$
2	5	490,91	30	512,93
4	5	494,00*	30	511,02
6	7	502,00*	30	517,00*

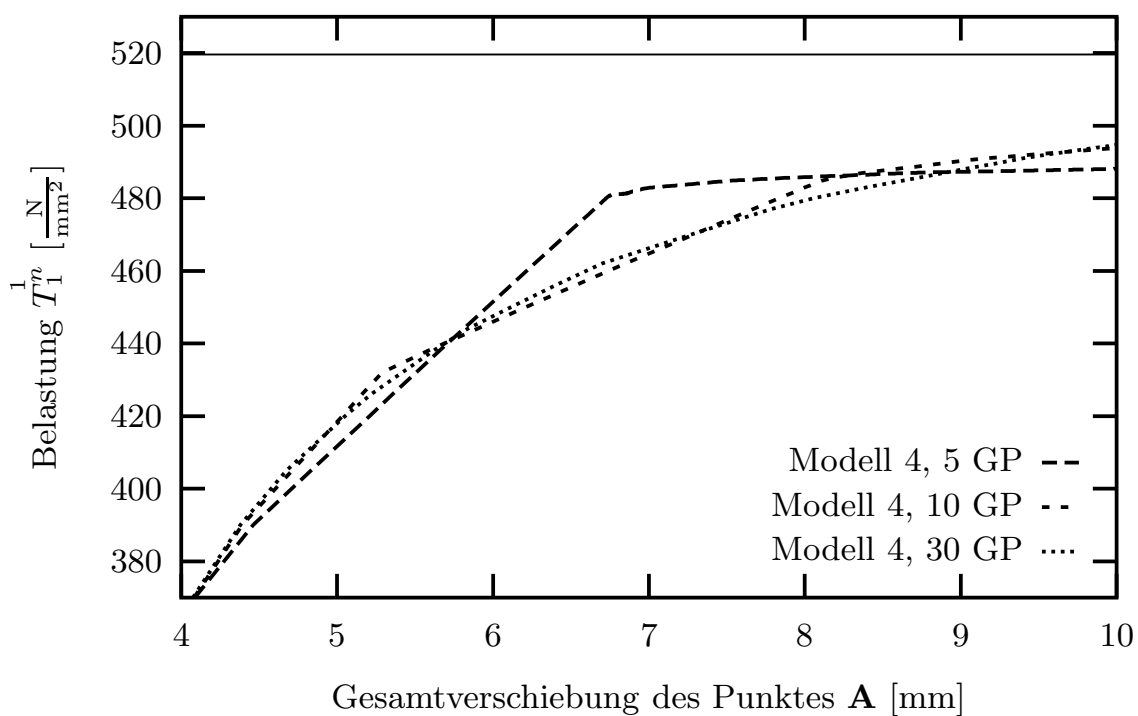
Die mit \* gekennzeichneten Werte wurden durch eine lineare Extrapolation ermittelt.

**Tab. 6.7:** plastische Grenzbelastung der Modelle 2, 4 und 6 mit niedrigster und höchster Integrationsordnung für eine Gesamtverschiebung des Punktes **A** von 16,00 mm

Die bisherige Untersuchung hat ergeben, dass die auftretenden Knicke in der Last-Verschiebungskurve von der Anzahl der Gaußpunkte über die Dicke abhängen. Im Folgenden sollen diese Knicke für Modell 2 und 4 mit 5, 10 und 30 Gaußpunkten über die Dicke näher betrachtet werden. Abbildung 6.39 und 6.40 zeigt, dass für beide Modelle mit 5 Gaußpunkten der Knick in der Kurve bei einer Belastungsspannung von ca.  $481 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  auftritt. Für 10 Gaußpunkte ergeben sich im dargestellten Ausschnitt für beide Modelle zwei Knicke, der eine bei ca.  $432 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  und der andere bei ca.  $489 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ . Die Kurven sind für diese Integrationsordnung schon wesentlich glatter und nähern sich der Lösung mit 30 Gaußpunkten an. Die Plastifizierung des Querschnittes setzt sich von der Ober- und Unterseite der Platte hin zur Mittelfläche fort. Das Ergebnis lässt vermuten, dass ein Knick in der Last-Verschiebungskurve auftritt, wenn ein weiterer Gaußpunkt von außen nach innen plastifiziert ist. Das System wird dann sprunghaft weicher, da sich in diesem Gaußpunkt die Vergleichsspannung nicht mehr erhöhen kann. Des Weiteren ist die Verteilung der Gaußpunkte über die Dicke der



**Abb. 6.39:** Ausschnitt aus Abbildung 6.35 mit Modell 2



**Abb. 6.40:** Ausschnitt aus Abbildung 6.36 mit Modell 4

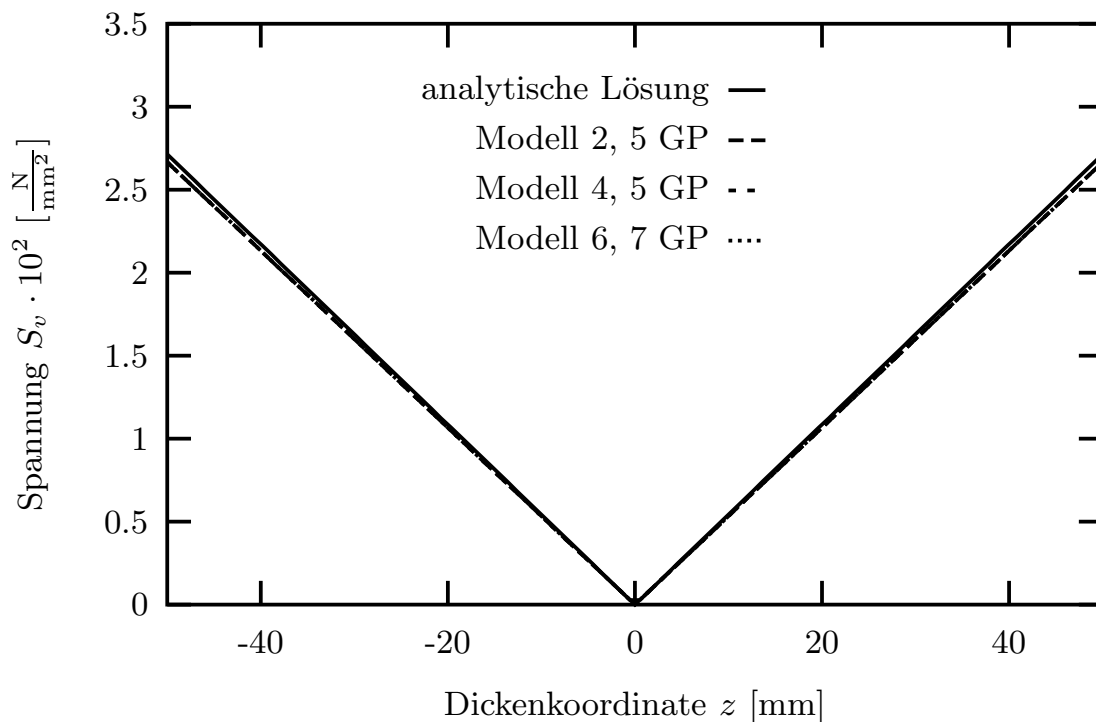
Platte nicht gleichmäßig, wie in Abschnitt 5.6 angesprochen. Hin zur Ober- und Unterseite der Platte sind sie dichter verteilt als in der Nähe der Mittelfläche. Je weiter die Plastifizierung des Querschnittes fortschreitet, desto schlechter kann das Systemverhalten durch diese Anordnung abgebildet werden. Der unstetige Verlauf der Last-Verschiebungskurve führt zu numerischen Schwierigkeiten. Kurz von dem Knick müssen die Lastinkremente sehr klein gewählt werden, um die Unstetigkeit abzubilden. Eine höhere Rechenzeit und somit auch ein Effizienzverlust stellt sich ein. Eine gleichmäßige Verteilung der Integrationspunkte über die Dicke, wie sie zum Beispiel von der NEWTON-COTES-Integration verwendet wird, kann bei inelastischen Prozessen zu einer Stabilisierung des Algorithmus führen.

#### 6.5.4 Konvergenzbetrachtung der Spannungen über die Dicke

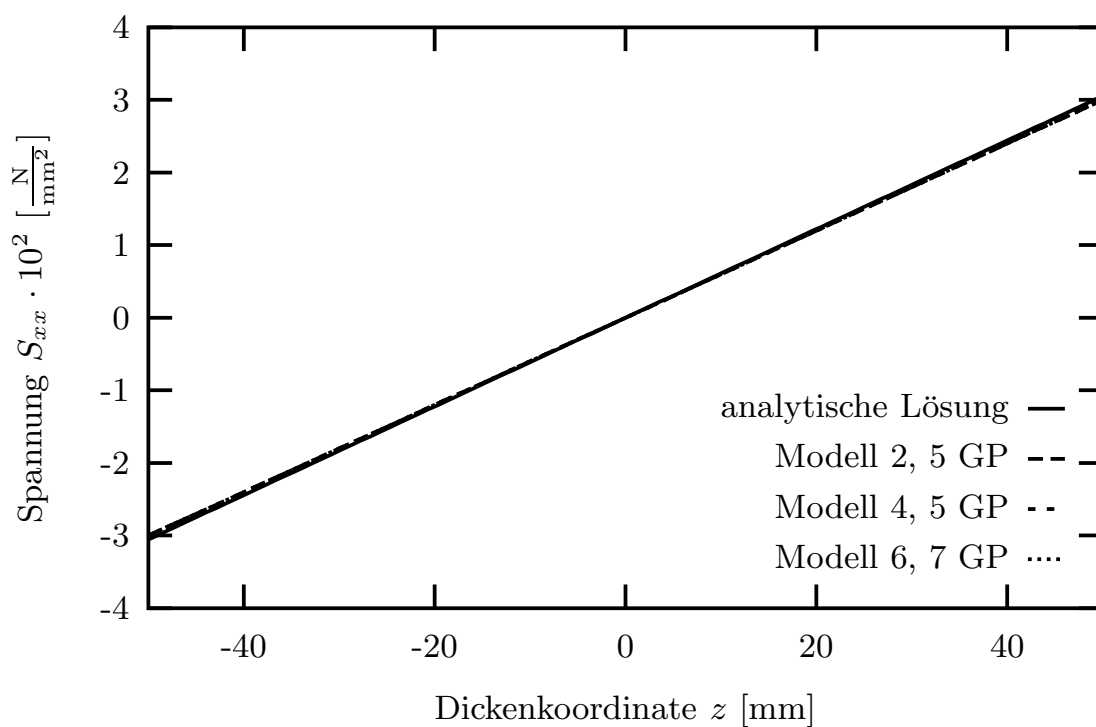
Für die Konvergenzbetrachtung der Spannungen über die Dicke wird die VON MISES Vergleichsspannung sowie alle Spannungskomponenten des globalen Koordinatensystems für drei Belastungsspannungen im Mittelpunkt  $\mathbf{B}$  des Schalenelementes über die Dickenkoordinate  $z$  untersucht. Die erste Belastungsspannung liegt mit  $300,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  noch im elastischen Bereich der Untersuchung. Die elastische Grenzbelastung beträgt für das gegebene System  $337,53 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ . Die Anzahl der Gaußpunkte ist für diese Auswertung unerheblich, da ein linearer Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen über die gesamte Dicke gegeben ist. Für die zweite Belastungsspannung von  $390,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  ist ein Teil des Querschnittes plastifiziert. Die Ergebnisse der Vergleichsspannung und aller Spannungskomponenten haben einen vernachlässigbaren Unterschied in Abhängigkeit von der Gaußpunktanzahl über die Dicke ergeben. Daher werden im Folgenden die Ergebnisse der höchsten Integrationsordnung für diese Belastungsspannung aufgeführt. Als letztes werden die Ergebnisse mit einer linearen Belastung von  $490,80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  dargestellt. Hier hat sich gezeigt, dass die niedrigste Gaußpunktordnung nicht mehr ausreicht, um die Spannungen über die Dicke möglichst gut zu approximieren. Eine Gaußordnung von 10 kann die Spannungen über die Dicke schon gut abbilden, jedoch sollen die Ergebnisse mit der Integrationsordnung 30 verglichen werden, da diese Ordnung die beste Last-Verschiebungskurve erzielt hat.

Für die Belastungsspannung  $T_1^1 = 300,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  sind die Ergebnisse der Vergleichsspannung in Abbildung 6.41 und die der Spannungen  $S_{xx}$  und  $S_{yy}$  in 6.42 und 6.43 abgebildet. Der Verlauf der Spannungen  $S_{zz}$ ,  $S_{xz}$ ,  $S_{xy}$  und  $S_{yz}$  ergibt sich für alle Modelle und Integrationsordnungen zu null. Diese Ergebnisse stimmen mit den Spannungsannahmen in der analytischen Lösung überein, die sich hiermit bestätigen. Es zeigt sich, dass alle Modelle im elastischen Bereich die analytische Lösung gut abbilden können. Modell 2 ist also ausreichend um eine reine Biegung für elastische Untersuchungen darzustellen. Dieses Ergebnis zeigte sich auch schon im Abschnitt 6.1.1 für eine unendlich lange Zylinderschale unter reiner Biegung.

Die Spannungen über die Dicke, die sich für die Belastungsspannung  $T_1^1 = 390,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  berechnen, sind in den Abbildungen 6.44, 6.45, 6.46, 6.47 und 6.48 dargestellt. Die



**Abb. 6.41:** Vergleichsspannung über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 300,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$



**Abb. 6.42:**  $S_{xx}$  über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 300,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$



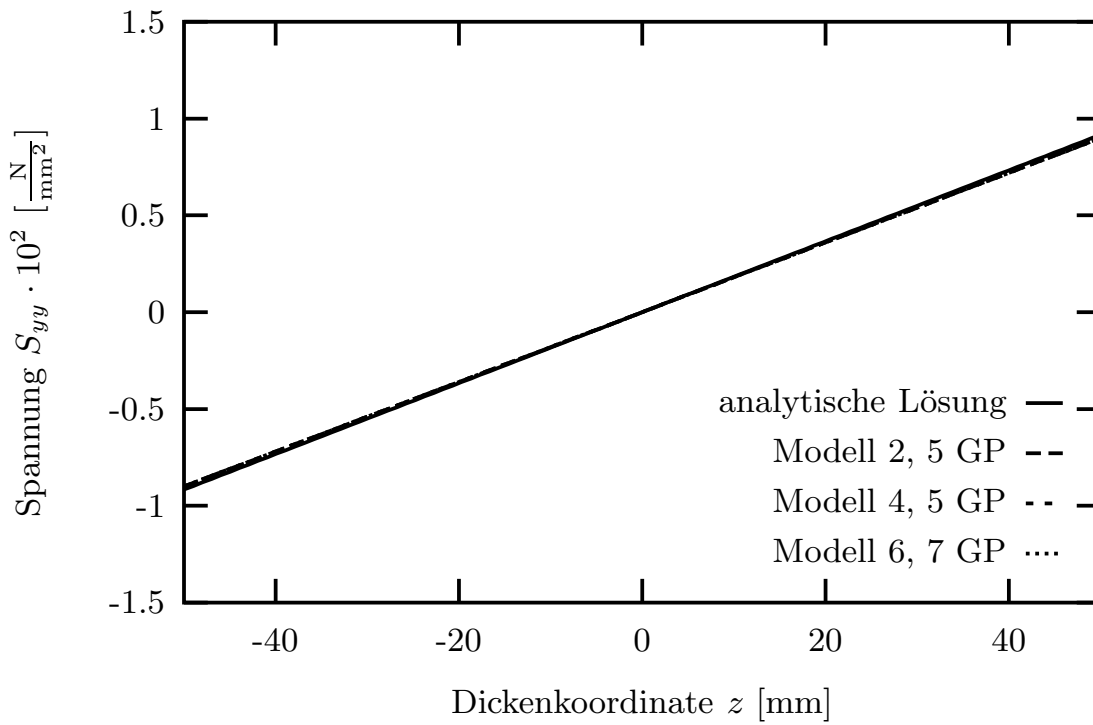


Abb. 6.43:  $S_{yy}$  über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 300,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

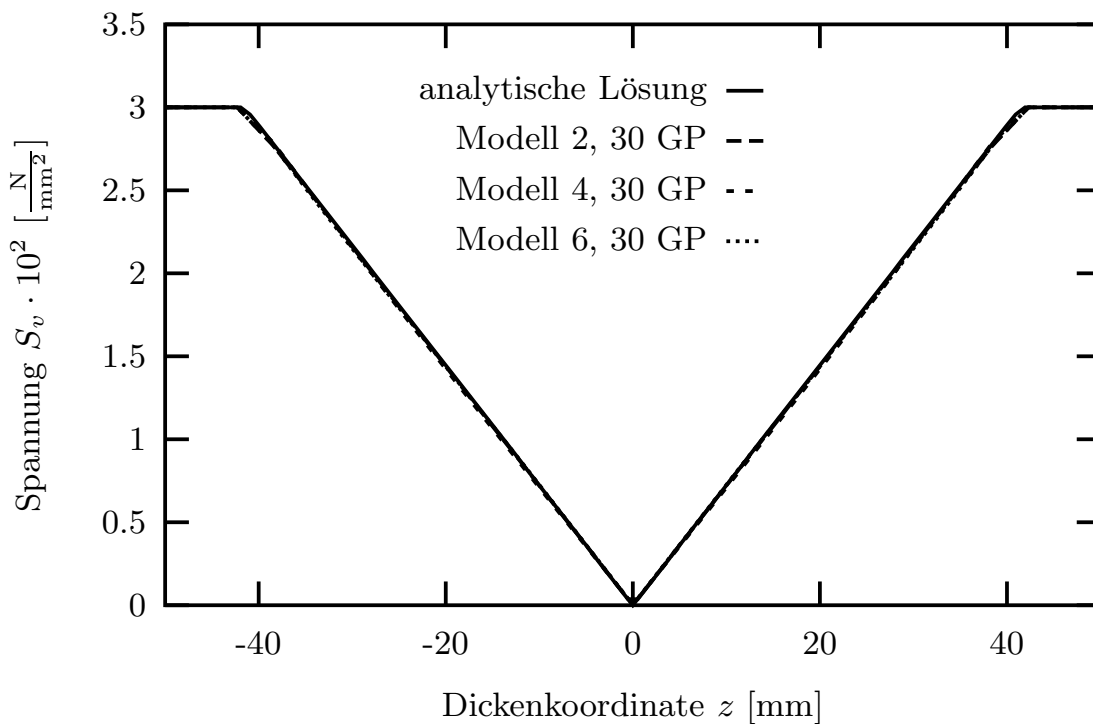


Abb. 6.44: Vergleichsspannung über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 390,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

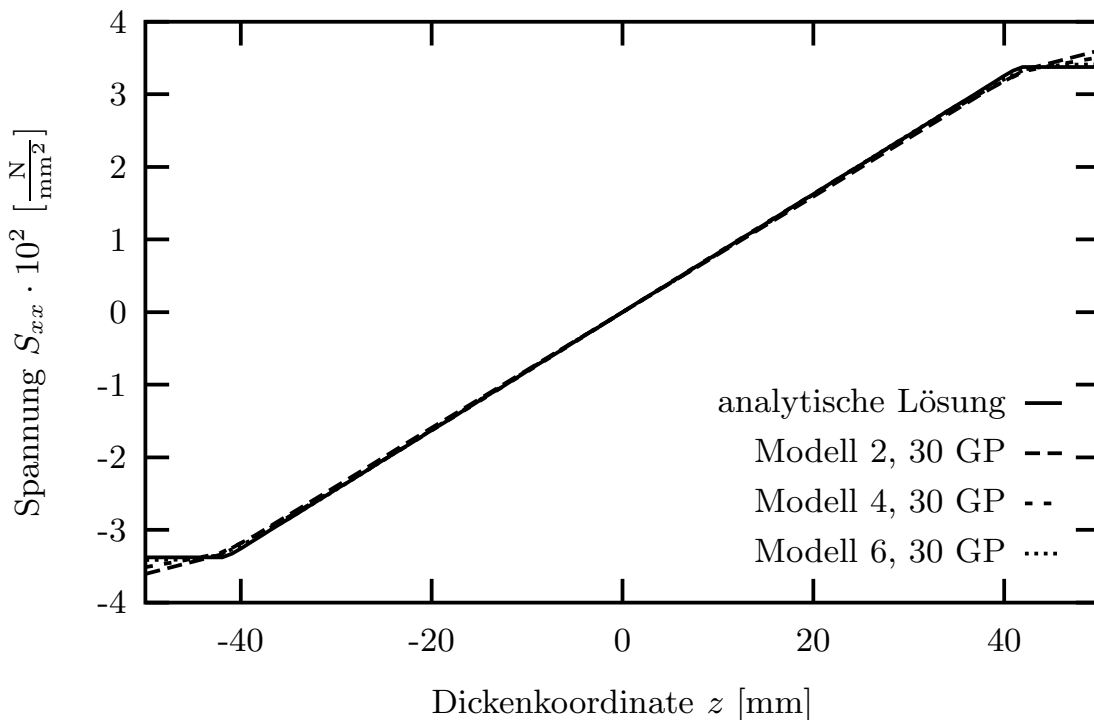


Abb. 6.45:  $S_{xx}$  über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 390,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

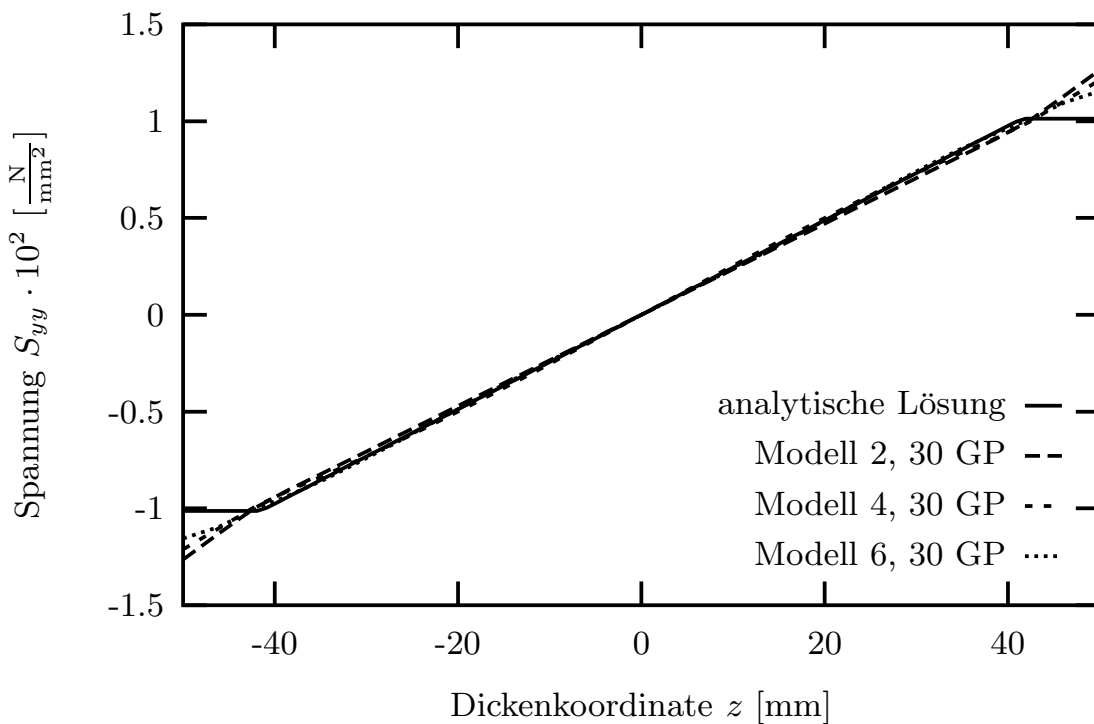


Abb. 6.46:  $S_{yy}$  über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 390,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

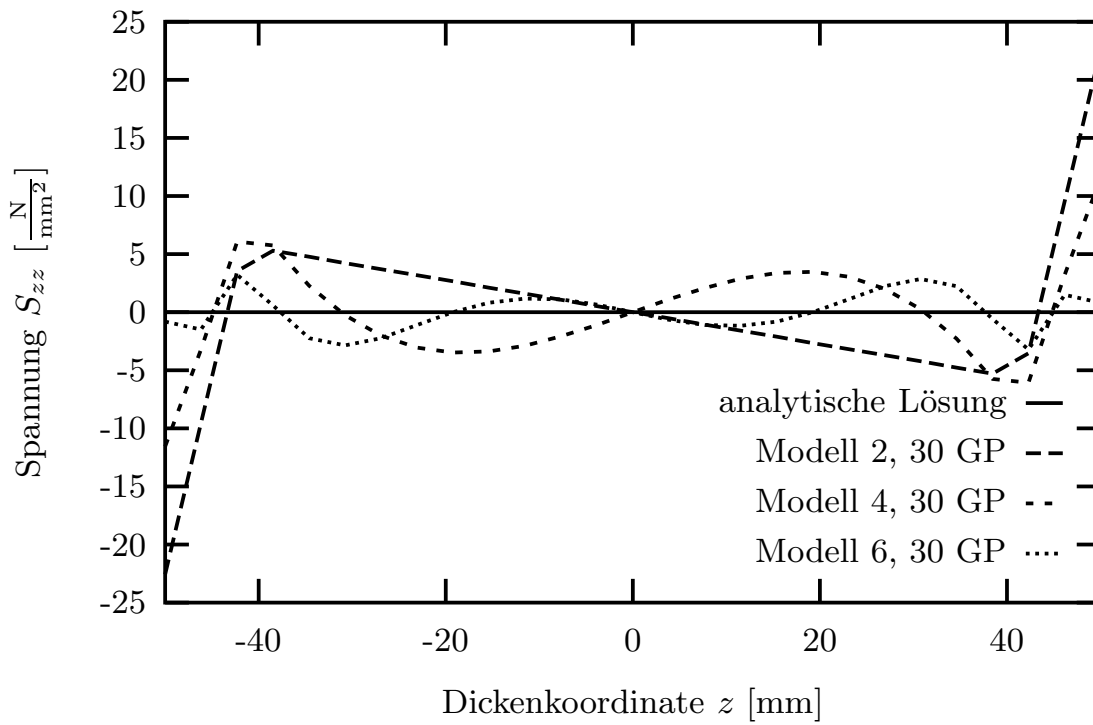


Abb. 6.47:  $S_{zz}$  über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 390,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

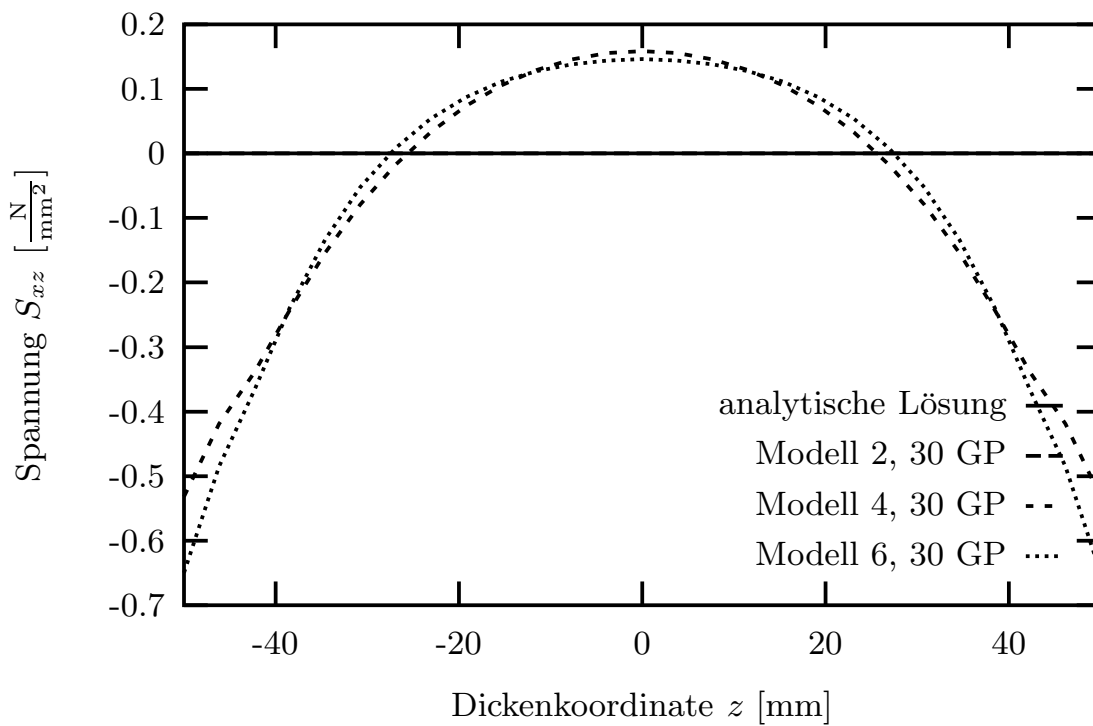
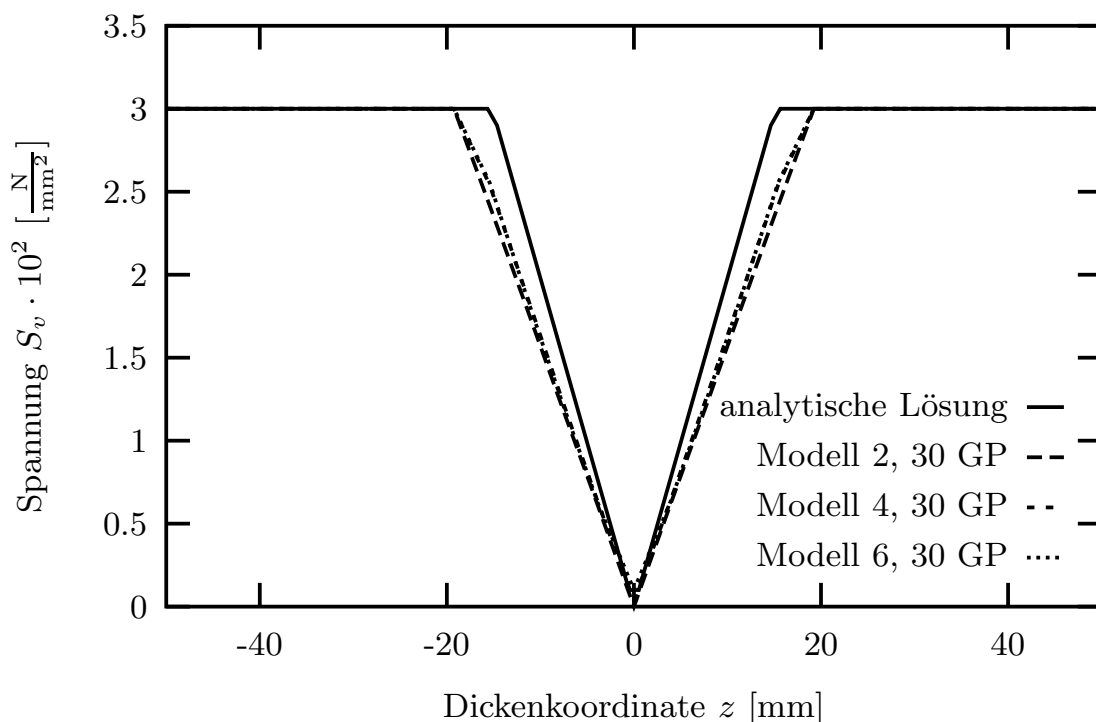


Abb. 6.48:  $S_{xz}$  über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 390,00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Spannungen  $S_{xy}$  und  $S_{yz}$  berechnen sich auch hier für alle Modelle mit beliebiger Integrationsordnung zu null. Durch den ebenen Verzerrungszustand in  $y$ -Richtung, der durch die gewählten Randbedingungen gesetzt ist, sind diese Ergebnisse zu erwarten und stimmen mit der analytischen Lösung überein. Die Vergleichsspannung wird von den drei untersuchten Modellen gut abgebildet. Die Ergebnisse der Spannungen  $S_{xx}$  und  $S_{yy}$  stimmen im elastischen Bereich gut mit der analytischen Lösung überein. In den plastifizierten Bereich kann nur Modell 6 den unstetigen Verlauf der Spannung  $S_{xx}$  über die Dicke gut darstellen. Für alle drei Modelle wächst die Spannung  $S_{yy}$  im plastischen Bereich weiter an. Da die inelastischen Dehnungen keinen volumetrischen Anteil besitzen, wird mit zunehmender Plastifizierung des Querschnittes der inelastische Bereich nahezu inkompressibel. Es ist zu erwarten, dass sich in diesem Bereich die Spannung  $S_{yy}$  zu  $0,5 \cdot S_{xx}$  einstellt, da die Querkontraktionszahl für inkompressible Materialien  $\nu = 0,5$  beträgt. Für den teilplastifizierten Querschnitt ergeben sich Spannungsergebnisse für  $S_{zz}$  und  $S_{xz}$ . Die Werte dieser Spannungen liegen jedoch unter 1% der maximalen Vergleichsspannung und sind somit zu vernachlässigen.

Mit der Belastungsspannung  $T_1^n = 490,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$  ergeben sich die in Abbildung 6.49, 6.50, 6.51, 6.52 und 6.53 dargestellten Spannungsverläufe. Alle untersuchten Modelle erzielen für die 30 Gaußpunkte einen fast identischen Verlauf der Vergleichsspannung über die Dicke, wie aus Abbildung 6.49 deutlich wird. Jedoch ist die Lösung unterschiedlich zu der analytisch ermittelten. Der Grund hierfür kann sein, dass die Annahme der Spannung  $S_{yy} = \nu \cdot S_{xx}$  mit  $\nu = 0,3$  nicht mehr erfüllt ist. Der Spannungsverlauf  $S_{xx}$  in Abbildung 6.50 nähert sich mit steigendem Modell immer mehr



**Abb. 6.49:** Vergleichsspannung über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 490,80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

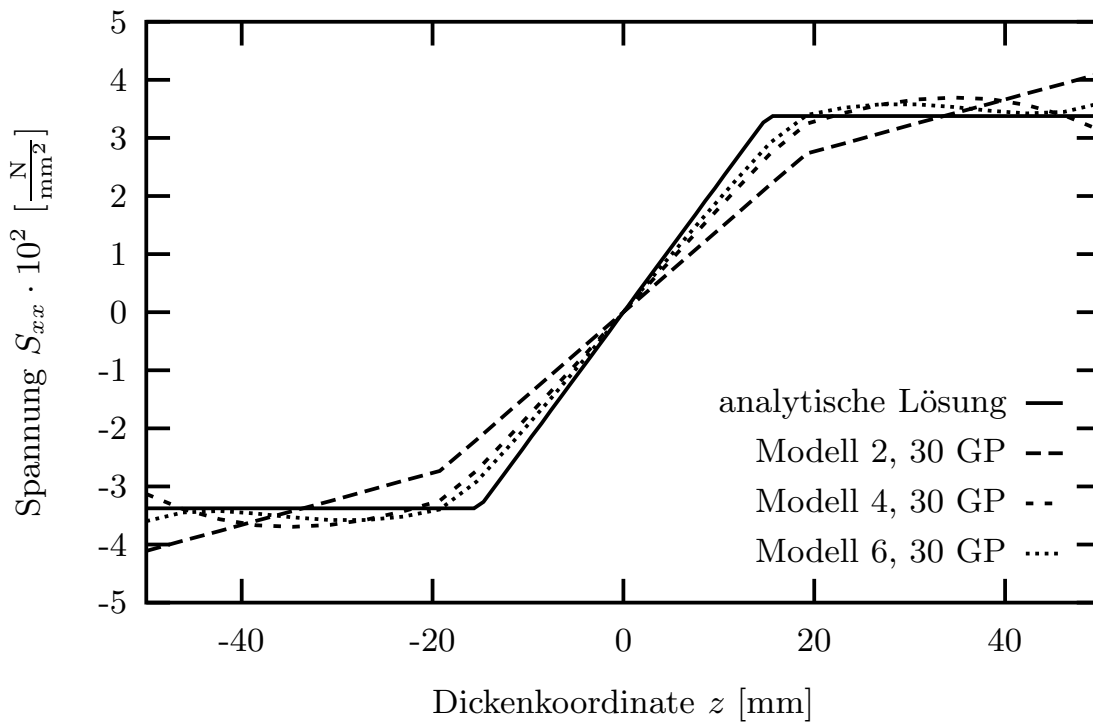


Abb. 6.50:  $S_{xx}$  über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 490,80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

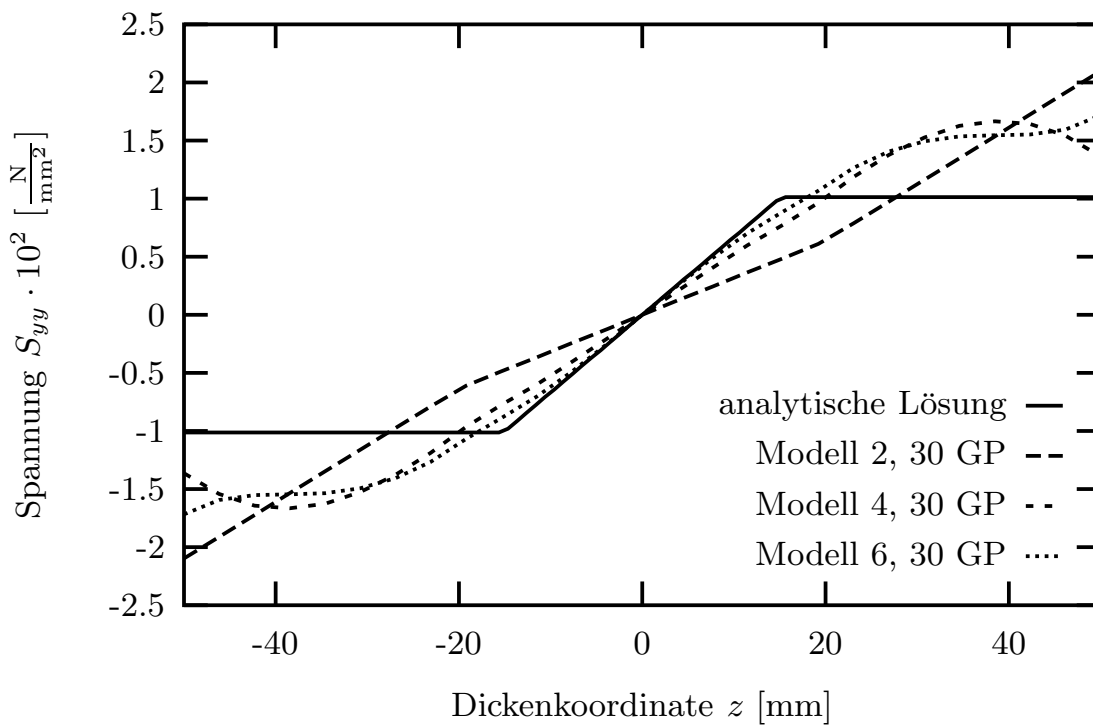


Abb. 6.51:  $S_{yy}$  über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 490,80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

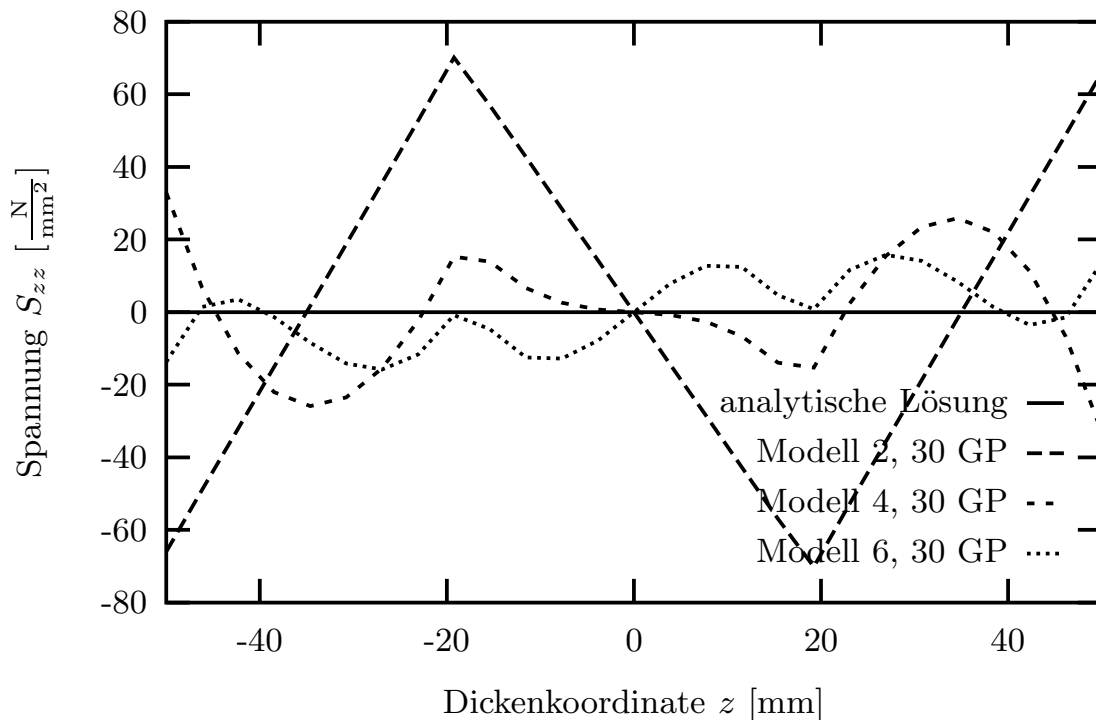


Abb. 6.52:  $S_{zz}$  über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 490,80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

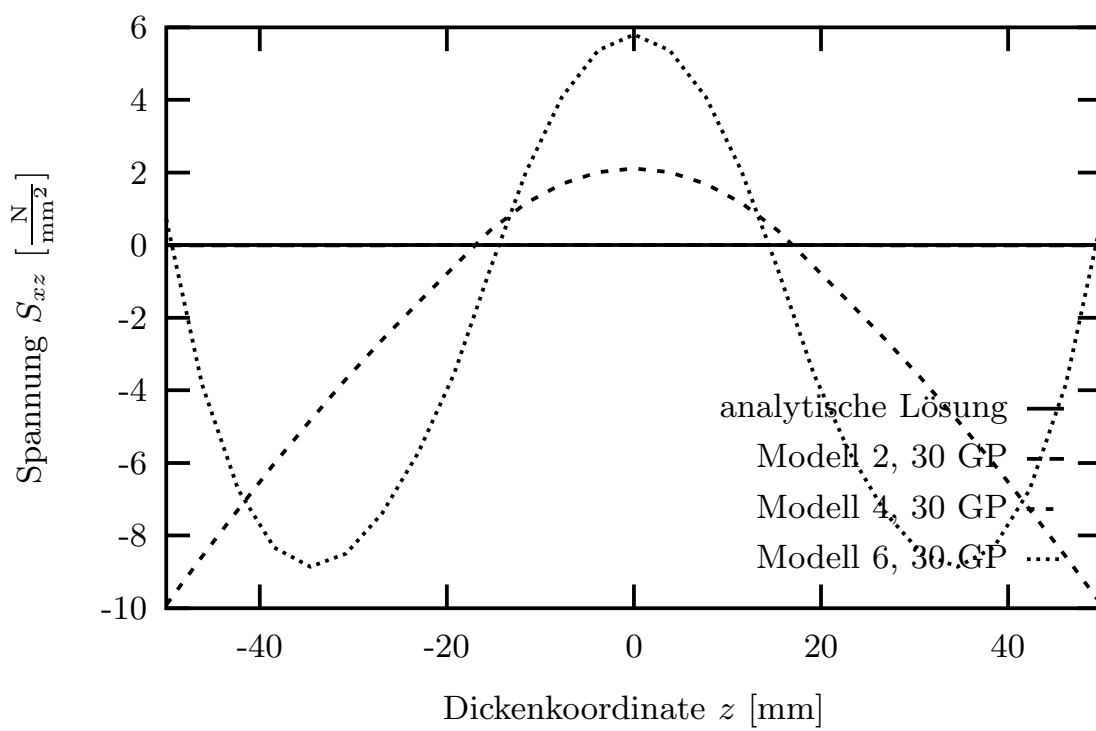


Abb. 6.53:  $S_{xz}$  über die Dicke im Punkt **B** für  $T_1^n = 490,80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

der analytischen Lösung an. Hier wird sichtbar, dass höhere Modelle den unstetigen Verlauf der Spannung über die Dicke sehr viel besser abbilden können. Auch für die Spannung  $S_{yy}$  ist dieses Verhalten ablesbar. Jedoch nähert sich der Maximalwert nicht der analytischen Lösung, sondern ergibt sich für die Hälfte des plastifizierten Bereiches zu  $0,5 \cdot S_{xx}$ . Durch das nahezu inkompressible Materialverhalten bei fortschreitender Plastifizierung ist dieses Ergebnis erklärbar. Die Spannungen  $S_{xx}$  und  $S_{yy}$  nähern sich im elastischen Bereich des Querschnittes mit steigendem Modell immer mehr der analytischen Lösung. Für niedrige Modelle wird das Materialverhalten in diesem Bereich also zu weich approximiert, woraus folgt, dass im plastifizierten Bereich des Querschnittes ein zu steifes Verhalten auftritt. Für Modell 2 wird ein Locking in den Spannungen im plastischen Bereich beobachtet, das aus einer zu geringen Approximation der Verschiebungen über die Dicke entsteht. Dieser Versteifungseffekt ist jedoch nur in den Spannungskomponenten und nicht in der Vergleichsspannung zu beobachten. Die Oszillation der Spannungen  $S_{zz}$  und  $S_{xz}$  nimmt mit höheren Modellen zu. Sie entsteht durch den unstetigen Verlauf der ersten beiden Normalspannungen über die Dicke. Da auf der Ober- und Unterseite der Platte keine Flächenlasten wirken, müssen beide Spannungen für  $z = \pm 50$  mm null werden. Mit dem Modell 6 wird diese Bedingung annähernd erfüllt.

### 6.5.5 Ergebnis für reine Biegung mit ideal-plastischem Materialverhalten

Die Auswertung der Last-Verschiebungskurven für Modell 2, 4 und 6 hat gezeigt, dass keines der hier untersuchten Modelle das VOLUME-Locking beinhaltet. Mit einer Gaußordnung von 10 kann die plastische Grenzbelastung gut angenähert werden. Um jedoch eine glattere Abbildung der Last-Verschiebungskurve zu erhalten, sollte diese Ordnung erhöht werden, da auftretende Knicke zu numerischen Schwierigkeiten führen. Eine Möglichkeit dieses Problem zu entschärfen kann die Verwendung der NEWTON-COTES-Integration mit ihren äquidistanten Stützstellen sein.

Ist der Querschnitt teilplastifiziert, so stellt sich im plastischen Bereich die Spannung  $S_{yy} = 0,5 \cdot S_{xx}$  ein. Hier dominieren die inelastischen Verzerrungen gegenüber den elastischen und es stellt sich in diesem Teil ein nahezu inkompressibles Materialverhalten ein. Dieses Verhalten kann nur mit Modell 4 und 6 annähernd abgebildet werden. Modell 2 zeigt ein Versteifungsverhalten, da sich die Spannung  $S_{yy}$  am Rand des Querschnittes nicht einem konstanten Verlauf annähern.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein hierarchisches Schalenelement basierend auf der  $p$ -Version der Finite-Element Methode vorgestellt. Das mathematische Modell wurde aus der allgemeinen dreidimensionalen Kontinuumsmechanik hergeleitet und geometrisch linearisiert. Die hierarchischen Schalenmodelle sind durch eine polynomiale Beschreibung der Verschiebungen über die Dicke der Schale definiert, wobei die Modellnummer den Polynomgrad der Verschiebungen in Dickenrichtung der Schale angibt. Der Verzerrungstensor, der sich aus den Verschiebungen ableiten lässt, ist nicht vereinfacht worden, wie es bei herkömmlichen Schalentheorien gängig ist. Dadurch wurde die Konvergenz der Modelle zur dreidimensionalen Lösung sichergestellt.

Die Theorie der hierarchischen Schalenmodelle basiert auf einem zweidimensionalen krummlinigen Kontinuum, das einen dreidimensionalen Spannungszustand abbilden kann. Hierarchische Schalenmodelle können daher mit beliebigen Materialmodellen gekoppelt werden. In dieser Arbeit wurden zwei isotrope Materialien zugrunde gelegt, ein elastisches und ein elastisch-plastisches mit exponentieller isotroper Verfestigung. Für das linear-elastische Stoffgesetz von HOOKE ist eine Annahme für die Metrikkomponenten des Kontinuums getroffen worden, die in den numerischen Analysen keine Auswirkung gezeigt hat. Diese Annahme wurde auch für die Vorabintegration der Randlasten über die Dicke verwendet. Das nichtlineare Materialgesetz wird mit einer numerischen Vorabintegration über die Dicke an jedem Gaußpunkt verwendet, wobei die Anzahl der Integrationspunkte frei gewählt werden kann. Eine Erhöhung dieser Anzahl ergibt keine wesentliche Steigerung der Rechenzeit, wie es bei Volumenelementen der Fall ist.

Für die Implementation der hierarchischen Schalenmodelle wurde die  $p$ -Version der Finite-Element Methode verwendet. Hierarchische Ansatzfunktionen, die eine gute Kondition des Gleichungssystems sicherstellen, bilden einen reduzierten oder vollen Ansatzraum der Approximation. Eine exakte Abbildungsfunktion für rotationsymmetrische Geometrien wurde mit Hilfe der *Blending-Function*-Methode hergeleitet, wodurch eine Anbindung an ein CAD-Programm ermöglicht wird. Die für die Implementation benötigten Matrizen wurden für die hierarchischen Schalenmodelle systematisch aufgestellt. Das nichtlineare Gleichungssystem wurde mittels des NEWTON-RAPHSON-Verfahren gelöst, wobei zur Berechnung des nichtlinearen Materialverhaltens der RADIAL-RETURN-Algorithmus herangezogen wurde.

Die Untersuchung und Überwindung des modellabhängigen POISSON-THICKNESS-Lockings wurde in einer theoretischen Studie sowie in einem numerischen Analyse aufgezeigt. An ausgewählten Beispielen wurde die Robustheit der  $p$ -Version der Finite-Element Methode gegen verzerrte Elemente, SHEAR-, MEMBRANE- und VOLUME-Locking gezeigt und das plastische Materialverhalten der hierarchischen Schalenmodelle untersucht. Die wichtigsten Ergebnisse werden im Folgenden kurz zusammengefasst:



- Das POISSON-THICKNESS-Locking wird für biegedominierte Probleme mit dem Modell 2 überwunden.
- Für stark verzerrte Elemente sollte der Polynomgrad im Vergleich zu rechtwinkligen Elementen um eins höher gewählt werden.
- Das SHEAR-Locking wird ab dem Polynomgrad  $p = 4$ , bei sehr dünne Schalen mit  $p = 5$ , überwunden.
- Das MEMBRANE-Locking wird erst ab einem Polynomgrad von  $p = 5$  überwunden.
- Um das VOLUME-Locking in der Mittelfläche zu überwinden, muss der Polynomgrad im Vergleich zu einer Berechnung mit der Querkontraktionszahl  $\nu = 1/3$  um zwei höher gewählt werden.
- Layerelemente müssen je nach Geometrie, Randbelastung und Auflagerbedingung sowie bei freien Rändern verwendet werden, um eine gute Konvergenz der Energienorm sicherzustellen.
- Bei plastischen Untersuchungen muss für eine gute Abbildung des Systemverhaltens das Modell 2 und höher gewählt werden.
- Für eine gute Abbildung der Systemantwort während der Plastifizierung muss die Anzahl der Gaußpunkte über die Dicke der Schale mindestens 10 sein.
- Sollen alle Spannungskomponenten über die Dicke der Schale gut approximiert werden, muss bei einer inelastischen Berechnung eines biegedominierten Problems Modell 4 und höher gewählt werden.

Das in dieser Arbeit entwickelte hierarchische Schalenmodell, das für die  $p$ -Version der Finite-Element Methode implementiert und getestet wurde, besitzt für dünne und dicke Schalenstrukturen eine hohe Robustheit, Genauigkeit und Effizienz. Es kann bei elastischen und inelastischen Untersuchungen eingesetzt werden und zeigt hier schon für eine geringe Approximationsstufe mit wenigen Freiheitsgraden gute Ergebnisse.

Eine Weiterentwicklung auf dem Gebiet der hierarchischen Schalenmodelle wäre eine Erweiterung auf große Formänderungen. Die kontinuumsmechanische Herleitung der Theorie kann hierfür zugrunde gelegt werden, da sie auf einem Verschiebungsvektor mit Verschiebungsvariablen basiert. Das in dieser Arbeit beschriebene strukturierte Vorgehen von der Kontinuumsmechanik bis hin zur Implementation kann dabei einen guten Leitfaden darstellen. Des Weiteren kann das hierarchische Schalenelement mit neuen Materialmodellen gekoppelt werden. Mit einem transversal isotropen Materialverhalten kann es in vielen Bereichen der Automobilbranche bzw. der Luft- und Raumfahrt eingesetzt werden.

Eine Verbesserung der Approximation des bestehenden Materialmodelles kann für die hierarchischen Schalenmodelle und auch die  $p$ -Version der Finite-Elementmethode eine andere numerische Integration darstellen. Da das Systemverhalten während der

---

Plastifizierung stark von der Lage und Anzahl der Integrationspunkte abhängig ist und nicht von einem höheren Modell oder einer genaueren Approximation des Verschiebungsfeldes, kann eine gleichmäßige Verteilung der Integrationspunkte eine Verbesserung der Ergebnisse bewirken. Zur genauen Abbildung eines inelastischen Prozesses werden mehr Integrationspunkte benötigt als für einen elastischen Prozess. Daher sollte die NEWTON-COTES-Integration für inelastische Materialmodelle bessere Ergebnisse erzielen und effizienter sein.

Da die Theorie der Modelle auf einem zweidimensionalen krummlinigen Kontinuum basiert, ist die Abbildung der Geometrie über die Schalenmittelfläche definiert. Eine Anbindung an ein CAD-Programm kann mit der in dieser Arbeit beschriebenen Methode erfolgen. Des Weiteren besteht die Möglichkeit, die zweidimensionale krummlinige Geometrieabbildung mit einem 2D- $p$ -Netzgenerator zu koppeln. Solche Netzgeneratoren existieren bereits für die  $p$ -Version der Finite-Element Methode. Eine automatische dreidimensionale Vernetzung einer gegebenen Geometrie ist für die  $p$ -Methode noch nicht vorhanden. Ein erheblicher Arbeitsaufwand würde durch diese Kopplung eingespart und der Simulationsablauf weitgehend automatisiert.

In den numerischen Untersuchungen hat sich gezeigt, dass die Konditionszahl des Gleichungssystems mit steigendem Modell fällt. Eine Verbesserung wird durch eine veränderte theoretische Beschreibung der hierarchischen Schalenmodelle erzielt, wie es RAMM ET.AL. in [98] vorschlägt. Ein numerischer Prekonditionierer, der eventuell schon auf Elementebene eingesetzt wird, kann ebenfalls die Kondition des Gleichungssystems und dadurch auch die Rechenzeit des iterativen Gleichungslösers verbessern. Hierfür muss keine aufwendige Veränderung der Implementation der hierarchischen Schalenmodelle erfolgen.

Zum Schluss wird noch eine Kopplung mit einem Volumenelement basierend auf der  $p$ -Version der Finite-Element Methode vorgeschlagen. Für Strukturen, die in großen Bereichen eine Schalentragswirkung besitzen, aber in einigen kleinen Bereichen, in denen sich zum Beispiel Beulsteifen oder Randträger befinden oder dreidimensionale Effekte durch Knicke in der Geometrie entstehen, kann eine solche Kopplung für dünne und dicke Schalen eine effiziente Lösung darstellen.



## A Spezielle Kapitel der Tensoralgebra

### A.1 Pull-Back- und Push-Forward-Operationen

Der PULL-BACK-Operator  $\Phi_{\diamond}^*(.)$  und der PUSH-FORWARD-Operator  $\Phi_{\star}^{\diamond}(.)$  beschreiben einen Transformationszusammenhang zwischen Größen in der Referenz- und der Momentankonfiguration. Diese Rückwärts- oder Vorwärtstransformation wird mit Hilfe des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  definiert und ist abhängig von den gewählten Komponenten der Größe, wobei  $\diamond \in \{b, \sharp, \setminus, /\}$  den entsprechenden Operator kennzeichnet .

PULL-BACK- und PUSH-FORWARD-Operationen für einen Vektor  $\mathbf{A}$  in der Referenz- bzw.  $\mathbf{a}$  in der Momentankonfiguration:

$$\begin{aligned}
 \Phi_b^*(\mathbf{a}) &= \Phi^*(a_i \mathbf{g}^i) & \Phi_{\star}^b(\mathbf{A}) &= \Phi_{\star}(A_i \mathbf{G}^i) \\
 &= \mathbf{F}^T \mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{F} = a_i \mathbf{G}^i & &= \mathbf{F}^{-T} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{F}^{-1} = A_i \mathbf{g}^i \\
 \Phi_{\sharp}^*(\mathbf{a}) &= \Phi^*(a^i \mathbf{g}_i) & \text{bzw.} & \Phi_{\star}^{\sharp}(\mathbf{A}) &= \Phi_{\star}(A^i \mathbf{G}_i) \\
 &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{F}^{-T} = a^i \mathbf{G}_i & &= \mathbf{F} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{F}^T = A^i \mathbf{g}_i
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

PULL-BACK- und PUSH-FORWARD-Operationen für einen zweistufigen Tensor  $\mathbf{B}$  in der Referenz- bzw.  $\mathbf{b}$  in der Momentankonfiguration:

$$\begin{aligned}
 \Phi_b^*(\mathbf{b}) &= \Phi^*(b_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j) & \Phi_{\star}^b(\mathbf{B}) &= \Phi_{\star}(B_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) \\
 &= \mathbf{F}^T \mathbf{b} \mathbf{F} = b_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j & &= \mathbf{F}^{-T} \mathbf{B} \mathbf{F}^{-1} = B_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \\
 \Phi_{\sharp}^*(\mathbf{b}) &= \Phi^*(b^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) & \Phi_{\star}^{\sharp}(\mathbf{B}) &= \Phi_{\star}(B^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j) \\
 &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{F}^{-T} = b^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j & \text{bzw.} & &= \mathbf{F} \mathbf{B} \mathbf{F}^T = B^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \\
 \Phi_{\setminus}^*(\mathbf{b}) &= \Phi^*(b_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j) & \Phi_{\star}^{\setminus}(\mathbf{B}) &= \Phi_{\star}(B_{\cdot j}^i \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^j) \\
 &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{b} \mathbf{F} = b_{\cdot j}^i \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^j & &= \mathbf{F} \mathbf{B} \mathbf{F}^{-1} = B_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \\
 \Phi_{/}^*(\mathbf{b}) &= \Phi^*(b_i^{\cdot j} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j) & \Phi_{\star}^{\prime}(\mathbf{B}) &= \Phi_{\star}(B_i^{\cdot j} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_j) \\
 &= \mathbf{F}^T \mathbf{b} \mathbf{F}^{-T} = b_i^{\cdot j} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_j & &= \mathbf{F}^{-T} \mathbf{B} \mathbf{F}^T = B_i^{\cdot j} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

PULL-BACK- und PUSH-FORWARD-Operationen für einen Zweipunktensor  $\mathbf{B}$ , bei dem die erste Basis in der Momentan- und die zweite Basis in der Referenzkonfigu-

ration definiert ist.

$$\begin{aligned}
\Phi_b^*(\mathbf{B}) &= \Phi^*(B_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}^j) & \Phi_*^b(\mathbf{B}) &= \Phi_*(B_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}^j) \\
&= \mathbf{F}^T \mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j & &= \mathbf{B} \mathbf{F}^{-1} = B_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \\
\Phi_b^*(\mathbf{B}) &= \Phi^*(B_i^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_j) & \Phi_*^b(\mathbf{B}) &= \Phi_*(B_i^j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^j) \\
&= \mathbf{F}^T \mathbf{B} = B_i^j \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_j & &= \mathbf{B} \mathbf{F}^{-1} = B_i^j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \\
\Phi_{\#}^*(\mathbf{B}) &= \Phi^*(B^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j) & \text{bzw.} & \Phi_{\#}^{\#}(\mathbf{B}) = \Phi_*(B^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j) \\
&= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} = B^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j & &= \mathbf{B} \mathbf{F}^T = B^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \\
\Phi_{\#}^*(\mathbf{B}) &= \Phi^*(B_i^j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^j) & \Phi_{\#}^{\#}(\mathbf{B}) &= \Phi_*(B_i^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_j) \\
&= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} = B_i^j \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^j & &= \mathbf{B} \mathbf{F}^T = B_i^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j
\end{aligned} \tag{A.3}$$

PULL-BACK- und PUSH-FORWARD-Operationen für einen Zweipunktstensor  $\mathbf{B}$ , bei dem die erste Basis in der Referenz- und die zweite Basis in der Momentankonfiguration definiert ist.

$$\begin{aligned}
\Phi_b^*(\mathbf{B}) &= \Phi^*(B_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}^j) & \Phi_*^b(\mathbf{B}) &= \Phi_*(B_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}^j) \\
&= \mathbf{B} \mathbf{F} = B_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j & &= \mathbf{F}^{-T} \mathbf{B} = B_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \\
\Phi_b^*(\mathbf{B}) &= \Phi^*(B_i^j \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^j) & \Phi_*^b(\mathbf{B}) &= \Phi_*(B_i^j \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_j) \\
&= \mathbf{B} \mathbf{F} = B_i^j \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^j & &= \mathbf{F}^{-T} \mathbf{B} = B_i^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j \\
\Phi_{\#}^*(\mathbf{B}) &= \Phi^*(B^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}_j) & \text{bzw.} & \Phi_{\#}^{\#}(\mathbf{B}) = \Phi_*(B^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}_j) \\
&= \mathbf{B} \mathbf{F}^{-T} = B^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j & &= \mathbf{F} \mathbf{B} = B^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \\
\Phi_{\#}^*(\mathbf{B}) &= \Phi^*(B_i^j \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_j) & \Phi_{\#}^{\#}(\mathbf{B}) &= \Phi_*(B_i^j \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^j) \\
&= \mathbf{B} \mathbf{F}^{-T} = B_i^j \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_j & &= \mathbf{F} \mathbf{B} = B_i^j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j
\end{aligned} \tag{A.4}$$

## B Schalentheorien

Die hier aufgeführten Schalentheorien werden für rotationssymmetrische Geometrien aufgestellt, wobei die in Abschnitt 4 aufgeführten geometrischen Annahmen gelten.

### B.1 Reduziertes Materialmodell für Schalentheorien

Die grundlegende Annahme für die Reduktion des Materialmodells ist, dass  $\bar{S}^{33} = 0$  gesetzt wird. Diese Annahme wird bei herkömmlichen Schalentheorien verwendet, wodurch kein dreidimensionaler Spannungszustand abgebildet werden kann.

Für das allgemeine Materialgesetz von HOOKE in Gleichung (3.64) und (3.65) lässt sich, durch Verwendung der Annahme  $\bar{S}^{33} = 0$ , die Normalverzerrung in Dickenrichtung durch die Normalverzerrungen in der Schalenmittelfläche ausdrücken.

$$\bar{\varepsilon}_{33} = -\frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \left( \frac{1}{A_{11}} \bar{\varepsilon}_{11} + \frac{1}{A_{22}} \bar{\varepsilon}_{22} \right) \quad (\text{B.1})$$

Diese Gleichung wird wieder in das allgemeine Materialgesetz von HOOKE eingesetzt und es ergibt sich das reduzierte Stoffgesetz der Schalentheorie. Für orthogonale Basen lauten die Gleichungen der Spannungen

$$\begin{aligned} \bar{S}^{11} &= \frac{1}{A_{11}} \frac{2\mu}{(\lambda + 2\mu)} \left( 2(\lambda + \mu) \frac{1}{A_{11}} \bar{\varepsilon}_{11} + \lambda \frac{1}{A_{22}} \bar{\varepsilon}_{22} \right) \\ \bar{S}^{22} &= \frac{1}{A_{22}} \frac{2\mu}{(\lambda + 2\mu)} \left( \lambda \frac{1}{A_{11}} \bar{\varepsilon}_{11} + 2(\lambda + \mu) \frac{1}{A_{22}} \bar{\varepsilon}_{22} \right) \\ \bar{S}^{33} &= 0 \\ \bar{S}^{12} &= \frac{1}{A_{11} A_{22}} 2\mu \bar{\varepsilon}_{12} \\ \bar{S}^{23} &= \frac{1}{A_{22}} 2\mu \kappa \bar{\varepsilon}_{23} \\ \bar{S}^{31} &= \frac{1}{A_{11}} 2\mu \kappa \bar{\varepsilon}_{13} . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

### B.2 Membrantheorie

Damit ein Membranspannungszustand nach der Membrantheorie vorliegt, müssen die in [21] aufgeführten Annahmen erfüllt sein. Sie lassen sich wie folgt zusammen fassen:

1. stetige Veränderung der Schalendicke

2. stetig differenzierbare Schalengeometrie
3. stetig differenzierbarer Belastungsverlauf
4. membrangerechte Lagerungen

Die Membrantheorie geht von konstanten Verschiebungen über die Dicke der Schale aus und beschreibt somit ein ebenes Problem, da der Verschiebungsvektor nur von  $\Theta^1, \Theta^2$  abhängig ist.

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Bei den Verzerrungen werden die linearen Terme in  $\Theta^3$  vernachlässigt und es wird ein ebener Spannungszustand in der  $\Theta^1, \Theta^2$ -Ebene angenommen, d.h. es gilt  $\bar{S}^{33} = \bar{S}^{23} = \bar{S}^{31} = 0$ . Für die Verzerrungskomponenten folgt

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= u_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 u_3 \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= u_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 u_3 \\ \bar{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2} (u_1|_2 + u_2|_1), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

wobei sich die Verzerrung  $\bar{\varepsilon}_{33}$  nach (B.1) berechnet. Alle Verzerrungen sind also konstant über die Dicke, sodass diese Schalentheorie für Membranspannungszustände geeignet ist, da keine Versteifungen in dem Modell enthalten sind.

Werden die Gleichungen der Normaldehnungen in das reduzierte Materialmodell in (B.2) eingesetzt, so ergeben sich konstante Spannungsverläufe für  $\bar{S}^{11}$ ,  $\bar{S}^{22}$  und  $\bar{S}^{12}$ . Mit den drei Gleichgewichtsbedingungen können die drei Spannungen bestimmt werden. Daher stellen Schalen, die mit der Membrantheorie berechnet werden können, ein statisch bestimmtes Problem dar.

### B.3 Biegetheorie nach Kirchhoff-Love

Der Biegetheorie von KIRCHHOFF-LOVE liegen folgende Annahmen zugrunde:

1. Eben- und Normalbleiben der Normalen nach der Verformung (BERNOULLI- bzw. KIRCHHOFF-Hypothese)
2. keine Dickenänderung nach der Verformung

Das Ebenbleiben des Querschnittes bewirkt einen linearen Verlauf der Verschiebungen in  $\Theta^3$ . Aus den übrigen Annahmen folgen die Bedingungen

$$\overset{1}{u}_1 = -\frac{1}{\sqrt{A_{11}}}\overset{0}{u}_3|_1, \quad \overset{1}{u}_2 = -\frac{1}{\sqrt{A_{22}}}\overset{0}{u}_3|_2 \quad \text{und} \quad \overset{1}{u}_3 = 0, \quad (\text{B.5})$$

wodurch sich die Komponenten des Verschiebungsvektors zu

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} \overset{0}{u}_1 \\ \overset{0}{u}_2 \\ \overset{0}{u}_3 \end{pmatrix} - \Theta^3 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{A_{11}}}\overset{0}{u}_3|_1 \\ \frac{1}{\sqrt{A_{22}}}\overset{0}{u}_3|_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

ergeben. Diese Theorie basiert auf drei unabhängigen Verschiebungen und ist  $C^1$ -stetig, da der Verschiebungsvektor die ersten Ableitungen der gesuchten Komponenten beinhaltet.

Bei den Verzerrungen werden die quadratischen Terme in  $\Theta^3$  vernachlässigt. Die linearisierten Verzerrungen berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= \overset{0}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 + \Theta^3 \left( -B_{.1}^1 \overset{0}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 - \frac{1}{\sqrt{A_{11}}}\overset{0}{u}_3|_{11} \right) \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \overset{0}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 + \Theta^3 \left( -B_{.2}^2 \overset{0}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 - \frac{1}{\sqrt{A_{22}}}\overset{0}{u}_3|_{22} \right) \\ \bar{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2}(\overset{0}{u}_1|_2 + \overset{0}{u}_2|_1) - \Theta^3 \frac{1}{2} \left( (B_{.1}^1 \overset{0}{u}_1|_2 + B_{.2}^2 \overset{0}{u}_2|_1) + \left( \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} + \frac{1}{\sqrt{A_{22}}} \right) \overset{0}{u}_3|_{12} \right) \\ \bar{\varepsilon}_{23} &= \frac{1}{2} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{A_{22}}} \right) \overset{0}{u}_3|_2 \\ \bar{\varepsilon}_{31} &= \frac{1}{2} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \right) \overset{0}{u}_3|_1, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

wobei sich die Verzerrung  $\bar{\varepsilon}_{33}$  nach (B.1) berechnet, da auch hier ein reduziertes Materialmodell zugrunde liegt.

Werden die Gleichungen der Verzerrungen in das reduzierte Materialmodell in (B.2) eingesetzt, so folgen lineare Spannungsverläufe für  $\bar{S}^{11}$ ,  $\bar{S}^{22}$  und  $\bar{S}^{12}$  und konstante Verläufe für  $\bar{S}^{23}$  und  $\bar{S}^{31}$ . Der Schubkorrekturfaktor  $\kappa = \frac{5}{6}$  berücksichtigt parabol-förmige Schubspannungsverläufe, die nicht automatisch durch die Kinematik dieser Theorie gegeben sind.

### B.3.1 Membranspannungszustand

Werden für den Membranspannungszustand die linearen Anteile in den Spannungen  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  zu null gesetzt, so folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \overset{0}{u}_3|_{11} &= -\sqrt{A_{11}} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_1|_1 + \sqrt{A_{11}} A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 \\ \overset{0}{u}_3|_{22} &= -\sqrt{A_{22}} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_2|_2 + \sqrt{A_{22}} A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$



Durch Einsetzen dieser Beziehungen in die Definition der Verzerrungen in (B.7) ergibt sich für die Normalverzerrungen

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11} &= {}^0u_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 {}^0u_3 \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= {}^0u_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 {}^0u_3.\end{aligned}\tag{B.9}$$

Da sich die Verzerrung  $\bar{\varepsilon}_{33}$  nach Gleichung (B.1) berechnet, sind alle drei Normalverzerrungen konstant über die Dicke und es ist keine Versteifung im Modell vorhanden.

### B.3.2 Biegespannungszustand

Für den Biegespannungszustand werden die konstanten Anteile in den Spannungen  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  zu null gesetzt und es folgen die Beziehungen

$${}^0u_1|_1 = A_{11} B_{.1}^1 {}^0u_3 \quad \text{und} \quad {}^0u_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 {}^0u_3.\tag{B.10}$$

Damit ergeben sich die Normalverzerrungen zu

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11} &= -\Theta^3 \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} {}^0u_3|_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= -\Theta^3 \frac{1}{\sqrt{A_{22}}} {}^0u_3|_{22}.\end{aligned}\tag{B.11}$$

Alle drei Normaldehnungen sind linear über die Dicke und es ist keine Versteifung im Modell vorhanden.

## B.4 Biegetheorie nach Naghdi

Der Biegetheorie nach NAGHDI [59] liegen folgende Annahmen zugrunde:

1. Ebenbleiben der Normalen nach der Verformung (Geradenhypothese)
2. keine Dickenänderung nach der Verformung .

Das Ebenbleiben des Querschnittes bewirkt einen linearen Verlauf der Verschiebungen in  $\Theta^3$ . Aus der Annahme, dass die Schale keine Dickenänderung erfährt, folgt

$${}^1u_3 = 0,\tag{B.12}$$

wodurch sich die Komponenten des Verschiebungsvektors zu

$$[\mathbf{u}] = \begin{pmatrix} {}^0u_1 \\ {}^0u_2 \\ {}^0u_3 \end{pmatrix} + \Theta^3 \begin{pmatrix} {}^1u_1 \\ {}^1u_2 \\ 0 \end{pmatrix}\tag{B.13}$$

ergeben. Diese Theorie basiert auf fünf unabhängige Verschiebungen und ist  $C^0$ -stetig, da der Verschiebungsvektor keine Ableitungen der gesuchten Komponenten beinhaltet.

Bei den linearisierten Verzerrungen werden die quadratischen Terme in  $\Theta^3$  vernachlässigt und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{11} &= \overset{0}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 + \Theta^3 \left( -B_{.1}^1 \overset{0}{u}_1|_1 + A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 + \overset{1}{u}_1|_1 \right) \\
\bar{\varepsilon}_{22} &= \overset{0}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 + \Theta^3 \left( -B_{.2}^2 \overset{0}{u}_2|_2 + A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 + \overset{1}{u}_2|_2 \right) \\
\bar{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2} (\overset{0}{u}_1|_2 + \overset{0}{u}_2|_1) - \Theta^3 \frac{1}{2} \left( (B_{.1}^1 \overset{0}{u}_1|_2 + B_{.2}^2 \overset{0}{u}_2|_1) - (\overset{1}{u}_1|_2 + \overset{1}{u}_2|_1) \right) \\
\bar{\varepsilon}_{23} &= \frac{1}{2} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_2 + \frac{1}{2} \overset{0}{u}_3|_2 + \frac{1}{2} \overset{1}{u}_2 \\
\bar{\varepsilon}_{31} &= \frac{1}{2} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_1 + \frac{1}{2} \overset{0}{u}_3|_1 + \frac{1}{2} \overset{1}{u}_1,
\end{aligned} \tag{B.14}$$

wobei sich die Verzerrung  $\bar{\varepsilon}_{33}$  nach (B.2) berechnet, da ein reduziertes Materialmodell zugrunde liegt.

Auch hier ergeben sich mit (B.2) die Spannungsverläufe  $\bar{S}^{11}$ ,  $\bar{S}^{22}$  und  $\bar{S}^{12}$  linear über  $\Theta^3$  und  $\bar{S}^{23}$  und  $\bar{S}^{31}$  konstant über  $\Theta^3$ . Der Schubkorrekturfaktor  $\kappa$  wird auch hier zu  $\frac{5}{6}$  gesetzt.

#### B.4.1 Membranspannungszustand

Wird nur der konstante Anteil von  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  berücksichtigt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\overset{1}{u}_1|_1 &= B_{.1}^1 \overset{0}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 \\
\overset{0}{u}_3|_2 &= B_{.2}^2 \overset{0}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3
\end{aligned} \tag{B.15}$$

und die Normalverzerrungen in (B.14) lauten

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{11} &= \overset{0}{u}_1|_1 - A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 \\
\bar{\varepsilon}_{22} &= \overset{0}{u}_2|_2 - A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Alle drei Normalverzerrungen sind konstant über die Dicke und es ist keine Versteifung im Modell vorhanden.

#### B.4.2 Biegespannungszustand

Aus dem linearen Anteil von  $\bar{S}^{11}$  und  $\bar{S}^{22}$  folgt

$$\overset{0}{u}_1|_1 = A_{11} B_{.1}^1 \overset{0}{u}_3 \quad \text{und} \quad \overset{0}{u}_2|_2 = A_{22} B_{.2}^2 \overset{0}{u}_3 \tag{B.17}$$

und die Normalverzerrungen vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_{11} &= \Theta^3 u_1|_1 \\ \bar{\varepsilon}_{22} &= \Theta^3 u_2|_2 .\end{aligned}\tag{B.18}$$

Alle drei Normaldehnungen sind linear über die Dicke und es ist keine Versteifung im Modell vorhanden.

## Literaturverzeichnis

- [1] J. Altenbach and H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner Stuttgart, 1994.
- [2] U. Andelfinger. *Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke*. PhD thesis, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, 1991.
- [3] J. Argyris and H.P. Mlejnek. *Die Methode der Finiten Elemente*, volume 2. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1987.
- [4] Leissa. A.W. Singularity considerations in membrane, plate and shell behaviors. *International Journal of Solids and Structures*, 38:3341–3353, 2001.
- [5] I. Babuška and L. Li. Hierarchic modeling of plates. *Computers & Structures*, 40(2):419–430, 1991.
- [6] I. Babuška and J.T. Oden. Preface. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 133:xi–xii, 1996.
- [7] I. Babuška and B.A. Szabó. On the rates of convergence of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:323–341, 1982.
- [8] Y. Bařar and W.B. Krätzig. *Mechanik der Flächentragwerke*. Friedr. Vieweg & Sohn, 1985.
- [9] Y. Bařar and D. Weichert. *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [10] K.J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.
- [11] J. Bellmann and E. Rank. Die  $p$ - und  $hp$ -Version der Finite-Elemente-Methode oder: Lohnen sich höherwertige Elemente? *Bauingenieur*, 64:67–72, 1989.
- [12] P.G. Bergan and C.A. Felippa. A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 50:25–69, 1985.
- [13] J. Betten. *Kontinuumsmechanik Elasto-, Plasto- und Kriechmechanik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- [14] M. Bischoff. *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. PhD thesis, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Bericht Nr. 30, 1999.

- [15] M. Bischoff and E. Ramm. Solid-like shell or shell-like solid formulation? A personal view. In W. Wunderlich, editor, *Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*. ECCM'99 München, Germany, 1999.
- [16] C. N. Bongmba. *Ein finites anisotropes Materialmodell auf der Basis der Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur Beschreibung duktiler Schädigung*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilung aus dem Institut für Mechanik, Nr. 127, 2001.
- [17] M. Braun, M. Bischoff, and E. Ramm. Nonlinear shell formulations for complete three-dimensional constitutive laws including composites and laminates. *Computational Mechanics*, 15:1–18, 1994.
- [18] H. Bröker. *Integration von geometrischer Modellierung und Berechnung nach der p-Version der FEM*. Berichte aus dem Bauwesen. Shaker Verlag, 2001.
- [19] H. Bröker and K. Preusch. Flachdeckenauflagerungen bei einem Reissner-Mindlin Plattenelement. In Grosche, A., Schneider, U., and Schumann, R, editors, *10. Forum Bauinformatik, Junge Wissenschaftler forschen, Weimar '98*, volume 147 of 4, pages 148–155. Fortschritt-Berichte VDI, 1998.
- [20] O. T. Bruhns. *Kontinuumsmechanik: Einführung in die Beschreibung inelastischen Materialverhaltens*. Skript am Lehrstuhl für Technische Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1990.
- [21] O. T. Bruhns. *Höhere Festigkeitslehre*. Skript am Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 2000.
- [22] O. T. Bruhns and T. Lehmann. *Elemente der Mechanik II*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1994.
- [23] O.T. Bruhns, H. Xiao, and A. Meyers. Self-consistent eulerian rate type elastoplasticity models based upon the logarithmic stress rate. *International Journal of Plasticity*, 15:479–520, 1999.
- [24] N. Büchter and E. Ramm. 3d-extension of nonlinear shell equations based on the enhanced assumed strain concept. In Ch. Hirsch, editor, *Computational Methods in Applied Sciences*, pages 55–62. Elsevier Science Publisher B.V., 1992.
- [25] L. Chilton and M. Suri. On the selection of a locking-free *hp* element for elasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:2045–2062, 1997.
- [26] J.R. Cho and J.T. Oden. A priori error estimations of *hp*-finite element approximations for hierarchical models of plate- and shell-like structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 132:135–177, 1996.

- [27] G.R. Cowper, G.M. Lindberg, and M.D. Olson. A shallow shell finite element of triangular shape. *International Journal of Solids and Structures*, 6:1133–1156, 1970.
- [28] M. Dauge, A. Rössle, and Z. Yosibash. Higher-order responses of three-dimensional elastic plate structures and their numerical illustration by  $p$ -FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:1353–1376, 2002.
- [29] A. Düster. *High order finite elements for three-dimensional, thin-walled nonlinear continua*. Berichte aus dem Bauwesen. Shaker-Verlag, 2002.
- [30] A. Düster, H. Bröker, and E. Rank. The  $p$ -version of the finite element method for three-dimensional curved thin walled structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52:673–703, 2001.
- [31] A. Düster and E. Rank. The  $p$ -version of the finite element method compared to an adaptive  $h$ -version for the deformation theory of plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:1925–1935, 2001.
- [32] A. Düster and E. Rank. The  $p$ -version finite element approach for two- and three-dimensional problems of the  $J_2$  flow theory with non-linear isotropic hardening. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:49–63, 2002.
- [33] E.N. Dvorkin and K.-J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations*, 1:77–88, 1984.
- [34] A. Eckstein. *Zur Theorie und Finite-Element-Simulation von Schalen mit großen inelastischen Dehnungen und duktilen Schädigungen*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Mitteilung Nr. 99-3, 1999.
- [35] N.B. Edgar and K.S. Surana. On the conditioning number and the selection criteria for  $p$ -version approximation functions. *Computers & Structures*, 60(4):521–530, 1996.
- [36] ESRD, St. Louis, USA. *Stress Check Analysis Guide*, 1996.
- [37] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design*. Academic Press, 4 edition, 1997.
- [38] J. Fish and R. Guttal. The  $p$ -version of finite element method for shell analysis. *Computational Mechanics*, 16:328–340, 1995.
- [39] J. Fish and R. Guttal. On the assumed strain formulation with selective polynomial order enrichment for  $p$ -version shells. *Computers & Structures*, 63(5):899–913, 1997.

- [40] NAFEMS The International Association for the Engineering Analysis Community. [http://www.vpbailey.demon.co.uk/NAFEMS\\_benchmarks/benchmark.html](http://www.vpbailey.demon.co.uk/NAFEMS_benchmarks/benchmark.html).
- [41] K. Girkmann. *Flächentragwerke*. Springer-Verlag, 1963.
- [42] W.J. Gordon and C.A. Hall. Transfinite element methods: Blending-Function interpolation over arbitrary curved element domains. *Numerische Mathematik*, 21:109–129, 1973.
- [43] W.J. Gordon and Ch.A. Hall. Construction of curvilinear co-ordinate systems and application to mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7:461–477, 1973.
- [44] A.E. Green and W. Zerna. *Theoretical Elasticity*. Oxford University Press, 2 edition, 1968.
- [45] H. Hakula, Y. Leino, and Pitkäranta. Scale resolution, locking, and high-order finite element modelling of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 133:157–182, 1996.
- [46] P. Haupt. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [47] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, New York, 1950.
- [48] S.M. Holzer and C. Haußer. Ergebnisverbesserung von Finite-Element-Berechnungen durch exakte Geometriemodellierung. *Forschung im Ingenieurwesen*, 56:65–70, 1990.
- [49] S.M. Holzer, E. Rank, and H. Werner. An implementation of the  $hp$ -version of the finite element method for Reissner-Mindlin-plate problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:459–471, 1990.
- [50] S.M. Holzer and Z. Yosibash. The  $p$ -version of the finite element method in incremental elasto-plastic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:1859–1878, 1996.
- [51] J. Hoschek and D. Lasser. *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner Stuttgart, 1989.
- [52] B. Jeremic and C. Xenophontos. Application of the  $p$ -version of the finite element method to elastoplasticity with localization of deformation. *Communication in Numerical Methods in Engineering*, 15:867–876, 1999.
- [53] R.M. Jones. *Mechanics of Composite Material*. Scripta Book Company, 1975.
- [54] A. S. Khan and S. Huang. *Continuum Theory of Plasticity*. John Wiley & Sons, 1995.

- [55] G. Királyfalvi and B. A. Szabó. Quasi-regional mapping for the  $p$ -version of the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 27:85–97, 1997.
- [56] R. Krause. *Multiscale computations with a combined  $h$ - and  $p$ -version of the finite-element method*. PhD thesis, Universität Dortmund, Numerische Methoden und Informationsverarbeitung, 1996.
- [57] R.H. MacNeal. A simple quadrilateral shell element. *Computers & Structures*, 8:175–183, 1978.
- [58] J.E. Marsden and J.R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, New York, 1983.
- [59] P.M. Naghdi. The theory of shells and plates. In S. Flügge, editor, *Handbuch der Physik*, volume VI a 2, pages 425–640. Springer, Berlin, 1972.
- [60] J.C. Nagtegaal, D.M. Parks, and J.R. Rice. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4:153–177, 1974.
- [61] Q. Nie and Q. Niu.  $p$ -version large strain finite element formulation and application in elastic-plastic deformation. *Computers & Structures*, 65(5):761–765, 1997.
- [62] J.T. Oden and J.R. Cho. Adaptive  $hpq$ -finite element methods of hierarchical models for plate- and shell-like structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136:317–345, 1996.
- [63] R. W. Ogden. *Non-linear Elastic Deformations*. Dover Publications, Mineola, New York, 1984.
- [64] H. Parisch. A continuum-based shell theory for non-linear applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:1855–1883, 1995.
- [65] A.G. Peano. Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending. *Computers & Mathematics with Applications*, 2:211–224, 1976.
- [66] J. Pitkäranta, Y. Leino, O. Ovaskainen, and J. Piila. Shell deformation states and the finite element method: A benchmark study of cylindrical shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128:81–121, 1995.
- [67] J. Pitkäranta and M. Suri. Design principles and error analysis for reduced-shear plate-bending finite elements. Technical report, University of Maryland Baltimore, Department of Mathematics and Statistics, 1995.
- [68] K. Preusch. Untersuchung von Querkräften und Flachdeckenauflagerungen bei einem Reissner-Mindlin-Plattenelement. Bericht 97-1-NMI, Universität Dortmund, Fakultät Bauwesen, Numerische Methoden und Informationsverarbeitung, March 1996.



- [69] K. Preusch and O.T. Bruhns. Advantages of the  $p$ -version of the FEM for a linear NAGHDI shell element. *ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 81 suppl.(4):885–886, 2001.
- [70] K. Preusch and O.T. Bruhns. The  $p$ -version for hierarchic shell models based on continuum mechanics. In F.G. Rammerstorfer H.A. Mang and J. Eberhardsteiner, editors, *WCCM V, Fifth World Congress on Computational Mechanics*. Vienna University of Technology, Austria, July 7-12, 2002, Vienna, Austria.
- [71] K. Preusch and O.T. Bruhns. A linear  $p$ -version shell element: geometrical mapping and numerical advantages. In A. Samartin M. Papadrakakis and E. Onate, editors, *IASS-IACM 2000, Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures*. ISASR-NTUA CD-ROM, June 4-7 2000, Chania-Crete, Greece.
- [72] S.A. Ragon, Z. Gürdal, and L.T. Watson. A comparison of three algorithms for tracing nonlinear equilibrium paths of structural systems. *International Journal of Solids and Structures*, 39:689–698, 2002.
- [73] E. Ramm and W.A. Wall. Shells in advanced computational environment. In H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, and J. Eberhardsteiner, editors, *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics ( WCCM V )*. Vienna University of Technology, Austria, ISBN 3-9501554-0-6, 2002.
- [74] E. Rank and I. Babuška. An expert system for the optimal mesh design in the  $hp$ -version of the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:2087–2106, 1987.
- [75] E. Rank, R. Krause, and K. Preusch. On the accuracy of  $p$ -version elements for the Reissner-Mindlin plate problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:51–67, 1998.
- [76] E. Rank, M. Rucker, A. Düster, and H. Bröker. The efficiency of the  $p$ -version finite element method in a distributed computing environment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52:589 – 604, 2001.
- [77] L.A. Ricardo, B.A. Szabó, and C. Schwab. Hierarchic models for laminated plates and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172:79–107, 1999.
- [78] C. Sansour. A theory and finite element formulation of shells at finite deformations involving thickness change: Circumventing the use of rotation tensor. *Archive of Applied Mechanics*, 65:194–216, 1995.
- [79] C. Schwab. A-posteriori modeling error estimation for hierarchic plate models. *Numerische Mathematik*, 74:221–259, 1996.
- [80] C. Schwab.  *$p$ - and  $hp$ -Finite Element Methods*. Claredon Press, Oxford, 1998.

- [81] C. Schwab, M. Suri, and C. Xenophontos. The *hp* finite element method for problems in mechanics with boundary layers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 157:311–333, 1998.
- [82] H.R. Schwarz. *Methode der finiten Elemente*. Teubner, Stuttgart, 1984.
- [83] A.C. Scordelis and K.S. Lo. Computer analysis of cylindrical shells. *Journal of the American Concrete Institute*, 61:539–561, 1964.
- [84] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag New York, 1998.
- [85] J.C. Simo and M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1595–1638, 1990.
- [86] J.C. Simo and R.L. Taylor. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22:649–670, 1986.
- [87] J.C. Simo and R.L. Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1985:101–118, 48.
- [88] G. C. Spencer. *An Introduction to Plasticity*. Nederlandse Boekdrukk Industrie N.V., 1968.
- [89] K.S. Surana and R.M. Sorel. Curved shell elements based on hierarchical *p*-approximation in the thickness direction for linear static analysis of laminated composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1393–1420, 1990.
- [90] K.S. Surana and R.M. Sorel. *p*-version hierarchical three dimensional curved shell element for elastostatics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:649–676, 1991.
- [91] M. Suri. Analytical and computational assessment of locking in the *hp* finite element method. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 133:347–371, 1996.
- [92] B. A. Szabó. Mesh design for the *p*-version of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 55:181–197, 1986.
- [93] B.A. Szabó. Hierarchic plate and shell models based on *p*-extension. In A.K. Noor, T. Belytschko, and J.C. Simo, editors, *Analytical and computational models of shells*, volume 3, pages 317–331. New York, NY, 1989.
- [94] B.A. Szabó and R.L. Actis. Finite element analysis in professional practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 133:209–228, 1996.

- [95] B.A. Szabó, R.L. Actis, and S. Holzer. Solution of elastic-plastic stress analysis problems by the  $p$ -version of the finite element method. In J. Flaherty and I.B. Babuška, editors, *Modeling mesh generation, and adaptive numerical methods for partial differential equations*, volume 133, pages 395–416. IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 75, Springer, New York, 1995.
- [96] B.A. Szabó and I. Babuška. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [97] B.A. Szabó and G.J. Sahrman. Hierarchic plate and shell models based on  $p$ -extension. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26:1855–1881, 1988.
- [98] W.A. Wall, M. Gee, and E. Ramm. The challenge of a three-dimensional shell formulation - the conditioning problem -. In A. Samartin M. Papadrakakis and E. Onate, editors, *IASS-IACM 2000, Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures*. ISASR-NTUA CD-ROM, June 4-7 2000, Chania-Crete, Greece.
- [99] M.L. Wilkins. Calculation of elastic-plastic flow. In B. Alder and S. Fernbach, editors, *Fundamental Methods in Hydrodynamics*, volume 3 of *Methods in Computational Physics, Advances in Research and Applications*. Academic Press, New York, London, 1964.
- [100] H.T.Y. Yang, S. Saigal, A. Masud, and R.K. Kapania. A survey of recent shell finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:101–127, 2000.
- [101] Z. Yosibash. Hierarchic elastic plate models represent (?) 3-d plates - visualizing boundary layers and high order responses using  $p$ -fem. In M. Papadrakakis, A. Samartin, and E. Onate, editors, *IASS-IACM 2000, Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures*. ISASR-NTUA CD-ROM, June 4-7 2000, Chania-Crete, Greece.
- [102] O.C. Zienkiewicz and Taylor R.L. *The Finite Element Method*, volume 2. McGraw-Hill Book Company, fourth edition, 1989.
- [103] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, volume 1. McGraw-Hill Book Company, fourth edition, 1989.

### Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1      Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen (Dezember 1976)
- Nr. 2      Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts (Juni 1978)
- Nr. 3      Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten  
Stoffverhalten (Januar 1976)
- Nr. 4      Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen  
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen (Januar 1976)
- Nr. 5      Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter  
Profilmittellinie (Februar 1976)
- Nr. 6      Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen  
Formänderungen (Januar 1977)
- Nr. 7      H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung  
orthotroper Platten (März 1977)
- Nr. 8      Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen (April 1977)
- Nr. 9      Berend Fischer:  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei  
endlichen Verzerrungen (April 1977)
- Nr. 10     Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells (Mai 1977)
- Nr. 11     Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung (Juni 1977)
- Nr. 12     Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter  
elastoplastischer Wellen (Juli 1977)
- Nr. 13     Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity (März 1978)
- Nr. 14     Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse  
(Juli 1978)
- Nr. 15     Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung  
von Spannungsrestriktionen (August 1979)
- Nr. 16     Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen  
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen (Juli 1979)

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates (Dezember 1979)
- Nr. 18 Uwe Kohlberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates (Juli 1979)
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken (Januar 1980)
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods (März 1980)
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity (Juni 1980)
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung (Dezember 1980)
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode (Februar 1981)
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen (Februar 1981)
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems (März 1981)
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells (Juni 1981)
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast (September 1981)
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem (September 1981)
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft (November 1981)
- Nr. 30 F.-J. Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem (Dezember 1981)
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory (Juni 1982)
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen (Juli 1982)

- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität (Dezember 1982)
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells (Dezember 1982)
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente (März 1983)
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten (Juli 1983)
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse (August 1983)
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen (November 1983)
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen (Dezember 1983)
- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode (Dezember 1983)
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden (Februar 1984)
- Nr. 42 Diemar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepassten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme (Februar 1984)
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz (Dezember 1984)
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent (April 1985)
- Nr.45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme (Juni 1985)
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems (Juli 1985)
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren (August 1985)

- Nr. 48 J. Chrosielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare  
Aufbereitung im Konzept MESY (Oktober 1985)
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung  
(Dezember 1985)
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern (Februar 1987)
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am  
Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte (März 1987)
- Nr. 52 W. Tampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity (Juli 1987)
- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie (Dezember 1987)
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien  
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich (Januar 1988)
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells (März 1988)
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Finite strain theory of rods (April 1988)
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit  
Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells (Mai 1988)
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken (Juni 1988)
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last (Juli  
1988)
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und  
Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen (August 1988)
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes  
(Juli 1988)
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory  
(Dezember 1988)
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988 (Januar 1989)
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics (Juli 1989)

- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten (Juni 1989)
- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder (Juni 1989)
- Nr. 67 Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode (November 1989)
- Nr. 68 Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturelle Systeme (November 1989)
- Nr. 69 Berthold Schieck:  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien (November 1989)
- Nr. 70 Frank Szepan:  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung (Dezember 1989)
- Nr. 71 Christian Scholz:  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen (Dezember 1989)
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory (Dezember 1989)
- Nr. 73 Werner Fornefeld:  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells (Januar 1990)
- Nr. 74 J. Sączuk/H. Stumpf:  
On statical shakedown theorems for non-linear problems (April 1990)
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua (April 1991)
- Nr. 76 Ulfert Rott:  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen (April 1991)
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:  
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1991)
- Nr. 78 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991 (Dezember 1991)
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:  
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau (Mai 1992)



- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:  
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie (Juli 1992)
- Nr. 83 J. Pohé:  
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis (Februar 1993)
- Nr. 84 U. Kikillus:  
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15 (Mai 1993)
- Nr. 85 T. Guo:  
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material (Juni 1993)
- Nr. 86 Achim Menne:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern (Januar 1994)
- Nr. 87 Uwe Folchert:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen (Januar 1994)
- Nr. 88 Jörg Körber:  
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle (April 1994)
- Nr. 89 Peer Schießle:  
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung (April 1994)
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:  
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1994)
- Nr. 91 Christoph Beerens:  
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik (Juli 1994)
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:  
Finite elastoplasticity with microstructure (November 1994)
- Nr. 93 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994 (Dezember 1994)
- Nr. 94 Armin Lenzen:  
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen (Dezember 1994)
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:  
Mechanics of Irregular Shell Structures (Dezember 1994)
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells (Dezember 1994)
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:  
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller (Februar 1995)
- Nr. 98 Ralf Podleschny:  
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse (April 1995)
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:  
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl (Juli 1995)

- Nr. 100 Marc Mittelbach:  
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell (Dezember 1995)
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:  
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie (Mai 1996)
- Nr. 102 Marcus Otto:  
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen (Juni 1996)
- Nr. 103 Horst Lanzerath:  
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode (Juli 1996)
- Nr. 104 Andreas Wichtmann  
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der Reckalterung (August 1996)
- Nr. 105 Bjarne Fosså  
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stoffen (Oktober 1996)
- Nr. 106 Khanh Cha Le:  
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur (Dezember 1996)
- Nr. 107 Holger Behrens:  
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allgemeinen diskreten Modellansätzen (Januar 1997)
- Nr. 108 Johannes Moosheimer:  
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden (Juli 1997)
- Nr. 109 Dirk Klaus Anding:  
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze (Oktober 1997)
- Nr. 110 Stephan Weng:  
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen (Dezember 1997)
- Nr. 111 Michael Straßberger:  
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit Hilfe piezo-keramischer Aktoren (Dezember 1997)
- Nr. 112 Hans-Jörg Becker:  
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines monokristallinen Stoffgesetzes (Dezember 1997)
- Nr. 113 Thomas Nerzak:  
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen (Dezember 1997)
- Nr. 114 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen (März 1998)
- Nr. 115 Jan Steinhausen:  
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle hydrodynamischer Kupplungen (August 1998)

- Nr. 116 Thomas Pandorf:  
Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung bei schlagbelasteten Biegeproben (August 1998)
- Nr. 117 Claus Oberste-Brandenburg:  
Ein Materialmodell zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität (Juni 1999)
- Nr. 118 Michael Märtens:  
Regelung mechanischer Strukturen mit Hilfe piezokeramischer Stapelaktoren (Dezember 1999)
- Nr. 119 Dirk Kamarys:  
Detektion von Systemveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse (Dezember 1999)
- Nr. 120 Wolfgang Hiese  
Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten (Januar 2000)
- Nr. 121 Peter Jaschke  
Mathematische Modellierung des Betriebsverhaltens hydrodynamischer Kupplungen mit hybriden Modellansätzen (Februar 2000)
- Nr. 122 Stefan Müller  
Zum Einsatz von semi-aktiven Aktoren zur optimalen Schwingungsreduktion in Tragwerken (Februar 2000)
- Nr. 123 Dirk Eichel  
Zur Kondensation strukturdynamischer Aufgaben mit Hilfe von Polynommatrizen (Juni 2000)
- Nr. 124 Andreas Bürgel  
Bruchmechanische Kennwerte beim Wechsel im Versagensverhalten dynamisch scherbeanspruchter Risse (August 2000)
- Nr. 125 Daniela Lürding  
Modellierung großer Deformationen in orthotropen, hyperelastischen Schalenstrukturen (März 2001)
- Nr. 126 Thorsten Quent  
Ein mikromechanisch begründetes Modell zur Beschreibung des duktilen Verhaltens metallischer Werkstoffe bei endlichen Deformationen unter Berücksichtigung von Porenschädigung (Mai 2001)
- Nr. 127 Ndzi C. Bongmba  
Ein finites anisotropes Materialmodell auf der Basis der Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur Beschreibung duktiler Schädigung (Mai 2001)
- Nr. 128 Henning Schütte  
Ein finites Modell für spröde Schädigung basierend auf der Ausbreitung von Mikrorissen (August 2001)
- Nr. 129 Henner Vogelsang  
Parameteridentifikation für ein selbstkonsistentes Stoffmodell unter Berücksichtigung von Phasentransformationen (Dezember 2001)
- Nr. 130 Jörn Mosler  
Finite Elemente mit sprungstetigen Abbildungen des Verschiebungsfeldes für numerische Analysen lokalisierter Versagenszustände (Dezember 2002)

Nr. 131 Karin Preusch  
Hierarchische Schalenmodelle für nichtlineare Kontinua mit der p-Version der  
Finite-Element Methode (Mai 2003)



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 131**

**978-3-935892-6-3**