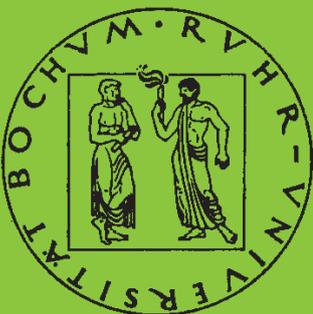


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Henning Schütte

**Ein finites Modell für spröde
Schädigung basierend auf der
Ausbreitung von Mikrorissen**

Heft Nr. 128



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Ein finites Modell für spröde Schädigung basierend auf der
Ausbreitung von Mikrorissen

Dissertation
zur
Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur

der
Fakultät für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

von
Henning Schütte
aus Recklinghausen

Bochum 2001

Herausgeber:
Institut für Mechanik
— Schriftenreihe —
Ruhr-Universität Bochum
D-44780 Bochum

ISBN 3-935892-02-0

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrages, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung auf Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© 2001 Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Printed in Germany

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein Modell für Materialien erarbeitet, die durch Mikrorisse geschädigt sind. Die Ausbreitung der Risse ist durch das Prinzip der maximalen Energiefreisetzungsrates für abknickende Risse bestimmt. Hieraus erhält man den Ausbreitungspfad der wachsenden Risse mit Hilfe einer Abfolge von thermodynamisch äquivalenten geraden Ersatzrissen. Die Äquivalenz der durch das Mikrorißwachstum dissipierten Energie mit der makroskopischen Dissipation führt auf das Evolutionsgesetz der Schädigung. Dieses Evolutionsgesetz wird eingebettet in einen finiten Rahmen, der auf der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in elastische und schädigungsinduzierte Anteile basiert. Als Konsequenz hieraus kann der anisotrop geschädigte Elastizitätstensor mit Hilfe von push- und pull-Operationen präsentiert werden und eine konsistente Interpretation der sogenannten fiktiven ungeschädigten Konfiguration wird möglich. Der Zusammenhang dieses Ansatzes mit bekannten Schädigungstheorien wird diskutiert und die Vorteile des finiten Rahmens aufgezeigt. Numerische Beispiele zeigen die Möglichkeiten des vorgeschlagenen Modells, insbesondere zur Lebensdauervorhersage.

Summary

A damage model for materials damaged by microcracks is derived. The evolution of the cracks is governed by the principle of maximum energy release rate for kinking cracks. From this, the path of the growing crack is computed by introducing a series of thermodynamically equivalent straight cracks. The equivalence of the energy dissipated by microcrack growth and the damage dissipation leads to the damage evolution law. This evolution law is embedded in a finite deformation framework based on a multiplicative decomposition of the deformation gradient in elastic and damage parts. As a consequence of this, the anisotropic damaged elasticity tensor can be presented with the help of push and pull operations, and a consistent interpretation of the so-called fictitious undamaged configuration becomes possible. The connection of this approach to other well-known damage theories is discussed and the advantages of a finite framework are worked out. Numerical examples show the possibilities of the proposed model, especially for life-time prediction.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns für die Anregung zu dieser Arbeit sowie die Unterstützung bei ihrer Anfertigung. Herr Prof. Dr. rer. nat. K. Hackl danke ich herzlich für die Übernahme des Koreferates.

Auch möchte ich mich bei allen Mitarbeitern der Lehrstühle für Allgemeine Mechanik und Technische Mechanik, insbesondere bei den Herren Priv. Doz. Dr. rer. nat. Le Khan Chau, Dr.-Ing. U. Hoppe, Dr.-Ing. C. N. Bongmba und Dipl.-Ing. M. Heiderich für die gute Zusammenarbeit, die anregenden Diskussionen und hilfreiche Anregungen bedanken.

Herrn cand.-Ing. S. Reichling sei hier für die Unterstützung, insbesondere die Korrekturdurchsicht, gedankt.

Recklinghausen, im August 2001

Henning Schütte

Referenten: Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns
Prof. Dr. rer. nat. K. Hackl

Tag der Einreichung: 27. April 2001
Tag der mündlichen Prüfung: 17. August 2001

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	xv
Einleitung	4
1 Kontinuumsmechanische Grundlagen	5
1.1 Geometrie und Kinematik von Körpern	7
1.1.1 Grundlagen der Tensoranalysis auf Mannigfaltigkeiten	7
1.1.2 Kinematik der Deformationen	16
1.2 Thermo-mechanische Bilanzgleichungen	27
1.2.1 Massenerhaltung	27
1.2.2 Spannungstensor und Impulsbilanz	28
1.2.3 Drehimpulsbilanz	30
1.2.4 Energiebilanz	31
1.2.5 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	32
1.3 Thermodynamik mit internen Variablen	33
1.3.1 Zustand und interne Variablen	33
1.3.2 Thermodynamischer Prozeß und Konstitutivgleichungen	34
1.3.3 Materielle Bezugsindifferenz	36
1.3.4 Konsequenzen des zweiten Hauptsatzes	37
1.3.5 Dissipationsfunktion und Fließgesetz	38
1.3.6 Konjugierte Spannungs- und Dehnungsmaße	40
2 Ein finiter Rahmen für Schädigungsmodelle	43
2.1 Schädigungsmechanik	44
2.1.1 Kontinuumsschädigungsmechanik	46
2.1.2 Klassifikation und Bibliographie der CDM Modelle . .	47
2.1.3 Schädigungsvariablen	50
2.1.4 Äquivalenzprinzipien	57
2.2 Multiplikativer Rahmen für spröde Schädigung	62

2.2.1	Motivation	62
2.2.2	Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten	63
2.2.3	Deformations- und Dehnungsmaße	67
2.2.4	Geschwindigkeit und Raten	68
2.2.5	Bilanzgleichungen	70
2.2.6	Freie Energiedichte und konstitutive Gleichungen . . .	74
2.2.7	Elastische Eigenschaften des geschädigten Materials .	76
2.2.8	Bezug zur klassischen Schädigungsmechanik	81
3	Bruchmechanik	85
3.1	Grundlagen der Bruchmechanik	85
3.1.1	Physikalische Bruchvorgänge	85
3.1.2	Rißnahfeld der linear-elastischen Bruchmechanik . . .	89
3.1.3	Rißausbreitungskriterien	93
3.2	Variationsprinzip der Bruchmechanik	96
3.2.1	Singuläres Feld des abgeknickten Risses	97
3.2.2	Variationsprinzip	99
3.2.3	Definition der treibenden Kraft	101
3.2.4	Gleichgewichtsbedingungen des Risses	103
3.2.5	Berechnung der treibenden Kraft	103
3.3	Simulation der Rißausbreitung	107
3.3.1	2-D Riß in einer unendlichen Scheibe	107
3.3.2	Rißausbreitungssimulation	108
4	Schädigungsgesetz	115
4.1	Mikromechanik der Rißausbreitung	116
4.1.1	Gleichungen der 2-D Rißausbreitung	117
4.1.2	Ersatzrißmodell	119
4.2	Mikro-Makro Übergang	121
4.2.1	Nicht-interagierende Risse	121
4.2.2	Schemata für interagierende Risse	123
4.2.3	Äquivalenz der Dissipation	126
4.3	Evolutionsgesetz der Rißausbreitung	129
4.3.1	Generalisiertes Paris' law	129
4.3.2	Äquivalenz zu Paris' law	132
4.3.3	Berechnung der Schädigungsevolution	132
4.4	Kontinuums-Tangentialoperator	134

4.4.1	Unilaterale Schädigungsbedingungen	135
4.5	Numerische Simulation	138
4.5.1	Monotoner Zugversuch	138
4.5.2	Zyklischer Zugversuch und Reihenfolgeeffekt	142
4.5.3	Lebensdauerberechnung	151
	Zusammenfassung und Ausblick	155
	Literaturverzeichnis	156
	Anhang	176

Abbildungsverzeichnis

1.1	\mathcal{M} als eine offene Menge im \mathbb{R}^3 und \mathcal{M} als eine Fläche	8
1.2	Referentielle Beschreibung	14
1.3	Spannungsvektor mit korrespondierendem Flächenelement . .	41
2.1	Zyklische Zug-Druck-Kurven beim high-cycle fatigue	45
2.2	Zyklische Zug-Druck-Kurven beim low-cycle fatigue	45
2.3	Zwei verschiedene Mikroskalen und die atomare Skala	47
2.4	Geschädigtes Mikrovolumenelement	51
2.5	Mikrovolumenelement mit Poren	52
2.6	Geschädigtes Mikrovolumenelement unter einachsigem Zug .	53
2.7	Eindimensionale Veranschaulichung der Dehnungsäquivalenz .	58
2.8	Eindimensionale Veranschaulichung der Spannungsäquivalenz	59
2.9	Eindimensionale Veranschaulichung der Energieäquivalenz . .	60
2.10	Spannungs-Dehnungs-Kurve eines durch Risse geschädigten Materials	64
2.11	Durch die Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^d$ induzierte Konfigurationen . .	65
3.1	Sprödbbruch durch Spaltung	87
3.2	Spröder und duktiler interkristalliner Bruch	88
3.3	Schwingstreifen	89
3.4	Riß in unendlicher Platte	90
3.5	Die drei Rißmodi	92
3.6	J-Integral auf der Kontur Γ	94
3.7	Der Anfangsriß mit dem lokalen Koordinatensystem	98
3.8	Riß mit verschobenen und gedrehten Koordinatensystem . . .	99
3.9	Parametrisierung und Integrationsbereich	101
3.10	Der Riß mit dem lokalen Koordinatensystem	102
3.11	Das Dreibein $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta}$	104
3.12	Die 3-D Bruchgrenzfläche	104
3.13	Bruchgrenzflächen für $K_{III} = \text{const}$	105

3.14	ϕ_{\max} als Funktion von λ_1 und λ_2	106
3.15	Knickwinkel ϕ_{\max} in Abhängigkeit von λ	108
3.16	FEM-Diskretisierung der Rißausbreitungssimulation	110
3.17	Rißausbreitungskurven für $\beta_0 = 0^\circ, 30^\circ$ und 60°	111
3.18	<i>mixed-mode</i> -Parameter über relativer Rißlänge	112
3.19	Knickwinkel ϕ_{\max} über relativer Rißlänge	113
3.20	Effektiver Winkel β_{eff} über relativer Rißlänge	114
4.1	Angestellter gerader Riß in unendlicher Scheibe	117
4.2	Abgeknickter Riß und äquivalenter Ersatzriß	119
4.3	Rißspitze mit Normalenvektor \mathbf{n}^* und Ausbreitungsrichtung \mathbf{t}^*	127
4.4	Spannungs-Dehnungs-Kurve eines Beispielmaterials	139
4.5	Einachsiger Zugversuch eines Beispielmaterials	141
4.6	Spannungs-Dehnungs-Kurve des “spröderen” Ausgangsmaterials	143
4.7	Zugversuch des “spröderen” Ausgangsmaterials	144
4.8	Untersuchung des Reihenfolgeeffektes:a) Last niedrig, hoch	146
4.9	Spannungs-Dehnungs-Kurve des geschädigten Materials aus a)	147
4.10	Verhalten des geschädigten Materials aus a)	148
4.11	Untersuchung des Reihenfolgeeffektes:b) Last hoch, niedrig	149
4.12	Spannungs-Dehnungs-Kurve des geschädigten Materials aus b)	150
4.13	Verhalten des geschädigten Materials aus b)	151
4.14	Diagramm der Spannung über der Zyklenzahl für Material 1	152
4.15	Ergebnisse des zyklischen Lebensdauer-Versuchs	153

Bezeichnungen

Symbol	Bezeichnung
$\mathbf{1}$	Einheitstensor zweiter Stufe
$\mathbf{1}_S$	Shifter
a	Rißlänge
a_0	Anfangsrißlänge
A	Fläche der Einheitszelle
\mathbf{a}, \mathbf{A}	momentane und materielle Beschleunigung
\mathbf{A}_i	interne Zustandsvariablen
$\bar{\mathbf{A}}$	Schädigungsevolutions-Tensor
\mathbf{b}	Volumenkraftdichte
\mathcal{B}	Körper-Mannigfaltigkeit
b_i	Eigenwerte des geschädigten Finger-Tensors $\bar{\mathbf{b}}^d$
\mathbf{b}	Linker Cauchy–Green Tensor / räumlicher Finger-Tensor
\mathbf{B}	referentieller Fingerscher Deformationstensor
\mathbf{b}_σ	Eigenprojektion des linken Cauchy–Green Tensors \mathbf{b}
$\bar{\mathbf{b}}^d$	geschädigter Finger Tensor
C, C'	Parameter des <i>Paris' law</i>
\mathbf{c}	Cauchyscher Deformationstensor
\mathbf{C}	Rechter Cauchy–Green Tensor
\mathbb{C}^e	Elastizitätstensor
$\tilde{\mathbb{C}}^e$	geschädigter Elastizitätstensor
$\bar{\mathbb{C}}^e$	geschädigter Elastizitätstensor
$ d_i $	treibende Kraft auf die Rißspitze
\mathcal{D}	skalarwertige Schädigungsvariable

\mathcal{D}	Dissipationsfunktion
\mathcal{D}	Schädigungstensor zweiter Stufe
\mathbb{D}	Schädigungstensor vierter Stufe
da, dA	differentielles, gerichtetes Flächenelement in $\mathcal{P}_t, \mathcal{P}_0$
dv, dV	differentielles Volumenelement in $\mathcal{P}_t, \mathcal{P}_0$
$d\mathbf{x}, d\mathbf{X}$	materielles Linienelement in $\mathcal{P}, \mathcal{P}_0$
\mathbf{d}	Verzerrungsgeschwindigkeit
e	innere Energie
\mathcal{E}	Euklidischer Punktraum
\mathbf{e}	Almansischer Verzerrungstensor
E	Elastizitätsmodul
\mathbf{E}	Greenscher Verzerrungstensor
\mathbf{e}_a	Basisvektoren der Momentankonfiguration
\mathbf{E}_A	Basisvektoren der Referenzkonfiguration
$\mathbf{e}_m(\mathbf{b})$	allgemeiner Eulerscher Verzerrungstensor
$\mathbf{E}_m(\mathbf{C})$	allgemeiner Lagrangescher Verzerrungstensor
\mathbf{E}	Euklidischer Vektorraum
f	Porenvolumenanteil
F	Airy'sche Spannungsfunktion
$f_{\text{Riß}}$	Fließfunktion der Rißausbreitung
$F_{(\alpha\beta)}$	Matrix der Knickwinkelfunktionen
\mathbf{F}	Deformationsgradient
G	Energiefreisetzungsrate
G^*	maximale Energiefreisetzungsrate
G_0^*	anfänglicher Grenzwert der Rißausbreitung
\mathbf{G}, \mathbf{g}	Metrik der Referenzkonfiguration und Momentankonfiguration
h	Wärmezufuß
h	Verfestigungsparameter der Rißausbreitung
H^*	Verfestigungsfunktion der Rißausbreitung
\mathbf{h}	räumlicher Henckyscher Dehnungstensor
$\bar{\mathbf{h}}_0^*$	Fließgrenze der Schädigung

$I[\mathbf{w}]$	Funktional der Gesamtenergie
\mathbb{I}	Identitätstensor vierter Stufe
<i>Iso</i>	Isomorphismen
J	Determinante des Deformationsgradienten
J_i	Komponenten des J-Integral-Vektors
J	J-Integral
$K_{I,II,III}$	Spannungsintensitätsfaktoren
$K_{Ic,IIc,IIIc}$	kritische Spannungsintensitätsfaktoren
$K_{I,II,III}^*$	Spannungsintensitätsfaktoren am abgeknickten Riß
$\bar{\mathbf{k}}^d$	treibende Kraft der Schädigung
\mathbf{l}	Geschwindigkeitsgradient
$Lin(\mathcal{TV}_1, \mathcal{TV}_2)$	Homomorphismen
$Lin(\mathcal{TV}, \mathcal{TV})$	Endomorphismen
m	Masse
\mathcal{M}	Mannigfaltigkeit
\mathbb{M}	Schädigungseffektstensor
N	Schwingspielzahl
\mathbf{n}	Normalenvektor
\mathbf{n}^*	Normalenvektor auf die Rißausbreitungsrichtung
\mathcal{P}	Plazierung
\mathfrak{p}	Spannungsleistung
\mathbf{P}	1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor (1.P.-K.)
\mathbb{P}^+	positiver Projektionsoperator
\mathbf{q}	Wärmestromvektor
\mathbf{q}	orthogonaler Drehtensor
r	spezifische Wärmeerzeugung
R	Rißwiderstand
\mathbf{R}	Rotationstensor

S	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor (2.P.-K.)
SO	orthogonale Gruppe
Skw	antimetrische Abbildungen
Sym	symmetrische Abbildungen
t	Zeit
t	Dicke der Einheitszelle
t	Cauchyscher Spannungsvektor
t*	Ausbreitungsrichtung des Risses
T	referentieller Spannungsvektor
u	Verschiebungsvektor
\mathcal{U}	Teilkörper
v, V	momentane und materielle Geschwindigkeit
U	Rechter Strecktensor
v	Linker Strecktensor
$W(\varepsilon_{ij})$	elastische Energie der linearen Theorie
w	Drehgeschwindigkeitstensor
x	Ortsvektor in der Momentankonfiguration
X	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration
Y_i	zu A_i arbeitskonjugierte Größe
α	Vektor der internen Variablen
β	Orientierungswinkel des Risses
β₀	Anfangswinkel des Risses
γ	Oberflächenenergie des Risses
$\dot{\gamma}$	Entropieerzeugungsrate
γ	orthogonaler Tensor (in Abschnitt 1.3)
δ_b^a	Kroneckerdelta

ε	Dehnung
ε	linearer Dehnungstensor
$\tilde{\varepsilon}$	effektiver Dehnungstensor
η	Entropie
η	Parameter des <i>Paris' law</i>
Θ	Temperatur
λ	Lamésche Konstante
$\dot{\lambda}$	Konsistenzparameter (Multiplikator)
λ_1, λ_2	<i>mixed-mode</i> Parameter
Λ_i	Eigenwerte des geschädigten Elastizitätstensors $\bar{\mathbf{C}}^e$
μ	Lamésche Konstante
μ_{ij}	Eshelby-Tensor der lineare Theorie
$\bar{\mu}$	Eshelby-Tensor der Zwischenkonfiguration
ν	Querkontraktionszahl
ξ	materieller Punkt
ρ	Dichte in der Momentankonfiguration
ρ_0	Dichte in der Referenzkonfiguration
σ_s	Dauerfestigkeitsgrenze
σ^*	Bruchgrenze
σ	Cauchyscher Spannungstensor
σ^∞	Fernfeld-Spannungen
$\tilde{\sigma}$	Effektivspannung
Σ	gewichteter 2.P.-K.
τ	Kirchhoffscher Spannungstensor
ϕ	Potential

ϕ_{\max}	Knickwinkel
Φ^e	komplementäre elastische Energie
ϕ	Konfiguration, Abbildung
χ_t	Bewegung in der referentiellen Beschreibung
ψ	freie Energiedichte
ψ	Kontinuität
ω	Spintensor zu \mathbf{q}
Ω	Spintensor zu \mathbf{R}
Ω_{Log}	logarithmischer Spintensor

Einleitung

Eines der Hauptziele der Ingenieurwissenschaften, insbesondere der Mechanik, ist es, das Versagen von Bauteilen und Strukturen zu beschreiben und, wenn möglich, vorauszusagen und zu verhindern. Um dies zu ermöglichen, benötigt man mathematische Modelle des Material- und Strukturverhaltens, um auf der einen Seite die Belastungen, auf der anderen Seite die daraus resultierenden Verformungen und Spannungen berechnen zu können.

Zur Beurteilung, ob diese Verformungen und Spannungen vom Material ertragen werden können, wurden schon früh von TRESCA (1872), VON MISES (1913), MOHR (1900) und anderen Versagenskriterien, d.h. Funktionen der Komponenten der Spannung und Verformung, gebildet. Diese Kriterien bilden meist eine skalare Größe, die z.B. mit der aus dem Zugversuch ermittelten Fließgrenze oder Bruchspannung verglichen wird, ermöglichen jedoch nur eine binäre Entscheidung: Entweder versagt das Bauteil, oder nicht. Ob und wieviele Wechsellasten solch ein Bauteil erträgt, d.h. die Dauer- oder Zeitfestigkeit, läßt sich anhand solcher Kriterien nicht beurteilen. Dies gelingt über die von WÖHLER (1860) eingeführte Lebensdauerkurve, die angibt, bei welchem Lastniveau ein Zugstab eines bestimmten Materials wieviele Zyklen dieser Belastung erträgt. Die Übertragung der Ergebnisse der Versuche am Zugstab auf gekerbete Zugproben und komplexe Bauteilgeometrien und Belastungen über sogenannte Dauerfestigkeitsschaubilder ist jedoch problematisch, so daß man oft gezwungen ist, die Lebensdauerkurve für das konkrete Bauteil zu bestimmen. Und auch die so gewonnene Kurve enthält nur Daten für konstante Lastamplituden. Aussagen über die Auswirkung von Reihenfolgeeffekten bei komplexen Lastkollektiven oder gar einzelnen Überlasten können hierüber nicht gemacht werden; lineare Schadensakkumulationsregeln nach PALMGREN (1924) und MINER (1945) schaffen hier keine befriedigende Abhilfe. Außerdem bleibt unberücksichtigt, daß bereits bei einem Bruchteil der Lebensdauer eines Bauteils Risse auftreten, deren stabiles Wachstum aber noch zu einer großen Restlebensdauer führen kann. Dies berücksichti-

gen bruchmechanische Sicherheitsanalysen, die davon ausgehen, daß bereits ein makroskopischer Riß einer bestimmten Größe im Bauteil vorhanden ist. Die Lebensdauer und Inspektionsintervalle werden dann auf der Basis eines Evolutionsgesetzes der Rißlänge über der Anzahl der Lastwechsel berechnet (PARIS 1962; FORMAN, KEARNEY & ENGLE 1967; WHEELER 1972).

Alle diese Ansätze können aber nicht die Vorgänge im Material beschreiben, die zur Entstehung eines Makrorisses führen. Dies gelang, zunächst für einachsige Kriechprozesse, KACHANOV (1958) durch Einführung einer zusätzlichen Feldvariablen ψ , der "Kontinuität". Zusammen mit dem von RABOTNOV (1968) eingeführten Effektivspannungs-Konzept bildet die Schädigungsvariable $\mathcal{D} = 1 - \psi$ bis heute die Basis der Kontinuums-Schädigungs-Mechanik. Diese Schädigungsvariable soll den Effekt von im Material vorhandenen, aber nicht "sichtbaren", Fehlstellen, wie Mikroporen, -rissen und -scherbndern, beschreiben, z.B. die Abnahme der Materialsteifigkeit von geschädigtem Material. Im Rahmen der Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen (COLEMAN & GURTIN 1967), nimmt dann die Schädigungsvariable die Rolle einer internen Variable ein. Zur Verallgemeinerung dieses Ansatzes auf mehrachsige Belastungszustände ist eine Reihe verschiedener skalar- und tensorwertiger Schädigungsvariablen vorgeschlagen worden, die aber zum Teil im Rahmen kleiner Formänderungen keine konsistente Interpretation zulassen.

Basierend auf diesen grundlegenden Formulierungen ist eine Vielzahl von Kontinuums-Schädigungs-Modellen entstanden, wobei man solche auf rein phänomenologischer Basis, von mikromechanisch basierten unterscheiden kann. Erstere führen eine Schädigungsvariable in die freie Energiedichte ein und erhalten über den Formalismus der Tensorgeneratoren ihre konstitutiven Gleichungen, deren freie Parameter an Experimente angepaßt werden können. Letztere stellen Betrachtungen über das Verhalten der Mikrorisse, -poren etc. an, und gelangen über Homogenisierungs- d.h. Mittelungsvorschriften, an die Evolutionsgleichung auf der Makroebene. Auch von der Seite der beschriebenen Schdigungsphnomene her, kann man zwei Klassen von Schädigungsmodellen unterscheiden. Zum einen solche, die die Schädigungsevolution an das Auftreten makroskopischer plastischer Verformungen koppeln. Der zugrundeliegende mikromechanische Mechanismus ist hierbei die Entstehung und das Wachstum von Poren. Zum anderen Modelle der sogenannten spröden oder elastischen Schädigung, bei der keine makroskopische Plastizität auftritt, und

deren primärer Schädigungsmechanismus die Entstehung und das Wachstum von Mikrorissen sind. Für die Lebensdauerberechnung sind solche Modelle, basierend auf einer Schädigungsevolution unterhalb der Fließgrenze, von Vorteil, da viele Bauteile, insbesondere im Maschinenbau, für zyklische Belastungen deutlich unterhalb dieser Grenze ausgelegt werden.

In der vorliegenden Arbeit wird deshalb solch ein sprödes Kontinuums-Schädigungs-Modell entwickelt, daß zusätzlich zu der, durch den Rahmen der internen Zustandsvariablen erreichten, thermodynamischen Konsistenz, durch die Einführung eines Schädigungs-Deformationsgradienten eine kinematische Konsistenz zu erreichen sucht. Die Mikromechanik des präsentierten Modells wird durch die Ausbreitung von *mixed-mode* Rissen beschrieben, die durch eine auf die Mikrorißausbreitung angepaßte Homogenisierung das Evolutionsgesetz der Schädigung liefert.

Im ersten Kapitel wird zunächst der kontinuumsmechanische Rahmen präsentiert. Hierbei wird besondere Betonung auf das von MARSDEN & HUGHES (1983) in die Kontinuumsmechanik eingeführte Konzept der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten gelegt, da dieses Konzept push- und pull-Operationen zur Verfügung stellt. Diese Operationen werden benutzt, um Lie-Ableitungen und die Objektivität von Tensorfeldern zu definieren. Insbesondere werden diese Operationen aber in Kapitel 2 benötigt, um den Zusammenhang zwischen den dort präsentierten Konfigurationen herzustellen. Anschließend werden die Bilanzgleichungen der finiten Kontinuumsmechanik angegeben und gezeigt, wie man mit Hilfe des Formalismus der internen Variablen (COLEMAN & GURTIN 1967) hieraus mit Hilfe einer Prozedur von COLEMAN & NOLL (1963) die konstitutiven Gleichungen herleiten kann.

Das zweite Kapitel gibt zunächst eine Einführung in die Kontinuums-Schädigungs-Mechanik. Es wird aufgezeigt, warum die Einführung einer fiktiven, ungeschädigten Konfiguration in einem Rahmen kleiner Formänderungen zu Inkonsistenzen führt. Dies wird als Motivation genommen, um daran anschließend einen finiten Rahmen für spröde Schädigungsmodelle vorzuschlagen. Dieser Rahmen basiert, ähnlich der finiten Elastoplastizität, auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in elastische und schädigungsinduzierte Anteile. Die Referenzkonfiguration wird dann als ungeschädigte Konfiguration und die Zwischenkonfiguration als geschädigte Konfiguration interpretiert, die wiederum den Ausgangspunkt der elastischen Deformation in die momentane Konfiguration darstellt. Die Bilanzgleichungen

chungen werden in allen drei Konfigurationen angegeben. Aus dem Postulat der freien Energiedichte werden daran anschließend die konstitutiven Gesetze des spröde geschädigten Materials abgeleitet. Es wird gezeigt, daß in dem präsentierten Rahmen die Darstellung des geschädigten Elastizitätstensors auf einfache Weise mit Hilfe eines push-forward mittels des Schädigungs-Deformationsgradienten gelingt.

Im dritten Kapitel werden die für die mikromechanischen Betrachtungen notwendigen Grundlagen der Bruchmechanik angegeben. Nach einer kurzen Darstellung der Bruchmechanismen, wird eine kurze Herleitung der asymptotischen Spannungs- und Dehnungsfelder der linear-elastischen Bruchmechanik angegeben. Anschließend werden die Gleichungen für die *mixed-mode* Rißausbreitung LE, SCHÜTTE & STUMPF (1999) folgend, aus dem Variationsprinzip des Körpers mit einem Riß hergeleitet. Die Implementierung in ein Finite-Element-Programm und die damit berechneten Beispiele zeigen die Möglichkeiten dieses Rißausbreitungsalgorithmus auf.

Im vierten Kapitel wird zunächst die Mikromechanik der Einheitszelle mit einem Riß dargestellt, wobei die Rißausbreitungsgleichungen anhand eines Ersatzrißmodelles vereinfacht werden. Anschließend an die Diskussion verschiedener Homogenisierungsverfahren für Körper mit Mikrorissen, wird ein Homogenisierungsverfahren vorgeschlagen, daß im Wesentlichen auf der Äquivalenz der Mikro- und Makrodissipation beruht. Das hierdurch abgeleitete Evolutionsgesetz der Schädigung wird durch ein Fließgesetz von LEMAITRE & CHABOCHE (1990) ergänzt, das eine thermodynamische Generalisierung von *Paris' law* darstellt. Die sich daran anschließende numerische Simulation von monotonen und zyklischen Zugversuchen zeigt die Möglichkeiten des Schädigungsmodells zur Lebensdauervorhersage auf. Der Einfluß der Reihenfolge von Belastungskollektiven wird untersucht, und die Restbruchspannungen des hierdurch vorgeschädigten Materials ermittelt.

Im Anhang befindet sich die Herleitung der treibenden Kraft auf die Schädigung.

1 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Inhaltsverzeichnis

1.1 Geometrie und Kinematik von Körpern	7
1.1.1 Grundlagen der Tensoranalysis auf Mannigfaltigkeiten	7
Mannigfaltigkeiten	7
Tangentialabbildung und Vektorfelder	7
Kotangentialabbildung und Kovektoren	8
Metriken	8
Assoziierte Vektorfelder	9
Tensoren	10
Tensorprodukt	11
Überschiebung	11
Metrik und Inneres Produkt	12
Materieller Körper	12
Konfiguration und Bewegung	13
Referentielle Beschreibung	13
Geschwindigkeit und Beschleunigung	13
Bezugssystem und Objektivität	15
1.1.2 Kinematik der Deformationen	16
Deformationsgradient	16
Polare Zerlegung	18
push-pull Operationen	18
Objektivität von Tensorfeldern	20
Deformationsmaße	21
Verzerrungsmaße	22
Zeitableitung des Deformationsgradienten	23
Objektive Zeitableitungen	24

Streckgeschwindigkeitstensor und Verzerrungsrate	26
1.2 Thermo-mechanische Bilanzgleichungen	27
1.2.1 Massenerhaltung	27
1.2.2 Spannungstensor und Impulsbilanz	28
Spannungsvektor	28
Impulsbilanz	29
Spannungstensor	29
Bewegungsgleichung	30
1.2.3 Drehimpulsbilanz	30
1.2.4 Energiebilanz	31
1.2.5 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	32
Entropiegleichung	32
Clausius-Duhem Ungleichung	32
1.3 Thermodynamik mit internen Variablen	33
1.3.1 Zustand und interne Variablen	33
1.3.2 Thermodynamischer Prozeß und Konstitutivgleichungen	34
1.3.3 Materielle Bezugsindifferenz	36
1.3.4 Konsequenzen des zweiten Hauptsatzes	37
1.3.5 Dissipationsfunktion und Fließgesetz	38
1.3.6 Konjugierte Spannungs- und Dehnungsmaße	40

Dieses Kapitel befaßt sich zunächst mit der Beschreibung von Körpern, ihren Bewegungen und ihren Konfigurationen und basiert auf den Darstellungen dieser Thematik in TRUESDELL & NOLL (1965), MARSDEN & HUGHES (1983) und HOPPE (1996). Anschließend werden die dynamischen Gleichungen der Kontinuumsmechanik und die Hauptgleichungen der Thermodynamik präsentiert. Danach wird gezeigt, wie mit Hilfe einer Prozedur von COLEMAN & NOLL (1963) aus dem Postulat einer freien Energiedichte die konstitutiven Gleichungen eines Materials direkt aus den thermodynamischen Bilanzgleichungen abgeleitet werden können. Abschließend wird die Darstellung der mechanischen Leistung durch konjugierte Spannungs- und Dehnungsmaße diskutiert.

1.1 Geometrie und Kinematik von Körpern

1.1.1 Grundlagen der Tensoranalysis auf Mannigfaltigkeiten

Um einen Körper durch ein Kontinuum zu modellieren, ist es vorteilhaft, vom Konzept der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten Gebrauch zu machen. In diesem Rahmen kann man push- und pull-Operationen eindeutig definieren, die vor allem durch die Betrachtungen von MARSDEN & HUGHES (1983) in die Kontinuumsmechanik eingeführt wurden. Diese Operationen können wiederum benutzt werden, um Lie-Ableitungen zu definieren.

Hier sollen nur einige wenige Grundlagen der Tensoranalysis auf Mannigfaltigkeiten wiedergegeben werden. Der interessierte Leser sei auf MARSDEN & HUGHES (1983) und HOPPE (1996) verwiesen.

Mannigfaltigkeiten

Eine glatte *Mannigfaltigkeit* \mathcal{M} , modelliert im \mathbb{R}^3 , ist eine Menge, für die gilt:

(i) Für jeden Punkt $P \in \mathcal{M}$ gibt es eine Untermenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, die P enthält und eine eindeutige Abbildung, genannt Karte oder Koordinatensystem $\{x^\alpha\}$ von \mathcal{U} auf eine offene Menge \mathcal{V} im \mathbb{R}^3 . Hierbei bezeichnen x^α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) die Komponenten dieser Abbildung.

(ii) Wenn x^α und \bar{x}^α zwei solcher Abbildungen sind, sind die Funktionen der Koordinatentransformation $\bar{x}^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n) \in C^\infty$.

Tangentialabbildung und Vektorfelder

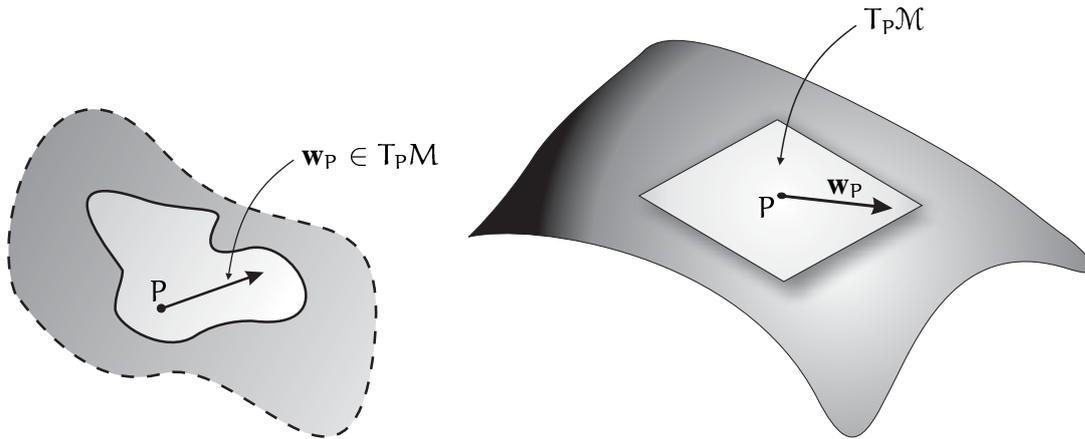
Es sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $P \in \mathcal{M}$. Der *Tangentialraum* $T_P\mathcal{M}$ zu \mathcal{M} in P ist der Vektorraum \mathbb{R}^3 , betrachtet als Vektoren mit Ursprung in P . Das *Tangentialbündel* von \mathcal{M} ist das Produkt

$$T\mathcal{M} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^3, \quad (1.1.1)$$

das aus Paaren (P, \mathbf{w}) von Basispunkten und Tangentenvektoren in P besteht (s. Abb. 1.1). Ein *Vektorfeld* auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{Q} kann dann als Abbildung

$$\mathbf{v} : \mathcal{Q} \rightarrow T\mathcal{Q}, \quad \text{so daß} \quad \mathbf{v}(q) \in T_q\mathcal{Q} \quad \forall q \in \mathcal{Q} \quad (1.1.2)$$

definiert werden.

Abbildung 1.1: \mathcal{M} als eine offene Menge im \mathbb{R}^3 und \mathcal{M} als eine Fläche

Kotangentialabbildung und Kovektoren

Es sei \mathcal{Q} eine glatte n -Mannigfaltigkeit (d.h. definiert auf \mathbb{R}^n) und $q \in \mathcal{Q}$. Ein *Kovektor* ist eine lineare Abbildung $\alpha_q : T_q\mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$. Der Vektorraum der Kovektoren in q wird mit $T_q^*\mathcal{Q}$ bezeichnet und *Kotangentialraum* genannt, der den dualen Raum zu $T_q\mathcal{Q}$ darstellt. Das *Kotangentialbündel* von \mathcal{Q} ist die disjunkte Vereinigung der Mengen $T_q^*\mathcal{Q}$. Ein Kovektor auf \mathcal{Q} kann demzufolge definiert werden durch

$$\alpha : \mathcal{Q} \rightarrow T^*\mathcal{Q}, \quad \text{so daß} \quad \alpha_q = \alpha(q) \in T_q^*\mathcal{Q} \quad \forall q \in \mathcal{Q}. \quad (1.1.3)$$

Metriken

Um die Längen L_1, L_2 zweier Tangentenvektoren $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \in T\mathcal{P}_0$ und den Winkel $\angle(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ zwischen ihnen auf $T\mathcal{P}_0$ bestimmen zu können muß ein metrischer Vektorraum $(T\mathcal{P}_0, \mathbf{G})$ vorliegen. Mit Hilfe der Metrik \mathbf{G} kann dann das innere Produkt auf diesem Raum definiert werden, da er durch sie mit einer ‐Längenstruktur‐ ausgestattet wird. Das innere Produkt für Vektoren in $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_t \subset \mathbb{R}^3$ sei durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{x}}$ gegeben. Äquivalent dazu wird das innere Produkt im Punkt $\mathbf{X} \in \mathcal{P}_0 \subset \mathbb{R}^3$ durch $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{X}}$ bezeichnet. Für einen Vektor $\mathbf{w} \in T\mathcal{P}_t$ sei $|\mathbf{w}|_{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbf{x}}^{1/2}$ seine Länge. Die Länge von $\mathbf{V} \in T\mathcal{P}_0$ ist auf ähnliche Weise durch $|\mathbf{V}|_{\mathbf{X}} = \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle_{\mathbf{X}}^{1/2}$ gegeben. Wenn ein Koordinatensystem $\{X^A\}$ auf $T\mathcal{P}_0$ vorliegt, wird die Metrik auf $T\mathcal{P}_0$ durch

$$G_{AB}(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B \rangle_{\mathbf{X}} \quad (1.1.4)$$

definiert. In einem Koordinatensystem $\{x^a\}$ auf $T\mathcal{P}_t$ gilt

$$g_{ab}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b \rangle_{\mathbf{x}}. \quad (1.1.5)$$

Hierbei bezeichnen die $\mathbf{E}_A(X^1, X^2, X^3)$ bzw. $\mathbf{e}_a(x^1, x^2, x^3)$ die Standard-Einheitsvektoren im \mathbb{R}^3 . Mit g^{ab} und G^{AB} bezeichnet man die jeweiligen inversen Matrizen zu g_{ab} und G_{AB} . Diese Inversen existieren in jedem Fall, da obige Metriken positiv definit sind. Damit kann man das innere Produkt schreiben als

$$L_1 L_2 \cos \angle(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \rangle_{\mathbf{x}} = V^A G_{AB} V^B, \quad \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \in T\mathcal{P}_0, \quad (1.1.6)$$

$$l_1 l_2 \cos \angle(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_{\mathbf{x}} = w^a g_{ab} w^b, \quad \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T\mathcal{P}_t, \quad (1.1.7)$$

wobei der jeweils erste Term die geometrische Deutung des inneren Produktes darstellt. Hierbei wurde Gebrauch von der Einsteinschen Summationskonvention gemacht: Wenn in der Koordinatendarstellung einem hochgestellten Index ein tiefgestellter entspricht, wird über diesen summiert. Die Indizes nehmen im \mathbb{R}^3 die Werte 1,2,3 an.

Assoziierte Vektorfelder

In obiger Koordinatenschreibweise, auch Ricci-Kalkül genannt, heißen Größen mit tiefgestellten Indizes kovariant, solche mit hochgestellten Indizes kontravariant. Viel bedeutender ist aber die Tatsache, auf welchem der Räume $T\mathcal{P}_0, T^*\mathcal{P}_0$ bzw. $T\mathcal{P}_t, T^*\mathcal{P}_t$ ein Tensor definiert ist.

Es sei α ein Kovektor auf $T^*\mathcal{P}_t$, mit den Komponenten α_a in einem Koordinatensystem $\{x^a\}$, d.h.

$$\alpha = \alpha_a \mathbf{e}^a. \quad (1.1.8)$$

Das *assoziierte Vektorfeld* α^\sharp hat definitionsgemäß die Komponenten $\alpha^a = g^{ab} \alpha_b$, d.h.

$$\alpha^\sharp = \alpha^a \mathbf{e}_a = g^{ab} \alpha_b \mathbf{e}^a. \quad (1.1.9)$$

Genauso kann für ein Vektorfeld $\mathbf{v} \in T\mathcal{P}_t$ ein *assoziierten Kovektor* definiert werden:

$$\mathbf{v}^\flat = v_a \mathbf{e}^a = g_{ab} v^b \mathbf{e}^a. \quad (1.1.10)$$

An dieser Stelle muß betont werden, daß Vektoren (später auch Tensoren) keinesfalls dieselben Objekte beschreiben wie ihre assoziierten Größen, auch wenn diese durch die Metrik verbunden sind, da Vektoren und Kovektoren nur auf ihren jeweiligen Tangential- bzw. Kotangentialräumen existieren.

Tensoren

Ein *Tensor* vom Typ $\binom{p}{q}$ in $\mathbf{X} \in \mathcal{P}_0$ ist eine multilineare Abbildung

$$\mathbf{T} : \underbrace{T^*\mathcal{P}_0 \times \cdots \times T^*\mathcal{P}_0}_{p\text{-mal}} \times \underbrace{T\mathcal{P}_0 \times \cdots \times T\mathcal{P}_0}_{q\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Komponenten von \mathbf{T} sind definiert durch

$$T^{A_1 A_2 \dots A_p}_{B_1 B_2 \dots B_q} = \mathbf{T}(\mathbf{E}^{A_1}, \mathbf{E}^{A_2}, \dots, \mathbf{E}^{A_p}, \mathbf{E}_{B_1}, \mathbf{E}_{B_2}, \dots, \mathbf{E}_{B_q}), \text{ so daß} \quad (1.1.11)$$

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}^1, \dots, \boldsymbol{\alpha}^p, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_q) = T^{A_1, \dots, A_p}_{B_1, \dots, B_q} \boldsymbol{\alpha}^1_{A_1}, \dots, \boldsymbol{\alpha}^p_{A_p} \mathbf{V}_1^{B_1}, \dots, \mathbf{V}_q^{B_q},$$

$\boldsymbol{\alpha}^i \in T^*\mathcal{P}_0$, $\boldsymbol{\alpha}^i = \alpha^i_A \mathbf{E}^A$, $\mathbf{V}_j \in T\mathcal{P}_0$ und $\mathbf{V}_j = V_j^A \mathbf{E}_A$.

Man nennt \mathbf{T} p -fach kontravariant und q -fach kovariant. Ein *Tensorfeld* vom Typ $\binom{p}{q}$ ist eine Zuordnung $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ eines Tensors vom Typ $\binom{p}{q}$ für jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{P}_0$. Für die Menge aller Tensoren auf \mathcal{P}_0 kann, ähnlich dem Tangentialbündel der Vektoren, ein Vektorbündel $T_q^p(\mathcal{P}_0)$ auf \mathcal{P}_0 konstruiert werden. Ein Tensorfeld ist dann ein Schnitt dieses Bündels.

Vektoren kann man als $\binom{1}{0}$ Tensoren ansehen, Kovektoren als $\binom{0}{1}$ und Funktionen als $\binom{0}{0}$ Tensoren.

Wie schon bei den assoziierten Vektoren angemerkt, hat der Tensor \mathbf{T} eine von seinen Komponenten unabhängige Existenz. Außerdem sind die assoziierten Tensoren, die durch Heben und Senken der Indizes mit Hilfe der Metrik entstehen, Objekte, die auf anderen Räumen als ihre Ursprungstensoren definiert sind.

Tensorprodukt

Es sei \mathbf{T} ein Tensor vom Typ $\binom{p}{q}$ und \mathbf{S} ein Tensor vom Typ $\binom{r}{s}$, dann ist das *Tensorprodukt* $\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}$ ein Tensor vom Typ $\binom{p+r}{q+s}$ definiert durch

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{S}(\mathbf{X}) : \underbrace{\underbrace{T^* \mathcal{P}_0 \times \cdots \times T^* \mathcal{P}_0}_{p\text{-mal}} \times \underbrace{\underbrace{T \mathcal{P}_0 \times \cdots \times T \mathcal{P}_0}_{q\text{-mal}}}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\underbrace{T^* \mathcal{P}_0 \times \cdots \times T^* \mathcal{P}_0}_{r\text{-mal}} \times \underbrace{\underbrace{T \mathcal{P}_0 \times \cdots \times T \mathcal{P}_0}_{s\text{-mal}}}_{s\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R},$$

so daß

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} \otimes \mathbf{S})^{A_1, \dots, A_p}_{B_1, \dots, B_q}{}^{C_1, \dots, C_r}_{D_1, \dots, D_s}(\mathbf{X}) \\ = \mathbf{T}^{A_1, \dots, A_p}_{B_1, \dots, B_q}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{S}^{C_1, \dots, C_r}_{D_1, \dots, D_s}(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

Überschiebung

Die einfache *Überschiebung* eines Kovektors mit einem Vektor ist definiert durch

$$\alpha(\mathbf{X})\mathbf{W}(\mathbf{X}) = \alpha_A(\mathbf{X})W^A(\mathbf{X}). \quad (1.1.13)$$

Die Überschiebung des i -ten kovarianten Index eines Tensors \mathbf{T} mit dem j -ten Index eines Tensors \mathbf{S} wird durchgeführt, indem alle anderen Indizes fixiert und der i -ten Index von \mathbf{T} als Kovektor mit dem j -ten Index von \mathbf{S} als Vektor überschoben wird. Wenn zwei Indizes gleichzeitig überschoben werden, wird für diese zweifache Überschiebung der Doppelpunkt benutzt. Wenn z.B. \mathbf{R} und \mathbf{S} vom Typ $\binom{2}{0}$ bzw. $\binom{0}{2}$ sind, dann gilt

$$\mathbf{R} : \mathbf{S} = R^{AB}S_{AB}. \quad (1.1.14)$$

Metrik und Inneres Produkt

Die oben nur in der Koordinatendarstellung des inneren Produktes eingeführten Metriken \mathbf{g} und \mathbf{G} können mit Hilfe von (1.1.11) auch als Tensoren

$$\mathbf{G} \in T_2^0 \mathcal{P}_0 : T \mathcal{P}_0 \rightarrow T^* \mathcal{P}_0 \quad (1.1.15)$$

$$\mathbf{G}^{-1} \in T_0^2 \mathcal{P}_0 : T^* \mathcal{P}_0 \rightarrow T \mathcal{P}_0 \quad (1.1.16)$$

$$\mathbf{g} \in T_2^0 \mathcal{P}_t : T \mathcal{P}_t \rightarrow T^* \mathcal{P}_t \quad (1.1.17)$$

$$\mathbf{g}^{-1} \in T_0^2 \mathcal{P}_t : T \mathcal{P}_t \rightarrow T^* \mathcal{P}_t. \quad (1.1.18)$$

interpretiert werden. Damit können die inneren Produkte von Vektoren und Kovektoren mit Hilfe der Metriktensoren ausgedrückt werden, z.B.

$$\langle \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \rangle_{\mathbf{X}} = \mathbf{V}_1 \mathbf{G} \mathbf{V}_2 = V^A V^B G_{AB}, \quad \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2 \in T \mathcal{P}_0, \quad (1.1.19)$$

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \rangle_{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{g}^{-1} \boldsymbol{\alpha}_2 = \alpha_a \alpha_b g^{ab}, \quad \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in T^* \mathcal{P}_t. \quad (1.1.20)$$

Wenn die Metriktensoren auf diese Art in die koordinatenfreie Schreibweise eingeführt werden, kann so das innere Produkt von Vektoren bzw. Kovektoren auf die einfache Überschiebung zurückgeführt werden.

Das innere Produkt zweier Tensoren \mathbf{T} und \mathbf{S} ist definiert als

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{S} \rangle_{\mathbf{X}} = T^{A_1 \dots A_p B_1 \dots B_q} S_{A_1 \dots A_p B_1 \dots B_q}, \quad (1.1.21)$$

d.h. es werden alle Indizes mit Hilfe der Metrik gehoben bzw. gesenkt und die entstandenen assoziierten Tensoren \mathbf{T}^\sharp und \mathbf{S}^\flat über alle Indizes überschoben. Wenn $\mathbf{T} \in T_2^0 \mathcal{P}_0$ und $\mathbf{S} \in T_0^2 \mathcal{P}_0$ Tensoren zweiter Stufe sind, die in einer dualen Beziehung stehen, benötigt man keine assoziierten Tensoren und das innere Produkt ist definiert durch die doppelte Überschiebung

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{S} \rangle_{\mathbf{X}} = \mathbf{T} : \mathbf{S} = T^{AB} S_{AB}. \quad (1.1.22)$$

Materieller Körper

Ein *materieller Körper* ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit \mathcal{B} (hier der Dimension 3) mit einem stetigen Rand $\partial \mathcal{B}$. Elemente von \mathcal{B} heißen *materielle Punkte* ξ . Das Symbol ξ ist weder eine Zahl, noch eine Koordinate, sondern lediglich der "Name" des Partikels.

Konfiguration und Bewegung

Eine *Konfiguration* von \mathcal{B} ist eine Abbildung $\Phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei \mathbb{R}^3 hier nicht vom dreidimensionalen Euklidischen Raum unterschieden werden soll. Eine *Bewegung* von \mathcal{B} wird durch eine Einparameterfamilie von Konfigurationen oder Abbildungen $\Phi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschrieben, die von der Zeit t abhängen

$$\mathbf{x} = \Phi(\xi, t) = \Phi_t(\xi), \quad \xi \in \mathcal{B}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.1.23)$$

Die Abbildung Φ_t sei umkehrbar und so oft wie benötigt stetig differenzierbar.

Referentielle Beschreibung

Der Körper \mathcal{B} darf nicht mit einer seiner räumlichen Konfigurationen verwechselt werden, auch wenn er nur durch solche zum physikalischen Untersuchungsgegenstand werden kann. Deshalb ist es für die hier durchzuführenden Untersuchungen vorteilhaft, den materiellen Partikeln eine Position in einer fixierten, sogenannten *Referenzkonfiguration* zuzuweisen. Diese Referenzkonfiguration muß keine vom Körper im Laufe seiner Bewegung tatsächlich eingenommene sein, wird aber oft als tatsächliche Konfiguration zu einem festen Zeitpunkt t_0 gewählt:

$$\mathcal{P}_0 = \Phi_{t_0}(\mathcal{B}). \quad (1.1.24)$$

Dabei wird der materielle Punkt ξ in den räumlichen Punkt

$$\mathbf{X} = \Phi_{t_0}(\xi) \quad (1.1.25)$$

abgebildet. Die Verknüpfung der Abbildungen Φ_{t_0} und Φ_t ergibt dann die sogenannte referentielle Beschreibung χ (s. Abb. 1.2)

$$\chi_t := \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1} : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{P}_t, \quad \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x} = \chi_t(\mathbf{X}). \quad (1.1.26)$$

Größen definiert auf der Referenzkonfiguration \mathcal{P}_0 sollen im Folgenden durch große Buchstaben, solche der momentanen Konfiguration \mathcal{P}_t durch kleine Buchstaben gekennzeichnet werden.

Geschwindigkeit und Beschleunigung

Ein materieller Punkt ξ mit den Koordinaten \mathbf{X} zum Zeitpunkt t_0 habe die momentane Position \mathbf{x}_t zum Zeitpunkt t . Das Geschwindigkeitsfeld ist dann

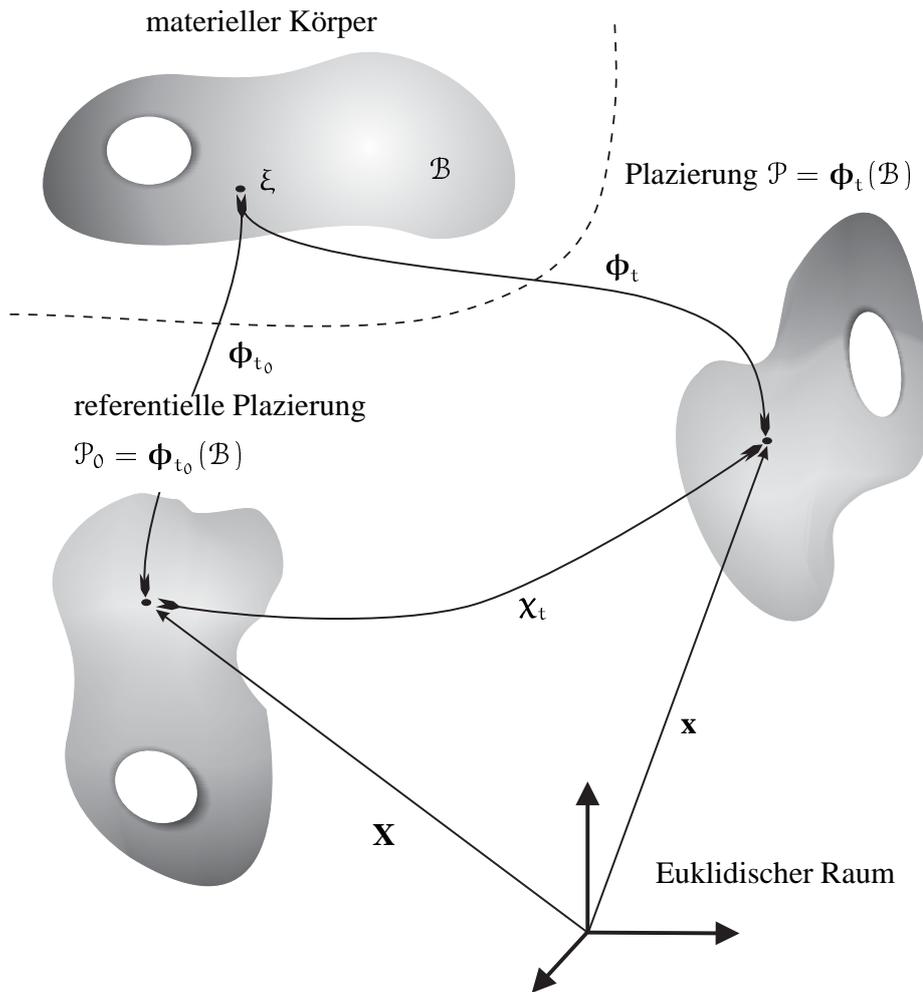


Abbildung 1.2: Referentielle Beschreibung

gegeben durch partielle Differentiation der Bewegung nach der Zeit

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \chi(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{x}}. \quad (1.1.27)$$

\mathbf{V} heißt *materielle Geschwindigkeit* der Bewegung. Sie beschreibt den Geschwindigkeitsvektor eines Partikels zum Zeitpunkt t , daß zur Zeit $t = t_0$ den Ort \mathbf{X} einnahm. Die *materielle Beschleunigung* ist definiert durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{x}} \quad (1.1.28)$$

Wenn \mathbf{X} durch $\mathbf{X} = \chi_t^{-1}(\mathbf{x})$ ausgedrückt wird, erhält man Geschwindigkeit und Beschleunigung bezüglich der momentanen Konfiguration

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\chi_t^{-1}(\mathbf{x}), t), \quad (1.1.29)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\chi_t^{-1}(\mathbf{x}), t) \quad (1.1.30)$$

mit folgendem Zusammenhang zwischen \mathbf{a} und \mathbf{v}

$$\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (1.1.31)$$

Hierbei stellt $\nabla \mathbf{v}$ den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten dar, der auch mit $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$ bezeichnet wird; $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ ist die kovariante Ableitung von \mathbf{v} in Richtung \mathbf{v} .

Bezugssystem und Objektivität

Um ein physikalisches Ereignis mit Hilfe der fundamentalen Meßgrößen, wie Entfernung und Zeitintervall, aufnehmen zu können, benötigt man einen Beobachter, dem ein Bezugssystem zugeordnet ist. Solch ein Bezugssystem kann z.B. ein Labor sein, bezüglich dessen Wänden die Position eines Ereignisses aufgenommen wird. Auch die Zeit kann nur relativ zu einem beliebigen Bezugszeitpunkt bestimmt werden. Abstrakt gesprochen wird also ein Bezugssystem benötigt, um physikalischen Ereignissen Positionen im Euklidischen Punktraum und auf der reellen Zeitachse zuzuordnen. Ein *Ereignis* ist ein Paar $\{\mathbf{x}, t\}$ aus einem Punkt \mathbf{x} im Raum und einer Zeit t . Die Gesamtheit aller Ereignisse heißt *Raumzeit*. Der Wechsel eines Bezugssystems ist eine eineindeutige Abbildung der Raumzeit auf sich selbst, so daß Abstände und Zeitintervalle sowie die zeitliche Abfolge erhalten bleiben. Es kann gezeigt werden, daß ein Ereignis $\{\mathbf{x}, t\}$ und dasselbe Ereignis nach einem Wechsel des Bezugssystems $\{\mathbf{x}^+, t^+\}$ durch eine Starrkörperbewegung und eine Zeitverschiebung miteinander verknüpft sind (NOLL 1964)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ &= \mathbf{c}(t) + \mathbf{q}(t)\mathbf{x}, \\ t^+ &= t - a, \end{aligned} \quad (1.1.32)$$

wobei $\mathbf{c}(t)$ ein zeitabhängiger Punkt, a eine reelle Zahl und $\mathbf{q}(t) \in SO(T\mathcal{P}_t)$ ein orientierungserhaltender orthogonaler Tensor ist. Eine Abbildung \mathbf{q} nennt man orientierungserhaltend orthogonal, wenn sie ein Element der Gruppe

$$SO(T\mathcal{P}_0; T\mathcal{P}_t) := \{\mathbf{R} \in Iso(T\mathcal{P}_0; T\mathcal{P}_t) \mid \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}, \det \mathbf{R} = 1\} \quad (1.1.33)$$

ist. Das hochgestellte T bezeichnet die jeweilige duale Größe, deren Matrixdarstellung bezüglich der Einheitsbasis die transponierte Matrix der Ausgangsgröße ist. \mathbf{q} in (1.1.32) ist ein Spezialfall von (1.1.33), da er einen Auto-

morphismus $\text{Iso}(T\mathcal{P}_t; T\mathcal{P}_t)$ darstellt (deshalb auch die unkonventionelle Kleinschreibung von \mathbf{q}). Die Transformation \mathbf{q} ist durch den Wechsel des Bezugssystem eindeutig festgelegt, $\mathbf{c}(t)$ hängt von der Wahl des Ursprungs ab. Daraus folgen die folgenden Transformationsgesetze:

(i) Skalare bleiben unter Bezugssystemwechsel unverändert

(ii) Vektoren $\mathbf{v} \in T\mathcal{P}_t$ transformieren sich zu

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{q}(t)\mathbf{v} \quad (1.1.34)$$

(iii) Für Tensoren zweiter Stufe \mathbf{a} definiert auf \mathcal{P}_t erhält man daraus

$$\mathbf{a}^+ = \mathbf{q}(t)^T \mathbf{a} \mathbf{q}(t) \quad (1.1.35)$$

Funktionen und Felder der Momentankonfiguration werden *objektiv* genannt, wenn sich ihre abhängigen und unabhängigen Variablen unter Wechsel des Bezugssystems gemäß (1.1.32) - (1.1.35) transformieren.

1.1.2 Kinematik der Deformationen

Den eigentlichen Beobachtungsgegenstand der Kontinuumsmechanik bilden die Deformationen (und später die daraus resultierenden Spannungen) eines materiellen Körpers und deren zeitlicher Verlauf unter gegebenen äußeren Beanspruchungen.

Deformationsgradient

Die Ableitung der Konfiguration eines Körpers wird *Deformationsgradient* genannt. Dieses Objekt spielt die zentrale Rolle in den Betrachtungen der finiten Kontinuumsmechanik und soll deshalb näher betrachtet werden.

Es sei $\chi_t : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{P}_t$ eine C^1 stetige Abbildung von \mathcal{P}_0 in \mathcal{P}_t . Die Tangentialabbildung $T_{\mathbf{x}}\chi_t : T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_0 \rightarrow T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_t$ von χ_t wird mit \mathbf{F} bezeichnet und (referentieller) Deformationsgradient von χ_t genannt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = T_{\mathbf{x}}\chi_t : T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_0 \rightarrow T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_t. \quad (1.1.36)$$

Wenn auf \mathcal{P}_0 und \mathcal{P}_t die Koordinatensysteme $\{X^A\}$ bzw. $\{x^a\}$ vorliegen, dann ist die Matrix der Komponenten von $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ bezüglich der Basen $\mathbf{E}_A(\mathbf{X})$ und $\mathbf{e}_a(\mathbf{x})$ durch

$$F^a_A(\mathbf{X}) = \frac{\partial X^A}{\partial x^a}(\mathbf{X}) \quad (1.1.37)$$

gegeben. Wenn die Zeitabhängigkeit nicht besonders betont werden soll, wird diese im Folgenden nicht mehr ausdrücklich gekennzeichnet. Die Abbildung χ soll orientierungserhaltend und umkehrbar sein, so daß

$$\det F^a_A > 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{P}_0, \quad (1.1.38)$$

gilt. Die Tangentialräume bzw. die entsprechenden Kotangentialräume seien vereinfacht durch

$$\mathbb{V} \equiv T_{\mathbf{X}}\mathcal{P}_0, \quad \mathbb{V}^* \equiv T_{\mathbf{X}}^*\mathcal{P}_0, \quad \mathbb{W} \equiv T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_t, \quad \mathbb{W}^* \equiv T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{P}_0 \quad (1.1.39)$$

abgekürzt. Die Tangentialbündel der p-fach kontravarianten und q-fach kovarianten Tensoren auf \mathcal{P}_0 bzw. \mathcal{P}_t werden dann als

$$\mathcal{T}_q^p\mathbb{V} \quad \text{und} \quad \mathcal{T}_q^p\mathbb{W} \quad (1.1.40)$$

geschrieben. Der Deformationsgradient ordnet somit jedem Tangentenvektor $\mathbf{G}_A \in \mathbb{V}$ einen entsprechenden Tangentenvektor $\mathbf{g}_a \in \mathbb{W}$ zu und stellt somit einer Isomorphismus zwischen den Vektorräumen \mathbb{V} und \mathbb{W} dar:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}. \quad (1.1.41)$$

Die entsprechenden inversen, dualen und dual-inversen Abbildungen sind dann wie folgt definiert

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}) : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}, \quad (1.1.42)$$

$$\mathbf{F}^T(\mathbf{X}) : \mathbb{W}^* \rightarrow \mathbb{V}^*, \quad (1.1.43)$$

$$\mathbf{F}^{-T}(\mathbf{x}) : \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{W}^*. \quad (1.1.44)$$

Die Schreibweise des hochgestellten T wird gewählt, weil die Matrixdarstellung von \mathbf{F}^T bezüglich der dualen Basen e^a und E^A die Transponierte von F^a_A ist.

Polare Zerlegung

Auf einem metrischen Vektorraum kann die lineare Abbildung $\mathbf{F} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ in einen symmetrischen und einen orthogonalen Anteil aufgespalten werden. Abhängig davon, ob man zuerst die Drehung und dann die Streckung oder umgekehrt ausführt, erhält man zwei verschiedene Zerlegungen

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{R}(\mathbf{X})\mathbf{U}(\mathbf{X}); \quad F^a_A(\mathbf{X}) = R^a_B(\mathbf{X})U^B_A(\mathbf{X}), \quad (1.1.45)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{X}); \quad F^a_A(\mathbf{x}) = v^a_b(\mathbf{x})R^b_A(\mathbf{X}) \quad (1.1.46)$$

mit $\mathbf{U} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, $\mathbf{v} : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$, dem linken und rechten Strecktensor und $\mathbf{R} \in SO(\mathbb{V}; \mathbb{W})$, dem Rotationstensor.

$$(1.1.47)$$

Die Rotation \mathbf{R} ist, genauso wie der Deformationsgradient \mathbf{F} ein sogenannter *two-point Tensor*, d.h. er hat ein “Bein” in der Referenzkonfiguration und eins in der Momentankonfiguration. Diese Objekte transformieren Größen zwischen zwei Konfigurationen und verschieben außerdem den Basispunkt. Die einfachste Form eines solchen two-point Tensors ist der sogenannte *Shifter* 1_S .

$$(1_S)^a_A(\mathbf{X}) W^A(\mathbf{X}) = W^a(\mathbf{x}). \quad (1.1.48)$$

Dieser bewirkt lediglich einen Paralleltransport eines Vektors \mathbf{W} mit Basispunkt in \mathbf{X} in den identischen Vektor mit Basispunkt in \mathbf{x} .

push-pull Operationen

Die Einführung der Begriffe *pull-back* und *push-forward* geht auf die differentialgeometrische Betrachtung der Mechanik in MARS DEN & HUGHES

(1983) zurück. HOPPE (1996) hat deren Definition auf isomorphe Abbildungen $\mathbf{F} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ zwischen Vektorräumen erweitert. Der pull-back $\mathbf{F}^\triangleleft \mathbf{B}$ eines Tensors $\mathbf{B} \in \mathcal{T}_q^p \mathbb{W}$ und der push-forward $\mathbf{F}_\triangleright \mathbf{A}$ eines Tensors $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_s^r \mathbb{V}$ sind dann bezüglich des Isomorphismus $\mathbf{F} \in Iso(\mathbb{V}; \mathbb{W})$ als Abbildungen mit den Eigenschaften

$$\mathbf{F}^\triangleleft \mathbf{B}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{F}^T \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \mathbf{F}^T \boldsymbol{\alpha}_r) = \mathbf{B}(\mathbf{F}\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{F}\mathbf{u}_s, \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r) \quad (1.1.49)$$

$$\forall \mathbf{u}_i \in \mathbb{V}, \boldsymbol{\alpha}_j \in \mathbb{W}^*,$$

$$\mathbf{F}_\triangleright \mathbf{A}(\mathbf{F}\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{F}\mathbf{u}_s, \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r) = \mathbf{A}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{F}^T \boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \mathbf{F}^T \boldsymbol{\alpha}_r) \quad (1.1.50)$$

$$\forall \mathbf{u}_i \in \mathbb{V}, \boldsymbol{\alpha}_j \in \mathbb{W}^*$$

definiert. Mit Hilfe von (1.1.49) können folgende Regeln für push-forward und pull-back Operationen auf Tensorprodukte von Vektoren hergeleitet werden:

$$\mathbf{F}_\triangleright (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathbf{F}_\triangleright (\mathbf{A}) \otimes \mathbf{F}_\triangleright (\mathbf{B}), \quad (1.1.51)$$

$$\mathbf{F}^\triangleleft (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{F}^\triangleleft (\mathbf{a}) \otimes \mathbf{F}^\triangleleft (\mathbf{b}). \quad (1.1.52)$$

Aus (1.1.11) folgt dann, daß push- und pull-Abbildungen auf alle Tensoren angewendet werden können. Für die Tensoren zweiter Stufe sei hier eine Übersicht der push-pull Beziehungen gegeben:

$$\mathbf{C} \in \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^* : \quad \mathbf{F}_\triangleright (\mathbf{C}) = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{A} \mathbf{F}^{-1}; \quad (\mathbf{F}_\triangleright (\mathbf{C}))_{ab} = (\mathbf{F}^{-1})^A{}_a C_{AB} (\mathbf{F}^{-1})^B{}_b \quad (1.1.53)$$

$$\mathbf{c} \in \mathbb{W}^* \otimes \mathbb{W}^* : \quad \mathbf{F}^\triangleleft (\mathbf{c}) = \mathbf{F}^T \mathbf{c} \mathbf{F}; \quad (\mathbf{F}^\triangleleft (\mathbf{c}))_{AB} = F^A{}_a c_{ab} F^b{}_B \quad (1.1.54)$$

$$\mathbf{U} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^* : \quad \mathbf{F}_\triangleright (\mathbf{U}) = \mathbf{F} \mathbf{U} \mathbf{F}^{-1}; \quad (\mathbf{F}_\triangleright (\mathbf{U}))^a{}_b = F^a{}_A U^A{}_B (\mathbf{F}^{-1})^B{}_b \quad (1.1.55)$$

$$\mathbf{v} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}^* : \quad \mathbf{F}^\triangleleft (\mathbf{v}) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{v} \mathbf{F}; \quad (\mathbf{F}^\triangleleft (\mathbf{v}))^A{}_B = (\mathbf{F}^{-1})^A{}_a v^a{}_b F^b{}_B \quad (1.1.56)$$

$$\mathbf{S} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} : \quad \mathbf{F}_\triangleright (\mathbf{S}) = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T; \quad (\mathbf{F}_\triangleright (\mathbf{S}))^{ab} = F^a{}_A S^{AB} F^b{}_B \quad (1.1.57)$$

$$\mathbf{s} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W} : \quad \mathbf{F}^\triangleleft (\mathbf{s}) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s} \mathbf{F}^{-T}; \quad (\mathbf{F}^\triangleleft (\mathbf{s}))^{AB} = (\mathbf{F}^{-1})^A{}_a s^{ab} (\mathbf{F}^{-1})^B{}_b. \quad (1.1.58)$$

Desweiteren kann gezeigt werden, daß die Reihenfolge von push-pull Operationen und der Inversion eines Tensors vertauscht werden kann:

$$\mathbf{F}^\triangleleft (\mathbf{a}^{-1}) = (\mathbf{F}^\triangleleft (\mathbf{a}))^{-1}; \quad \mathbf{F}_\triangleright (\mathbf{A}^{-1}) = (\mathbf{F}_\triangleright (\mathbf{A}))^{-1}. \quad (1.1.59)$$

Außerdem kann man leicht folgende Regeln für verknüpfte Abbildungen herleiten:

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})_\triangleright (\mathbf{W}) = \mathbf{A}_\triangleright (\mathbf{B}_\triangleright (\mathbf{W})) \quad \forall \mathbf{W} \in \mathbb{V}, \quad (1.1.60)$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^\triangleleft (\mathbf{w}) = \mathbf{B}^\triangleleft (\mathbf{A}^\triangleleft (\mathbf{w})) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{W}.$$

Nützlich ist auch noch folgende Transformationseigenschaft der Überschiebung eines Vektors $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ mit einem Kovektor $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{V}^*$ unter dem push-forward mit einer isomorphen Abbildung $\mathbf{A} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$

$$\langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\alpha} \rangle = \mathbf{v} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}_\triangleright(\mathbf{v}) \mathbf{A}_\triangleright(\boldsymbol{\alpha}), \quad (1.1.61)$$

was leicht anhand von (1.1.49) überprüft werden kann. Über (1.1.51) kann dies auf beliebige skalarwertige Überschiebungen von Tensoren auf dualen Räumen erweitert werden.

Objektivität von Tensorfeldern

Mittels der push-pull Beziehungen können die in Abschnitt 1.1.1 dargestellten Zusammenhänge weiter verallgemeinert werden, da die dort hergeleiteten Beziehungen nur für Tensoren bis zur zweiten Stufe auf der Momentankonfiguration gelten.

Dazu sei die Bewegung eines Körpers \mathcal{B} in referentieller Beschreibung $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ betrachtet. Dieselbe Bewegung wird in einem anderen Bezugssystem gemäß (1.1.32) dargestellt als

$$\mathbf{x}^+ = \boldsymbol{\chi}^+(\mathbf{X}, t^+) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{q}(t) \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t); \quad t^+ = t - a, \quad (1.1.62)$$

falls man davon ausgeht, daß die Referenzplatzierung Φ_{t_0} unabhängig von der Wahl eines Beobachters ist, was im Folgenden immer vorausgesetzt werden soll. Die beiden Bewegungen $\boldsymbol{\chi}$ und $\boldsymbol{\chi}^+$ unterscheiden sich nur durch eine Starrkörperbewegung und eine Zeitverschiebung. Wenn zwei Bewegungen über eine Gleichung der Form (1.1.62) zusammenhängen, heißen sie *äquivalente Bewegungen*. Aus (1.1.62) ergibt sich das Transformationsgesetz für den Deformationsgradienten:

$$\mathbf{F}^+ = \mathbf{q} \mathbf{F}. \quad (1.1.63)$$

Die Transformationsbeziehungen aus Abschnitt 1.1.1 lassen sich unter Zuhilfenahme eines Tensors der Momentankonfiguration beliebiger Stufe \mathbf{t} zusammenfassen zu

$$\mathbf{t}^+ = \mathbf{q}_\triangleright(\mathbf{t}); \quad \mathbf{t}^+, \mathbf{t} \in \mathbb{T}_q^p \mathcal{P}_t. \quad (1.1.64)$$

Für einen Tensor beliebiger Stufe \mathbf{S} in der Referenzkonfiguration ist die Objektivität gegeben, wenn eine Beobachtertransformation die Größe unverändert

läßt

$$\mathbf{S}^+ = \mathbf{S}; \quad \mathbf{S}^+, \mathbf{S} \in T_q^p \mathcal{P}_0. \quad (1.1.65)$$

Da *two-point*-Tensoren sich durch das Tensorprodukt in Eulersche bzw. Lagrange'sche Tensoren aufspalten lassen, sind für die "Beine" in der Ausgangs- bzw. Momentankonfiguration (1.1.65) bzw. (1.1.64) sinngemäß anzuwenden, wie in (1.1.63) zu sehen.

Mit Hilfe von (1.1.64) und (1.1.65) kann außerdem gezeigt werden, daß das push-forward eines objektiven Tensors der Referenzkonfiguration einen objektiven Tensor der Momentankonfiguration ergibt.

Es sei $\mathbf{a} \in T_q^p \mathcal{P}_t$ das push-forward mit Hilfe des (objektiven) Deformationsgradienten \mathbf{F} eines objektiven Tensors $\mathbf{A} \in T_q^p \mathcal{P}_0$. Es soll gezeigt werden, daß aus $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$ folgt, daß $\mathbf{a}^+ = \mathbf{q}_\triangleright(\mathbf{a})$

$$\mathbf{a}^+ = \mathbf{F}_\triangleright^+(\mathbf{A}^+) = \mathbf{F}_\triangleright^+(\mathbf{A}) = (\mathbf{q}\mathbf{F})_\triangleright(\mathbf{A}) = \mathbf{q}_\triangleright(\mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{A})) = \mathbf{q}_\triangleright(\mathbf{a}) \quad (1.1.66)$$

Somit erfüllt \mathbf{a} die Objektivitätsbedingung (1.1.64). ■

Deformationsmaße

Die Deformation eines Körpers ändert die Längen von im Körper eingebetteten Vektoren (Tangentenvektoren) und deren Winkel zueinander. Diese Längen und Winkel werden in der Momentankonfiguration mit Hilfe des inneren Produktes bzw. der Metrik \mathbf{g} gemessen. Der Metriktensor ist ein kovarianter Tensor zweiter Stufe $\mathbf{g} \in \mathbb{W}^* \otimes \mathbb{W}^*$. Die Darstellung dieses Tensors bezüglich der Referenzkonfiguration mit Hilfe des pull-backs ergibt dann ein Maß für die Deformation des Körpers

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^\triangleleft(\mathbf{g}) = \mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{F}, \quad (1.1.67)$$

das als *rechter Cauchy-Greenscher Deformationstensor* bekannt ist. Auf ähnliche Weise kann man durch das push-forward der Metrik der Referenzkonfiguration $\mathbf{G} \in \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*$ in die Momentankonfiguration ein Deformationsmaß erzeugen

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{G}) = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1}, \quad (1.1.68)$$

daß als *Cauchyscher Deformationstensor* bezeichnet wird. Mit Hilfe der polaren Zerlegung und $\mathbf{g} = \mathbf{R}_\triangleright(\mathbf{G})$ kann einen Zusammenhang zwischen \mathbf{C} , \mathbf{c} und \mathbf{U} , \mathbf{v} aufgezeigt werden

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^\triangleleft(\mathbf{g}) = \mathbf{U}^\triangleleft(\mathbf{G}) = \mathbf{U}^T \mathbf{G} \mathbf{U}, \quad (1.1.69)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{g}) = \mathbf{v}_\triangleright(\mathbf{g}) = \mathbf{v}^{-T} \mathbf{g} \mathbf{v}^{-1}. \quad (1.1.70)$$

Das kommutative Diagramm (1.1.71) verdeutlicht, wie einige der häufig verwendeten Deformationsmaße durch push- und pull Beziehungen aus den Metriken \mathbf{g} und \mathbf{G} entstehen

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{b} & \xrightarrow{\mathbf{v}_\triangleright} & \mathbf{g} & \xrightarrow{\mathbf{v}_\triangleright} & \mathbf{c} \\
 \uparrow \mathbf{R}_\triangleright & \nearrow \mathbf{F}_\triangleright & \uparrow \mathbf{R}_\triangleright & \nearrow \mathbf{F}_\triangleright & \uparrow \mathbf{R}_\triangleright \\
 \mathbf{c} & \xrightarrow{\mathbf{U}_\triangleright} & \mathbf{G} & \xrightarrow{\mathbf{U}_\triangleright} & \mathbf{B},
 \end{array} \quad (1.1.71)$$

wobei \mathbf{b} der *räumliche Fingersche Deformationstensor* und \mathbf{B} der *referentielle Fingersche Deformationstensor* sind.

Verzerrungsmaße

Hier seien zunächst zwei Verzerrungsmaße eingeführt, die auf natürliche Weise aus den oben eingeführten Deformationsmaßen resultieren. Zum einen kann mit Hilfe von \mathbf{C} die Metrik der Momentankonfiguration mit der Metrik der unverformten Konfiguration verglichen werden. Dies liefert ein Maß für die Verzerrung des Körpers

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}), \quad (1.1.72)$$

den sogenannten *Greenschen Verzerrungstensor*. Der Faktor $\frac{1}{2}$ dient der Normalisierung und wird weiter unten diskutiert. Der Vergleich der Metriken in der Momentankonfiguration ergibt den *Almansischen Verzerrungstensor*

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{c}). \quad (1.1.73)$$

Die Wahl der Reihenfolge der Differenzenbildung in (1.1.72) und (1.1.73) dient auch der oben erwähnten Normalisierung. Außerdem gilt

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{E}). \quad (1.1.74)$$

Die oben präsentierten Verzerrungsmaße entstehen auf natürliche Weise aus dem geometrischen Ansatz. Man kann verallgemeinerte Verzerrungsmaße definieren (XIAO, BRUHNS & MEYERS 1998A), die auf dem rechten Cauchy-Greenschen Verzerrungstensor \mathbf{C} bzw. dem *linken Cauchy-Greenschen Verzerrungstensor* $\mathbf{b} = (\mathbf{v}^2)^{\wedge}(\mathbf{c}) = \mathbf{V}^T \mathbf{g} \mathbf{V}$ basieren: $\mathbf{E}_{\mathbf{C}} = \mathbf{f}(\mathbf{C})$ bzw. $\mathbf{e}_{\mathbf{b}} = \mathbf{f}(\mathbf{b})$. Dabei muß \mathbf{f} den folgenden Bedingungen genügen:

- (i) \mathbf{f} ist objektiv;
- (ii) \mathbf{f} ist eine isotrope Tensorfunktion;
- (iii) \mathbf{f} ist monoton steigend;
- (iv) $\mathbf{f}(\mathbf{1}) = 0$ und $\mathbf{f}'(\mathbf{1}) = \frac{1}{2} \mathbf{1}$.

Hierbei bezeichnet $\mathbf{1}$ die Identitätsabbildung auf \mathbb{V} bzw. \mathbb{W} . Bedingung (iii) schreibt vor, daß eine Verlängerung eines Linienelementes des Körpers stets zu einem Anwachsen des Verzerrungsmaßes führt. Aus Bedingung (iv)₁ folgt, daß für einen unverformten Körper alle Verzerrungsmaße verschwinden. Bedingung (iv)₂ sorgt dafür, daß für kleine Verzerrungen alle Verzerrungsmaße identisch mit dem Verzerrungsmaß der linearen Elastizitätstheorie sind. Es kann z.B. die Klasse folgender Verzerrungsmaße betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m &= \frac{1}{2m} (\mathbf{C}^m - \mathbf{1}); & \mathbf{e}_m &= \frac{1}{2m} (\mathbf{b}^m - \mathbf{1}); & m &\neq 0, \\ \mathbf{E}_0 &= \frac{1}{2} \ln \mathbf{C}; & \mathbf{e}_0 &= \frac{1}{2} \ln \mathbf{b}; & m &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.75)$$

Für $m = 1$ erhält man den Greenschen und den Almansischen Verzerrungstensor, für $m = 0$ den referentiellen und räumlichen *Hencky-Verzerrungstensor*, der weiter unten diskutiert wird.

Aus Gründen der Konsistenz werden im hier vorgestellten Rahmen nur die aus den Metriken resultierenden Verzerrungstensoren Anwendung finden.

Zeitableitung des Deformationsgradienten

Die materielle Zeitableitung des Deformationsgradienten kann mit Hilfe der materiellen Geschwindigkeit als

$$\dot{\mathbf{F}}_{\Lambda}^{\mathbf{a}}(\mathbf{X}) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi^{\mathbf{a}}}{\partial X^{\Lambda}} \right|_{\mathbf{X}} = \frac{\partial V^{\mathbf{a}}}{\partial X^{\Lambda}}(\mathbf{X}); \quad \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{V}(\mathbf{X}) \quad (1.1.76)$$

geschrieben werden, mit $\nabla_{\mathbf{x}}$, dem Gradienten bezüglich der Koordinaten der Referenzkonfiguration. Die Vorwärtstransformation dieses Objektes in die Momentankonfiguration ergibt den *Geschwindigkeitsgradienten* $\mathbf{l} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}); \quad l^a{}_b(\mathbf{x}) = \dot{F}^a{}_A (F^{-1})^A{}_b = v^a{}_{,b}(\mathbf{x}), \quad (1.1.77)$$

wobei das Komma vor einem Index die partielle Ableitung nach diesem Index bedeutet.

Der assoziierte Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{l}^p = \mathbf{gl}$ kann in einen symmetrischen Anteil $\mathbf{d} \in \text{Sym}(\mathbb{W}; \mathbb{W}^*)$ und einen schiefsymmetrischen Anteil $\mathbf{w} \in \text{Skw}(\mathbb{W}; \mathbb{W}^*)$ zerlegt werden

$$\mathbf{l}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{gl} + \mathbf{l}^T \mathbf{g}) + \frac{1}{2}(\mathbf{gl} - \mathbf{l}^T \mathbf{g}) = \mathbf{d} + \mathbf{w}, \quad (1.1.78)$$

wobei die symmetrische und antimetrische Gruppe definiert sind durch

$$\text{Sym}(\mathbb{W}; \mathbb{W}^*) := \{ \mathbf{A} \in \text{Lin}(\mathbb{W}; \mathbb{W}^*) \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \}, \quad (1.1.79)$$

$$\text{Skw}(\mathbb{W}; \mathbb{W}^*) := \{ \mathbf{\Omega} \in \text{Lin}(\mathbb{W}; \mathbb{W}^*) \mid \mathbf{\Omega} = -\mathbf{\Omega}^T \};$$

\mathbf{d} nennt man *Streckgeschwindigkeitstensor* und \mathbf{w} *Drehgeschwindigkeitstensor*.

Objektive Zeitableitungen

Ausgangspunkt soll hier sein, zu zeigen, daß die materielle Zeitableitung eines Tensors der Referenzkonfiguration objektiv ist. Dies gelingt durch die direkte Differenzierung der (identischen) Komponenten von $\mathbf{T}^+ = \mathbf{T}$, was auf

$$\left(\dot{\mathbf{T}} \right)^+ = \dot{\mathbf{T}} \quad (1.1.80)$$

führt. ■

Die materielle Zeitableitung von objektiven Tensoren der Momentankonfiguration ist hingegen im Allgemeinen nicht objektiv. Dies sei beispielhaft an einem objektiven Tensor zweiter Stufe $\mathbf{a}^+ = \mathbf{q} \mathbf{a} \mathbf{q}^T$ gezeigt

$$\overline{\dot{\mathbf{a}}^+} = \overline{\dot{\mathbf{q}} \mathbf{a} \mathbf{q}^T} = \mathbf{q} \dot{\mathbf{a}} \mathbf{q}^T + \dot{\mathbf{q}} \mathbf{a} \mathbf{q}^T + \mathbf{q} \mathbf{a} \dot{\mathbf{q}}^T = \dot{\mathbf{a}}^+ + \mathbf{a}^+ \mathbf{q} \dot{\mathbf{q}}^T + \dot{\mathbf{q}} \mathbf{q}^T \mathbf{a}^+. \quad (1.1.81)$$

Mit $\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{q}} \mathbf{q}^T \in \text{Skw}(\mathbb{W}; \mathbb{W}^*)$, dem schiefsymmetrischen Spintensor zu \mathbf{q} vereinfacht sich dies zu

$$\overline{\dot{\mathbf{a}}^+} = \dot{\mathbf{a}}^+ - \mathbf{a}^+ \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \mathbf{a}^+, \quad (1.1.82)$$

was eindeutig nicht objektiv ist. Viele objektive Zeitableitungen sind im wesentlichen Korrekturen, die zur materiellen Zeitableitung addiert werden, um deren Objektivität zu erreichen. Gleichung (1.1.80) bietet zusammen mit Gleichung (1.1.66) einen Rahmen, um die Herleitung von objektiven Zeitableitungen zu formalisieren. Und zwar kann man außer dem Deformationsgradienten \mathbf{F} jeden Isomorphismus $\mathbf{I} \in Iso(\mathbb{V}; \mathbb{W})$ benutzen, um Größen der Momentankonfiguration in die Referenzkonfiguration zurückzuziehen, dort die materielle Zeitableitung durchzuführen und das Ergebnis wieder nach vorne zu transformieren. Falls das pull-back des Tensors in die Referenzkonfiguration objektiv ist, dann ist es auch die so konstruierte Zeitableitung. Zeitableitungen dieses Typs sind Lie-Ableitungen. Bezüglich eines Isomorphismus \mathbf{I} ist die Lie-Ableitung eines Tensors $\mathbf{t} \in \mathcal{T}_q^p \mathbb{W}$ definiert als

$$\mathcal{L}_{\mathbf{I}} \mathbf{t} = \mathbf{I}_\triangleright \left(\overline{\mathbf{I}^{\triangleleft}(\dot{\mathbf{t}})} \right) \quad \forall \quad \mathbf{I} \in Iso(\mathbb{V}; \mathbb{W}), \quad \mathbf{t} \in \mathcal{T}_q^p \mathbb{W}. \quad (1.1.83)$$

Als solche Isomorphismen können zum Beispiel der Deformationsgradient \mathbf{F} oder die Rotation \mathbf{R} dienen. Mit \mathbf{F} erhält man für einen kovarianten Tensor $\mathbf{c} \in \mathbb{W}^* \otimes \mathbb{W}^*$ die sogenannte *Cotter-Rivlin-Rate*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{c} = \mathbf{F}^{-T} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{F}^T \mathbf{c} \mathbf{F}) \right) \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{I}^T \mathbf{c} + \mathbf{c} \mathbf{l}, \quad (1.1.84)$$

mit \mathbf{l} dem Geschwindigkeitsgradienten. Für einen kontravarianten Tensor \mathbf{s} ergibt sich die *Olroyd-Rate*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{s} = \mathbf{F} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{F}^{-1} \mathbf{s} \mathbf{F}^{-T}) \right) \mathbf{F}^T = \dot{\mathbf{s}} - \mathbf{l} \mathbf{s} - \mathbf{s} \mathbf{l}^T. \quad (1.1.85)$$

Mit \mathbf{R} erhält man sowohl für ko- als auch für kontravariante Tensoren zweiter Stufe die *Green-Naghdi-Rate*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{R}} \mathbf{a} = \mathbf{R}^{-T} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{R}^T \mathbf{a} \mathbf{R}) \right) \mathbf{R}^{-1} = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{\Omega}^T \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{\Omega}, \quad (1.1.86)$$

mit $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1}$. Wenn in (1.1.86) \mathbf{R} durch \mathbf{R}_{Log} ersetzt wird, erhält man die sogenannte *logarithmische Rate* oder *XBM-Rate*. Diese Rate wurde in jüngeren Arbeiten von XIAO, BRUHNS & MEYERS (1999, 2000) hergeleitet und ausführlich diskutiert. In dem hier gewählten Rahmen kann man sie ausdrücken durch

$$\mathcal{L}_{\mathbf{R}_{\text{Log}}} \mathbf{a} = \mathbf{R}_{\text{Log}}^{-T} \left(\frac{d}{dt} (\mathbf{R}_{\text{Log}}^T \mathbf{a} \mathbf{R}_{\text{Log}}) \right) \mathbf{R}_{\text{Log}}^{-1} = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{\Omega}_{\text{Log}}^T \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{\Omega}_{\text{Log}}, \quad (1.1.87)$$

mit

$$\mathbf{\Omega}_{\text{Log}}^b = \mathbf{w} + \sum_{\sigma \neq \tau}^m \left(\frac{1 + (\lambda_\sigma/\lambda_\tau)}{1 + (\lambda_\sigma/\lambda_\tau)} + \frac{2}{\ln(\lambda_\sigma/\lambda_\tau)} \right) \mathbf{b}_\sigma \mathbf{d}^\# \mathbf{b}_\tau. \quad (1.1.88)$$

Hierbei bezeichnen die λ_σ die Eigenwerte des *linken Cauchy-Greenschen Deformationstensors* $\mathbf{b} = \mathbf{v}^T \mathbf{g} \mathbf{v}$, m die Anzahl ungleicher Eigenwerte und $\mathbf{b}_\sigma, \mathbf{b}_\tau$ die entsprechenden Eigenprojektionen. Die Rotation \mathbf{R}_{Log} gewinnt man aus der tensoriellen Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{Log}} = -\mathbf{R}_{\text{Log}} \mathbf{\Omega}_{\text{Log}}, \quad \mathbf{R}_{\text{Log}}|_{t=0} = \mathbf{1}_S. \quad (1.1.89)$$

Streckgeschwindigkeitstensor und Verzerrungsrate

Es fällt auf, daß man sowohl bei der Wahl der Verzerrungstensoren, als auch bei der Wahl der objektiven Zeitableitungen aus einer Menge von möglichen Kombinationen wählen kann. Eine wichtige Forderung schränkt diese Menge erheblich ein, nämlich daß die objektive Zeitableitung des gewählten Verzerrungsmaßes den Streckgeschwindigkeitstensor ergeben soll. Diese Forderung resultiert daraus, daß beide Größen die Rate der Längenänderung von Linienelementen der Momentankonfiguration beschreiben. Bis jetzt sind nur zwei Kombinationen von Raten und Verzerrungsmaßen bekannt, die diese Eigenschaft aufweisen. Die XBM-Rate des räumlichen Hencky-Verzerrungsmaßes $\mathbf{h} = 1/2 \ln \mathbf{b}$ und die Lie-Rate bezüglich \mathbf{F} des Almansischen Verzerrungstensors \mathbf{e} :

$$\mathbf{d} = \mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{e} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{g}, \quad (1.1.90)$$

$$\mathbf{d} = \mathcal{L}_{\mathbf{R}_{\text{Log}}} \mathbf{h} = \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h} \mathbf{\Omega}_{\text{Log}} - \mathbf{\Omega}_{\text{Log}} \mathbf{h}. \quad (1.1.91)$$

In dieser Arbeit werden nur Lie-Ableitungen bezüglich \mathbf{F} benutzt, da der Deformationsgradient in dem hier präsentierten geometrischen Rahmen die natürliche Verknüpfung der Anfangs- und Momentankonfiguration bildet. In einem kartesischen Rahmen, in dem duale Räume nicht unterschieden werden, sind nur Lie-Ableitungen bezüglich orthogonaler Transformationen (z.B. $\mathbf{R}, \mathbf{R}_{\text{Log}}$) zulässig, die dann die Klasse der mitrotierenden Zeitableitungen bilden. XIAO, BRUHNS & MEYERS haben gezeigt, daß in einem solchen Rahmen die oben dargestellte Kombination aus XBM-Rate und räumlicher Hencky-Dehnung, die einzig zulässige ist (XIAO, BRUHNS & MEYERS 1997; XIAO,

BRUHNS & MEYERS 1998A; XIAO, BRUHNS & MEYERS 1998B; XIAO, BRUHNS & MEYERS 1999).

1.2 Thermo-mechanische Bilanzgleichungen

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten dynamischen Gleichungen für einen Körper dargestellt werden. Zusammen mit den Grundgleichungen der Thermodynamik bilden sie das Gerüst für eine Beschreibung der Kräfte und den daraus resultierenden Deformationen des Körpers. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 1.3 behandelt. Die Bilanzgleichungen werden in diesem Abschnitt nur in der räumlichen Beschreibung, d.h. in der Momentankonfiguration, angegeben. In Kapitel 2 werden diese Bilanzgleichungen für alle drei dort entstehenden Konfigurationen präsentiert.

1.2.1 Massenerhaltung

Für einen beliebigen Körper B gibt es ein skalares Maß m , das *Masse* des Körpers B genannt wird, so daß

$$m(B) \geq 0. \quad (1.2.1)$$

In dem hier betrachteten Kontext der kontinuumsmechanischen Beschreibung von Körpern, seien Punktmassen, wie sie typisch sind für die Beschreibung dynamischer Prozesse in der klassischen Mechanik starrer Körper, ausgeschlossen. Dann kann man die Masse schreiben als

$$m(B) := \int_B dm, \quad (1.2.2)$$

mit dm dem *Massenelement*. Die Masse $m(B)$ ist unabhängig vom Beobachter und der Konfiguration, die der Körper einnimmt, sie ist also eine zeitunabhängige objektive Größe

$$\frac{d}{dt}m(B) = 0. \quad (1.2.3)$$

Dies ist der *Massenerhaltungssatz*. Er gilt auch für einen beliebigen Teilkörper $\mathcal{U} \subset B$ mit Rand $\partial\mathcal{U}$.

In der Momentankonfiguration kann man ein zeitabhängiges skalares Feld $\rho(\mathbf{x}, t)$ einführen, daß eine Parametrisierung von dm darstellt und somit einem Volumenelement der Momentankonfiguration dv eine Masse dm zuordnet. Damit kann die Masse des Körpers dann als

$$m(\mathcal{U}) := \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho(\mathbf{x}, t) dv \quad (1.2.4)$$

geschrieben werden. Das skalare Feld ρ wird *Dichte* des Körpers genannt. Der globale Massenerhaltungssatz nimmt dann die Form

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}) dv \quad (1.2.5)$$

an. Für die Umformung in den zweiten Ausdruck wurde die Rate eines Volumenelementes

$$\frac{d}{dt} dv = \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} dv \quad (1.2.6)$$

benutzt, mit div dem Divergenzoperator der Momentankonfiguration: $\operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = \dot{\chi}_{,a}^a = \mathbf{I}_a^a$. Diese Gleichung kann direkt über die Eigenschaft des Volumenelementes als differentielle 3-Form gezeigt werden (MARSDEN & HUGHES 1983) oder mit Hilfe einer Variablensubstitution durch $dv = JdV$, wobei $J = \det \mathbf{F}$ als Jacobi-Determinante der Transformation χ_t aufgefaßt wird. Hinreichende Glattheit des Feldes ρ vorausgesetzt kann (1.2.5) in lokaler Form aufgestellt werden:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \phi_t(\mathcal{U}). \quad (1.2.7)$$

1.2.2 Spannungstensor und Impulsbilanz

Spannungsvektor

Was die Kontinuumsmechanik von der Punktmechanik unterscheidet ist das von CHAUCHY (1823) eingeführte Konzept der Spannung, das die Interaktion eines Materials mit dem umgebenden Material in Form von *Kontaktkräften* auf dessen Oberfläche beschreibt. Diese Kontaktkraft auf eine Oberfläche wird durch einen Vektor $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$, den *Cauchyschen Spannungsvektor* beschrieben,

der die Kraft pro Einheitsfläche auf ein Flächenelement mit der Normalen \mathbf{n} angibt. Die resultierende Kontaktkraft auf einen Teilkörper $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ mit dem Rand $\partial\mathcal{U}$ ist dann gegeben durch das Oberflächenintegral

$$\mathbf{f}_c = \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) d\mathbf{a}, \quad (1.2.8)$$

mit dem Flächenelement $d\mathbf{a}$ von $\partial\phi_t(\mathcal{U})$. Außer Kontaktkräften kann auch noch eine *externe Volumenkraft* auf den Körper wirken, die durch eine *Volumenkraftdichte* $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ hervorgerufen wird (ein typisches Beispiel hierfür ist die Gravitationskraft). Für die resultierende Volumenkraft gilt

$$\mathbf{f}_b = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{v}. \quad (1.2.9)$$

Die resultierende Kraft auf den Teilkörper ist dann

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_c + \mathbf{f}_b. \quad (1.2.10)$$

Impulsbilanz

Die *Bewegungsgröße* oder auch der *Impuls* eines Teilkörpers $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ ist definiert als

$$\mathbf{b} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \dot{\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{v}. \quad (1.2.11)$$

Wenn \mathbf{t} und \mathbf{b} sich stetig mit der Zeit ändern, kann die *Impulsbilanz* in der Form

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{f} \rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \dot{\mathbf{x}} \rho d\mathbf{v} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{b} \rho d\mathbf{v} + \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{t} d\mathbf{a} \quad (1.2.12)$$

dargestellt werden.

Spannungstensor

Um (1.2.12) lokalisieren zu können muß man den funktionalen Zusammenhang \mathbf{t} von \mathbf{n} näher spezifizieren. Dies liefert *Cauchy's Fundamentalsatz*:

Vorausgesetzt, \mathbf{t} ist stetig in \mathbf{x} , dann ist seine Abhängigkeit von \mathbf{n} linear, d.h. es existiert ein kontravariantes Tensorfeld zweiter Stufe $\sigma \in \mathcal{T}_0^2\mathbb{V}$, so daß

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{n}) = \langle \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \mathbf{n} \rangle; \quad \mathbf{t}^a(\mathbf{x}, \mathbf{t}, \mathbf{n}) = \sigma^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{t})n_b \quad (1.2.13)$$

gilt.

Aus Gleichung (1.2.13)₂ wird ersichtlich, daß die Flächennormale \mathbf{n} ein Kovektor ist. Dies ist in Übereinstimmung mit der Beobachtung, daß eine Flächennormale sich unter einer Deformation nicht wie ein im Material eingebetteter (Tangential)-Vektor transformiert. Physikalisch gesehen sind auch nur solche kontravarianten Spannungstensoren sinnvoll, da diese ein Flächenelement $d\mathbf{a} = \mathbf{n}da$ in einen Spannungsvektor $\mathbf{t}da = \sigma d\mathbf{a} \in \mathbb{V}$ abbilden. Diese Kopplung des Spannungstensors an das Flächenelement als Bezugsgröße muß später auch bei den push-pull Beziehungen für die Spannungstensoren berücksichtigt werden (s. Abschnitt 1.3.6).

Bewegungsgleichung

Mittels (1.2.13) erhält man lokal, falls Impulssatz und Massenerhaltung erfüllt sind, *Cauchy's Bewegungsgleichung*

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \sigma \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \phi_t(\mathcal{U}); \quad (\operatorname{div} \sigma)^a = \sigma^{ab}_{,b}. \quad (1.2.14)$$

1.2.3 Drehimpulsbilanz

Der *Drehimpuls* oder *Drall* eines Körpers ist definiert als

$$\mathfrak{D} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) \rho dv. \quad (1.2.15)$$

Das äußere Moment durch Volumenkräfte und Kontaktkräfte ist gegeben durch

$$\mathfrak{M} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) \rho dv + \int_{\partial \phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{x} \times \mathbf{t} da. \quad (1.2.16)$$

Für stetige Verläufe von \mathbf{b} und \mathbf{t} gilt die *Drehimpulsbilanz* in der Form

$$\dot{\mathfrak{D}} = \mathfrak{M} \rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) \rho dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) \rho dv + \int_{\partial \phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{x} \times \mathbf{t} da. \quad (1.2.17)$$

Wenn Massenerhaltung und Impulssatz erfüllt sind, ist der Drallsatz dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}); \quad \sigma^{ab} = \sigma^{ba} \quad \forall \mathbf{x} \in \phi_t(\mathcal{U}), \quad (1.2.18)$$

d.h. wenn der Cauchysche Spannungstensor symmetrisch ist¹.

1.2.4 Energiebilanz

Um die physikalische Interpretation der einzelnen Terme in der Energiebilanz zu ermöglichen, spaltet man diese wie folgt auf:

$$\mathcal{K} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle \rho \, dv \quad \hat{=} \quad \text{kinetische Energie}, \quad (1.2.19)$$

$$\mathcal{E} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} e \rho \, dv \quad \hat{=} \quad \text{innere Energie}, \quad (1.2.20)$$

$$\mathcal{W} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{x}} \rangle \rho \, dv + \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{x}} \rangle \, da \quad \hat{=} \quad \text{mechanische Leistung}, \quad (1.2.21)$$

$$\mathcal{Q} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} r \rho \, dv + \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} h \, da \quad \hat{=} \quad \text{zugeführte Wärme}. \quad (1.2.22)$$

Hierbei ist e die spezifische innere Energie, r die spezifische Wärmeerzeugung und h der Wärmezufuß. Wiederum für stetige Verläufe gilt die *Energiebilanz*

$$\dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{W} + \mathcal{Q}. \quad (1.2.23)$$

Mit Hilfe des Cauchyschen Postulates, angewandt auf den Wärmestrom der über $\partial\phi_t(\mathcal{U})$ in die Probe fließt, führt man den Wärmestromvektor \mathbf{q} ein: $h = -\mathbf{q}\mathbf{n}$. Wenn der Massenerhaltungssatz, Impulserhaltungssatz, Drehimpulserhaltungssatz und die Energiebilanz erfüllt sind, ergibt sich die lokale Energiebilanz zu

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \operatorname{div} \mathbf{q} + r \quad \forall \mathbf{x} \in \phi_t(\mathcal{U}), \quad \operatorname{div} \mathbf{q} = q^{\alpha}_{,\alpha}. \quad (1.2.24)$$

¹Dies gilt nur für Kontinua ohne oder mit skalarer Mikrostruktur. Weiterführendes zu mikromorphen Kontinua findet man in HOPPE (1996)

1.2.5 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Entropiegleichung

Folgende Größen werden eingeführt:

$$\mathfrak{S} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \eta \rho \, dv \quad \hat{=} \quad \text{Entropie}, \quad (1.2.25)$$

$$\mathfrak{J} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \frac{1}{\theta} r \, dv - \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \mathbf{n} \, da \quad \hat{=} \quad \text{Entropieerzeugung und -zufluß}, \quad (1.2.26)$$

mit η der spezifischen Entropie. Der Versuch einer physikalischen Deutung der Entropie soll hier nicht unternommen werden, vielmehr sei auf ERICKSEN (1991) verwiesen. Dort finden sich auch weitere Grundlagen der Thermodynamik der Festkörper. Die Entropiegleichung lautet

$$\dot{\mathfrak{S}} \geq \mathfrak{J}, \quad (1.2.27)$$

d.h. wenn Entropiezufuß und -erzeugung verschwinden gilt $\dot{\mathfrak{S}} \geq 0$. Die totale Entropie eines Systems kann nicht abnehmen, was dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik entspricht. Für glatte Verläufe kann die Entropiegleichung in lokaler Form

$$\rho \dot{\eta} \geq \frac{1}{\theta} r - \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \phi_t(\mathcal{U}) \quad (1.2.28)$$

geschrieben werden. Durch Einführung der spezifische Entropieerzeugungsrate $\dot{\gamma} = \rho \dot{\eta} - \rho r/\theta + \operatorname{div}(\mathbf{q}/\theta)$, reduziert sich die lokale Entropiegleichung zu

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \phi_t(\mathcal{U}). \quad (1.2.29)$$

Clausius-Duhem Ungleichung

Wenn man aus (1.2.24) und (1.2.28) die Wärmeerzeugung r eliminiert und über eine Legendre-Transformation die freie Energiedichte $\psi := e - \theta \eta$ definiert, erhält man, wenn Massenerhaltung, Impulsbilanz, Drehimpulsbilanz,

Energieerhaltung und Entropieungleichung erfüllt sind, die *Clausius-Duhem Ungleichung*

$$\rho(\eta\dot{\theta} + \dot{\psi}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{1}{\theta}\mathbf{q} \cdot \nabla\theta \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \phi_t(\mathcal{U}). \quad (1.2.30)$$

Für isotherme Prozesse ($\theta = \text{const.}$) vereinfacht sich (1.2.30) zu

$$\rho\dot{\psi} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \phi_t(\mathcal{U}) \quad (1.2.31)$$

1.3 Thermodynamik mit internen Variablen

Die hier dargestellte Theorie der Thermodynamik beruht in erster Linie auf Arbeiten von COLEMAN (COLEMAN & NOLL 1963; COLEMAN 1964A; COLEMAN 1964B; COLEMAN & GURTIN 1967), im Rahmen der nichtlinearen Feldtheorie der Mechanik (*non-linear field theories of mechanics*) (TRUESDELL & NOLL 1965). Es soll hier allerdings nicht im allgemeinen Rahmen der Materialien mit schwindendem Gedächtnis (*materials with fading memory*) gearbeitet werden, da dies Geschichtsfunktionale voraussetzt, sondern es soll davon ausgegangen werden, daß sich das Gedächtnis eines Materials mit Hilfe von sogenannten internen Zustandsvariablen darstellen läßt. Eine Diskussion dieser Theorie im Vergleich zur klassischen Thermodynamik irreversibler Prozesse findet man bei KESTIN & RICE (1970).

1.3.1 Zustand und interne Variablen

Der *Zustand* eines Körpers \mathcal{B} im thermodynamischen Gleichgewicht ist definiert durch die Angabe der beobachtbaren *Zustandsvariablen* $\{\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x}), \nabla\theta(\mathbf{x})\}$, d.h. dem Ortsvektor und des Temperaturfeldes auf $\phi_t(\mathcal{B})$. Außerdem sind zur Beschreibung des Zustandes noch N sogenannte *interne Zustandsvariablen* $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N$ nötig, so daß der gesamte Zustand des Materials durch die Angabe von $\{\mathbf{x}, \theta, \nabla\theta, \mathbf{A}_i\}$ beschrieben wird. Die internen Variablen können Skalare, Tensoren zweiter, vierter usw. Stufe sein. Die Einführung von Vektoren, Tensoren dritter Stufe usw. als interne Variablen führt zu Konflikten mit der Annahme, daß polare Medien und andere Materialien mit tensorieller Mikrostruktur ausgeschlossen werden. Die internen Variablen ermöglichen es, Informationen über mikroskopische Vorgänge im Material, wie z.B. Versetzungen, Risse,

Poren etc. über Mittelungsvorgänge in die Materialbeschreibung einfließen zu lassen, so daß mit einer endlichen Zahl von internen Variablen der Einfluß dieser Vorgänge auf die makroskopischen Zustandsvariablen erfassen werden kann. Dennoch bleibt die Wahl des Satzes der internen Variablen weitgehend beliebig und muß an die zu modellierenden Vorgänge im jeweiligen Material angepaßt werden. Günstig ist es, die internen Variablen so zu wählen, daß ihnen eine 'meßbare' physikalische Bedeutung zukommt, zumindest auf einer mikroskopischen Ebene (MANDEL 1980). Dies trifft zum Beispiel auf Porenvolumenverteilungen und ähnliche Größen zu, die im Schliffbild einer Probe zu ermitteln sind. Das bedeutet, daß interne Variablen prinzipiell meßbare, aber nicht kontrollierbare Größen sind. Durch das Aufbringen von Randspannungen, Randverschiebungen, Wärmestrom auf dem Rand usw. lassen sich die internen Variablen nicht "einstellen".

1.3.2 Thermodynamischer Prozeß und Konstitutivgleichungen

Um die thermo-mechanischen Bilanzgleichungen zu lokalisieren, mußten außer $\{\rho, \mathbf{x}, \theta, \nabla\theta\}$ zusätzliche Felder eingeführt werden: Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, der Wärmestromvektor $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, die spezifische innere Energie $e(\mathbf{x}, t)$ und die spezifische Entropie $\eta(\mathbf{x}, t)$. Die Dichte kann mit Hilfe des Massenerhaltungssatzes und Verwendung der referentiellen Beschreibung für Prozesse ohne Massendiffusion aus dem Gleichungssystem eliminiert werden. Das System von neun Funktionen

- (1) Ortsvektor $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\xi}, t)$,
- (2) Cauchyscher Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$,
- (3) Volumenkraftdichte $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$,
- (4) spezifische innere Energie $e = e(\mathbf{x}, t)$,
- (5) Wärmeflußvektor $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$,
- (6) Wärmezufuß $r = r(\mathbf{x}, t)$,
- (7) spezifische Entropie $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$,
- (8) absolute Temperatur $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$,

(9) Vektor der internen Variablen $\alpha = \{\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{A}_N\}$,

ist dann und nur dann ein *thermodynamischer Prozeß*, wenn diese neun Funktionen in Einklang mit der Impulsbilanz (1.2.14) und der Energiebilanz (1.2.24) stehen. Der Wärmezufuß r und die Volumenkraftdichte \mathbf{b} seien gegebene Felder. Dann müssen zur Vervollständigung des Gleichungssystems noch fünf Auswirkungsfunktionen (*response functions*) angegeben werden:

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \alpha), \quad (1.3.1)$$

$$\eta = \hat{\eta}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \alpha), \quad (1.3.2)$$

$$\sigma = \hat{\sigma}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \alpha), \quad (1.3.3)$$

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \nabla\theta, \alpha), \quad (1.3.4)$$

$$\mathcal{L}\alpha = \mathbf{f}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \nabla\theta, \alpha). \quad (1.3.5)$$

Die Gleichungen (1.3.1)-(1.3.4) nennt man auch *konstitutive Beziehungen* (das Dach über den Funktionen hebt den Unterschied zwischen der Funktion und ihren Werten hervor). Gleichung (1.3.5) ist offensichtlich eine *Evolutionsgleichung der internen Variablen*, d.h. es kann keine konstitutive Gleichung für die internen Variablen angegeben werden, da nur ihre Raten, nicht aber ihr Werte direkt kontrolliert werden können. Dies ist in Übereinstimmung mit der Annahme, die internen Variablen würden die Geschichte des Materials beschreiben, ohne auf den Formalismus der Gedächtnisfunktionale zurückgreifen zu müssen. Gleichungen (1.3.1)-(1.3.5) widersprechen nicht Truesdell's *principle of equipresence*, nach dem eine unabhängige Variable, die in einer konstitutiven Gleichung vertreten ist, dies in allen sein soll, sofern dies nicht physikalischen Gesetzen oder der materiellen Symmetrie widerspricht. Vielmehr haben COLEMAN & GURTIN (1967) gezeigt, daß das Fehlen des Temperaturgradienten $\nabla\theta$ in (1.3.1)-(1.3.3) eine Konsequenz der positiven Entropieproduktion (1.2.29) ist.

Die Aufnahme der Metriken \mathbf{g} und \mathbf{G} in $\hat{\psi}$ ist notwendig, da man diese als "Maßstab" der Deformation benötigt. Außerdem benötigt man diese als inneres Produkt, um z.B. mit Hilfe der Invarianten der Deformation in der Referenzkonfiguration die materielle Symmetrie des Materials zu beschreiben.

1.3.3 Materielle Bezugsindifferenz

Diese sehr allgemeine Form der Konstitutivgleichungen kann eingeschränkt werden durch das *Prinzip der materiellen Objektivität* (*principle of material frame-indifference*). Dieses fordert, daß ein zulässiger Prozeß nach einem Wechsel des Bezugssystems ein zulässiger Prozeß bleiben muß (NOLL 1958), also nichts anders als die Objektivität der Auswirkungsfunktionen. Durch die Transformationsgesetze (1.1.63)-(1.1.65) ergibt sich mit dem orthogonalen Tensor γ (die unübliche Bezeichnung soll eine Verwechslung mit dem Wärmestromvektor \mathbf{q} verhindern)

$$\hat{\psi}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\psi}(\gamma\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \gamma_{\triangleright}\boldsymbol{\alpha}), \quad (1.3.6)$$

$$\hat{\eta}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\eta}(\gamma\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \gamma_{\triangleright}\boldsymbol{\alpha}), \quad (1.3.7)$$

$$\gamma\hat{\sigma}\gamma^T(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\sigma}(\gamma\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \gamma_{\triangleright}\boldsymbol{\alpha}), \quad (1.3.8)$$

$$\gamma\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \nabla\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{\mathbf{q}}(\gamma\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \gamma\nabla\theta, \gamma_{\triangleright}\boldsymbol{\alpha}), \quad (1.3.9)$$

$$\gamma_{\triangleright}\mathbf{f}(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \nabla\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{f}(\gamma\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}, \theta, \gamma\nabla\theta, \gamma_{\triangleright}\boldsymbol{\alpha}) \quad (1.3.10)$$

Das push-forward der Evolutionsgleichung und der internen Variablen kann nicht näher spezifiziert werden, ohne Kenntnis deren physikalischer Interpretation. Aus diesen Identitäten gewinnt man die reduzierte Form der Auswirkungsfunktionen. Die Tatsache, daß der push-forward einer objektiven Größe wiederum eine objektive Größe ergibt, wird benutzt, um mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} alle Prozessgrößen in der aktuellen Konfiguration darzustellen:

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \theta, \boldsymbol{\alpha}), \quad (1.3.11)$$

$$\eta = \hat{\eta}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \theta, \boldsymbol{\alpha}), \quad (1.3.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \theta, \boldsymbol{\alpha}), \quad (1.3.13)$$

$$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \theta, \nabla\theta, \boldsymbol{\alpha}), \quad (1.3.14)$$

$$\mathcal{L}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \theta, \nabla\theta, \boldsymbol{\alpha}). \quad (1.3.15)$$

Anzumerken ist, daß von nun an davon ausgegangen wird, daß in der Evolutionsgleichung nur objektive interne Variablen Verwendung finden. Für diese gilt weiterhin die oben dargestellte Forderung, daß diese nur Tensoren gerader Stufe sein können, da gezeigt werden kann, daß Tensoren ungerader Stufe (1.3.10) nicht erfüllen.

1.3.4 Konsequenzen des zweiten Hauptsatzes

Wenn man nun diesen Satz von Auswirkungsfunktionen in die Clausius-Duhem Ungleichung (1.2.30) einführen will, muß zuerst die materielle Zeitableitung der freien Energiedichte berechnet werden. Dies gelingt mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \mathcal{L}\hat{\psi}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \theta, \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}} \Big|_{\mathbf{c}, \theta, \boldsymbol{\alpha}} : \mathcal{L}\mathbf{g} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{c}} \Big|_{\mathbf{g}, \theta, \boldsymbol{\alpha}} : \mathcal{L}\mathbf{c} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \Big|_{\mathbf{g}, \mathbf{c}, \boldsymbol{\alpha}} \dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \Big|_{\mathbf{g}, \mathbf{c}, \theta} \bullet \mathcal{L}\boldsymbol{\alpha},\end{aligned}\quad (1.3.16)$$

wobei \bullet die Kontraktion über alle Indizes bezeichnet.. Mit Hilfe von (1.1.90) und $\mathcal{L}\mathbf{c} = \mathbf{F}_\triangleright(\dot{\mathbf{G}}) = 0$ ergibt sich

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}} : 2\mathbf{d} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \bullet \mathcal{L}\boldsymbol{\alpha}.\quad (1.3.17)$$

Daraus resultiert folgende Clausius-Duhem-Ungleichung

$$\begin{aligned}(2\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}} - \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{d} + \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \bullet \mathcal{L}\boldsymbol{\alpha} + \rho(\eta + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta})\dot{\theta} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \leq 0 \\ \forall \mathbf{x} \in \phi_t(\mathcal{U}),\end{aligned}\quad (1.3.18)$$

die für alle thermodynamisch zulässigen Prozesse des betrachteten Materials erfüllt sein muß. Aus dieser Gleichung werden nun die konstitutiven Gesetze mit Hilfe einer Prozedur hergeleitet, die auf COLEMAN & NOLL (1963) zurückgeht.

Da (1.3.18) für *alle* Prozesse erfüllt sein muß, kann man sich auf solche beschränken, die homogene Deformationen und homogene Entropieverteilungen aufweisen, so daß \mathbf{F} und η unabhängig vom materiellen Punkt ξ und somit seinem Ort \mathbf{x} sind. Aus (1.3.2) folgt dann die Homogenität des Temperaturfeldes θ und damit das Verschwinden des Temperaturgradienten $\nabla \theta = 0$. Durch diese Annahmen reduziert sich (1.3.18) zu

$$(2\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}} - \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{d} + \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \bullet \mathcal{L}\boldsymbol{\alpha} + \rho(\eta + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta})\dot{\theta} \leq 0.\quad (1.3.19)$$

Die Einschränkung auf einen isothermen Prozeß ($\dot{\theta} = 0$), der die internen Variablen unverändert läßt ($\mathcal{L}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f} = 0$), vereinfacht Gleichung (1.3.19) zu

$$(2\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}} - \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{d} \leq 0.\quad (1.3.20)$$

Für beliebige Verzerrungsraten \mathbf{d} ist dies nur zu erfüllen durch

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}}. \quad (1.3.21)$$

Dies ist die hyperelastische Spannungs-Dehnungs-Beziehung in der Momentankonfiguration, die auf anderem Weg von DOYLE & ERICKSEN (1956) gefunden wurde und deshalb auch Doyle-Ericksen-Gleichung genannt wird. Man postuliert nun, daß (1.3.21) auch für nicht-isotherme Prozesse und solche, die die internen Variablen nicht unverändert lassen, gilt, und faßt somit (1.3.21) als konstitutive Gleichung auf. Wenn diese nun in (1.3.19) eingesetzt wird, erhält man

$$\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \bullet \mathcal{L}\boldsymbol{\alpha} + \rho(\eta + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta})\dot{\theta} \leq 0. \quad (1.3.22)$$

Wenn ein Prozeß wiederum die internen Variablen unverändert läßt, führt dies auf

$$\eta = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta}. \quad (1.3.23)$$

Dies führt dann die Clausius-Duhem-Ungleichung (1.3.18) zurück auf die reduzierte Dissipationungleichung

$$\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \bullet \mathcal{L}\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \leq 0 \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \phi_t(\mathcal{U}), \quad (1.3.24)$$

die man auch in der Form

$$\mathfrak{D}^i + \mathfrak{D}^{\text{th}} \geq 0; \quad \mathfrak{D}^i = -\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \bullet \mathcal{L}\boldsymbol{\alpha}, \quad \mathfrak{D}^{\text{th}} = -\frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \quad (1.3.25)$$

darstellen kann, mit \mathfrak{D}^i der Dissipation aufgrund der Evolution der internen Variablen, und \mathfrak{D}^{th} , der thermischen Dissipation. Im Folgenden wird $\rho \partial \hat{\psi} / \partial \boldsymbol{\alpha}$ kurz durch \mathbf{y} bezeichnet und \mathbf{h} steht kurz für $-\nabla \theta / \theta$.

1.3.5 Dissipationsfunktion und Fließgesetz

Wenn man annimmt, daß es keine Kopplung zwischen dem Wärmeaustausch und der Entwicklung der internen Variablen gibt: $\mathcal{L}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \theta, \boldsymbol{\alpha})$, dann

kann man \mathcal{D}^i bzw. \mathcal{D}^{th} als Dissipationsfunktionen einführen und die dissipativen Mechanismen trennen

$$\mathcal{D}^i(\mathcal{L}\boldsymbol{\alpha}; \mathbf{g}, \mathbf{c}, \theta) = -\mathbf{y} \bullet \mathcal{L}\boldsymbol{\alpha} \geq 0; \quad \mathcal{D}^{\text{th}}(\mathbf{q}; \mathbf{g}, \mathbf{c}, \theta) = -\mathbf{h} \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (1.3.26)$$

Diese Dissipationsfunktionen sollen quasi-homogene, stetige, positiv definite und konvexe Funktionen von $\mathcal{L}\boldsymbol{\alpha}$ bzw. \mathbf{q} (als Variablen) und der thermodynamischen Zustandsvariablen (als Parameter) sein. Auf diese Weise wird der zweite Hauptsatz automatisch erfüllt. Die vorgenannten Eigenschaften sorgen dafür, daß die sogenannte Normalenregel, bzw. das Prinzip der maximalen Dissipation (VON MISES 1928; HILL 1948; DRUCKER 1951; ZIEGLER 1958) wie folgt ausgedrückt werden kann

$$\mathbf{y} = \partial_{\mathcal{L}\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{D}^i; \quad \mathbf{h} = \nu \partial_{\mathbf{q}} \mathcal{D}^{\text{th}}, \quad \nu = \mathcal{D}^{\text{th}}(\partial_{\mathbf{q}} \mathcal{D}^{\text{th}} \cdot \mathbf{q})^{-1}, \quad (1.3.27)$$

wobei das Symbol ∂ hier das Sub-Differential konvexer Funktionen bezeichnet (MOREAU 1970). In diesem Zusammenhang wird \mathbf{y} *treibende Kraft* auf die Evolution der internen Variablen genannt. Über eine Legendre-Fenchel Transformation gewinnt man die zu \mathcal{D}^i und \mathcal{D}^{th} konjugierten Potentiale ϕ^i und ϕ^{th} und kann (1.3.27) in der üblicheren Form

$$\mathcal{L}\boldsymbol{\alpha} = \partial_{\mathbf{y}} \phi^i(\mathbf{y}; \mathbf{g}, \mathbf{c}, \theta); \quad \mathbf{q} = \tilde{\nu} \partial_{\mathbf{h}} \phi^{\text{th}}(\mathbf{h}; \mathbf{g}, \mathbf{c}, \theta); \quad \tilde{\nu} = \phi^{\text{th}}(\partial_{\mathbf{h}} \phi^{\text{th}} \cdot \mathbf{h})^{-1} \quad (1.3.28)$$

schreiben. Wenn man als thermisches Potential

$$\phi^{\text{th}} = \kappa \theta \|\mathbf{h}\|^2 \quad (1.3.29)$$

einführt, ergibt sich das isotrope Fourier-Gesetz

$$\mathbf{q} = \kappa \theta \mathbf{h} = -\kappa \nabla \theta. \quad (1.3.30)$$

Den in der Elastoplastizität üblichen Formalismus einer Fließgrenze erhält man, wenn \mathcal{D}^i als positive, homogene Funktion vom Grad eins eingeführt wird. Man kann $\mathcal{L}\boldsymbol{\alpha}$ und \mathbf{y} als Koordinaten eines Euklidischen Raumes \mathbb{E}_m und seines Dualraumes \mathbb{E}_m^* auffassen. GERMAIN (1973) hat gezeigt, daß dann gilt

$$\begin{cases} \mathcal{L}\boldsymbol{\alpha} = 0 & \Rightarrow \mathbf{y} \in \mathcal{S} + \partial \mathcal{S} \\ \mathcal{L}\boldsymbol{\alpha} \neq 0 & \Rightarrow \mathbf{y} = \nabla_{(\mathcal{L}\boldsymbol{\alpha})} \mathcal{D}^i = \frac{\partial \mathcal{D}^i}{\partial (\mathcal{L}\boldsymbol{\alpha})}; \quad \mathbf{y} \in \partial \mathcal{D}^i, \end{cases} \quad (1.3.31)$$

wobei $\partial\mathcal{S} \in \mathbb{E}_m^*$ eine geschlossene konvexe Fläche ist, die den Ursprung enthält. Daraus folgt, daß die duale (konjugierte) Funktion $\phi^i(\mathbf{y})$ verschwindet, wenn $\mathbf{y} \in \mathcal{S} + \partial\mathcal{S}$, und unendlich wird, wenn \mathbf{y} im Inneren von \mathcal{S} ist. Falls $\partial\mathcal{S}$ eine Fläche mit stetiger Tangentialebene und ϕ^i stetig differenzierbar bezüglich \mathbf{y} ist und

$$\begin{cases} \phi^i(\mathbf{y}) = 0 & \forall \mathbf{y} \in \partial\mathcal{S}, \\ \phi^i(\mathbf{y}) < 0 & \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (1.3.32)$$

dann lautet das sogenannte *Fließgesetz*:

$$\begin{cases} \mathbf{y} \in \mathcal{S}, & \mathfrak{L}\alpha = 0, \\ \mathbf{y} \in \partial\mathcal{S}, & \mathfrak{L}\alpha = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \end{cases} \quad (1.3.33)$$

mit $\dot{\lambda}$ einem skalaren Koeffizienten, der aus der Elastoplastizität als plastischer Multiplikator bekannt ist². Die Fließfunktion $f(\mathbf{y})$ stellt eine Parametrisierung des Raumes \mathbb{E}_m^* dar, wobei $f(\mathbf{y}) = 0$ eine implizite Darstellung der Fläche $\partial\mathcal{S}$ ist. Insofern bewirkt (1.3.33), daß eine Evolution der internen Variablen nur dann stattfindet, wenn eine bestimmte Grenzfläche im Raum der treibenden Kräfte erreicht wird. Erst dies gibt der zur Aufstellung der Doyle-Ericksen-Gleichung benutzten Forderung einer Deformation *ohne* Entwicklung der internen Variablen einen physikalischen Sinn.

1.3.6 Konjugierte Spannungs- und Dehnungsmaße

Wenn man den Energiesatz (1.2.24) auf mechanische Prozesse beschränkt, kann die differentielle Spannungsleistung eines Massenelementes durch

$$d\mathfrak{p} = \dot{\epsilon} \, d\mathfrak{m} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \frac{1}{\rho} d\mathfrak{m} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, d\mathfrak{v} \quad (1.3.34)$$

ausgedrückt werden. Dieselbe Spannungsleistung kann man auch mit Hilfe des Volumenelementes $dV = J \, d\mathfrak{v}$ der Referenzkonfiguration ausdrücken

$$d\mathfrak{p} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \frac{1}{\rho_0} d\mathfrak{m} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \, dV, \quad (1.3.35)$$

²Der übergestellte Punkt soll betonen, daß das Evolutionsgesetz (1.3.33) im Gegensatz zu viskoelastischen bzw. viskoplastischen Formulierungen, bei denen die Evolution der internen Variablen auch von der Deformationsrate abhängt, keine charakteristische Zeitskala impliziert (MAUGIN 1992)

wobei ausgenutzt wird, daß der Massenerhaltungssatz $J = \rho_0/\rho$ liefert, mit ρ_0 , der Dichte der Referenzkonfiguration. Hierüber wird ein Spannungstensor der Momentankonfiguration $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ definiert, der *Kirchhoffschen Spannungstensor*. Mit Hilfe von (1.1.61) kann man (1.3.35) umformen zu

$$dp = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \, dV = \mathbf{F}^\triangleleft(\boldsymbol{\tau}) : \mathbf{F}^\triangleleft(\mathbf{d}) \, dV = \mathbf{S} : \mathbf{D} \, dV \quad (1.3.36)$$

und erhält so die Spannungsleistung mit Hilfe von Tensoren der Referenzkonfiguration, dem *zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor* (2. P.-K.) $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T}$ und der referentielle Verzerrungsrate $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}} = 1/2\dot{\mathbf{C}}$. Man nennt die Paare $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d}\}$, $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{d}\}$ und alle Paare von Spannungen und Dehnungen, die sich aus push- und pull-Beziehungen aus diesen Paaren entwickeln lassen konjugierte Spannungs-Dehnungs-Paare, weil sich aus deren dualer Verknüpfung jeweils die Spannungsleistung pro Volumen-(Massen)-Einheit der Referenz- bzw. Momentankonfiguration ergibt. Werden diese Spannungs-Dehnungs-Paare in der Clausius-Duhem-Ungleichung benutzt, können entsprechende Doyle-Ericksen Gleichungen, die auf diesen Paaren beruhen, hergeleitet werden (HOPPE 1996). Allerdings ist die Anwendung dieser Gleichungen eingeschränkt, da, wie bereits oben dargelegt, die Forderung, daß die objektive Zeitableitung des gewählten Dehnungsmaßes die Verzerrungsrate ergeben soll, nur durch zwei Dehnungsmaße und deren korrespondierende Raten erfüllt wird (s. Gleichung (1.1.90)). Eine weitere Paarung, die oft verwendet

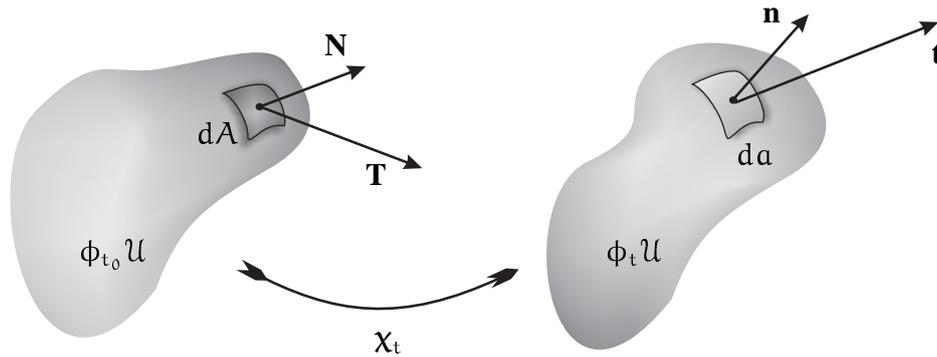


Abbildung 1.3: Spannungsvektor mit korrespondierendem Flächenelement

wird, beruht auf dem pull-back nur eines “Beines” des Kirchhoffschen Spannungstensors

$$dp = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \, dV = \mathbf{P} : (\mathbf{g}\dot{\mathbf{F}}) \, dV, \quad (1.3.37)$$

mit dem 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor (1. P.-K.)

$$\mathbf{P} = \mathbf{FS} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-\text{T}}, \quad (1.3.38)$$

der keinen objektiven Spannungstensor darstellt. Mit Hilfe des 1. P.-K. und Nansons's Formel

$$d\mathbf{a} = \mathbf{n}d\mathbf{a} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-\text{T}}d\mathbf{A} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-\text{T}}\mathbf{N}dA \quad (1.3.39)$$

kann somit der Cauchysche Spannungsvektor mit dem referentiellen Flächenelement verknüpft werden (s. Abb. 1.3)

$$t^{\mathbf{a}}d\mathbf{a} = P^{\mathbf{aB}}N_{\mathbf{B}}dA. \quad (1.3.40)$$

Der 2. P.-K. verbindet dann den referentiellen Spannungsvektor \mathbf{T} mit dem referentiellen Flächenelement

$$\mathbf{T}d\mathbf{A} = \mathbf{S}N dA. \quad (1.3.41)$$

2 Ein finiter Rahmen für Schädigungsmodelle

Inhaltsverzeichnis

2.1 Schädigungsmechanik	44
2.1.1 Kontinuumsschädigungsmechanik	46
2.1.2 Klassifikation und Bibliographie der CDM Modelle	47
2.1.3 Schädigungsvariablen	50
Eindimensionale Flächen-Schädigungsvariable	50
Eindimensionale Volumen-Schädigungsvariable	52
Effektivspannung	52
Geometrische Definition des Schädigungstensors	53
Schädigungstensenoren vierter Stufe	54
Klassifikation der CDM-Literatur nach Schädigungsvariablen	55
2.1.4 Äquivalenzprinzipien	57
Prinzip der Dehnungsäquivalenz – Effektivspannungskonzept	57
Prinzip der Spannungsäquivalenz – Effektivdehnungskonzept	58
Prinzip der Äquivalenz der elastischen Energie	60
2.2 Multiplikativer Rahmen für spröde Schädigung	62
2.2.1 Motivation	62
2.2.2 Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten	63
2.2.3 Deformations- und Dehnungsmaße	67
2.2.4 Geschwindigkeit und Raten	68
2.2.5 Bilanzgleichungen	70
2.2.6 Freie Energiedichte und konstitutive Gleichungen	74
2.2.7 Elastische Eigenschaften des geschädigten Materials	76
Freie Energiedichte für kleine elastische Deformationen	76
Geschädigter Elastizitätstensor	77
Notation von Tensoren vierter Stufe	78

	Symmetrien des geschädigten Elastizitätstensors	79
2.2.8	Bezug zur klassischen Schädigungsmechanik	81
	Symmetrischer Effektivspannungstensor	82
	Schädigungstensoren vierter und achter Stufe	83

In diesem Kapitel sollen zunächst kurz die grundlegenden Annahmen und Modelle der Kontinuums-Schädigungsmechanik wiedergegeben werden, um dann in Zusammenhang mit den Effektivspannungskonzept nach MURAKAMI (1988) den in der vorliegenden Arbeit verwendeten Schädigungs-Deformationsgradienten zu motivieren. Der aus der Einführung dieses Schädigungs-Deformationsgradienten resultierende Rahmen wird im darauffolgenden Abschnitt präsentiert.

2.1 Schädigungsmechanik

Im Rahmen dieser Arbeit soll keine umfassende Übersicht über die Literatur der Schädigungsmechanik gegeben werden, sondern nur eine kurze Zusammenfassung (eine detaillierte Übersicht und Diskussion der umfangreichen Literatur findet man in SKRZYPEK (1999)). Vielmehr sollen einige Konzepte, wie das der fiktiven, ungeschädigten Konfiguration (MURAKAMI 1988), herausgegriffen und diskutiert werden, um die grundlegenden Defizite aufzuzeigen. Die physikalischen Schädigungsmechanismen werden in Zusammenhang mit der Bruchmechanik in Kapitel (3) diskutiert. Hier soll nur anhand zweier zyklischer Zug-Druck Kurven zwischen zwei wesentlichen, voneinander abzugrenzenden Schädigungsarten unterschieden werden. Auf Abbildung 2.1 ist das Versagen unter zyklischen Zug-Druck Wechselbeanspruchungen zu sehen. Der deformationsgesteuerte Versuch bringt eine anfängliche Spannung auf, die unterhalb der Fließgrenze des untersuchten rostfreien Stahls A 316 liegt. Dennoch ist bei hoher Lastzyklenzahl ($N > 1 \cdot 10^5$) ein Absinken des Elastizitätsmoduls zu beobachten. Diese Art der Schädigung, bei der die maximale Spannung unterhalb der Fließgrenze liegt wird spröde Schädigung genannt, hier bei hochzyklischer Ermüdung (*high-cycle fatigue*). Auf Abbildung 2.2 ist die Art der Lastaufbringung identisch, und ein ähnlicher rostfreier Stahl A316 L wird untersucht. Jedoch wurde das Lastniveau so gewählt, daß der Werkstoff deutliche plastische Formänderungen erleidet. Dementsprechend wird diese

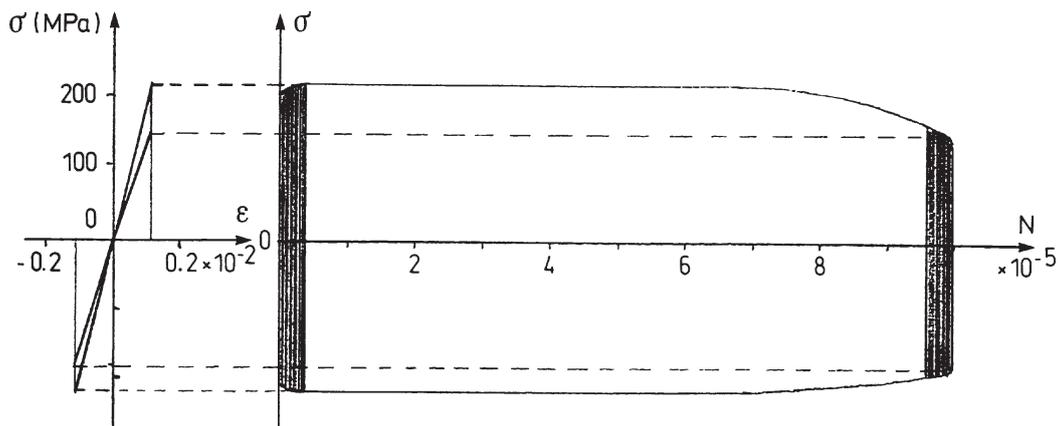


Abbildung 2.1: Zyklische Zug-Druck-Kurven beim high-cycle fatigue eines rostfreien A 316 Stahls (nach J. DUFAILY)

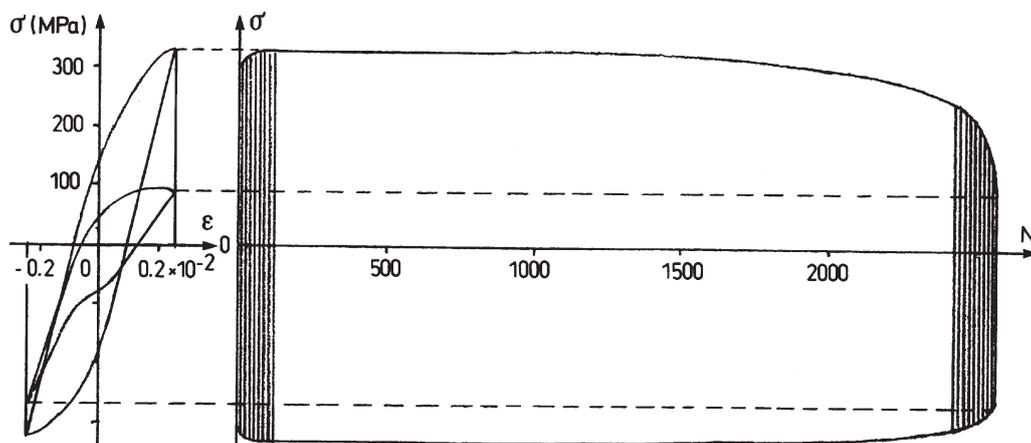


Abbildung 2.2: Zyklische Zug-Druck-Kurven beim low-cycle fatigue eines rostfreien A 316 L Stahls (nach J. DUFAILY)

Schädigung als duktil bezeichnet. Diese führt bereits bei niedriger Lastspielzahl zum Versagen ($N < 10000$) und der dargestellte Ermüdungsversuch wird als niedrigzyklische Ermüdung (*low-cycle fatigue*) bezeichnet. Dies verdeutlicht, daß die Mechanismen der spröden bzw. duktilen Schädigung vom Lastniveau abhängen, und auch ein relativ duktiler Werkstoff unter high-cycle fatigue Versagen kann.

In Zusammenhang mit der Diskussion der grundlegenden Schädigungsmodelle wird von der Notation in Kapitel 1 zum Teil abgewichen und die übliche Notation für lineare Probleme kleiner Verzerrungen benutzt, da die meisten vorgestellten Modelle ihrerseits nicht in einem finiten Rahmen präsentiert worden sind.

2.1.1 Kontinuumsschädigungsmechanik

Dem Versagen einer Struktur auf der Makroskala gehen in fast allen Fällen heterogene, irreversible Prozesse auf einer untergeordneten Skala, hier zunächst als Gegensatz zur Makroskala Mikroskala genannt¹ voraus. Für eine kontinuumsmechanische Betrachtung eines Materials auf der Makroskala idealisiert man das Material als aus materiellen Punkten und ihren infinitesimalen materiellen Nachbarschaften bestehend. Die Spannungen, Dehnungen und die Verteilung des Materials in einer infinitesimalen Nachbarschaft eines typischen Partikels sind als einheitlich anzusehen. Welche Skala bei einem bestimmten Material als mikroskopisch² anzusehen ist, ist eine Frage der Modellierung. Wenn man ein Metall auf einer Skala betrachtet, auf der einzelne Körner darstellbar sind, sind die Spannungs- und Dehnungsfelder nicht mehr glatt, sie weisen Fluktuationen auf. Trotzdem ist ein einzelnes Korn der kontinuumsmechanischen Beschreibung als Einkristall zugänglich (ASARO & RICE 1977; ASARO 1983; LE, SCHÜTTE & STUMPF 1998) d.h. die Wahl der Betrachtung der Phänomene auf einer Mikroskala impliziert nicht, daß diese Vorgänge auf dieser Skala einer Beschreibung durch die Kontinuumsmechanik nicht mehr zugänglich sind. Eine untere Grenze der Längenskala ist allerdings erreicht, wenn einzelne Versetzungen oder Fehlstellen “sichtbar” werden. Auf dieser atomaren Skala verliert die Kontinuumsmechanik ihre Gültigkeit und die Bindungskräfte zwischen den Atomen bzw. Molekülen müssen modelliert werden. Abbildung (2.3) zeigt zwei verschiedene Möglichkeiten der Wahl einer Mikroskala. Bezüglich der Mikroskala II und der Makroskala wird Mikroskala I auch häufig als Mesoskala³ bezeichnet. Die Existenz von Hohlräumen, Poren, Rissen, Scherbändern etc. auf einer mikroskopischen Skala wird als Schädigung (*damage*) bezeichnet. Der Prozeß der Entstehung und des Wachstums dieser Poren, Risse usw. wird Schädigungsevolution (*damage evolution*) genannt. Die mikromechanischen Evolutionsgleichungen dieser Defekte können wiederum auf Phänomenen einer noch tieferen Skala, z.B. der atomaren Skala basieren (Kohäsivkräfte auf die sich öffnenden Rißufer u.ä.) Die Kontinuums-Schädigungsmechanik (*continuum damage mechanics, CDM*) nimmt an, daß der Schädigungszustand eines Volumenelementes eines Materials prinzipiell

¹μακρόσ ≐ lang (Distanz); μικρόσ ≐ klein

²Die Begriffe mikroskopisch und makroskopisch sollen hier für Phänomene stehen die auf der jeweiligen Skala beschrieben werden. TRUESDELL[1992, S.5]:”The word ‘makrosopic’ is often used but is misleading because the scale of the phenomenon has nothing to do with whether or not they can be seen (σκοπεῖν)[...]”

³μέσοσ ≐ in der Mitte

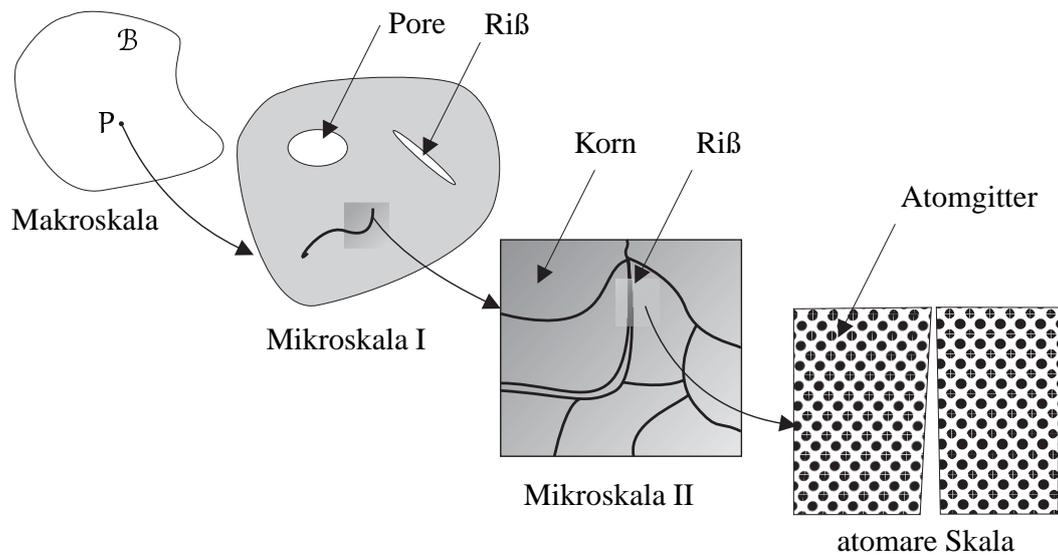


Abbildung 2.3: Materieller Punkt P mit zwei verschiedenen Mikroskalen und der atomaren Skala

durch die Anzahl, Abmessungen und Anordnung der Poren, Risse etc. bestimmt ist. Über geeignete Homogenisierungs-(Mittelungs)-Vorschriften werden dann die Kontinuumsfelder der übergeordneten Skala gewonnen, zu denen dann außer den Spannungs- und Dehnungsfelder noch geeignete Felder hinzukommen, die die Auswirkungen der Mikrodefekt-Konfiguration auf der Makroskala beschreiben. Diese internen Variablen werden als Schädigungsvariablen (*damage variables*) bezeichnet.

2.1.2 Klassifikation und Bibliographie der CDM Modelle

Die folgende Übersicht aus SKRZYPEK (1999) klassifiziert die Modelle der Kontinuums-Schädigungsmechanik mit den entsprechenden wichtigsten Arbeiten.

Referenz	Mikroskopische Mechanismen und Eigenschaften
Elastisch-spröde Schädigung (<i>elastic-brittle damage</i>)	
Krajcinovic & Fonseka (1981) Sidoroff (1981) Mazars (1985) Marigo (1985) Lemaitre (1985) Litewka (1985), (1989) Litewka (1989) Grabacki (1991), (1994) Najar (1994) Murakami & Kamiya (1997)	Entstehung und Wachstum von mikroskopischen Rissen durch elastische Deformationen. Änderung der effektiven Steifigkeit bzw. Nachgiebigkeit durch Absinken des E-Moduls mit der Schädigungsevolution (Metalle, Fels, Beton, Komposita)
Elastisch-plastische Schädigung (<i>elasto-plastic damage</i>)	
Gurson (1977) Suquet (1982) Cordebois & Sidoroff (1982) Tvergaard (1981),(1988) Rousselier (1981),(1986) Lemaitre (1984),(1985) Dragon & Chihab (1985) Chow & Lu (1992) Voyiadjis & Kattan (1992) Murzewski (1992) Mou & Han (1996) Saanouni, Forster & Hatira (1994) Taher, Baluch & Al-Gadhib (1994)	Entstehung, Wachstum und Verschmelzung von mikroskopischen Hohlräumen durch (große) plastische Formänderungen. Verknüpfung von Gleitbändern, Ablösung von Partikeln aus dem Matrixmaterial, Partikelbruch. Zusammenwachsen von Hohlräumen in porösen Medien beim Vorliegen von Scherbändern (Metalle, Komposita, Polymere)
Schädigung durch Splintern (<i>spall-damage</i>)	
Tetelman & jr. McEvily (1970) Gurland (1972) Davison, Stevens & Kipp (1977),(1978) Johnson (1981) Grady (1982) Perzyna (1986) Nemes, Eftis & Randles (1990)	Elastische und elasto-plastische Schädigung unter impulsiven Lasten. Ausbreitung von plastischen Schockwellen. Kopplung zwischen Entstehung/Wachstum von Hohlräumen und Spannungswellen. Zusammenwachsen der Mikrorisse vor dem Fragmentierungsprozeß. Völlige Separation durch Ausbreitung von Makrorissen durch das hochgeschädigte Material.

Referenz	Mikroskopische Mechanismen und Eigenschaften
Ermüdungs-Schädigung (<i>fatigue damage</i>)	
Manson (1954) Coffin (1954) Lemaitre (1971) Manson (1979) Lemaitre (1996) Dufailly & Lemaitre (1995) Skoczeń (1996)	Entstehung und Wachstum von transgranularen Mikrorissen in der Umgebung der Oberfläche. Hoch-zyklische Ermüdung (Zyklenzahl $> 10^5$): Einfluß der makroskopischen Plastizität ist vernachlässigbar. Sehr niedrige Zyklenzahl (> 10) Ribentstehung durch Gleitbänder in Körnern in der Nähe der Oberfläche. Anschließende transgranulare Ausbreitung in den transgranularen Gleitebenen.
Kriech-Schädigung (<i>creep damage</i>)	
Kachanov (1958) Rabotnov (1969) Leckie & Hayhurst (1974) Hayhurst <i>et al.</i> (1975),(1984) Trapzyński, Hayhurst & Leckie (1981) Krajcinovic & Fonseka (1981),(1982) Chaboche (1979),(1981),(1988) Murakami (1983) Stigh (1985) Zang & Lee (1993) Kowalewski <i>et al.</i> (1994),(1996) Needleman, Tvergaard & Giessen (1995) Naumenko (1996) Altenbach <i>et al.</i> (1990),(1997) Altenbach <i>et al.</i> (1997)	Entstehung und Wachstum von mikroskopischen Hohlräumen und Rissen innerhalb von metallischen Körnern (duktiler transgranulare Kriech-Schädigung bei niedrigen Temperaturen) oder an den Korngrenzen (sprödes intergranulare Schädigung bei hohen Temperaturen) durch Korngrenzgleiten und Diffusion.
Schädigung durch Kriech-Ermüdung (<i>creep-fatigue damage</i>)	
Chrzanowski (1976) Lemaitre & Chaboche (1975),(1985) Plumtree & Lemaitre (1979) Wang (1992) Dunne & Hayhurst (1992),(1994) Lin, Dunne & Hayhurst (1996),(1999)	Schädigung induziert durch wiederholte mechanische und thermische Belastung bei hohen Temperaturen. Schädigung durch zyklisches Kriechen gekoppelt mit plastischen Formänderungen. Interaktion von intergranularen Hohlräumen mit transgranularen Rissen. Bildung von Gleitbändern bei niedrigen Temperaturen gekoppelt mit Mikroribentwicklung durch Kriechen bei hohen Temperaturen (Metalle, hochlegierte Stähle, Aluminium-Legierungen, Kupfer)

Referenz	Mikroskopische Mechanismen und Eigenschaften
Anisotrope Schädigung (<i>anisotropic damage</i>)	
Sidoroff (1981) Ladeveze (1990) Lis (1992) Chaboche (1993) Chaboche, Lesne & Moire (1995) Chen & Chow (1995) Voyiadjis, Venson & Kattan (1995) Murakami & Kamiya (1997)	Schädigungsinduzierte Anisotropie oder Schädigung von anisotropen Materialien (Komposita). Unilaterale Schädigung. Anisotrope elastisch-spröde Schädigung. Nichtproportionale und zyklische Lasten. Effektive Zustandsvariablen und Schädigungstensoren (Beton, Anisotrope Keramiken, Komposita)
Schädigung durch Korrosion (<i>corrosion damage</i>)	
Tetelman & jr. McEvily (1970) Knott (1973) Schmitt & Jalinier (1982)	Intergranulare Korrosion, Degradation durch Umwelteinflüsse, Entwicklung von Mikrorissen unter Angriff von korrosiven Medien
Strahlungsschädigung (<i>irradiation damage</i>)	
Tetelman & jr. McEvily (1970) Gittus (1978) Tomkins (1981) Murakami & Mizuno (1992)	Schädigung durch Bestrahlung mit Neutronen und α -Strahlen in Form von Hohlrumbaueung. Duktiler Kriechverhalten unter Bestrahlung und anschließende Versprödung.
Schädigung durch thermisches Kriechen (<i>thermo-creep damage</i>)	
Ben-Hatira, Forster & Saanouni (1992) Saanouni, Forster & Hatira (1994) Ganczarski & Skrzypek (1995),(1997) Kaviany (1995) Skrzypek & Ganczarski (1998)	Gekoppelte thermo-elastisch-viskoplastische Schädigung. Einfluß der Schädigung auf den Wärmetransport im Material. Änderung des Temperaturgradienten durch Schädigung.

Tabelle 2.1: Klassifikation der Schädigungsliteratur nach SKRZYPEK (1999)

2.1.3 Schädigungsvariablen

Eindimensionale Flächen-Schädigungsvariable

Um den graduellen Deteriorationsprozeß einer Mikrostruktur durch Mikroriß- und Mikroporenentstehung und -ausbreitung in einem materiellen Punkt P zu charakterisieren hat, KACHANOV (1958) den Kontinuitätsparameter ψ eingeführt. Dieser Parameter setzt für eine Schnittebene mit der Normalen \mathbf{n} die durch Mikrorisse und Poren reduzierte Fläche $\delta \tilde{A}$ in Bezug zur totalen (un-

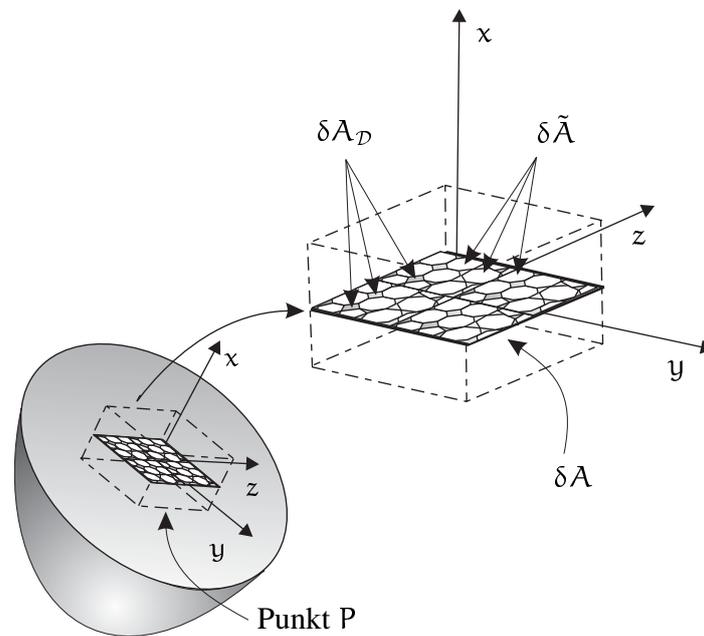


Abbildung 2.4: Materieller Punkt P mit dazugehörigem geschädigtem Mikrovolumenelement

geschädigten) Fläche δA

$$\psi = \frac{\delta \tilde{A}}{\delta A}; \quad \psi \in [0, 1], \quad (2.1.1)$$

so daß $\psi = 1$ dem ungeschädigten Material und $\psi = 0$ einer verschwindenden Restfläche entspricht. Um konsistent zu den weiter unten vorgestellten Schädigungsvariablen zu bleiben wird der Schädigungsparameter \mathcal{D} eingeführt, der die geschädigte Fläche $A_{\mathcal{D}}$ auf die ungeschädigte Fläche bezieht. Innerhalb eines Volumenelementes ist das Schädigungsmaß offensichtlich von der Höhe x der Schnittfläche in Richtung \mathbf{n} abhängig, so daß als Schädigungsmaß

$$\mathcal{D}(P, \mathbf{n}) = \max_x \mathcal{D}(P, \mathbf{n}, x) = \frac{\delta A_{\mathcal{D}}}{\delta A}, \quad \mathcal{D} \in [0, 1] \quad (2.1.2)$$

eingeführt wird, wobei $\mathcal{D} = 1 - \psi = 0$ dann den ungeschädigten Zustand beschreibt und $\mathcal{D} = 1$ die totale Schädigung als Verschwinden der Restfläche des Materials in diesem Punkt. Das Material im Ausgangszustand wird stets als ungeschädigte Referenz herangezogen, obwohl es bereits Fehlstellen enthält. Diese sind jedoch in der Beschreibung des Materials bereits enthalten, z.B. über den Elastizitätsmodul des 'ungeschädigten' Materials.

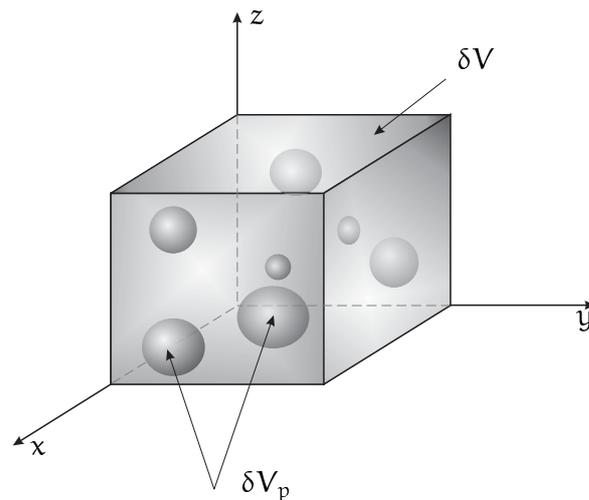


Abbildung 2.5: Mikrovolumenelement mit Poren

Eindimensionale Volumen-Schädigungsvariable

Für die Schädigung durch Mikroporen benutzte GURSON (1977) den Porenvolumenanteil in einem Mikrovolumenelement als Maß für die duktile Schädigung eines Materials (s. Abb. 2.5)

$$f = \frac{\delta V_p}{\delta V}. \quad (2.1.3)$$

Hier bezeichnet δV das ungeschädigte Volumen und δV_p das Volumen der Poren. Diese Variable ist über

$$\mathcal{D} = f^{2/3} \quad (2.1.4)$$

korreliert zur Flächen-Schädigungsvariable von KACHANOV.

Effektivspannung

RABOTNOV (1968) betrachtete ein geschädigtes Mikrovolumenelement (s. Abb. 2.6), das durch eine Zugkraft $\mathbf{t} = \mathbf{n}t$ belastet wird. Die Definition der Spannung ohne Berücksichtigung der Schäden lautet

$$\sigma = \frac{t}{\delta A} \quad (2.1.5)$$

Wenn man nun berücksichtigt, daß die Defekte die Fläche, auf der effektiv die

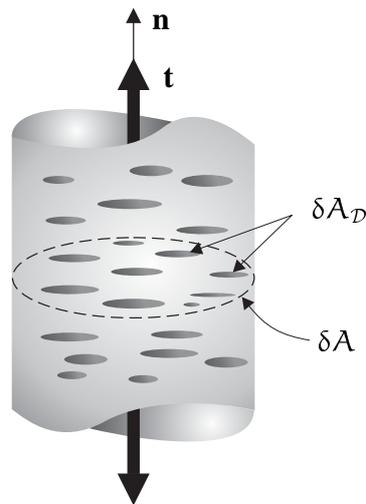


Abbildung 2.6: Geschädigtes Mikrovolumenelement unter einachsiger Zug

Last angreift, reduzieren, gilt für den Fall, daß alle Defekte geöffnet sind, d.h. daß sie keine Spannungen übertragen

$$\tilde{\sigma} = \frac{t}{\delta A - \delta A_D} = \frac{\sigma}{1 - \mathcal{D}}, \quad (2.1.6)$$

mit dem Schädigungsparameter \mathcal{D} nach Gl. (2.1.2). Dies ist die Definition der *effektiven Spannung* für den einachsigen Zug. Festzuhalten ist, daß die “effektive” Fläche $\delta A - \delta A_D$ für verschiedene Arten der Schädigung (Risse, Poren, Scherbänder etc.) einer mikromechanischen Interpretation bedarf, da die reine Flächenreduktion eventuell nicht mehr der entscheidende Faktor ist.

Geometrische Definition des Schädigungstensors

Aus (2.1.2) ist leicht ersichtlich, daß das skalare Schädigungsmaß \mathcal{D} von der Orientierung der Schnittfläche abhängt. In Richtung der Normalen \mathbf{n} gilt die skalare Gleichung

$$\delta \tilde{A} = (1 - \mathcal{D}(\mathbf{n}))\delta A \quad (2.1.7)$$

MURAKAMI & OHNO (1981) folgend kann diese Gleichung auf dreidimensionale Probleme erweitert werden, indem man diese Gleichung für drei orthogonale Richtungen $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ aufstellt

$$\delta \tilde{A}_i = (1 - \mathcal{D}_i)\delta A_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1.8)$$

In einem allgemeinen Koordinatensystem kann dies als

$$\delta\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{n}}\delta\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{1} - \mathcal{D})\mathbf{n}\delta A = (\mathbf{1} - \mathcal{D})\delta A \quad (2.1.9)$$

geschrieben werden, mit dem symmetrischen Schädigungstensor

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{D}_i(\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i). \quad (2.1.10)$$

Der Spannungsvektor \mathbf{t} läßt sich nun über Cauchy's Lemma (1.2.13) entweder mit Hilfe des ungeschädigten Flächenelementes oder mit dem geschädigten Flächenelement ausdrücken

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\delta A = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\delta\tilde{\mathbf{A}}, \quad (2.1.11)$$

wodurch der Effektivspannungstensor $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ definiert wird

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{1} - \mathcal{D})^{-1}. \quad (2.1.12)$$

Die Natur dieses oft als “unsymmetrisch” bezeichneten Spannungstensors, die in diesem linearen Kontext nicht offensichtlich wird, wird in Zusammenhang mit dem später präsentierten finiten Rahmen der Schädigungsmechanik erläutert. Mit Hilfe eines symmetrischen Schädigungstensors zweiter Stufe ist es offensichtlich möglich, schädigungsinduzierte Anisotropien bis hin zur Orthotropie durch drei orthogonale Symmetrieebenen zu beschreiben. Der Fall der isotropen Schädigung, z.B. durch kugelförmige Poren, wird erreicht, wenn \mathcal{D} ein Kugeltensor $\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathbf{1}$ ist.

Schädigungstensoren vierter Stufe

Um Gleichung (2.1.12) auf allgemeinere Fälle anisotroper Schädigungszustände zu erweitern, haben CHABOCHE (1978), LECKIE & ONAT (1981) und andere Schädigungstensoren vierter Stufe eingeführt. Dies gelingt in direkter Analogie zu (2.1.12) durch

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{I} - \mathcal{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.1.13)$$

mit \mathbf{I} dem Einheitstensor vierter Stufe, dem Schädigungstensor vierter Stufe \mathcal{D} und dem Schädigungseffektensor \mathbf{M} . Es bleibt festzuhalten, daß diese Verallgemeinerung zunächst nur rein formaler Art ist, insbesondere da die Symmetrien von \mathbf{M} offensichtlich von der Interpretation des verwendeten Effektivspannungstensors abhängen, die aber, wie oben dargelegt, in diesem linearen Rahmen nicht konsistent erfolgen kann.

Klassifikation der CDM-Literatur nach Schädigungsvariablen

Im Folgenden eine Klassifikation CDM-Literatur nach den verwendeten Schädigungsvariablen.

Referenz	Schädigungsmechanismus
Skalare Schädigungsvariablen	
Kachanov (1958)	Kriechen (isotrop)
Kachanov (1974)	Kriechen (anisotrop)
Rabotnov (1968),(1969)	Kriechen (anisotrop)
Martin & Leckie (1972)	Kriechen (anisotrop)
Hayhurst & Leckie (1973)	Kriechen (isotrop)
Davison, Stevens & Kipp (1977)	<i>spalling</i> , elastisch
Gurson (1977)	elastisch-plastisch
Trapzyński, Hayhurst & Leckie (1981)	creep (nicht-proportional)
Lemaitre & Chaboche (1978)	Kriechen(anisotrop)
Chaboche (1988)	Kriechen, Ermüdung, duktil, spröde (anisotrop)
Lemaitre (1987),(1996)	generell
Rides, Cocks & Hayhurst (1989)	Auswirkung der Kriechschädigung auf elastische Eigenschaften
Randy & Cozzarelli (1988)	Rißfortschritt
Murakami & Mizuno (1992)	Kriechen unter Bestrahlung
Zang & Lee (1993)	Hochtemperatur-Kriechen
<i>Skalar:</i>	$\omega(x)$ [Kachanov] (isotrop)
<i>Kontinuität:</i>	$\psi = \frac{A_{ef}}{A_0}$
<i>Schädigung:</i>	$\omega = 1 - \psi$
<i>Effektivspannung:</i>	$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\psi} = \frac{\sigma}{1 - \omega}$
<i>Verteilung auf der Einheitskugel:</i>	$\rho(\mathbf{n})$ $\rho(\mathbf{n}) = \rho_0$ (isotrop) $\rho_0 = \int_{4\pi} \rho(\mathbf{n}) dA$ (fast isotrop)
Vektorielle Schädigungsvariablen	
Davison, Stevens & Kipp (1973)	<i>spalling</i> , elastisch
Kachanov (1974):(1986)	Kriechen
Krajcinovic & Fonseka (1981)	elastisch, spröde
Krajcinovic (1983)	generell, Kriechen
Singh & Digby (1989)	spröde, anisotrop
Lubarda & Krajcinovic (1993)	generell
<i>Vektor:</i>	$\omega(x)$ [Kachanov] $\boldsymbol{\omega} = \omega_v \mathbf{v}$ $\boldsymbol{\psi} = \psi_v \mathbf{v}$ $\tilde{\sigma}_v = \frac{\sigma_v}{\psi_v}$

Referenz	Schädigungsmechanismus
zweistufiger Schädigungstensor	
Murzewski (1957),(1958),(1992)	quasi-homogene Metalle (stochastischer Ansatz)
Rabotnov (1969)	Kriechen
Vakulenko & Kachanov (1971)	plastisch-spröde
Murakami & Ohno (1981)	Kriechen
Kachanov (1972)	elastisch
Dragon & Mróz (1979)	spröde-plastisch
Cordebois & Sidoroff (1982)	elastisch, elastisch-plastisch
Betten (1983)	generell, Kriechen
Litewka (1985)(1987),(1989)	Kriechen (anisotrop)
Kondaurov (1988)	elastisch (orthotrop)
Murakami (1983)(1987),(1988)	Kriechen, Ermüdung
Karihaloo & Fu (1989)	Beton
Chow & Lu (1992)	elastisch-plastisch, anisotrop
Lis (1992)	(nicht-proportionale Lasten)
Chaboche (1993)	schädigungsinduzierte elastische Anisotropie
Lis & Litewka (1996)	schädigungsinduzierte elastische Anisotropie
Zheng & Betten (1996)	Übersicht über Effektivspannungen
Murakami & Kamiya (1997)	Elastisch-spröde Anisotropie
Skrzypek & Ganczarski (1998)	Elastisch-spröde Anisotropie
<i>Tensor zweiter Stufe:</i>	$\mathbf{\Omega} = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \mathbf{n}_i \mathbf{n}_i$ [Murkami&Ohno]
	$\mathbf{\Omega} = \mathbf{1} - \mathbf{\Psi}$
	$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}[(\mathbf{1} - \mathbf{\Omega})^{-1} : \sigma + \sigma : (\mathbf{1} - \mathbf{\Omega})^{-1}]$
<i>Rißdichte-Tensor:</i>	$\rho(\mathbf{n}) = \rho_{kl} n_k n_l$ [Krajcinovic]
	$D_{ij} = \int_{4\pi} \rho(\mathbf{n}) n_i n_j dA$
vierstufiger Schädigungstensor	
Chaboche (1982)	Kriechen
Leckie & Onat (1981)	Kriechen
Simo & Ju (1987)	generell
Chow & Wang (1987)	generell, anisotrop
Krajcinovic (1989)	generell, anisotrop
Lubarda & Krajcinovic (1993)	generell, anisotrop
Schieße (1994)	elastisch-plastisch, anisotrop
Chen & Chow (1995)	Schädigungseffekt-Tensor, anisotrop
Voyiadjis & Park (1996)	anisotrope Schädigung, plastisch
Qi & Bertram (1997)	Einkristall, anisotrop
<i>Schädigungstensor vierter Stufe:</i>	\mathbf{D} [Chaboche]
<i>Elastizitätstensor \mathbf{E}:</i>	$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{D}) = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \mathbf{E}$
<i>Schädigungseffekt-Tensor \mathbf{M}:</i>	$\tilde{\sigma} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} : \tilde{\sigma} = \mathbf{M}(\mathbf{D}) : \sigma$
<i>Rißdichte-Tensor:</i>	$\rho(\mathbf{n}) = \rho_{ijkl} n_i n_j n_k n_l$ [Krajcinovic]
	$D_{ijkl} = \int_{4\pi} \rho(\mathbf{n}) n_i n_j n_k n_l dA$
achtstufiger Schädigungstensor	
Chaboche (1981)	Kriechen, Ermüdung

Tabelle 2.2: Übersicht der Schädigungsvariablen (nach Skrzypek, 1999)

2.1.4 Äquivalenzprinzipien

Der (mechanische) Zustand eines geschädigten Körpers wird durch die Felder der linearen Dehnung ε , der Cauchy-Spannung σ und des Schädigungsmaßes \mathbb{D} beschrieben: $\{\varepsilon, \sigma, \mathbb{D}\}$. Um den Zusammenhang mit dem ungeschädigten Ausgangszustand herzustellen, wird eine fiktive, ungeschädigte Konfiguration eingeführt, so daß in dieser Konfiguration derselbe Zustand beschrieben wird

$$\{\varepsilon, \sigma, \mathbb{D}\} \equiv \{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma}, \mathbb{D} = 0\} \equiv \{\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma}\}, \quad (2.1.14)$$

mit der Effektivspannung $\tilde{\sigma}$ und der Effektivdehnung $\tilde{\varepsilon}$. In dieser ungeschädigten Konfiguration sollen auch die Parameter und konstitutiven Gesetze des ungeschädigten Materials Geltung haben, sofern die entsprechenden effektiven Größen benutzt werden. So soll zum Beispiel der Elastizitätsmodul in dieser Konfiguration dem des jungfräulichen Materials entsprechen. Über weitere Annahmen kann dann der Schädigungseffektensor gewonnen werden. Diese Annahmen entsprechen jeweils sogenannten Äquivalenzprinzipien, d.h. bestimmte Größen werden als von der Schädigung unbeeinflusst betrachtet.

Prinzip der Dehnungsäquivalenz – Effektivspannungskonzept

Das Prinzip der Dehnungsäquivalenz (*principle of strain equivalence*) lautet (CHABOCHE 1978):

Die Dehnung, die mit einem geschädigten Zustand unter einer aufgebrachtten Spannung σ verbunden ist, ist äquivalent zur Dehnung des ungeschädigten Zustandes unter der Effektivspannung $\tilde{\sigma}$ (s. Abb. 2.7).

Die lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung des jungfräulichen Materials läßt sich mit Hilfe des elastischen Steifigkeitstensors ausdrücken durch

$$\sigma = \mathbb{C}^e : \varepsilon. \quad (2.1.15)$$

Im geschädigten Material liegt dann der geschädigte Elastizitätstensor vor

$$\sigma = \tilde{\mathbb{C}}^e : \varepsilon. \quad (2.1.16)$$

Mit Hilfe des Prinzips der Dehnungsäquivalenz

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{\sigma}, 0) = \varepsilon(\sigma, \mathbb{D}) \quad (2.1.17)$$

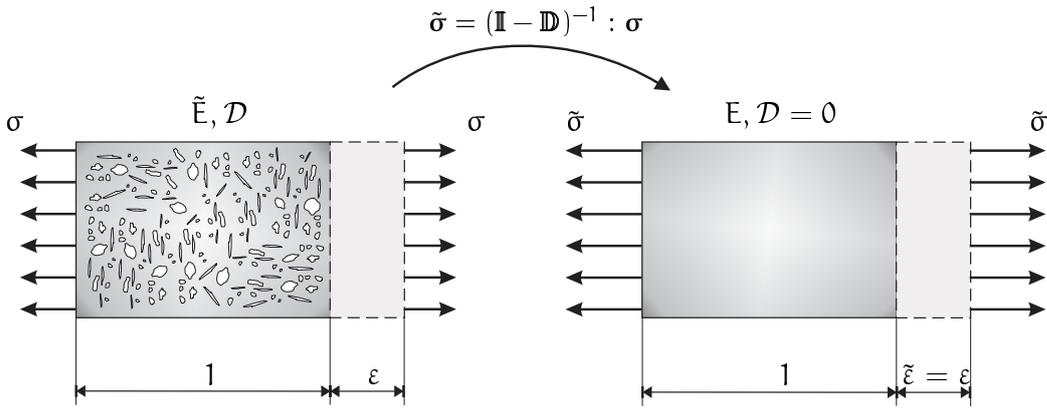


Abbildung 2.7: Eindimensionale Veranschaulichung der Dehnungsäquivalenz

kann die Spannungs-Dehnungs-Beziehung bezüglich der ungeschädigten Konfiguration wieder mit dem ungeschädigten Elastizitätstensor dargestellt werden

$$\tilde{\sigma} = \mathbb{C}^e : \varepsilon. \quad (2.1.18)$$

Wenn man hier ε aus (2.1.16) einführt, ergibt sich

$$\tilde{\sigma} = \mathbb{C}^e : \tilde{\mathbb{C}}^{e-1} : \sigma. \quad (2.1.19)$$

Aus der Definition der Effektivspannung (2.1.13) ergibt sich dann der Schädigungstensor zu

$$\mathbb{D} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbb{C}}^e : \mathbb{C}^{e-1} \quad (2.1.20)$$

und daraus folgt der Zusammenhang zwischen geschädigtem und ungeschädigtem Elastizitätsmodul

$$\tilde{\mathbb{C}}^e = (\mathbf{I} - \mathbb{D}) : \mathbb{C}^e. \quad (2.1.21)$$

Wenn die Betrachtung auf orthotrope Schädigungszustände beschränkt wird, kann ein Zusammenhang zwischen dem Schädigungstensor vierter Stufe und dem Schädigungstensor zweiter Stufe nach MURAKAMI (1988) hergeleitet werden.

$$\mathbb{D} = \mathcal{D}\mathbf{I}. \quad (2.1.22)$$

Prinzip der Spannungsäquivalenz – Effektivdehnungskonzept

Das Prinzip der Spannungsäquivalenz (*principle of stress equivalence*) lautet (CORDEBOIS & SIDOROFF 1979; SIMO & JU 1987):

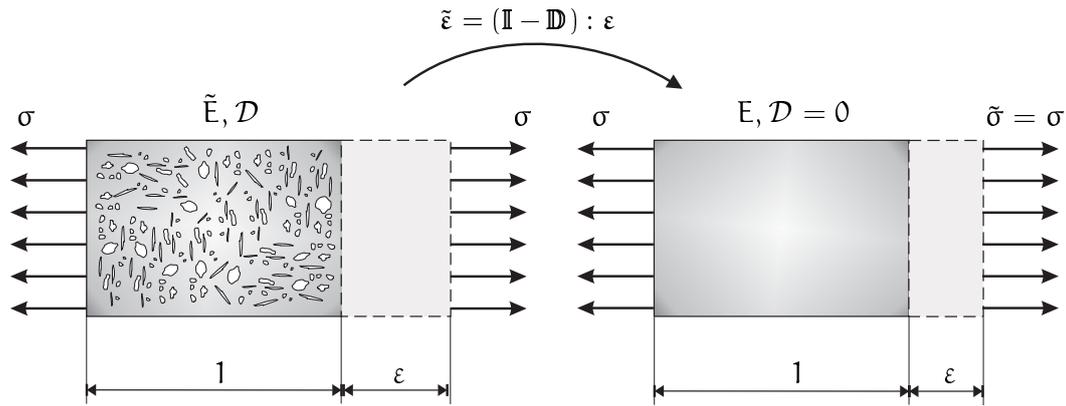


Abbildung 2.8: Eindimensionale Veranschaulichung der Spannungsäquivalenz

Die Spannung, die mit einem geschädigten Zustand unter einer aufgetragenen Dehnung ε verbunden ist, ist äquivalent zur Spannung des ungeschädigten Zustandes unter der Effektivdehnung $\tilde{\varepsilon}$ (s. Abb. 2.8).

Die inverse Spannungs-Dehnungs-Beziehung des geschädigten Materials

$$\tilde{\varepsilon} = \mathbf{C}^{e-1} : \sigma \quad (2.1.23)$$

wird mit dem Prinzip der Spannungsäquivalenz

$$\tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon}, 0) = \sigma(\varepsilon, \mathbb{D}) \quad (2.1.24)$$

durch

$$\varepsilon = \tilde{\mathbf{C}}^{e-1} : \sigma \quad (2.1.25)$$

ausgedrückt. Mit σ aus (2.1.23) ergibt sich

$$\tilde{\varepsilon} = \mathbf{C}^{e-1} : \tilde{\mathbf{C}}^e : \varepsilon. \quad (2.1.26)$$

Aus einer zu (2.1.13) äquivalenten Definition der Effektivdehnung

$$\tilde{\varepsilon} = (\mathbb{I} - \mathbb{D}) : \varepsilon \quad (2.1.27)$$

gewinnt man den Schädigungstensor vierter Stufe

$$\mathbb{D} = \mathbb{I} - \mathbf{C}^{e-1} : \tilde{\mathbf{C}}^e \quad (2.1.28)$$

und daraus folgt der Zusammenhang zwischen geschädigtem und ungeschädigtem Elastizitätsmodul

$$\tilde{\mathbf{C}}^e = \mathbf{C}^e : (\mathbb{I} - \mathbb{D}). \quad (2.1.29)$$

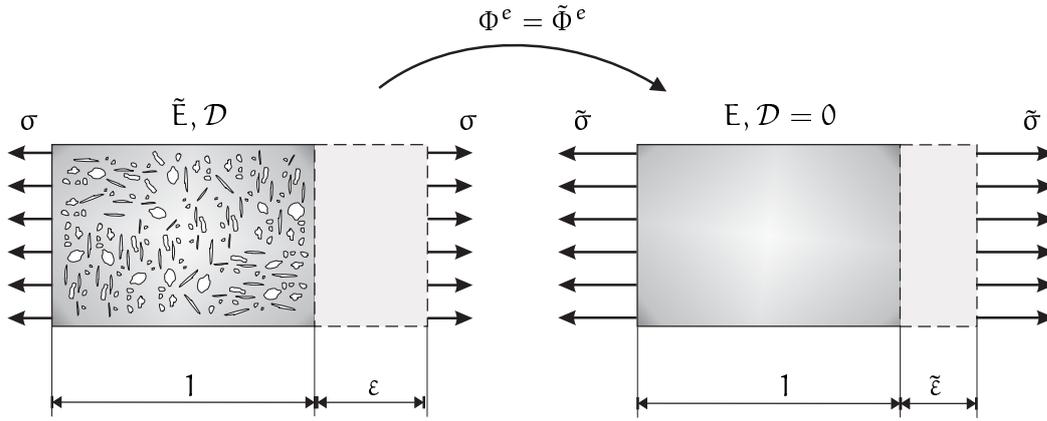


Abbildung 2.9: Eindimensionale Veranschaulichung der Energieäquivalenz

Prinzip der Äquivalenz der elastischen Energie

Das Prinzip der Äquivalenz der elastischen Energie (*principle of complementary energy equivalence*) lautet (CORDEBOIS & SIDOROFF 1979):

Die elastische Energie, die mit einem geschädigten Zustand unter einer aufgetragenen Spannung σ und der daraus resultierenden Dehnung ε verbunden ist, ist äquivalent zur elastischen Energie des ungeschädigten Zustandes, wenn im elastischen Potential die Effektivspannung $\tilde{\sigma}$ und Effektivdehnung $\tilde{\varepsilon}$ benutzt werden (s. Abb. 2.9).

Aus der komplementären elastischen Energie in der geschädigten und ungeschädigten Konfiguration

$$\Phi^e = \frac{1}{2} \sigma : \tilde{\mathbf{C}}^{e-1} : \sigma; \quad \tilde{\Phi}^e = \frac{1}{2} \tilde{\sigma} : \mathbf{C}^{e-1} : \tilde{\sigma} \quad (2.1.30)$$

erhält man für einachsigen Zug,

$$\sigma = \tilde{E} \varepsilon; \quad \tilde{\sigma} = E \tilde{\varepsilon}, \quad (2.1.31)$$

aus dem Prinzip der Äquivalenz der elastischen Energie

$$\tilde{\Phi}^e = \Phi^e \Rightarrow \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{E \tilde{E}^{-1}} \sigma; \quad \tilde{\varepsilon} = \sqrt{\tilde{E} E^{-1}} \varepsilon. \quad (2.1.32)$$

Aus diesem Prinzip folgt also sowohl eine Effektivspannung als auch eine Effektivdehnung. Die direkte Verallgemeinerung von (2.1.32) auf Tensoren vierter Stufe liefert

$$\tilde{\sigma} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} : \sigma; \quad \tilde{\varepsilon} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) : \varepsilon \quad \mathbf{D} = \mathbf{I} - (\tilde{\mathbf{C}}^e)^{1/2} : (\mathbf{C}^e)^{-1/2}. \quad (2.1.33)$$

Für orthotrope Schädigungszustände und den daraus folgenden Schädigungstensor zweiter Stufe haben CORDEBOIS & SIDOROFF (1982) unter anderem den folgenden symmetrischen Effektivspannungstensor vorgeschlagen

$$\tilde{\Sigma} = (\mathbf{1} - \mathcal{D})^{-1/2} : \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{1} - \mathcal{D})^{-1/2}, \quad (2.1.34)$$

dessen Form nicht in direktem Zusammenhang mit dem Prinzip der Energieäquivalenz steht und darüberhinaus nicht weiter physikalisch motiviert wurde. Der Zusammenhang zum Schädigungstensor vierter Stufe läßt sich über

$$\mathbb{D} = \mathbb{I} - (\mathbf{1} - \mathcal{D})^{1/2} \otimes (\mathbf{1} - \mathcal{D})^{1/2} \quad (2.1.35)$$

herstellen.

2.2 Multiplikativer Rahmen für spröde Schädigung

In diesem Abschnitt wird ein durch die Unzulänglichkeiten der klassischen Kontinuumsschädigungsmechanik motivierter Rahmen für spröde Schädigung vorgestellt, der einen konsistenten Zusammenhang zwischen geschädigter und fiktiver, ungeschädigter Konfiguration über eine Schädigungsabbildung herstellt. Durch die Angabe eines hyperelastischen Potentials werden, der Prozedur von COLEMAN & NOLL (1963) folgend, die konstitutiven Gesetze thermodynamisch konsistent abgeleitet.

2.2.1 Motivation

Wie in der Zusammenfassung der Ansätze der Kontinuumsschädigungsmechanik deutlich wurde, ist eine skalare, isotrope Schädigungsvariable nicht mehr ausreichend, wenn man durch Risse oder ellipsoide Hohlräume geschädigte Materialien beschreiben will. MURAKAMI führte hierfür den Schädigungstensor zweiter Stufe \mathcal{D} ein (vgl. Abschnitte 2.1.3 und 2.1.4), der eine effektive Spannung

$$\tilde{\sigma} = \sigma(1 - \mathcal{D})^{-1} \quad (2.2.1)$$

liefert, die auf das geschädigte Flächenelement bezogen ist. Im Rahmen des Effektivspannungskonzeptes ist diese Spannung auf der fiktiven, ungeschädigten Konfiguration definiert. Wie bereits oben angemerkt, wird diese Spannung oft als unsymmetrisch bezeichnet und verschiedene Autoren haben Symmetrisierungen dieser Spannung vorgeschlagen

- $\tilde{\sigma} = (1 - \mathcal{D})^{-1/2} : \sigma : (1 - \mathcal{D})^{-1/2}$ (CORDEBOIS & SIDOROFF 1982)
- $\tilde{\sigma} = (1 - \mathcal{D})^{-1} : \sigma : (1 - \mathcal{D})^{-1}$ (BETTEN 1986)
- $\tilde{\sigma} = \frac{1}{2} (\sigma(1 - \mathcal{D})^{-1} + (1 - \mathcal{D})^{-1}\sigma)$ (MURAKAMI 1988)

und dabei die Natur des “unsymmetrischen” Effektivspannungstensors vernachlässigt. Dieser geht aus einer Transformation der infinitesimalen Bezugsfläche des Cauchyschen Spannungsvektors in die fiktive, ungeschädigte Konfiguration hervor (s. Glg. (1.3.39)) und ist somit ein Spannungstensor vom Typ des 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors \mathbf{P} (vgl. Glg. (1.3.40)). Da $\tilde{\sigma}$ also offensichtlich die Natur eines *two-point*-Tensors aufweist (der 1.P.-K. hat

seine “Beine” in zwei verschiedenen Konfigurationen $\mathbf{P} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}$) ist der Begriff “Symmetrie” unangemessen und eine Symmetrisierung nach MURAKAMI (1988) ergibt eine Größe, die kein Tensor mehr ist. Wenn aber $\tilde{\sigma}$ ein *two-point*-Tensor ist, muß $(1 - \mathcal{D})^{-1}$ eine Abbildung repräsentieren (1 ist somit eine Einheitsabbildung, ein *Shifter* und kein Einheitstensor). Dies stellt die Motivation dar, eine ungeschädigte Konfiguration im Sinne von Abschnitt 2.1.4 einzuführen, die dann durch einen Deformationsgradienten induziert wird, der zwischen der geschädigten und ungeschädigten Konfiguration abbildet. Auf einem solchen Deformationsgradienten basierend, wird anschließend ein konsistenter Rahmen erarbeitet, in dem, ohne die Beliebigkeit einer besonderen Symmetrisierung oder eines speziellen Äquivalenzprinzips, Stoffgesetze für Materialien erarbeitet werden können, die Schädigungsprozessen unterliegen. Im Folgenden werden die Betrachtungen im Wesentlichen auf spröde Schädigung beschränkt, bei der Entstehung und Wachstum von Mikrorissen, getrieben durch elastische Deformationen und Spannungen, der dominante mikro-mechanische Schädigungsvorgang ist.

2.2.2 Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

Um den Prozeß eines Körpers mit Mikrorissen mit Hilfe eines Schädigungs-Deformationsgradienten zu beschreiben, wird in der referentiellen Beschreibung diejenige Plazierung als Referenzplazierung gewählt, in der der Körper “ungeschädigt” ist. Ein tatsächlicher Körper wird, auch wenn er als jungfräuliche Probe vorliegt, stets Fehlstellen bzw. Mikrorisse aufweisen. Diese sind aber bereits in den erfaßten Eigenschaften, wie z.B. dem Elastizitätsmodul, enthalten. Ungeschädigt ist der Körper also stets zu Beginn des betrachteten Prozesses. Der Schädigungsprozeß besteht vielmehr in der Entstehung neuer und der Ausbreitung vorhandener Fehlstellen. Ein solcher Prozeß ist in Abbildung 2.10 skizziert. In Punkt 1 liegt der Körper in jungfräulichem Zustand vor (es ist bereits ein Mikroriß vorhanden, dessen Einfluß im “ungeschädigten” Elastizitätsmodul enthalten ist). Der Körper wird belastet und seine Spannungs-Dehnungs-Kurve zeigt linear-elastisches Verhalten. Bei einer Grenzbelastung σ_2 ist eine kritische Last erreicht, um den Rißfortschritt einzuleiten. Im weiteren Belastungsprozeß wird der Riß also wachsen, und ein Teil der elastischen Energie des Körpers für das Rißwachstum verbraucht. Als Folge dessen wird das Materialverhalten “weicher”, weil der Elastizitätsmodul stetig kleiner

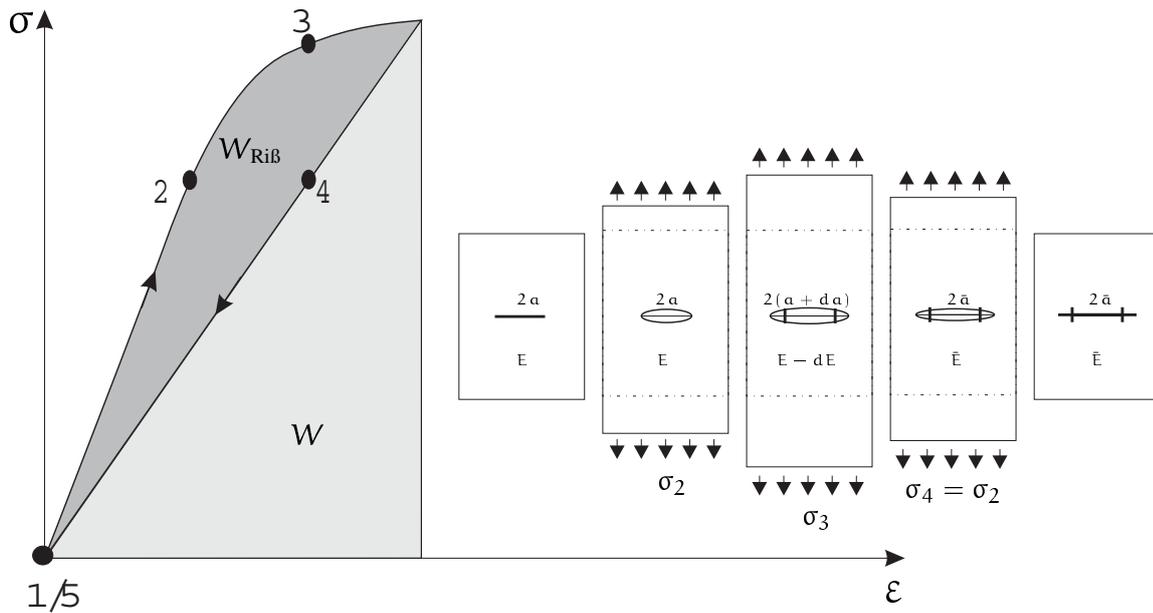


Abbildung 2.10: Die Spannungs-Dehnungs-Kurve eines durch wachsende Risse geschädigten Materials

wird. Während des Entlastungsvorgangs zeigt der Körper wieder linear elastisches Verhalten, allerdings mit geändertem Elastizitätsmodul aufgrund des längeren Risses. Bei gleicher Last liegt also im Punkt 4 eine größere Deformation als im Punkt 2 vor. Im lastfreien Zustand 5 sind keine bleibenden Deformationen des Körpers zu beobachten, er unterscheidet sich von Zustand 1 lediglich durch den längeren RiB. Wenn man diese Probe erneut belastet und unterhalb der Grenze für RiBfortschritt bleibt, liegt wiederum linear-elastisches Verhalten entlang der Geraden 1/5-4 vor. Dies führt zusammen mit der Forderung, Schädigung durch eine Abbildung zu repräsentieren, auf eine multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in Analogie zur finiten Elastoplastizität:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^d; \quad \mathbf{F}^{\alpha}_A = (\mathbf{F}^e)^{\alpha}_A (\mathbf{F}^d)^{\alpha}_A, \quad (2.2.2)$$

die die drei in Abbildung 2.11 dargestellten Konfigurationen induziert: Die ungeschädigte Referenzkonfiguration, die geschädigte Zwischenkonfiguration und die momentane Konfiguration. Im Gegensatz zur finiten Elastoplastizität, bei der in der spannungsfreien Zwischenkonfiguration eine bleibende Deformation \mathbf{F}^p vorliegt, liegt hier der Körper in der Zwischenkonfiguration undeformiert, aber mit geänderter Mikrostruktur vor. Die Trennung in eine Schädigungsdeformation \mathbf{F}^d und eine elastische Deformation \mathbf{F}^e ist hier einer ener-

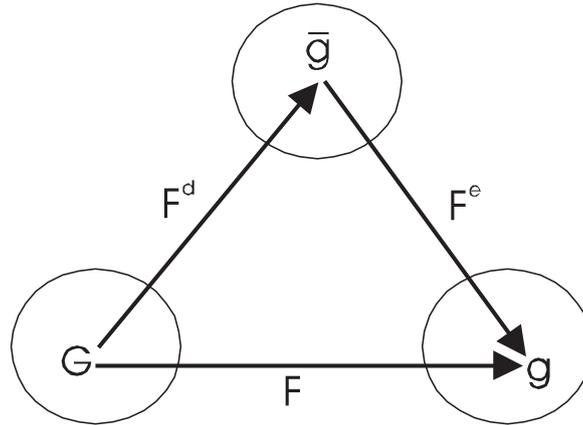


Abbildung 2.11: Die drei durch die Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^d$ induzierten Konfigurationen

getischen Art, in der Weise, daß \mathbf{F}^e für den Teil der Deformation steht, dessen Energie beim Entlastungsvorgang wiedergewonnen wird, wohingegen \mathbf{F}^d für den Anteil der Deformation steht, dessen Energie dissipiert bzw. in mikrostrukturellen Änderungen gespeichert wird. Das Vorliegen einer permanenten Deformation ist weniger mit einer multiplikativen Aufspaltung des Deformationsgradienten verbunden, sondern vielmehr mit der Annahme einer Form für die freie Energiedichte, wie später gezeigt wird. Diese Form führt in der finiten Elastoplastizität auf eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung, in der der elastische Anteil der Verzerrungen enthalten ist. Wie aus Abbildung 2.10 zu entnehmen ist, kann die freie Energie für diesen Schädigungsprozeß über den Entlastungsvorgang definiert werden, so daß in dieser die Spannungen mit der totalen Verzerrung gekoppelt sind.

Im Gegensatz zu dem jüngst von STEINMANN & CAROL (1998) vorgeschlagenen finiten Rahmen nichtlinearer Schädigungsmechanik, basierend auf zwei mikroskopischen und zwei makroskopischen Konfigurationen, sind alle hier benutzen Konfigurationen “makroskopisch”. Die zugrunde liegende Motivation des dort präsentierten Modells stellt das Prinzip der *strain energy equivalence* dar, so daß dort nicht vom Konzept der Äquivalenzprinzipien abgerückt wird.

In der referentiellen Beschreibung liegt der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten die folgende Zerlegung der Bewegung zugrunde

$$\chi_t(\mathbf{X}) = \chi_t^e(\bar{\mathbf{x}}) \circ \chi_t^d(\mathbf{X}), \quad \mathbf{x}^\alpha = (\chi_t^e)^\alpha \left((\chi_t^d)^\alpha (X^A) \right), \quad (2.2.3)$$

mit $\bar{\mathbf{x}}^\alpha = \chi^\alpha(X^A)$, dem Positionsvektor der Zwischenkonfiguration. Die Indizes der Zwischenkonfiguration werden mit kleinen griechischen Buchsta-

ben bezeichnet, und die Größen der Zwischenkonfiguration mit überstrichenen Kleinbuchstaben. Mittels (2.2.3) kann der Schädigungs- und der elastischen Deformationsgradient in Analogie zu (1.1.36) bzw. (1.1.37) definiert werden:

$$\mathbf{F}^d : T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_0 \rightarrow T_{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathcal{P}}_t, \quad \mathbf{F}^d = T\chi^d, \quad (F^d)^\alpha_A = \frac{\partial(\chi^d)^\alpha}{\partial X^A}, \quad (2.2.4)$$

$$\mathbf{F}^e : T_{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathcal{P}}_0 \rightarrow T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_t, \quad \mathbf{F}^e = T\chi^e, \quad (F^e)^\alpha_\alpha = \frac{\partial(\chi^e)^\alpha}{\partial \bar{X}^\alpha}, \quad (2.2.5)$$

wobei $\bar{\mathcal{P}}_t$ die Plazierung des Körpers in der geschädigten Zwischenkonfiguration bezeichnet. Um die Größen der drei Konfigurationen ineinander zu transformieren, werden wiederum push- und pull-Operationen benutzt, jetzt mit Hilfe von \mathbf{F}^d und \mathbf{F}^e . Für die Verknüpfung der push-pull Operationen gilt aufgrund von (2.2.2)

$$\mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{T}) = (\mathbf{F}^e)_\triangleright((\mathbf{F}^d)_\triangleright(\mathbf{T})). \quad (2.2.6)$$

Die Anwendung des polare Zerlegungssatzes auf die beiden Deformationsgradienten liefert

$$\mathbf{F}^d = \mathbf{R}^d \mathbf{U}^d = \bar{\mathbf{v}}^d \mathbf{R}^d, \quad (F^d)^\alpha_A = (R^d)^\alpha_B (U^d)^B_A = (\bar{v}^d)^\alpha_\beta (R^d)^\beta_A, \quad (2.2.7)$$

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e \bar{\mathbf{u}}^e = \mathbf{v}^e \mathbf{R}^e, \quad (F^e)^\alpha_\alpha = (R^e)^\alpha_\beta (\bar{u}^e)^\beta_\alpha = (v^e)^\alpha_b (R^e)^b_\alpha, \quad (2.2.8)$$

mit $\mathbf{R}^e, \mathbf{R}^d$ der elastischen, bzw. Schädigungsrotation und entsprechenden elastischen bzw. geschädigten linken und rechten Strecktensoren. Für die Rotationen gilt die multiplikative Zerlegung

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^e \mathbf{R}^d; \quad R^a_A = (R^e)^\alpha_\alpha (R^d)^\alpha_A. \quad (2.2.9)$$

Das folgende kommutative Diagramm veranschaulicht die daraus resultierenden Zusammenhänge

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_0 & & T_{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathcal{P}}_t \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_0 & & & & T_{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathcal{P}}_t \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & T_{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathcal{P}}_t & & T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_t \\
 & & & & \\
 & & T_{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathcal{P}}_t & & T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_0 \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_0 & & T_{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathcal{P}}_t
 \end{array}
 \quad (2.2.10)$$

2.2.3 Deformations- und Dehnungsmaße

Mit Hilfe von push- und pull Operationen basierend auf den zwei Deformationsgradienten \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^d kann man analog zum Vorgehen bei der Definition der Deformationsmaße in Kapitel 1 aus den Metriken der drei Konfigurationen \mathbf{g} , $\bar{\mathbf{g}}$ und \mathbf{G} folgende Deformationsmaße gewinnen:

$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\triangleleft}(\mathbf{g}) = \mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{F},$	$\mathbf{C}_{AB} = F^a_A \mathbf{g}_{ab} F^b_B$	(2.2.11)
$\mathbf{C}^d = \mathbf{F}^{d\triangleleft}(\bar{\mathbf{g}}) = \mathbf{F}^{dT} \bar{\mathbf{g}} \mathbf{F}^d,$	$(\mathbf{C}^d)_{AB} = (F^d)^\alpha_A \bar{\mathbf{g}}_{\alpha\beta} (F^d)^\beta_B,$	(2.2.12)
$\mathbf{c} = \mathbf{F}_{\triangleright}(\mathbf{G}) = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1},$	$\mathbf{c}_{ab} = (F^{-1})^A_a \mathbf{G}_{AB} (F^{-1})^B_b,$	(2.2.13)
$\mathbf{c}^e = \mathbf{F}_{\triangleright}^e(\bar{\mathbf{g}}) = \mathbf{F}^{e-T} \bar{\mathbf{g}} \mathbf{F}^{e-1},$	$(\mathbf{c}^e)_{ab} = (F^{e-1})^\alpha_a \bar{\mathbf{g}}_{\alpha\beta} (F^{e-1})^\beta_b,$	(2.2.14)
$\bar{\mathbf{c}}^d = \mathbf{F}_{\triangleright}^d(\mathbf{G}) = \mathbf{F}^{d-T} \mathbf{G} \mathbf{F}^{d-1},$	$(\bar{\mathbf{c}}^d)_{\alpha\beta} = (F^{d-1})^A_\alpha \mathbf{G}_{AB} (F^{d-1})^B_\beta,$	(2.2.15)
$\bar{\mathbf{c}}^e = \mathbf{F}^{e\triangleleft}(\mathbf{g}) = \mathbf{F}^{eT} \mathbf{g} \mathbf{F}^e,$	$(\bar{\mathbf{c}}^e)_{\alpha\beta} = (F^e)^a_\alpha \mathbf{g}_{ab} (F^e)^b_\beta.$	(2.2.16)

Die Zusammenhänge veranschaulicht das folgende Kommutativdiagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \mathbf{g} & \xrightarrow{v_{\triangleright}^e} & \mathbf{c}^e & \xrightarrow{v_{\triangleright}^e} & \mathbf{c} \\
 & & & \uparrow & \mathbf{F}_{\triangleright}^e & \uparrow & \mathbf{R}_{\triangleright}^e & \uparrow & \mathbf{F}_{\triangleright}^e \\
 & & & \mathbf{c}^e & \xrightarrow{u_{\triangleright}^e} & \mathbf{g} & \xrightarrow{u_{\triangleright}^e} & \mathbf{c}^d & \xrightarrow{v_{\triangleright}^e} & \mathbf{c} \\
 & & & \uparrow & \mathbf{F}_{\triangleright}^d & \uparrow & \mathbf{R}_{\triangleright}^d & \uparrow & \mathbf{F}_{\triangleright}^d \\
 & & & \mathbf{c}^e & \xrightarrow{v_{\triangleright}^d} & \mathbf{g} & \xrightarrow{v_{\triangleright}^d} & \mathbf{c}^d & \xrightarrow{v_{\triangleright}^d} & \mathbf{c} \\
 & & & \uparrow & \mathbf{F}_{\triangleright}^d & \uparrow & \mathbf{R}_{\triangleright}^d & \uparrow & \mathbf{F}_{\triangleright}^d \\
 & & & \mathbf{C} & \xrightarrow{U_{\triangleright}^d} & \mathbf{C}^d & \xrightarrow{U_{\triangleright}^d} & \mathbf{G} & \xrightarrow{U_{\triangleright}^d} & \mathbf{C}
 \end{array}
 \tag{2.2.17}$$

Aus dem Vergleich der Metriken innerhalb einer Konfiguration ergeben sich mit Hilfe von (2.2.17) die folgenden elastischen, Schädigungs- und totalen Verzerrungsmaße

$$\bar{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{c}}^e - \bar{\mathbf{c}}^d), \quad \bar{\mathbf{e}}^d = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{g}} - \bar{\mathbf{c}}^d), \quad \bar{\mathbf{e}}^e = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{c}}^e - \bar{\mathbf{g}}), \quad (2.2.18)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}), \quad \mathbf{E}^d = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^d - \mathbf{G}), \quad \mathbf{E}^e = (\mathbf{F}^d)^\triangleleft(\bar{\mathbf{e}}^e), \quad (2.2.19)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{c}), \quad \mathbf{e}^d = (\mathbf{F}^e)^\triangleright(\bar{\mathbf{e}}^d), \quad \mathbf{e}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{c}^e), \quad (2.2.20)$$

die die folgenden additiven Aufspaltungen der totalen Verzerrung in elastische und Schädigungsanteile liefert

$$\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{e}}^e + \bar{\mathbf{e}}^d, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^d, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^d. \quad (2.2.21)$$

Hierbei ist anzumerken, daß lediglich (2.2.21)₁ eine exakte Aufspaltung in rein elastische und rein schädigungsinduzierte Anteile liefert, da \mathbf{e}^d und \mathbf{E}^e keine rein schädigungsinduzierten bzw. rein elastischen Verzerrungsmaße sind. Deshalb erscheint es günstig, $\bar{\mathbf{e}}^e$ und $\bar{\mathbf{e}}^d$ als primäre Variablen für konstitutive Gesetze zu verwenden. Eine anschließendes push-forward ergibt dann die Gleichungen in der beobachtbaren, momentanen Konfiguration, ein pull-back überführt die Gleichungen in die ungeschädigte Referenzkonfiguration.

2.2.4 Geschwindigkeit und Raten

Die totale, elastische und schädigungsinduzierte Geschwindigkeit werden analog zu (1.1.29) durch die Zeitableitung der Bewegung und darauffolgende Transformation des Fußpunktes des Geschwindigkeitsvektors definiert

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V} \circ \chi_t^{-1} = \mathbf{V}(\chi_t^{-1}(\mathbf{x}), t); \quad \mathbf{V}^\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \chi_t^\alpha(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}}, \quad (2.2.22)$$

$$\mathbf{v}^e(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}^e \circ \chi_t^{e-1} = \bar{\mathbf{v}}^e(\chi_t^{e-1}(\mathbf{x}), t); \quad (\bar{\mathbf{v}}^e)^\alpha = \frac{\partial}{\partial t} (\chi_t^e)^\alpha(\bar{\mathbf{x}}, t)|_{\bar{\mathbf{x}}}, \quad (2.2.23)$$

$$\bar{\mathbf{v}}^d(\bar{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{V}^d \circ \chi_t^{d-1} = \mathbf{V}^d(\chi_t^{d-1}(\bar{\mathbf{x}}), t); \quad (\mathbf{V}^d)^\alpha = \frac{\partial}{\partial t} (\chi_t^d)^\alpha(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}}. \quad (2.2.24)$$

Aus der Zerlegung der Abbildungen (2.2.3) gewinnt man dann die folgende Zerlegung der Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^e + \mathbf{F}_\triangleright^e(\bar{\mathbf{v}}^d) = \mathbf{v}^e + \mathbf{F}^e \bar{\mathbf{v}}^d, \quad (2.2.25)$$

woraus ersichtlich wird, daß die Geschwindigkeitsvektoren der Momentankonfiguration nicht additiv in rein elastische und rein schädigungsinduzierte Teile

aufspaltbar sind, da der Vektor $\mathbf{F}^e \bar{\mathbf{v}}^d$ offensichtlich von der elastischen Deformation abhängt. Durch ein pull-back auf die Zwischenkonfiguration ergibt sich wiederum eine additive Aufspaltung

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{F}^{e\triangleleft}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}^{e\triangleleft}(\mathbf{v}^e) + \bar{\mathbf{v}}^d = \mathbf{F}^{e-1} \mathbf{v}^e + \bar{\mathbf{v}}^d. \quad (2.2.26)$$

Eine ähnliche Aufspaltung gelingt auch für den Geschwindigkeitsgradienten. Für diesen erhält man in der Momentankonfiguration

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^d \mathbf{F}^{d-1} \mathbf{F}^{e-1} = \mathbf{l}^e + \mathbf{F}_{\triangleright}^e(\bar{\mathbf{l}}^d), \quad (2.2.27)$$

was keine natürliche additive Aufspaltung darstellt. In der Zwischenkonfiguration hingegen

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{F}^{e\triangleleft}(\mathbf{l}^e) + \bar{\mathbf{l}}^d = \bar{\mathbf{l}}^e + \bar{\mathbf{l}}^d = \mathbf{F}^{e-1} \dot{\mathbf{F}}^e + \dot{\mathbf{F}}^d \mathbf{F}^{d-1} \quad (2.2.28)$$

gelingt die gesuchte Zerlegung.

Die Lie-Ableitung bezüglich des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{v} bzw. Deformationsgradienten \mathbf{F} war oben durch

$$\mathfrak{L}\mathbf{t} = \mathbf{F}_{\triangleright} \left(\overline{\dot{\mathbf{F}}^{\triangleleft}(\mathbf{t})} \right) \quad (2.2.29)$$

definiert worden. Auf ähnliche Weise kann die Lie-Ableitung von Tensoren der Zwischenkonfiguration $\bar{\mathbf{t}}$ durch push- und pull-Operationen mit Hilfe von \mathbf{F}^d definiert werden

$$\bar{\mathfrak{L}}\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{F}_{\triangleright}^d \left(\overline{\dot{\mathbf{F}}^{d\triangleleft}(\bar{\mathbf{t}})} \right). \quad (2.2.30)$$

Die Lie-Ableitungen kann über die Geschwindigkeitsgradienten mit der materiellen Zeitableitung verknüpft werden (MARDEN & HUGHES 1983). Für die Lie-Ableitung eines Tensors $\mathbf{t} \in \mathcal{T}_q^p \mathcal{P}_t$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}\mathbf{t})^{\alpha\beta\dots e}_{fg\dots h} &= \dot{\mathbf{t}}^{\alpha\beta\dots e}_{fg\dots h} - \mathbf{t}^{\text{lb}\dots e}_{fg\dots h} \mathbf{l}^{\alpha}_{\text{l}} - (\text{alle hochgestellten Indizes}) \\ &\quad + \mathbf{t}^{\alpha\beta\dots e}_{\text{lg}\dots h} \mathbf{l}^{\text{l}}_{\text{f}} - (\text{alle tiefgestellten Indizes}). \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

In der Zwischenkonfiguration erhält man analog für einen Tensor $\bar{\mathbf{t}} \in \mathcal{T}_q^p \bar{\mathcal{P}}_t$

$$\begin{aligned} (\bar{\mathfrak{L}}\bar{\mathbf{t}})^{\alpha\beta\dots\varepsilon}_{\varphi\gamma\dots\eta} &= \dot{\bar{\mathbf{t}}}^{\alpha\beta\dots\varepsilon}_{\varphi\gamma\dots\eta} - \bar{\mathbf{t}}^{\lambda\beta\dots\varepsilon}_{\varphi\gamma\dots\eta} (\bar{\mathbf{l}}^d)^{\alpha}_{\lambda} - (\text{alle hochgestellten Indizes}) \\ &\quad + \bar{\mathbf{t}}^{\alpha\beta\dots\varepsilon}_{\lambda\gamma\dots\eta} (\bar{\mathbf{l}}^d)^{\lambda}_{\varphi} - (\text{alle tiefgestellten Indizes}). \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

Die totale Verzerrungsrate der drei Konfigurationen spaltet man mit Hilfe dieser Lie-Ableitungen wie folgt auf:

$$\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{e}}^e + \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{e}}^d = \bar{\mathbf{d}}^e + \bar{\mathbf{d}}^d, \quad (2.2.33)$$

$$\mathbf{d} = \mathcal{L}\mathbf{e} = \mathcal{L}\mathbf{e}^e + \mathcal{L}\mathbf{e}^d = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^d, \quad (2.2.34)$$

$$\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^d = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^d, \quad (2.2.35)$$

wodurch deutlich wird, daß eine natürliche Aufspaltung in elastische und schädigungsinduzierte Anteile über die Lie-Rate der Verzerrungsmaße nicht gelingt, da $\bar{\mathbf{d}}^e = \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{e}}^e$ von der schädigungsinduzierten Geschwindigkeit $\bar{\mathbf{v}}^d$ abhängt. Wenn die elastische Verzerrungsrate $\bar{\mathbf{d}}^e$ allerdings als symmetrischer Anteil von $\bar{\mathbf{I}}^e$ ausgedrückt wird

$$\bar{\mathbf{d}}^e = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{g}}\bar{\mathbf{I}}^e + \bar{\mathbf{I}}^{eT}\bar{\mathbf{g}}), \quad (2.2.36)$$

so hängt diese nur vom elastischen Deformationsgradienten und seiner Rate ab. Dasselbe gilt analog für

$$\bar{\mathbf{d}}^d = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{g}}\bar{\mathbf{I}}^d + \bar{\mathbf{I}}^{dT}\bar{\mathbf{g}}), \quad (2.2.37)$$

obwohl auch $\bar{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{e}}^d$ vorher schon nur den Schädigungs-Deformationsgradienten und seine Rate enthielt.

Für die Herleitung der konstitutiven Gleichungen sind die folgenden Beziehungen nützlich, die man direkt aus (2.2.29) bzw. (2.2.30) und (2.2.11) erhält

$$\mathcal{L}\mathbf{g} = 2\mathbf{d}, \quad \mathcal{L}\mathbf{c} = 0, \quad \mathcal{L}\mathbf{c}^e = 2\mathbf{d}^d, \quad (2.2.38)$$

$$\bar{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{g}} = 2\bar{\mathbf{d}}^d, \quad \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{c}}^d = 0, \quad \bar{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{c}}^e = 2\bar{\mathbf{d}}. \quad (2.2.39)$$

2.2.5 Bilanzgleichungen

Um den thermodynamischen Betrachtungen des nächsten Abschnittes einen konsistenten Rahmen zu bieten, werden hier die Bilanzgleichungen (Massenerhaltung, Impulssatz, Drallsatz, Energieerhaltung, Entropieproduktion), sowie ihre lokalisierten Formen für alle drei Konfigurationen angegeben. Für die aktuelle Konfiguration war in Abschnitt 1.2 der folgende Satz von Gleichungen angegeben worden:

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho(\mathbf{x}, t) dv = 0 \quad (\text{Masse}), \quad (2.2.40)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \dot{\mathbf{x}} \rho dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{b} \rho dv + \int_{\partial \phi_t(\mathcal{U})} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} da \quad (\text{Impuls}), \quad (2.2.41)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} (\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) \rho dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} (\mathbf{x} \times \mathbf{b}) \rho dv + \int_{\partial \phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) da \quad (\text{Drall}), \quad (2.2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \left(e + \frac{1}{2} \langle \dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle \right) \rho dv &= \int_{\phi_t(\mathcal{U})} (\mathbf{r} + \langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{x}} \rangle) \rho dv \\ &+ \int_{\partial \phi_t(\mathcal{U})} (\langle \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \dot{\mathbf{x}} \rangle - \mathbf{q} \mathbf{n}) da \quad (\text{Energie}), \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \eta \rho dv \geq \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \frac{\mathbf{r}}{\theta} \rho dv - \int_{\partial \phi_t(\mathcal{U})} \frac{\mathbf{q} \mathbf{n}}{\theta} da \quad (\text{Entropie}), \quad (2.2.44)$$

sowie in lokalisierter Form

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad (\text{Masse}), \quad (2.2.45)$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{x}} \quad (\text{Impuls}), \quad (2.2.46)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (\text{Drall}), \quad (2.2.47)$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r = \rho \dot{e} + \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (\text{Energie}), \quad (2.2.48)$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \rho \dot{\psi} \geq \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta + \rho \eta \dot{\theta} \quad (\text{Entropie}), \quad (2.2.49)$$

$$\psi = e - \eta \theta \quad (\text{Freie Energiedichte}). \quad (2.2.50)$$

Der Punkt über einer Größe der Momentankonfiguration bedeutet deren materielle Zeitableitung bezüglich der Momentankonfiguration

$$\dot{(\cdot)} = \partial / \partial t (\cdot) + \mathbf{v} \cdot \nabla (\cdot). \quad (2.2.51)$$

Durch pull-back Operationen können diese Gleichungen bezüglich der ungeschädigten Referenzkonfiguration angegeben werden. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß das Volumen- bzw. Flächenelement auch zurücktransformiert wird (vgl. Abschnitt 1.3.6). Der Massenerhaltungssatz bleibt in obiger Form

bestehen, das anfängliche Dichtefeld $\rho_0(\mathbf{X})$ wird auf dem Gebiet $\phi_0(\mathcal{U})$ vorgeschrieben.

$$\int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{v} = \int_{\phi_0(\mathcal{U})} \rho_0(\mathbf{X}) dV \quad (\text{Masse}), \quad (2.2.52)$$

$$\int_{\phi_0(\mathcal{U})} \ddot{\chi}_t \rho_0 dV = \int_{\phi_0(\mathcal{U})} \mathbf{B} \rho_0 dV + \int_{\partial\phi_0(\mathcal{U})} \mathbf{P} \mathbf{N} dA \quad (\text{Impuls}), \quad (2.2.53)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_0(\mathcal{U})} \mathbf{X} \times \mathbf{V} \rho_0 dV = \int_{\phi_0(\mathcal{U})} (\mathbf{X} \times \mathbf{B}) \rho_0 dV + \int_{\partial\phi_0(\mathcal{U})} \mathbf{X} \times (\mathbf{P} \mathbf{N}) dA \quad (\text{Drall}), \quad (2.2.54)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\phi_0(\mathcal{U})} \left(E + \frac{1}{2} \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle \right) \rho_0 dV &= \int_{\phi_0(\mathcal{U})} (R + \langle \mathbf{B}, \mathbf{V} \rangle) \rho_0 dV \\ &+ \int_{\partial\phi_0(\mathcal{U})} (\langle \mathbf{P} \mathbf{N}, \mathbf{V} \rangle - \mathbf{Q} \mathbf{N}) dA \quad (\text{Energie}), \end{aligned} \quad (2.2.55)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_0(\mathcal{U})} \eta_0 \rho_0 dV \geq \int_{\phi_0(\mathcal{U})} \frac{R}{\Theta} \rho_0 dV - \int_{\partial\phi_0(\mathcal{U})} \frac{\mathbf{Q} \mathbf{N}}{\Theta} dA \quad (\text{Entropie}). \quad (2.2.56)$$

In lokalisierter Form gilt

$$\rho \dot{J} = \rho_0 \quad (\text{Masse}), \quad (2.2.57)$$

$$\text{Div } \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{B} = \rho_0 \ddot{\chi}_t \quad (\text{Impuls}), \quad (2.2.58)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{S}^T \quad (\text{Drall}), \quad (2.2.59)$$

$$\mathbf{S} : \mathbf{D} + \rho_0 R = \rho_0 \dot{E} + \text{Div } \mathbf{Q} \quad (\text{Energie}), \quad (2.2.60)$$

$$\mathbf{S} : \mathbf{D} - \rho_0 \dot{\Psi} \geq \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \Theta + \rho_0 \eta_0 \dot{\Theta} \quad (\text{Entropie}), \quad (2.2.61)$$

$$\Psi = E - \eta_0 \Theta \quad (\text{Freie Energiedichte}), \quad (2.2.62)$$

wobei die groß geschriebenen skalaren Größen nur ihren Bezugspunkt ändern, z.B. $E(\mathbf{X}, t) = e(\chi_t(\mathbf{X}, t))$. Wichtig für die thermodynamischen Betrachtun-

gen ist die Darstellung der Bilanzgleichungen in der geschädigten Zwischenkonfiguration, die man auf ähnliche Weise gewinnt.

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t^d(\mathcal{U})} \bar{\rho}(\bar{\mathbf{x}}, t) d\bar{v} = 0 \quad (\text{Masse}), \quad (2.2.63)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t^d(\mathcal{U})} \dot{\bar{\mathbf{x}}} \bar{\rho} d\bar{v} = \int_{\phi_t^d(\mathcal{U})} \bar{\mathbf{b}} \bar{\rho} d\bar{v} + \int_{\partial\phi_t^d(\mathcal{U})} \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{n}} d\bar{a} \quad (\text{Impuls}), \quad (2.2.64)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t^d(\mathcal{U})} (\bar{\mathbf{x}} \times \dot{\bar{\mathbf{x}}}) \bar{\rho} d\bar{v} = \int_{\phi_t^d(\mathcal{U})} (\bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{b}}) \bar{\rho} d\bar{v} + \int_{\partial\phi_t^d(\mathcal{U})} \bar{\mathbf{x}} \times (\bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{n}}) d\bar{a} \quad (\text{Drall}), \quad (2.2.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\phi_t^d(\mathcal{U})} (\bar{e} + \frac{1}{2} \langle \dot{\bar{\mathbf{x}}}, \dot{\bar{\mathbf{x}}} \rangle) \bar{\rho} d\bar{v} &= \int_{\phi_t^d(\mathcal{U})} (\bar{r} + \langle \bar{\mathbf{b}}, \dot{\bar{\mathbf{x}}} \rangle) \bar{\rho} d\bar{v} \\ &+ \int_{\partial\phi_t^d(\mathcal{U})} (\langle \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{n}}, \dot{\bar{\mathbf{x}}} \rangle - \bar{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{n}}) d\bar{a} \quad (\text{Energie}), \end{aligned} \quad (2.2.66)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t^d(\mathcal{U})} \bar{\eta} \bar{\rho} d\bar{v} \geq \int_{\phi_t^d(\mathcal{U})} \frac{\bar{r}}{\bar{\theta}} \bar{\rho} d\bar{v} - \int_{\partial\phi_t^d(\mathcal{U})} \frac{\bar{\mathbf{q}} \bar{\mathbf{n}}}{\bar{\theta}} d\bar{a} \quad (\text{Entropie}), \quad (2.2.67)$$

sowie in lokalisierter Form

$$\dot{\bar{\rho}} + \bar{\rho} \overline{\text{div}} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = 0 \quad (\text{Masse}), \quad (2.2.68)$$

$$\overline{\text{div}} \bar{\mathbf{p}} + \bar{\rho} \bar{\mathbf{b}} = \bar{\rho} \ddot{\bar{\mathbf{x}}} \quad (\text{Impuls}), \quad (2.2.69)$$

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{F}^{e-1} \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}^T \mathbf{F}^{e-T} = \bar{\mathbf{s}}^T \quad (\text{Drall}), \quad (2.2.70)$$

$$\bar{\mathbf{s}} : \bar{\mathbf{d}} + \bar{\rho} \bar{r} = \bar{\rho} \dot{\bar{e}} + \overline{\text{div}} \bar{\mathbf{q}} \quad (\text{Energie}), \quad (2.2.71)$$

$$\bar{\mathbf{s}} : \bar{\mathbf{d}} - \bar{\rho} \dot{\bar{\psi}} \geq \frac{1}{\bar{\theta}} \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\nabla} \bar{\theta} + \bar{\rho} \dot{\bar{\eta}} \quad (\text{Entropie}), \quad (2.2.72)$$

$$\bar{\psi} = \bar{e} - \bar{\eta} \bar{\theta} \quad (\text{Freie Energiedichte}). \quad (2.2.73)$$

Hierbei bedeutet der Punkt über einer Größe der Zwischenkonfiguration die materielle Zeitableitung bezüglich dieser Konfiguration:

$$\dot{(\cdot)} = \partial / \partial t (\cdot) + \bar{\mathbf{v}}^p \cdot \bar{\nabla} (\cdot). \quad (2.2.74)$$

Die oben benutzte Kirchhoff-Spannung der Zwischenkonfiguration $\bar{\mathbf{s}}$ hängt mit dem 2.P.-K. und der Kirchhoff-Spannung wie folgt zusammen:

$$\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{F}_{\triangleleft}^{\text{d}}(\mathbf{S}) = \mathbf{F}^{\text{e}\triangleleft}(\boldsymbol{\tau}). \quad (2.2.75)$$

Die Spannung $\bar{\mathbf{p}}$ stellt also einen Tensor vom Typ eines 1.P.-K. in der Zwischenkonfiguration dar.

2.2.6 Freie Energiedichte und konstitutive Gleichungen

Alle konstitutiven Gleichungen für das Material mit spröder Schädigung werden aus der freien Energiedichte abgeleitet. Diese wird in der geschädigten Zwischenkonfiguration postuliert, weil dort die additive Aufspaltung der totalen Verzerrung auf natürliche Weise möglich ist. Betrachtet werden nur isotherme Prozesse, so daß die freie Energiedichte in folgender Form postuliert werden kann

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{\omega}(\bar{\mathbf{c}}^e, \bar{\mathbf{g}}, \bar{\mathbf{c}}^d), \quad (2.2.76)$$

wobei $\bar{\omega}$ die freie Energie pro Einheitsvolumen der Zwischenkonfiguration bedeutet. Diese funktionelle Form stellt sicher, daß $\bar{\omega}$ von der vorhergegangenen Schädigung nur durch den Parameter $\bar{\mathbf{c}}^d = \mathbf{F}_{\triangleright}^{\text{d}}(\mathbf{G})$ abhängt. Die Funktion eines Parameters spielt $\bar{\mathbf{c}}^d$ deshalb, weil seine Rate verschwindet ($\mathcal{L}\bar{\mathbf{c}}^d = 0$) und demzufolge keine thermodynamisch konjugierte Kraft (treibende Kraft) auf dieses Maß existiert. Die Aufnahme von $\bar{\mathbf{c}}^d$ in die freie Energiedichte entspricht der Aufnahme der Metrik \mathbf{G} in die freie Energiedichte, die benötigt wird um die Invarianten z.B. des Elastizitätstensors zu generieren. Auf diese Art und Weise übernimmt $\bar{\mathbf{c}}^d$ die Rolle eines Struktur tensors, der von BOEHLER eingeführt wurde (BOEHLER & SAWCZUK 1976; BOEHLER 1977; BOEHLER 1987A; BOEHLER 1987B; BOEHLER 1987C), und den BONGMBA (2001) und BRUHNS & BONGMBA (2001) benutzt haben, um ein anisotropes Materialgesetz für plastische Schädigung zu formulieren. Der Einfluß der Temperatur auf das Schädigungsverhalten soll hier vernachlässigt werden, so daß nur isotherme Prozesse betrachtet werden, für die die Clausius-Duhem Ungleichung (2.2.72) sich zu

$$\bar{\mathbf{s}} : \bar{\mathbf{d}} - \bar{\rho} \dot{\bar{\psi}} \geq 0 \quad (2.2.77)$$

vereinfacht. Die Rate der freien Energie erhält man wie folgt

$$\dot{\bar{\psi}} = \bar{\mathfrak{L}}\bar{\psi} = \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{\omega} \bar{\mathbf{g}}^{-1} : \bar{\mathbf{d}}^d + \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\mathbf{c}}^e} : \bar{\mathfrak{L}}\bar{\mathbf{c}}^e + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\mathbf{g}}} : \bar{\mathfrak{L}}\bar{\mathbf{g}} \right), \quad (2.2.78)$$

wobei der erste Term aus

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{L}} \frac{1}{\bar{\rho}} &= \rho_0 \overline{\dot{\det \mathbf{F}^d}} = \rho_0 \frac{\partial \det \mathbf{F}^d}{\partial (\mathbf{F}^d)_{\alpha A}} (\dot{\mathbf{F}}^d)_{\alpha A} = \rho_0 \det \mathbf{F}^d (\mathbf{F}^{d-1})_{\alpha A}^A (\dot{\mathbf{F}}^d)_{\alpha A} \\ &= \frac{1}{\bar{\rho}} (\bar{\mathbf{l}}^d)_{\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{\mathbf{g}}^{\alpha\beta} (\bar{\mathbf{d}}^d)_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.2.79)$$

gewonnen wird. Die Rate $\bar{\mathfrak{L}}\bar{\mathbf{c}}^d = \mathbf{F}_{\triangleright}^d(\dot{\mathbf{G}})$ verschwindet, so daß sie bei der Herleitung der konstitutiven Gleichungen keine Rolle spielt. Nachdem man (2.2.78) in (2.2.77) einsetzt und von (2.2.38) Gebrauch macht, erhält man

$$\left(2\bar{\rho} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{c}}^e} - \bar{\mathbf{s}} \right) : \bar{\mathbf{d}} + \left(\bar{\omega} \bar{\mathbf{g}}^{-1} + 2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{\mathbf{g}}} \right) : \bar{\mathbf{d}}^d \leq 0. \quad (2.2.80)$$

Wenn nun die in Abschnitt 1.3.4 vorgestellte Prozedur von COLEMAN & NOLL (1963) benutzt wird, gewinnt man die Spannungs-Dehnungs-Beziehung zu

$$\bar{\mathbf{s}} = 2\bar{\rho} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{c}}^e}, \quad (2.2.81)$$

mit $\bar{\mathbf{s}}$ der Kirchhoff-Spannung der Zwischenkonfiguration. Diese Beziehung in (2.2.80) eingesetzt, führt dann auf die Dissipationsrate

$$\bar{\mathfrak{D}}^d = \bar{\mathbf{k}}^d : \bar{\mathbf{d}}^d \geq 0, \quad (2.2.82)$$

$\bar{\mathfrak{D}}^d$ wird Schädigungsdissipationsrate genannt. $\bar{\mathbf{k}}^d$ bezeichnet die treibende Kraft der Schädigung

$$\bar{\mathbf{k}}^d = \bar{\mathbf{g}}^{-1} \bar{\boldsymbol{\mu}}, \quad (2.2.83)$$

die im wesentlichen der Eshelby-Tensor der Zwischenkonfiguration $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ ist (ESHELBY 1951; MAUGIN 1993)

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = -\bar{\rho} \bar{\psi} \bar{\mathbf{i}} + \bar{\mathbf{c}}^e \bar{\mathbf{s}}. \quad (2.2.84)$$

Die detaillierte Herleitung der treibenden Kraft wird im Anhang A angegeben.

Das Prinzip der maximalen Dissipation wird dann wie folgt definiert

$$\bar{\mathbf{k}}^d = \partial_{\bar{\mathbf{a}}^d} \bar{\mathcal{D}}^d(\bar{\mathbf{d}}^d, \bar{\mathbf{g}}), \quad (2.2.85)$$

wobei das Symbol ∂ Moreau's Sub-Differential bezeichnet (vgl. Abschnitt 1.3.5). Durch eine Fenchel-Transformation ergibt sich das zu $\bar{\mathcal{D}}^d$ konjugierte Schädigungspotential $\bar{\phi}^d$, und das Fließgesetz kann in der üblichen Form

$$\bar{\mathbf{d}}^d = \partial_{\bar{\mathbf{k}}^d} \bar{\phi}^d(\bar{\mathbf{k}}^d, \bar{\mathbf{g}}) = \dot{\lambda}^d \frac{\partial \bar{\phi}^d}{\partial \bar{\mathbf{k}}^d}, \quad (2.2.86)$$

angegeben werden, mit $\dot{\lambda}^d$ dem Schädigungsmultiplikator.

Durch Anwendung des Prinzips der maximalen Dissipation wird ein Stoffgesetz mit der Beschränkung auf assoziative Fließregeln formuliert. Für den Zusammenhang der Schädigung mit den weiter unten in Kapitel 3 beschriebenen Gleichungen der Rißausbreitung und vor allem, um einen thermodynamisch sinnvollen Mikro-Makro-Übergang zu vollziehen, ist diese Beschränkung wesentlich. Ziel der weiter unten angestellten mikromechanischen Betrachtungen auf Grundlage der Bruchmechanik ist es, das Potential $\bar{\phi}^d$ und daraus eine Evolutionsgesetz der Schädigung, physikalisch sinnvoll herzuleiten.

2.2.7 Elastische Eigenschaften des geschädigten Materials

Freie Energiedichte für kleine elastische Deformationen

Um den Einfluß der Schädigung auf die elastischen Eigenschaften eines Materials zu untersuchen, ist es, insbesondere für die hier betrachtete Klasse von Materialien, angemessen ein linear elastisches Verhalten vorauszusetzen. Die freie Energiedichte wird über den Entlastungsvorgang eines geschädigten Körpers konstruiert. Da der Körper im unbelasteten Zustand spannungsfrei ist und keine bleibenden Verformungen aufweist und der Entlastungsvorgang ein rein elastischer Prozeß ist, kann die freie Energiedichte als quadratische Form bezüglich der *totalen* Dehnung durch

$$\bar{\psi} = \frac{1}{2\bar{\rho}} \bar{\mathbf{e}} : \bar{\mathbf{C}}^e : \bar{\mathbf{e}} \quad (2.2.87)$$

ausdrückt werden. Dies ist im Gegensatz zu elasto-plastischen Modellen mit linearer Elastizität, bei denen an dieser Stelle eine quadratische Form der ela-

stischen Verzerrungen Anwendung findet. Aus der Forderung der freien Energiedichte als quadratische Form resultiert ein Schädigungsanteil

$$\bar{\psi}^d = \bar{\psi}(\bar{\mathbf{e}}^e = 0) = \frac{1}{2\bar{\rho}} \bar{\mathbf{e}}^d : \bar{\mathbf{C}}^e : \bar{\mathbf{e}}^d, \quad (2.2.88)$$

der eine reversible Energie darstellt, die in einer Änderung der inneren Struktur des Materials gespeichert wird. Aus (2.2.81) gewinnt man die Spannungs-Dehnungs-Beziehung zu

$$\bar{\mathbf{s}} = \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{e}}^e} = \bar{\mathbf{C}}^e : \bar{\mathbf{e}}, \quad (2.2.89)$$

so daß eine Entlastung des Körpers in einen spannungsfreien Zustand auch ein Verschwinden der totalen Verzerrungen zur Folge hat.

Geschädigter Elastizitätstensor

Zur Vereinfachung der Betrachtungen wird angenommen das ungeschädigte Material sei isotrop, so daß der Elastizitätstensor der ungeschädigten Referenzkonfiguration mit den Lamé'schen Konstanten λ und μ als

$$\mathbf{C}_0^e = \lambda \mathbf{G}^{-1} \otimes \mathbf{G}^{-1} + \mu \left(\mathbf{G}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{G}^{-1} + \mathbf{G}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{G}^{-1} \right) \quad (2.2.90)$$

geschrieben werden kann, bzw. in Indexnotation

$$(\mathbf{C}_0^e)^{ABCD} = \lambda G^{AB} G^{CD} + \mu (G^{AC} G^{BD} + G^{AD} G^{BC}). \quad (2.2.91)$$

Den geschädigten Elastizitätstensor gewinnt man daraus durch ein push-forward mit dem Schädigungs-Deformationsgradienten

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}^e &= \mathbf{F}_{\triangleright}^d (\mathbf{C}_0^e) \\ &= \lambda \mathbf{F}_{\triangleright}^d \mathbf{G}^{-1} \otimes \mathbf{F}_{\triangleright}^d \mathbf{G}^{-1} + \mu \left(\mathbf{F}_{\triangleright}^d \mathbf{G}^{-1} \bar{\otimes} \mathbf{F}_{\triangleright}^d \mathbf{G}^{-1} + \mathbf{F}_{\triangleright}^d \mathbf{G}^{-1} \underline{\otimes} \mathbf{F}_{\triangleright}^d \mathbf{G}^{-1} \right). \end{aligned} \quad (2.2.92)$$

Mit Hilfe von (2.2.11) und der Vertauschung von push-forward und Inversion (1.1.59) ergibt sich als push-forward der inversen Metrik der (geschädigte) Finger-Tensor der Zwischenkonfiguration

$$\mathbf{F}_{\triangleright}^d \mathbf{G}^{-1} = (\mathbf{F}_{\triangleright}^d \mathbf{G})^{-1} = \bar{\mathbf{c}}^{d-1} = \bar{\mathbf{b}}^d. \quad (2.2.93)$$

Hiermit erhält man den geschädigten Elastizitätstensor als

$$\bar{\mathbb{C}}^e = \lambda \bar{\mathbf{b}}^d \otimes \bar{\mathbf{b}}^d + \mu \left(\bar{\mathbf{b}}^d \bar{\otimes} \bar{\mathbf{b}}^d + \bar{\mathbf{b}}^d \underline{\otimes} \bar{\mathbf{b}}^d \right) \quad (2.2.94)$$

bzw. in Indexnotation

$$(\bar{\mathbb{C}}^e)^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda (\bar{\mathbf{b}}^d)^{\alpha\beta} (\bar{\mathbf{b}}^d)^{\gamma\delta} + \mu \left((\bar{\mathbf{b}}^d)^{\alpha\gamma} (\bar{\mathbf{b}}^d)^{\beta\delta} + (\bar{\mathbf{b}}^d)^{\alpha\delta} (\bar{\mathbf{b}}^d)^{\beta\gamma} \right). \quad (2.2.95)$$

Dies macht einen Vorteil des hier vorgestellten Rahmens, gegenüber klassischen Schädigungsmodellen deutlich. In dem vorgestellten Rahmen ist man durch ein einfaches push-forward mit Hilfe des Schädigungs-Deformationsgradienten in der Lage, den geschädigten Elastizitätstensor zu gewinnen, ohne ein Äquivalenzprinzip postulieren zu müssen. Eine ähnliche Form des geschädigten Elastizitätstensors erhielten CAROL, RIZZI & WILLAM (2001) durch die Einführung einer Symmetrisierung der Effektivspannung nach CORDEBOIS & SIDOROFF (1982) und vor ihnen VALANIS (1990) über die Annahme der freien Energiedichte in einer speziellen Form (zur Diskussion dieser Ansätze siehe Abschnitt 2.2.8). Allerdings wurde in beiden Arbeiten keine Schädigungsabbildung eingeführt. In der oben, bei der Diskussion der klassischen Schädigungsmodelle, verwendeten Notation kann man die Ergebnisse von VALANIS (1990) und CAROL, RIZZI & WILLAM (2001) ausdrücken durch:

$$\bar{\mathbb{C}}^e = \lambda (1 - \mathcal{D}) \otimes (1 - \mathcal{D}) + \mu \left((1 - \mathcal{D}) \bar{\otimes} (1 - \mathcal{D}) + (1 - \mathcal{D}) \underline{\otimes} (1 - \mathcal{D}) \right). \quad (2.2.96)$$

Notation von Tensoren vierter Stufe

Um die Eigenschaften des geschädigten Elastizitätstensor zu untersuchen, ist es vorteilhaft in einem Rahmen zu arbeiten, der von MEHRABADI & COWIN (1990) vorgeschlagen wurde, um Symmetrieeigenschaften anisotroper Materialien zu untersuchen.

Der dreidimensionale Elastizitätstensor vierter Stufe besitzt die Symmetrien

$$(\bar{\mathbb{C}}^e)^{\alpha\beta\gamma\delta} = (\bar{\mathbb{C}}^e)^{\beta\alpha\gamma\delta}; \quad (\bar{\mathbb{C}}^e)^{\alpha\beta\gamma\delta} = (\bar{\mathbb{C}}^e)^{\alpha\beta\delta\gamma}; \quad (\bar{\mathbb{C}}^e)^{\alpha\beta\gamma\delta} = (\bar{\mathbb{C}}^e)^{\gamma\delta\alpha\beta}, \quad (2.2.97)$$

die folgen, wenn der Spannungstensor symmetrisch ist ((2.2.97)₁), der Dehnungstensor symmetrisch ist ((2.2.97)₂), bzw. wenn die thermodynamische

Forderung, daß das Material für einen geschlossenen Lastpfad keine Arbeit leistet ((2.2.97)₃), erfüllt ist. Deshalb hat der Elastizitätstensor nur 21 unabhängige Komponenten, die die jeweils 6 unabhängigen Komponenten des Spannungs- und Dehnungstensors verbinden. Man kann also (2.2.89), zunächst in der Standard-(Voigt)-Notation,

$$\begin{bmatrix} \bar{s}_{11} \\ \bar{s}_{22} \\ \bar{s}_{33} \\ \bar{s}_{23} \\ \bar{s}_{13} \\ \bar{s}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}^{e1111} & \bar{C}^{e1122} & \bar{C}^{e1133} & \bar{C}^{e1123} & \bar{C}^{e1113} & \bar{C}^{e1112} \\ \bar{C}^{e2211} & \bar{C}^{e2222} & \bar{C}^{e2233} & \bar{C}^{e2223} & \bar{C}^{e2213} & \bar{C}^{e2212} \\ \bar{C}^{e3311} & \bar{C}^{e3322} & \bar{C}^{e3333} & \bar{C}^{e3323} & \bar{C}^{e3313} & \bar{C}^{e3312} \\ \bar{C}^{e2311} & \bar{C}^{e2322} & \bar{C}^{e2333} & \bar{C}^{e2323} & \bar{C}^{e2313} & \bar{C}^{e2312} \\ \bar{C}^{e1311} & \bar{C}^{e1322} & \bar{C}^{e1333} & \bar{C}^{e1323} & \bar{C}^{e1313} & \bar{C}^{e1312} \\ \bar{C}^{e1211} & \bar{C}^{e1222} & \bar{C}^{e1233} & \bar{C}^{e1223} & \bar{C}^{e1213} & \bar{C}^{e1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_{11} \\ \bar{e}_{22} \\ \bar{e}_{33} \\ 2\bar{e}_{23} \\ 2\bar{e}_{13} \\ 2\bar{e}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.2.98)$$

die Spannungen und Dehnungen als Vektoren und den Elastizitätstensor als Matrix darstellen. Die hier involvierte Matrix erfüllt nicht die Transformationsregeln eines Tensors zweiter Stufe. Für die Notation nach WALPOLE (1984)

$$\begin{bmatrix} \bar{s}_{11} \\ \bar{s}_{22} \\ \bar{s}_{33} \\ 2^{\frac{1}{2}}\bar{s}_{23} \\ 2^{\frac{1}{2}}\bar{s}_{13} \\ 2^{\frac{1}{2}}\bar{s}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}^{e1111} & \bar{C}^{e1122} & \bar{C}^{e1133} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e1123} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e1113} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e1112} \\ \bar{C}^{e2211} & \bar{C}^{e2222} & \bar{C}^{e2233} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e2223} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e2213} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e2212} \\ \bar{C}^{e3311} & \bar{C}^{e3322} & \bar{C}^{e3333} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e3323} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e3313} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e3312} \\ 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e2311} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e2322} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e2333} & 2\bar{C}^{e2323} & 2\bar{C}^{e2313} & 2\bar{C}^{e2312} \\ 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e1311} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e1322} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e1333} & 2\bar{C}^{e1323} & 2\bar{C}^{e1313} & 2\bar{C}^{e1312} \\ 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e1211} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e1222} & 2^{\frac{1}{2}}\bar{C}^{e1233} & 2\bar{C}^{e1223} & 2\bar{C}^{e1213} & 2\bar{C}^{e1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{e}_{11} \\ \bar{e}_{22} \\ \bar{e}_{33} \\ 2^{\frac{1}{2}}\bar{e}_{23} \\ 2^{\frac{1}{2}}\bar{e}_{13} \\ 2^{\frac{1}{2}}\bar{e}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.2.99)$$

hingegen haben MEHRABADI & COWIN (1990) gezeigt, daß diese 6×6 Matrix die Komponenten eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe im sechsdimensionalen Raum sind, so daß (2.2.89) als tensorielle Gleichung mit Vektoren und Tensoren im sechsdimensionalen Raum geschrieben werden kann

$$\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{C}}^e : \hat{\mathbf{e}}. \quad (2.2.100)$$

Symmetrien des geschädigten Elastizitätstensors

Die Symmetrien des geschädigten Elastizitätstensors lassen sich anhand seiner Eigenwerte und Eigentensoren untersuchen. Mit Hilfe der Darstellung (2.2.100) gelingt dies auf einfache Art und Weise, da, wie MEHRABADI & COWIN (1990) gezeigt haben, die Eigenwerte von $\hat{\mathbf{C}}^e$ und $\bar{\mathbf{C}}^e$ identisch sind, und den sechsdimensionalen Eigenvektoren über (2.2.99) dreidimensionale Eigentensoren zugeordnet werden können.

Untersucht wird also das Eigenwertproblem, das entsteht, wenn man nach Dehnungszuständen sucht, für die die Spannungen und Dehnungen kollinear sind

$$\bar{\mathbf{s}} = \Lambda \bar{\mathbf{e}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{s}} = \Lambda \hat{\mathbf{e}}. \quad (2.2.101)$$

Dies führt auf

$$\left(\hat{\mathbf{C}}^e - \Lambda \hat{\mathbf{I}} \right) \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{0}, \quad (2.2.102)$$

wobei $\hat{\mathbf{I}}$ den Identitätstensor im sechsdimensionalen Raum bezeichnet. Nicht-triviale Lösungen dieses Problems findet man bekanntermaßen durch

$$\det \left(\hat{\mathbf{C}}^e - \Lambda \hat{\mathbf{I}} \right) = 0. \quad (2.2.103)$$

Wenn im Eigen-Koordinatensystem des geschädigten Finger-Tensors $\bar{\mathbf{b}}^d$ gearbeitet wird, kann man diesen in Diagonalform darstellen

$$[\bar{\mathbf{b}}^d] = \begin{bmatrix} b_1 & & & & & \\ & b_2 & & & & \\ & & b_3 & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}. \quad (2.2.104)$$

und die sechsdimensionalen Komponenten des geschädigten Elastizitätstensors ergeben sich zu

$$[\hat{\mathbf{C}}^e] = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)b_1^2 & \lambda b_1 b_2 & \lambda b_1 b_3 & 0 & 0 & 0 \\ & (\lambda + 2\mu)b_2^2 & \lambda b_2 b_3 & 0 & 0 & 0 \\ & & (\lambda + 2\mu)b_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu b_2 b_3 & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & 2\mu b_1 b_3 & 0 \\ & & & & & 2\mu b_1 b_2 \end{bmatrix}. \quad (2.2.105)$$

Offensichtlich sind die letzten drei Eigenwerte von $\hat{\mathbf{C}}^e$

$$\Lambda_4 = 2\mu b_2 b_3; \quad \Lambda_5 = 2\mu b_1 b_3; \quad \Lambda_6 = 2\mu b_1 b_2. \quad (2.2.106)$$

Die verbleibenden drei Eigenwerte werden mit Hilfe der sich aus der oberen linken 3×3 Unterdeterminante ergebenden charakteristischen Gleichung (ein Polynom 3. Grades in Λ) zu

$$\Lambda_i = \frac{1}{3} \left(I_1 + 2\sqrt{I_1^2 - 3I_2} \cos \left(\frac{1}{3}(\phi - 2\pi i) \right) \right), \quad i = 1 \dots 3. \quad (2.2.107)$$

bestimmt, mit

$$\begin{aligned} I_1 &= ((b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(\lambda + 2\mu)); & (2.2.108) \\ I_2 &= 4\mu(\lambda + \mu)(b_1^2 b_2^2 + b_2^2 b_3^2 + b_3^2 b_1^2); \\ I_3 &= 4\mu^2((3\lambda + 2\mu)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)); \\ \phi &= \cos^{-1} \left(\frac{2I_1^3 - 9I_1 I_2 + 27I_3}{2(I_1^2 - 3I_2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Wenn $b_1 \neq b_2 \neq b_3$, dann sind alle sechs Eigenwerte verschieden und es liegt eine orthotrope Materialsymmetrie vor. Obige Ausdrücke vereinfachen sich erheblich, wenn ein doppelter Eigenwert von $\bar{\mathbf{b}}^d$ vorliegt, z.B. $b_1 = b_2$. Dann liegen nur vier verschiedene Eigenwerte von $\hat{\mathbf{C}}^e$ vor, nämlich

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 2\mu b_1 b_3; & \Lambda_2 &= 2\mu b_1^2; & (2.2.109) \\ \Lambda_{3/4} &= (\lambda + \mu) b_1^2 + \frac{1}{2} \left((\lambda + 2\mu) b_3^2 \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{(2(\lambda + \mu) b_1^2 + (\lambda + 2\mu) b_3^2)^2 - 8\mu(3\lambda + 2\mu) b_1^2 b_3^2} \right) \end{aligned}$$

und das geschädigte Material weist transversal-isotrope Symmetrie auf. Im einfachsten Fall sind alle drei Eigenwerte von $\bar{\mathbf{b}}^d$ identisch ($b_1 = b_2 = b_3$) und $\bar{\mathbf{b}}^d$ reduziert sich auf einen Kugeltensor⁴ und es liegt isotrop geschädigtes Materialverhalten mit den Eigenwerten

$$\Lambda_1 = 2\mu b_1^2; \quad \Lambda_2 = (3\lambda + 2\mu) b_1^2 \quad (2.2.110)$$

vor. Dies sind gerade die Eigenwerte von \mathbf{C}_0^e , mit dem Faktor b_1^2 versehen. Dieser Fall beschreibt die häufig verwendete isotrope Schädigung, bei der z.B. beim Effektivspannungskonzept \mathbf{C}_0^e mit einem skalaren Faktor $(1 - \mathcal{D})$ multipliziert den geschädigten Elastizitätstensor ergibt.

2.2.8 Bezug zur klassischen Schädigungsmechanik

Bei der Motivation des hier vorgestellten Rahmens wurde bereits auf die Unzulänglichkeiten der klassischen Schädigungsmechanik hingewiesen. In diesem Abschnitt soll nun versucht werden mit dem hier eingeführten Schädigungs-Deformationsgradienten und der damit verbundenen ungeschädigten Referenzkonfiguration, eine konsistente Symmetrisierung der

⁴Man kann leicht zeigen, daß dies die einzige Möglichkeit ist, einen fünffachen Eigenwert von $\hat{\mathbf{C}}^e$ zu erhalten

Effektivspannung vorzuschlagen. Darüberhinaus wird ein Bezug zwischen dem Verzerrungsmaß der Schädigung und dem Schädigungstensor zweiter Stufe hergestellt. In diesem Zusammenhang werden auch Schädigungstensenoren höherer Stufe diskutiert.

Symmetrischer Effektivspannungstensor

MURAKAMI & OHNO (1981) führten den Schädigungstensor zweiter Ordnung über die Flächenreduktion ein

$$\tilde{\mathbf{n}}\delta\tilde{A} = (\mathbf{1} - \mathcal{D})\mathbf{n}\delta A. \quad (2.2.111)$$

In der Notation des oben präsentierten Rahmens, in der die ungeschädigte Konfiguration die Referenzkonfiguration und die geschädigte Konfiguration die Zwischenkonfiguration (als Ausgangspunkt der elastischen Deformation) ist, kann man diese Gleichung durch

$$d\mathbf{A} = (\mathbf{1} - \mathcal{D})d\bar{\mathbf{a}} \quad (2.2.112)$$

ausdrücken. Dieselbe Flächentransformation kann mit Hilfe des Schädigungs-Deformationsgradienten über Nanson's Formel

$$d\bar{\mathbf{a}} = \det \mathbf{F}^d \cdot \mathbf{F}^{d-T} d\mathbf{A} \quad (2.2.113)$$

ausgedrückt werden. Ein Vergleich der Gleichungen (2.2.112) und (2.2.113) führt auf den Schädigungs-Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}^d = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{I} - \mathcal{D})}}(\mathbf{I} - \mathcal{D})^T \quad (2.2.114)$$

bzw. den Schädigungstensor

$$\mathcal{D} = \mathbf{1} - \frac{1}{\det \mathbf{F}^d} \mathbf{F}^{dT}. \quad (2.2.115)$$

Daraus ist nun eindeutig erkennbar, daß der Effektivspannungstensor nach MURAKAMI & OHNO (1981)

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{1} - \mathcal{D})^{-1} \quad (2.2.116)$$

in dem hier präsentierten Rahmen dem 1.P-K. entspricht, wenn man kleine elastische Deformationen voraussetzt ($\mathbf{F}^e \approx \mathbf{1}$), so daß der Unterschied zwischen

der Zwischenkonfiguration und der Momentankonfiguration vernachlässigbar wird.

$$\mathbf{P} = \det \mathbf{F}^d \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F}^{d-T} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} (\mathbf{1} - \mathcal{D})^{-1}, \quad (2.2.117)$$

wobei $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ die Cauchy-Spannung der Zwischenkonfiguration ist (die unter obiger Annahme der Cauchy-Spannung entspricht). Die naheliegendste Möglichkeit einen symmetrischen Spannungstensor der ungeschädigten Konfiguration zu erhalten ist dann der 2.-P.K.

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{d-1} \mathbf{P} = \sqrt{\det (\mathbf{1} - \mathcal{D})} \cdot (\mathbf{1} - \mathcal{D})^{-T} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{1} - \mathcal{D})^{-1}, \quad (2.2.118)$$

der auf ähnliche Art von BONGMBA (2001) hergeleitet wurde und bis jetzt keine Anwendung in klassischen Kontinuums-Schädigungs-Modellen fand. Eine zweite Möglichkeit ist die Verwendung von $\boldsymbol{\Sigma}$, dem gewichtetem 2.P.-K.

$$\boldsymbol{\Sigma} = \det \mathbf{F}^{d-1} \cdot \mathbf{S} = \sqrt{\det (\mathbf{1} - \mathcal{D})} \cdot \mathbf{S} = (\mathbf{1} - \mathcal{D})^{-T} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{1} - \mathcal{D})^{-1}, \quad (2.2.119)$$

was für einen symmetrischen Tensor \mathcal{D} der Symmetrisierung nach BETTEN (1986) entspricht.

Schädigungstensoren vierter und achter Stufe

Als allgemeiner Effektivspannungstensor wurde von CHABOCHE (1978) und anderen

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbb{I} - \mathcal{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.2.120)$$

vorgeschlagen und auf diese Art und Weise der Schädigungstensor vierter Stufe eingeführt. Für die drei verschiedenen Effektivspannungen \mathbf{P} , \mathbf{S} und $\boldsymbol{\Sigma}$ ergibt sich hierfür

$$\mathbb{D}_{\mathbf{P}} = \mathbb{I} - \det \mathbf{F}^d (\mathbf{F}^{d-1} \otimes \mathbf{1}), \quad (2.2.121)$$

$$\mathbb{D}_{\mathbf{S}} = \mathbb{I} - \det \mathbf{F}^d (\mathbf{F}^{d-1} \otimes \mathbf{F}^{d-T}), \quad (2.2.122)$$

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbb{I} - (\mathbf{F}^{d-1} \otimes \mathbf{F}^{d-T}). \quad (2.2.123)$$

Die Verwendung anderer Schädigungstensoren vierter Stufe führt somit auf Effektivspannungen, die nicht mehr mit Hilfe einer Abbildung, sondern mittels einer Projektion in die ungeschädigte Konfiguration transformiert werden. Die beobachtbare Abbildung \mathbf{F}^d wäre dann lediglich die räumliche Komponente

solch einer Projektion. Nach Meinung des Autors erfordert eine Kontinuumsmechanik, die Projektionen anstelle von Abbildungen benutzt, einen eigenen, noch zu entwickelnden Rahmen, und ist ohne eine solche Grundlage mathematisch nicht abgesichert. Ähnliches gilt für den von CHABOCHE (1981) vorgeschlagenen Schädigungstensor achter Stufe, der sogar den geschädigten Elastizitätstensor projiziert.

3 Bruchmechanik

Inhaltsverzeichnis

3.1 Grundlagen der Bruchmechanik	85
3.1.1 Physikalische Bruchvorgänge	85
Sprödbbruch	86
Duktiler Bruch	86
Ermüdungsversagen eines Polykristalls	87
3.1.2 Rißnahfeld der linear-elastischen Bruchmechanik	89
3.1.3 Rißausbreitungskriterien	93
3.2 Variationsprinzip der Bruchmechanik	96
3.2.1 Singuläres Feld des abgeknickten Risses	97
3.2.2 Variationsprinzip	99
3.2.3 Definition der treibenden Kraft	101
3.2.4 Gleichgewichtsbedingungen des Risses	103
3.2.5 Berechnung der treibenden Kraft	103
3.3 Simulation der Rißausbreitung	107
3.3.1 2-D Riß in einer unendlichen Scheibe	107
3.3.2 Rißausbreitungssimulation	108

3.1 Grundlagen der Bruchmechanik

3.1.1 Physikalische Bruchvorgänge

Sowohl elastische, als auch bleibende, d.h. plastische Deformationen, die auf atomarer und kristalliner Ebene stattfinden, bewahren den Zusammenhalt der

Materie. Bruch zerstört, *per definitionem*, diesen Zusammenhang durch die Erzeugung von flächen- oder volumenhaften Diskontinuitäten im Material. Er wird auf einer Skala beschrieben, die mindestens der Größenordnung von Kristallen entspricht¹. Die hier betrachteten Mikrorisse sollen deshalb eine Größe in der Ordnung von Mikrometern bis zu hundertstel Millimetern aufweisen. Makrorisse dagegen sollen in der Größenordnung von Millimetern bis hin zur Größe des betrachteten Bauteils liegen². Die zwei Hauptmechanismen des lokalen Bruchs sind der Spröbruch durch Klaffungen und der duktile Bruch, der aus lokalisierten großen plastischen Deformationen resultiert.

Spröbruch

Beim sogenannten Spröbruch ist der Bruchmechanismus die Trennung von interatomaren Bindungen, ohne erwähnenswerte plastische Deformation des gesamten Körpers (s. Abb. 3.1). Diese Bruchart tritt dann ein, wenn an der Reißspitze genug elastische Energie zur Verfügung steht um die Atomebenen zu trennen. Dies wird erleichtert durch Gitterfehler, wie z.B. Versetzungen, oder zufällige geometrische Imperfektionen, die zu Spannungskonzentrationen führen. Vorherrschend ist der interkristalline Bruch entlang bestimmter kristallographischer Ebenen, z.B. (100) für Eisen. Ein Versetzungstau an den Korngrenzen, der auch ohne signifikante plastische Deformation des Gesamtkörpers entstehen kann, kann zum sogenannten intergranularen Bruch führen.

Duktiler Bruch

Der duktile Bruch entsteht als Folge einer plastischen Instabilität bei großen lokalen, plastischen Formänderungen in der Nähe von kristallinen Defekten. In Abhängigkeit der Defektdichte kann ein Material, welches Anzeichen eines duktilen Bruchs zeigt, global ein duktiles oder sprödes Verhalten aufweisen. Möglich ist z.B. die Bildung eines Mikroscherbandes im Kristall (ASARO & RICE 1977; LE, SCHÜTTE & STUMPF 1998). In diesem wird durch die lokal konzentrierte plastische Deformation die Defektdichte so groß, daß Materialtrennung, d.h. ein Spröbruch im Mikroscherband, auftritt (s. Abb. 3.2).

¹Eine Ausnahme hiervon stellt evtl. die Beschreibung des Bruchvorgangs eines monokristallinen Probenkörpers dar.

²Diese Größenordnungen stellen natürlich nur Anhaltspunkte dar. Der tatsächliche Übergang, hängt von der Größe des zu modellierenden Bauteils, von der Diskretisierung und vielem mehr ab.

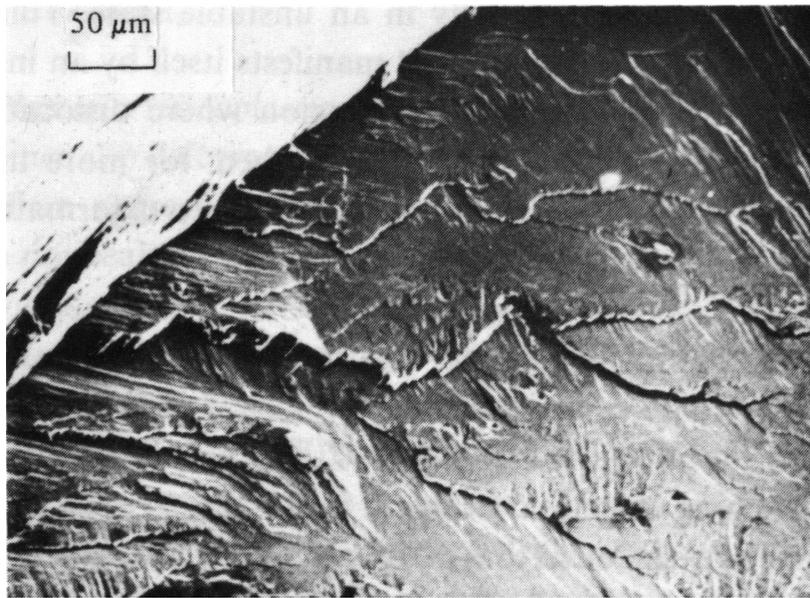


Abbildung 3.1: Sprödbbruch durch Spaltung in einem schwach legierten Stahl (nach Pineau)

Ermüdungsversagen eines Polykristalls

Der Bruch eines Bauteils unter Betriebsbedingungen beinhaltet gewöhnlich mehrere verschiedene Mechanismen, die interagieren. Das Versagen durch Ermüdungsbruch stellt hierbei einen der wichtigsten Mechanismen dar. Beim Ermüdungsbruch können für die Modellierung mehrere Stadien unterschieden werden.

Entstehung von Mikrorissen Betrachtet sei ein polykristallines Material unter periodischer Belastung. Selbst wenn die maximale Last deutlich unter der Grenze für plastische Verformungen liegt, ist das Material in der Nähe von Defektstellen durch Spannungsüberhöhungen zyklischen, plastischen Mikrodeformationen ausgesetzt. Diese Gebiete wiederum blockieren das Wandern von Versetzungen. Diese dissipativen Mechanismen können zu lokalen Temperaturerhöhungen führen, die zum relaxieren der Mikrospannungen führen. Je nachdem welcher der beiden Mechanismen im Material gerade der vorherrschende ist, führt dies zu einer lokalen Ver- oder Entfestigung des Materials. Diese Vorgänge können dann auf vielfältige Art, z.B. durch Versetzungsanhäufungen an Fehlstellen oder Korngrenzen, durch Mikroscherbänder

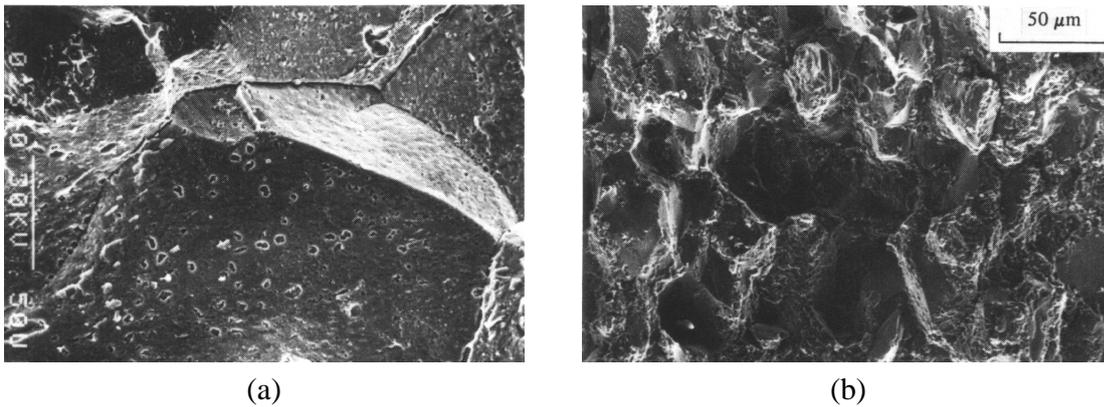


Abbildung 3.2: (a) Interkristalliner Sprödbruch durch Kriechen in Cr-Mo Stahl (nach Pineau). (b) Interkristalliner duktiler Bruch in einer Inconel 718 Legierung (nach Pineau)

(s.o.) dazu führen, daß in einem Korn oder entlang der Korngrenze ein Mikroriß entsteht. Diese Mikrorisse haben oft eine Orientierung von $\pm 45^\circ$ zur Hauptspannung, was der Entstehungsrichtung von Scherbändern in Einkristallen entspricht (ASARO & RICE 1977; LE & SCHÜTTE 1998). Dieser Mikroriß wird typischerweise eine Länge haben, die in der Größenordnung eines Kornes des Polykristalls liegt.

Wachstum von Mikrorissen Die wichtigste Phase des Versagens durch Ermüdung bildet die Ausbreitung der Mikrorisse (s. Abb. 3.3). Diese Phase beinhaltet das Wachstum der Mikrorisse von der Länge der Korngröße bis zu einer Länge, die auf der Makroebene modelliert werden muß. Die Risse werden ihre Ausbreitungsrichtung gemäß der sich ändernden Spannungen und Dehnungen anpassen. Beobachtet wird, daß diese schließlich in einer Richtung senkrecht zur größten Hauptzugspannung wachsen. Ab einer bestimmten Länge wird der Mikroriß bei einer gegebenen Beanspruchung instabil und wächst explosionsartig. Spätestens dies stellt den Übergang zum Makroriß dar.

Wachstum von Makrorissen Das Wachstum eines Makrorisses basiert auf demselben Mechanismus wie die Mikrorißausbreitung. Die Spannungskonzentration an der Rißspitze führt zu lokalisierten plastischen Deformationen die schließlich zu einer Materialtrennung an der Rißfront führen. Durch zyklische Belastungen unterhalb der kritischen Last des Risses breitet sich dieser stabil aus. Bei einer kritischen Länge bzw. Last wird auch dieser Riß instabil und

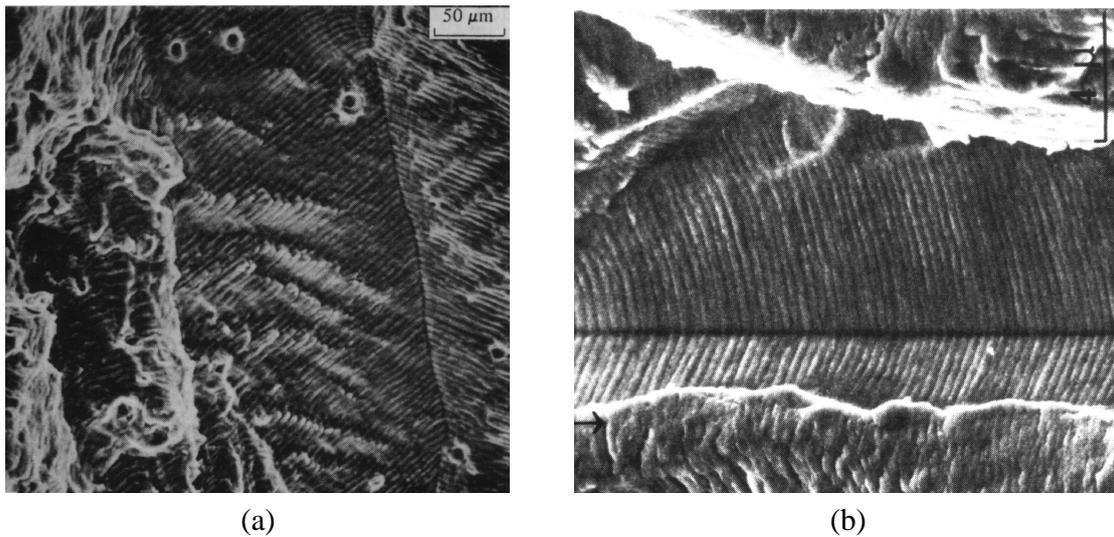


Abbildung 3.3: Schwingstreifen (nach Pineau): (a) in rostfreiem austenitischem Stahl; (b) in einer Iconel 718 Legierung

zerteilt das Bauteil in zwei oder mehr Teile.

3.1.2 Rißnahfeld der linear-elastischen Bruchmechanik

Wichtige Grundlage für die Untersuchung des Verhaltens des Risses ist die Kenntnis der Verformungs- und Spannungsfelder in der direkten Umgebung der Rißspitze. Um diese zu ermitteln, betrachtete WILLIAMS (1957) das asymptotische Feld eines zweidimensionalen Risses in einer unendlichen Platte (s. Abb. 3.4). Die Ermittlung des asymptotischen Feldes erfolgt mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion F (in Zylinderkoordinaten) für den ebenen Dehnungszustand:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r}F_{,r} + \frac{1}{r^2}F_{,\varphi\varphi}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= F_{,rr}, \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{1}{r^2}F_{,\varphi} - \frac{1}{r}F_{,r\varphi}, \\ \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}).\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Das Komma vor einem Index bedeutet die partielle Ableitung bezüglich dieses Index. r, θ bezeichnen lokale Polarkoordinaten mit Ursprung in der Rißspitze. Die x -Achse fällt mit den Rißufer zusammen. Die Kompatibilitätsbedingungen, das Hooke'sche Gesetz und die Gleichgewichtsbedingungen werden

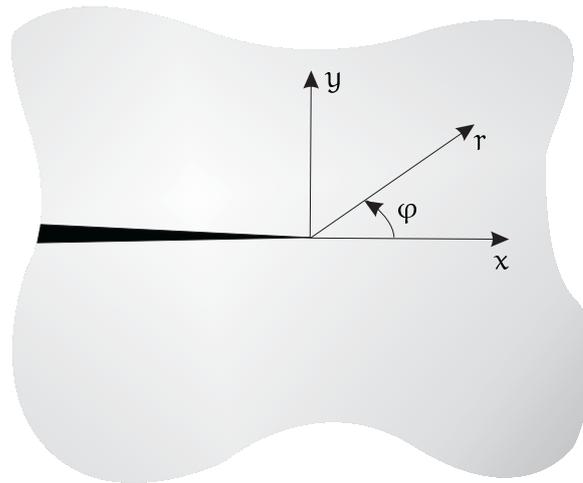


Abbildung 3.4: Riß in unendlicher Platte

erfüllt, wenn

$$\Delta\Delta F = 0 \quad (3.1.2)$$

gilt. Die Spannungsfunktion wird in folgender Form angenommen:

$$F = R(r)\Phi(\varphi) = r^{\lambda+1}\Phi(\varphi), \quad \lambda > 0. \quad (3.1.3)$$

Die Bedingung $\lambda > 0$ sorgt für beschränkte Verschiebungen für $r \rightarrow 0$. Gleichung (3.1.2) führt dann auf

$$F = r^{\lambda+1} (C_1 \cos(\lambda + 1)\varphi + C_2 \cos(\lambda - 1)\varphi + C_3 \sin(\lambda + 1)\varphi + C_4 \sin(\lambda - 1)\varphi) \quad (3.1.4)$$

Die Randbedingungen für spannungsfreie Rißufer lauten

$$\sigma_{r\varphi}(\pm\pi) = \sigma_{\varphi\varphi}(\pm\pi) = 0 \quad (3.1.5)$$

und führen auf das folgende Gleichungssystem für die vier Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} -(\lambda + 1) \cos \lambda\pi & -(\lambda + 1) \cos \lambda\pi & (\lambda + 1) \sin \lambda\pi & (\lambda + 1) \sin \lambda\pi \\ -(\lambda + 1) \cos \lambda\pi & -(\lambda + 1) \cos \lambda\pi & -(\lambda + 1) \sin \lambda\pi & -(\lambda + 1) \sin \lambda\pi \\ (\lambda - 1) \sin \lambda\pi & (\lambda + 1) \sin \lambda\pi & (\lambda - 1) \cos \lambda\pi & (\lambda + 1) \cos \lambda\pi \\ -(\lambda - 1) \sin \lambda\pi & -(\lambda + 1) \sin \lambda\pi & (\lambda - 1) \cos \lambda\pi & (\lambda + 1) \cos \lambda\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.6)$$

Nichttriviale Lösungen ergeben sich durch die Bedingung, daß die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwinden muß:

$$-4 r^{4(-1+\lambda)} \lambda^4 (1 + \lambda)^2 \sin(2 \pi \lambda)^2 = 0. \quad (3.1.7)$$

Diese Gleichung hat als zulässige Lösungen

$$\lambda = n/2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.8)$$

Das Resultat $\lambda = \frac{1}{2}$ ergibt singuläre Spannungen in der Rißspitze und dominiert somit das Rißnahfeld. Setzt man diese Lösung in die Koeffizientenmatrix ein, kann man zwei Konstanten eliminieren. Das asymptotische Spannungs- und Verschiebungsfeld ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} u_x = & \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ & + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + O(\sqrt{r}), \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

$$\begin{aligned} u_y = & \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ & + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + O(\sqrt{r}), \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) + O(1), \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta + O(1/\sqrt{r}), \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) + O(1/\sqrt{r}). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Der Faktor $\sqrt{2\pi}$ wird aus historischen Gründen eingeführt. Die Koeffizienten K_I und K_{II} , die die Stärke des singulären Spannungsfeldes bestimmen, heißen Spannungsintensitätsfaktoren (IRWIN 1957). Eine Untersuchung der

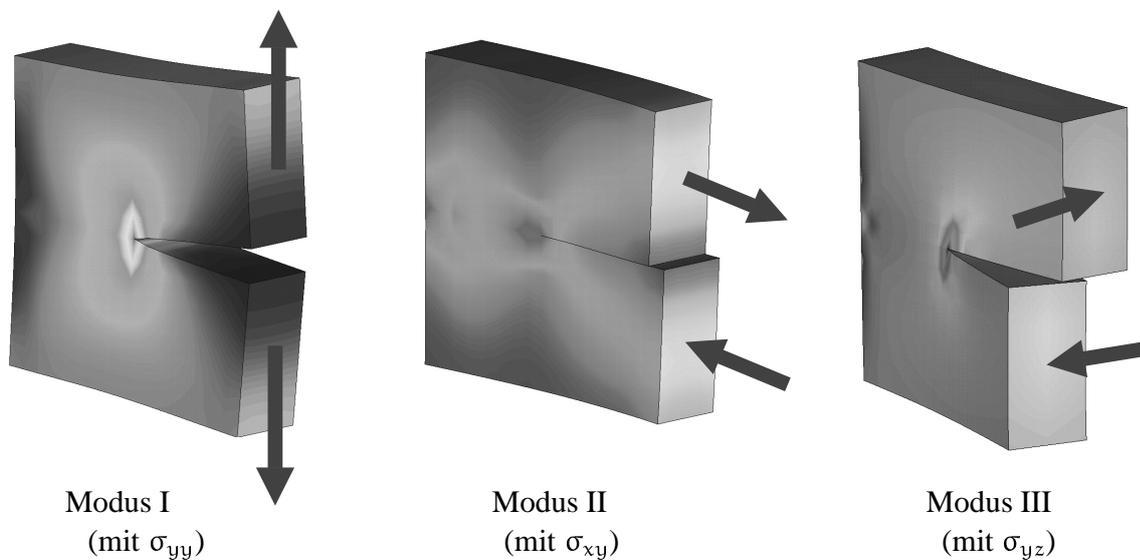


Abbildung 3.5: Die drei Rißmodi mit ihren charakteristischen Spannungsverteilungen

Verschiebung der Rißufer an der Rißspitze zeigt, daß für $K_I \neq 0, K_{II} = 0$ ein symmetrischer Modus mit einer Rißöffnung in Form einer Parabel vorliegt. Für $K_I = 0, K_{II} \neq 0$ liegt ein Modus vor, der die Rißufer gegeneinander verschiebt, d.h. Schub in der Ebene. Es gibt noch einen dritten Modus, durch Schub gegen die Rissebene, für den der Spannungsintensitätsfaktor (SIF) K_{III} verantwortlich ist.

$$u_{zz} = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (3.1.14)$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{2\pi r} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (3.1.15)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{2\pi r} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (3.1.16)$$

Entsprechend den SIFen, die für die einzelnen Modi verantwortlich sind, nennt man diese Mode I, Mode II bzw. Mode III; diese sind in Abbildung 3.5 dargestellt. In einem realen Material können die Spannungen natürlich nicht unendlich groß werden. Selbst bei sehr spröden Materialien, wie Glas, treten an der Rißspitze plastische Zonen von einigen Mikrometern auf. Wenn die plastische Zone allerdings klein ist gegenüber der Zone, die vom Rißnahfeld dominiert wird, behält die linear-elastische Lösung trotzdem ihre Gültigkeit (s. RICE (1974)).

3.1.3 Rißausbreitungskriterien

Innerhalb des oben dargestellten lokalen Konzeptes wird Rißwachstum dann erwartet, wenn z.B. für Mode I der SIF K_I einen kritischen Wert K_{Ic} überschreitet.

$$K_I < K_{Ic} \rightarrow \text{Riß im Gleichgewicht} \quad (3.1.17)$$

$$K_I = K_{Ic} \rightarrow \text{instabiles Rißwachstum}$$

Für ebene Verzerrungszustände ist K_{Ic} ein Materialkennwert, für ebene Spannungszustände hängt K_{Ic} von der Probendicke ab.

Eine weitere Betrachtungsweise bietet die Energie eines Körpers mit einem Riß. Die Grundlagen hierfür gehen auf GRIFFITH (1920) zurück. Dieser betrachtete die Energiefreisetzung eines Körpers mit einem wachsenden Riß. GRIFFITH (1920) stellte fest, daß Rißwachstum möglich ist, wenn die elastische Energie, die durch das Rißwachstum frei wird, ausreicht, um den gesamten Energiebedarf für das Rißwachstum zur Verfügung zu stellen. Für eine Platte mit Riß, die erst belastet wird, deren Enden dann fixiert werden und in der anschließend der Riß um da wächst, ergibt sich

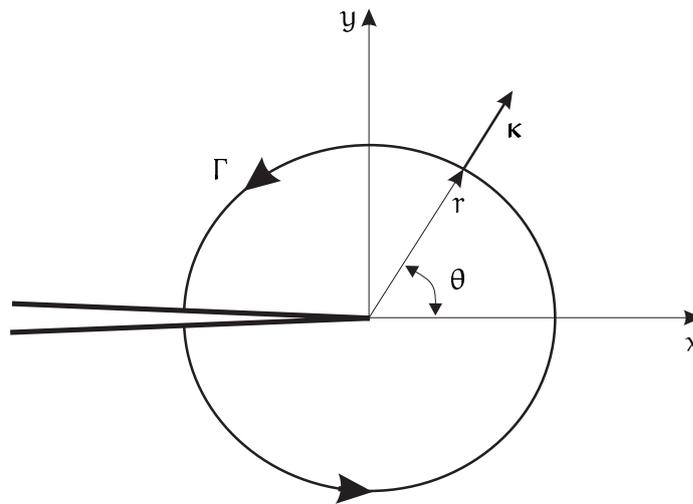
$$G = \frac{dW}{da} = \frac{d\Psi_{\text{Riß}}}{da} = R. \quad (3.1.18)$$

W ist hierbei die elastische Energie des Körpers, $\Psi_{\text{Riß}}$ die Energie, die für das Rißwachstum benötigt wird. G wird Energiefreisetzungsrates oder auch treibende Kraft für das Rißwachstum genannt. Die Energie, die beim Rißwachstum verbraucht wird, ist R , der Rißwiderstand. Die Energiegleichung (3.1.18) impliziert dann, daß G mindestens so groß sein muß wie R , damit Rißwachstum möglich ist. Wenn R eine Konstante ist, bedeutet das, daß G für Rißwachstum einen kritischen Wert G_c überschreiten muß. Für einen innenliegenden Riß der Länge $2a$ in einer unendlichen Scheibe unter Zugspannungen σ_∞ kann ein direkter Zusammenhang beider Kriterien ermittelt werden. Für diese Problemstellung gilt ((WESTERGAARD 1939; IRWIN 1957))

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (3.1.19)$$

und

$$G = 2 \frac{\pi a \sigma_\infty^2}{(1 - \nu^2) E}. \quad (3.1.20)$$

Abbildung 3.6: J-Integral auf der Kontur Γ

Offensichtlich sind also das lokale SIF-Kriterium und das globale Kriterium der Energie miteinander verknüpft. Die Energiefreisetzungsrates einer Rißspitze ist gerade die Hälfte des Ausdrucks in (3.1.20), so daß man für den ebenen Verzerrungszustand findet

$$G = \frac{K_I^2}{(1 - \nu^2)E}. \quad (3.1.21)$$

Diese Beziehung, auch IRWIN's Formel genannt, gilt auch, wenn die Enden nicht fixiert werden, dann erhöht sich allerdings die elastische Energie der Scheibe und der Energiezufluß zur Rißspitze enthält einen Anteil aus der Arbeit der "toten" Last

$$G = \frac{d}{da} (A_{\text{Last}} - W). \quad (3.1.22)$$

G hat die Einheit einer Energie pro Flächeneinheit bzw. einer Kraft pro Rißlänge, weshalb G auch als treibende Kraft für das Rißwachstum bezeichnet wird. RICE (1968B) hat gezeigt, daß diese treibende Kraft durch das wegabhängige J-Integral berechnet werden kann

$$J = \int_{\Gamma} (w dy - \kappa \cdot \sigma \cdot \mathbf{u}_{,x} ds), \quad (3.1.23)$$

mit w der Verzerrungsenergiedichte pro Volumeneinheit und κ der äußeren Normalen, der die Rißspitze umschließenden Kontur (s. Abb.(3.6)).

Für ein ideal sprödes Material kann die Energie für das Rißwachstum auf die Oberflächenenergie der Rißoberflächen beschränkt werden

$$\Psi_{\text{RiB}} = 2\gamma a \quad \rightarrow \quad R = \frac{d\Psi_{\text{RiB}}}{da} = 2\gamma. \quad (3.1.24)$$

In vielen realen Materialien wird sich, wie bereits oben erwähnt, durch die Spannungsüberhöhung an der Rißspitze eine plastische Zone ausbilden. Bei der Rißausbreitung wird dann Energie für die Ausbildung der neuen plastischen Zone benötigt. Wenn die Energie, die hierfür benötigt wird, proportional der Rißverlängerung bleibt, d.h. weiterhin $R = d\Psi_{\text{RiB}}/da$ gilt, behält der obige Ansatz für den Rißwiderstand weiterhin seine Gültigkeit.

Die obige Darstellung der Energieverhältnisse beim Rißwachstum und des Verhaltens eines Körpers mit einem Riß basieren auf der Annahme der selbstähnlichen Rißausbreitung. Diese Betrachtung schließt also zunächst Risse unter gemischten Modus I/II Belastungen aus. Durch die Schubbelastung des Modus II könnten die Risse jedoch bei der Ausbreitung abknicken. Desweiteren findet die Verknüpfung des lokalen Feldes mit der globalen Energiebetrachtung erst beim Aufstellen des Ausbreitungskriteriums statt. Um eine allgemeine Lösung des Problems eines Körpers mit einem Riß zu finden, haben sich variationelle Formulierungen als vorteilhaft erwiesen (LE 1989; LE 1990; STUMPF & LE 1990; LE & SCHÜTTE 1998; LE, SCHÜTTE & STUMPF 1999). Diese ermöglichen ein besseres Verständnis der Rißausbreitung und sind darüberhinaus auch auf nichtlinear-elastische Materialien bei großen Formänderungen anwendbar. Viele Wissenschaftler haben sich seitdem mit der tiefgreifenden Analogie zwischen Energiefreisetzungsrates einerseits und treibender Kraft auf die Rißspitze andererseits beschäftigt (MAUGIN 1993; MAUGIN 1995; GURTIN & PODIO-GUIDUGLI 1996; GURTIN & PODIO-GUIDUGLI 1998).

In jüngeren Arbeiten wurde speziell die linear-elastische Lösung näher untersucht (LE & SCHÜTTE 1998; LE, SCHÜTTE & STUMPF 1999). Die treibende Kraft bzw. das Rißausbreitungskriterium werden in diesen Arbeiten konsistent aus dem Variationsproblem eines Körpers mit einem Riß hergeleitet und ergeben die Erweiterung der Griffith'schen Energiefreisetzungsrates auf dreidimensionale Probleme mit abknickenden Rissen. Dies unterscheidet dieses Kriterium wesentlich von anderen Rißausbreitungskriterien für *mixed-mode* Belastungen, die weitgehend auf ad-hoc Annahmen basieren. Man kann Kriterien unterscheiden, die auf der Annahme basieren, die maximale Tangentialspan-

nung wäre verantwortlich für die Rißausbreitung (ERDOGAN & SIH 1963; WILLIAMS & EWING 1972; FINNIE & SAITH 1973), von denen die maximale Hauptdehnung als ausschlaggebend betrachten, z.B. FISCHER (1984). SIH (1974) stellte ein Kriterium vor, daß auf der Annahme basiert, der Riß breite sich in die Richtung aus, in der die Dehnungsenergiedichte minimal ist. Auf Energiedichten basierende Kriterien findet man auch bei RADAJ & HEIB (1977) und DE S. JAYATILAKA, JENKINS & PRASAD (1977). Das Hauptproblem dieser Kriterien besteht darin, daß sie nicht auf der konsequenten, mechanischen Analyse eines Körper mit einem Riß beruhen, und somit eine gewisse Beliebigkeit aufweisen. Die Evolution der Makrorisse in Abschnitt (3.3) und insbesondere der Mikrorisse in Kapitel 4 soll aus diesen Gründen mit Hilfe des Kriteriums aus LE & SCHÜTTE (1998) geschehen. Deshalb sei die Herleitung dieses Kriteriums im Folgenden wiedergegeben.

3.2 Variationsprinzip der Bruchmechanik

Um die treibende Kraft auf den Riß zu bestimmen, muß der Energiezustand des Körper vor und nach der Rißausbreitung verglichen werden. Für kleine Riverlngerungen hängt der Energiezustand stark von den singulären Spannungsfeldern und den Dehnungsfeldern in der Nähe der Rißspitze ab. BILBY & CARDEW (1975) haben gezeigt, daß die Spannungsintensitätsfaktoren (SIFen) nach dem Abknicken, für eine gegen Null laufende Zusatzrilnge, nicht die SIFen vor dem Knicken ergeben (vgl. auch WU (1978A), WU (1978C), AMESTOY & LEBLOND (1992) und LEBLOND (1993)). Es stellt sich heraus, daß die Grenz-SIFen Funktionen der SIFen vor der Rißausbreitung und des Knickwinkels sind. Diese Tatsache ist die Hauptschwierigkeit bei der Bestimmung der treibenden Kraft auf abknickende Risse.

In PALANISWAMY & KNAUSS (1978) wird die Berechnung der Energiedifferenz durch numerische Methoden vorgeschlagen. HUSSAIN, PU & UNDERWOOD (1974) waren die Ersten, die für den zweidimensionalen Fall Irwin's Formel angaben und hierbei die SIFen durch diejenigen nach dem Abknicken ersetzten (siehe auch WU (1978B), GUPTA (1976), HAYASHI & NEMAT-NASSER (1981) und ICHIKAWA & TANAKA (1982)). MAUGIN (1993) hat das Abknicken des Risses vernachlässigt, während GURTIN & PODIO-GUIDUGLI (1998) die Abhängigkeit der treibenden Kraft vom Knick-

winkel nicht berücksichtigten.

Die Resultate von WU (1978A) und LEBLOND (1993) werden in Kombination mit der Variationstechnik von LE (1989) benutzt, um Irwin's Formel für den dreidimensionalen Fall herzuleiten, die die SIFen der drei Rißmodi am abgeknickten Riß enthält. Daß Rißausbreitungskriterium sagt dann aus, daß der Körper mit dem Riß sich im Gleichgewicht befinden wird, solange die maximale Größe der treibende Kraft kleiner oder gleich der Oberflächenenergie 2γ , bzw. dem Rißwiderstand (siehe oben) ist. Die Richtung der treibenden Kraft fällt beim sich ausbreitenden Riß zusammen mit der Richtung, in die diese ihren Maximalwert annimmt.

3.2.1 Singuläres Feld des abgeknickten Risses

Betrachtet sei ein dreidimensionaler Körper, der den Bereich $\mathcal{B}_S = \mathcal{B} \setminus \bar{S}$ des dreidimensionalen Euklidischen Raumes einnimmt, mit dem äußeren Rand $\partial\mathcal{B}$ und dem inneren Rand $\bar{S} = S \cup \partial S$. Die Fläche S beschreibt die Rißfläche in der Ausgangskonfiguration. Der Körper wird belastet, so daß er das Verschiebungsfeld $u_i(x_j)$ (x_1, x_2, x_3 sind Kartesische Koordinaten) mit den zugehörigen Spannungen $\sigma_{ij}(x_k)$ aufweist. Die Indizes i, j, k, \dots durchlaufen 1,2,3, und für wiederholte Indizes gilt die Summationsvereinbarung. Die herrschenden Gleichungen sind die Gleichgewichtsbedingungen (ohne Volumenkräfte)

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (3.2.1)$$

und das Hooke'sche Gesetz

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (3.2.2)$$

Die Randbedingungen auf dem äußeren Rand $\partial\mathcal{B}$ sind

$$u_i = 0 \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_u, \quad (3.2.3)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \quad \text{auf} \quad \partial\mathcal{B}_t, \quad (3.2.4)$$

mit $\partial\mathcal{B}_u$ und $\partial\mathcal{B}_t$ disjunkten Teilen von $\partial\mathcal{B}$, wobei u_i die Verschiebungen, t_i die aufgebrachten Lasten und n_i die Komponenten der äußeren Normalen sind. Es werden nur solche Belastungsbedingungen betrachtet, die spannungsfreie Rißufer garantieren. Dann sind die Randbedingungen auf den Rißufern

$$\sigma_{ij}^\pm n_j = 0 \quad \text{auf} \quad \partial S. \quad (3.2.5)$$

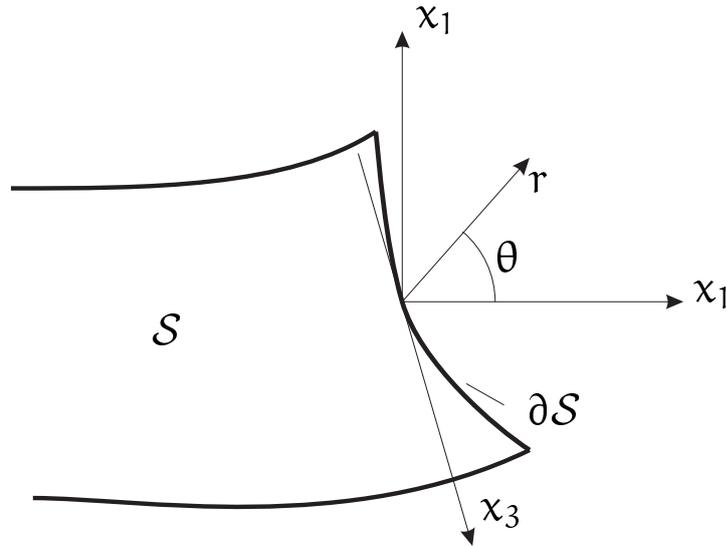


Abbildung 3.7: Der Anfangsriß mit dem lokalen Koordinatensystem

Die Indizes $+$, $-$ bezeichnen die Grenzwerte von Größen auf beiden Seiten von \mathcal{S} , n_i ist die Normale in Richtung $+$. Die singulären Spannungs- und Dehnungsfelder (3.1.11)-(3.1.16) können vereinfacht durch

$$\sigma_{ij} = K_{(\alpha)} \frac{f_{(\alpha)ij}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} + O(1), \quad u_i = K_{(\alpha)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} v_{(\alpha)i}(\theta) + O(r) \quad (3.2.6)$$

angegeben werden. r , θ bezeichnen, wie oben, lokale Polarkoordinaten mit Ursprung in der Rißspitze, in der Ebene senkrecht zur Rißfront (s. Abb. 3.7), und die griechischen Indizes laufen über die drei Modi I, II, III. Die Bruchfläche wächst auf die neue Fläche \mathcal{S}_e an, die mit Ausnahme von Punkten auf $\partial\mathcal{S}$ glatt sein soll (s. Abb. 3.8). Im dreidimensionalen Fall muß diese Annahme nicht gültig sein; die Bildung von Kanten in der Rißfront, die eigene Singularitäten aufweisen können, wird dadurch aber von den hier angestellten Betrachtungen ausgeschlossen. Es wird angenommen, daß sowohl Glg. (3.2.1)-(3.2.4) als auch die spannungsfreien Randbedingungen auf \mathcal{S}_e erfüllt sind. Die Spannungs-Dehnungs-Felder in der Nähe der neugebildeten Rißfront $\partial\mathcal{S}_e$ sind gegeben durch

$$\sigma'_{i'j'} = K'_{(\alpha)} \frac{f_{(\alpha)i'j'}(\theta')}{\sqrt{2\pi r'}} + O(1), \quad (3.2.7)$$

$$u'_{i'} = K'_{(\alpha)} \sqrt{\frac{r'}{2\pi}} v_{(\alpha)i'}(\theta') + O(r'), \quad (3.2.8)$$

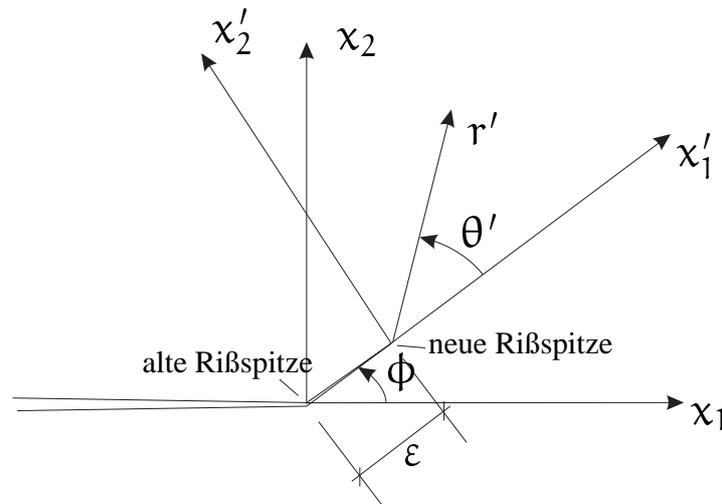


Abbildung 3.8: Gewachsener RiB mit dem verschobenem und gedrehtem Koordinatensystem

mit r', θ' Polarkoordinaten im gedrehten und verschobenem Koordinatensystem (s. Abb. 3.8). Die gestrichelten Größen sind bezogen auf dieses Koordinatensystem. Der Radius des Bereiches für den Glg. (3.2.8) Gültigkeit hat, ist von der Größenordnung ϵ und schrumpft zusammen mit ϵ gegen Null. Die Spannungsintensitätsfaktoren tendieren aber für $\epsilon \rightarrow 0$ nicht zu denen vor dem RiBfortschritt (BILBY & CARDEW 1975; WU 1978A; WU 1978C; AMESTOY & LEBLOND 1992; LEBLOND 1993). Die Grenzwerte von $K'_{(\alpha)}$ für $\epsilon \rightarrow 0$ werden mit $K^*_{(\alpha)}$ bezeichnet. Sie lassen sich durch

$$K^*_{(\alpha)} = F_{(\alpha\beta)}(\phi) K_{(\beta)} \quad (3.2.9)$$

ausdrücken, mit $F_{(\alpha\beta)}(\phi)$, der Matrix der Knickwinkelfunktionen. Die $F_{(\alpha\beta)}$ sind universelle Funktionen des Knickwinkels ϕ (LEBLOND 1993), d.h. die Funktionen hängen nicht von der konkreten Geometrie des Körpers mit RiB bzw. der Art der Lastaufbringung ab.

3.2.2 Variationsprinzip

Mit $\Sigma \supseteq \mathcal{S}$ sei eine *virtuell* erweiterte Bruchfläche bezeichnet, für die $\mathcal{B}_\Sigma = \mathcal{B} \setminus \bar{\Sigma}$ gilt. Mit $(H^1(\mathcal{B}_\Sigma))^3$ soll der Sobolev-Raum aller quadratisch integrierbarer Verschiebungsfelder auf \mathcal{B}_Σ mit verschwindenden Verschiebungen auf $\partial\mathcal{B}_u$ bezeichnet werden. Durch die fehlende Glattheit der Region \mathcal{B}_Σ erlaubt die Bedingung der quadratischen Integrierbarkeit singuläre Deformationsgradienten

in Punkten auf $\partial\Sigma$. Betrachtet sei die Menge \mathcal{C}_Σ , definiert durch

$$\mathcal{C}_\Sigma = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in (\mathbf{H}^1(\mathcal{B}_\Sigma))^3, (w_i^+ - w_i^-)n_i \geq 0, x_i \in \Sigma\}.$$

Die Bedingung $(w_i^+ - w_i^-)n_i \geq 0$ sorgt dafür, daß keine Durchdringung der Rißufer stattfindet. Die Menge aller zulässigen Konfigurationen wird durch

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\Sigma \supseteq \mathcal{S}} \mathcal{C}_\Sigma.$$

definiert. Für ein beliebiges Verschiebungsfeld $\mathbf{w} \in \mathcal{C}_\Sigma$ wird dann das Funktional der Gesamtenergie wie folgt

$$I[\mathbf{w}] = \int_{\mathcal{B}_\Sigma} W(\varepsilon_{ij}(w_i)) \, dv - \int_{\partial\mathcal{B}_t} t_i w_i \, da + \int_{\Sigma} 2\gamma \, da \quad (3.2.10)$$

definiert, mit

$$W(\varepsilon_{ij}) = (1/2)\lambda\varepsilon_{ii}^2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad (3.2.11)$$

der elastische Energiedichte und

$$\varepsilon_{ij} = (1/2)(w_{i,j} + w_{j,i}), \quad (3.2.12)$$

dem Dehnungsfeld. Das zweite Integral in (3.2.10) entspricht der Arbeit der äußeren Lasten t_i . Das dritte Integral kann als die Energie des Risses interpretiert werden (vgl. Glg.(3.1.24)).

Betrachtet sei die einparametrische Familie der zulässigen Verschiebungen $\mathbf{w}(\varepsilon) \in \mathcal{C}$ mit den Sprungflächen \mathcal{S}_ε , die die folgenden Bedingungen erfüllen

$$\mathcal{S}_{\varepsilon'} \supseteq \mathcal{S}_\varepsilon \supseteq \mathcal{S} \quad \text{für} \quad \varepsilon' > \varepsilon > 0, \quad \mathcal{S}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{S} \quad \text{wenn} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Die Variation des Energiefunktionals (3.2.10) kann man wie folgt definieren:

$$\delta I = \left. \frac{d}{d\varepsilon} I[\mathbf{w}(\varepsilon)] \right|_{\varepsilon=0}. \quad (3.2.13)$$

Das Variationsprinzip der Bruchmechanik besagt: Ein Körper mit einem Riß kann sich nur dann im Gleichgewicht befinden, wenn die Variation seines Energiefunktionals δI nicht-negativ wird für alle Familien von zulässigen Verschiebungsfeldern (LE 1989; LE 1990; LE, SCHÜTTE & STUMPF 1999).

$$\delta I \geq 0, \quad \forall \quad \mathbf{w}(\varepsilon) \in \mathcal{C}. \quad (3.2.14)$$

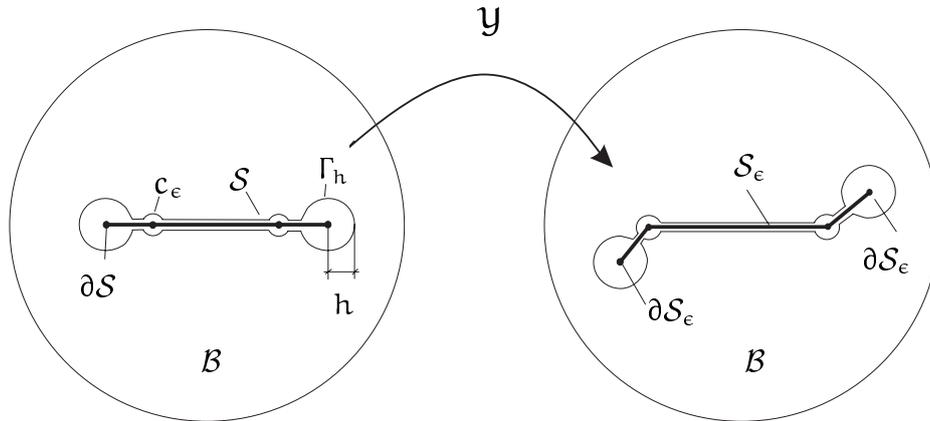


Abbildung 3.9: Parametrisierung und Integrationsbereich

3.2.3 Definition der treibenden Kraft

Um die Konsequenzen aus (3.2.14) herzuleiten, muß die Variation (3.2.13) berechnet werden. Die Schwierigkeit liegt hierbei in den veränderlichen Integrationsvolumina \mathcal{B}_{S_ϵ} bzw. Integrationsoberflächen \mathcal{S}_ϵ . Um diese Bereiche und Flächen zu fixieren, wird eine Familie von Parametrisierungen $y_i(x_i, \epsilon)$ eingeführt (LE 1989), die \mathcal{B}_S in \mathcal{B}_{S_ϵ} transformieren, und \mathcal{S} in \mathcal{S}_ϵ . Diese erfüllen die Bedingungen

$$y_i(x_i, \epsilon) = x_i, \quad \text{wenn } \epsilon = 0 \quad \text{oder} \quad x_i \in \partial\mathcal{B}.$$

Eine geschlossene Kurve, die durch die Abbildung $y_i(x_i, \epsilon)$ in die anfängliche Rißfront $\partial\mathcal{S}$ transformiert wird, wird mit c_ϵ bezeichnet. Weil ein Knicken des Risses in $\partial\mathcal{S}$ zugelassen wird, können die Funktionen $y_i(x_i, \epsilon)$ ihre Glätte auf Punkten von c_ϵ verlieren. Wenn man diese Parametrisierung als eine Art Variablenwechsel benutzt, kann (3.2.13) berechnet werden. Die Variation der freien Energiedichte ergibt sich zu (LE 1989; LE, SCHÜTTE & STUMPF 1999)

$$\delta \int_{\mathcal{B}_{S_\epsilon}} W(\epsilon_{ij}(\mathbf{w}(\epsilon))) \, dv = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}_S} (\sigma'_{ij} \delta w_{i,j} + \mu'_{ij} \delta y_{i,j}) \, dv. \quad (3.2.15)$$

Hierbei ist

$$\mu'_{ij} = -\sigma'_{jk} u'_{k,i} + W' \delta_{ij} \quad (3.2.16)$$

der Eshelby-Tensor der linearen Elastizitätstheorie (ESHELBY 1951). Weil das Spannungsfeld σ'_{ij} und der Verschiebungsgradient $u'_{i,j}$ auf $\partial\mathcal{S}$ und auf der Kontur c_ϵ singular sind, wird der Integrationsbereich \mathcal{B}_S durch \mathcal{B}_h mit $h = \epsilon/2$

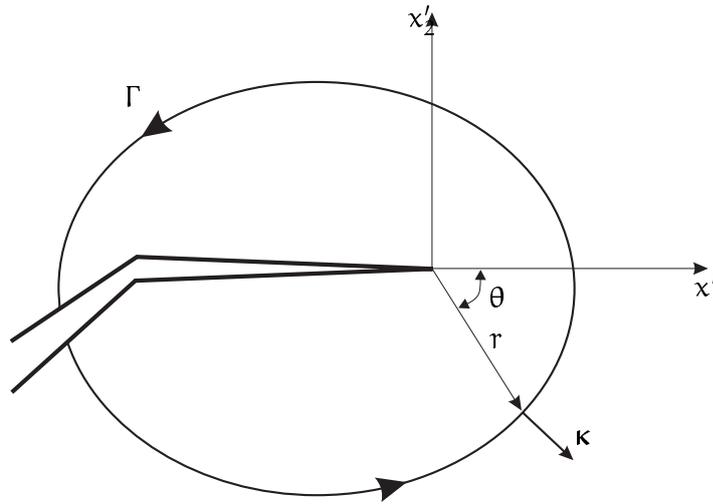


Abbildung 3.10: Der Riß mit dem lokalen Koordinatensystem

ersetzt (s. Abb. 3.9). Nach Anwendung des Gauss'schen Integralsatzes und Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\delta \int_{\mathcal{B}_{S_\epsilon}} W(\epsilon_{ij}) \, dv = \int_{\mathcal{B}_S} (-\sigma_{ij,j} \delta w_i - \mu_{ij,j} \delta y_i) \, dv + \int_S [(-\sigma_{ij}^+ \delta w_i^+ + \sigma_{ij}^- \delta w_i^-) n_j + (-\mu_{ij}^+ + \mu_{ij}^-) n_j \delta y_i] \, da + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \sigma_{ij} \delta w_i n_j \, da - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial S} J'_i \delta y_i \, ds. \quad (3.2.17)$$

Hier bezeichnet ds das Längenelement, und J'_i entspricht dem J-Integral

$$J'_i(\phi) = \int_{\Gamma} \mu'_{ij} \kappa_j \, ds = \int_{\Gamma} (-\sigma'_{kj} u'_{k,i} \kappa_j + W' \kappa_i) \, ds, \quad (3.2.18)$$

mit Γ der Kontur mit Radius $h = \epsilon/2$, die den Punkt auf ∂S umläuft und κ_i der Einheitsnormalen auf Γ . Anzumerken ist, daß die Integrale auf Konturen, die Punkte von c_ϵ einschließen verschwinden, wenn $\epsilon \rightarrow 0$, weil das Spannungsfeld bzw. das Verschiebungsgradientenfeld in deren Umgebung eine Ecken-Singularität aufweist, die schwächer ist, als die Quadratwurzel-Singularität der Rißspitze. Gemäß Gleichung (3.2.17) können die $d_i(\phi) = J'_i(\phi)$ als die Komponenten der treibenden Kraft auf die Rißspitze interpretiert werden, so daß der letzte Ausdruck in (3.2.17) der Arbeit der treibenden Kraft bei virtueller Rißausbreitung δy_i entspricht. Aus (3.2.8), (3.2.9) und (3.2.18) ist ersichtlich, daß die treibende Kraft vom Knickwinkel ϕ abhängt.

3.2.4 Gleichgewichtsbedingungen des Risses

Die Variation der anderen Terme in (3.2.10) kann leicht berechnet werden (LE 1989). Die Gleichungen (3.2.1)-(3.2.5), die auch für Körper ohne Riß gelten, kann man damit aus dem Variationsprinzip (3.2.14) gewinnen. Wenn man diese in Gleichung (3.2.14) einführt, reduziert sich diese zu

$$\delta I = \int_{\partial S} (2\gamma \nu_i - d_i) \delta y_i ds \geq 0, \quad (3.2.19)$$

mit ν_i der Einheitsnormalen auf ∂S , die in Richtung der transversalen Rißausbreitung zeigt (s. Abb. 3.11). Weil das Funktional (3.2.10) invariant in Bezug auf die Parametrisierungen $y_i(x_i)$ ist, kann gezeigt werden, daß

$$d_i \tau_i = 0, \quad (3.2.20)$$

wobei τ_i den Tangentialvektor an die Kurve ∂S bezeichnet. Gemäß der variationellen Ungleichung (3.2.19) kann der Körper mit dem Riß S sich nur dann im stabilen Gleichgewicht befinden, wenn

$$G^* = \max_{\phi} |d_i| \leq 2\gamma, \quad (3.2.21)$$

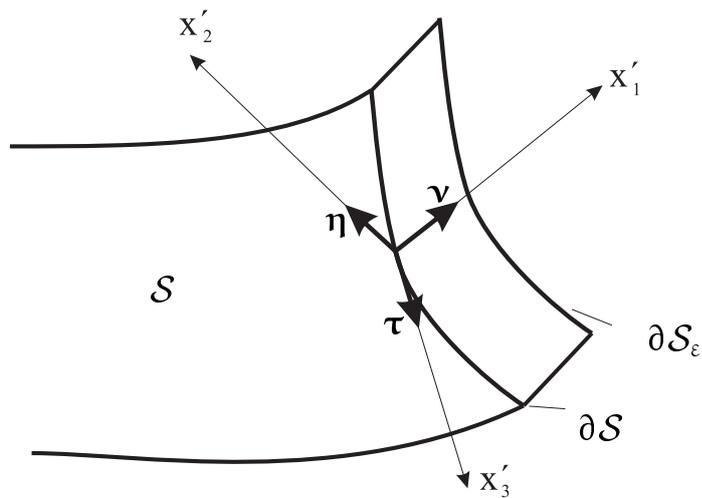
weil $\delta y_i \nu_i \geq 0$. Dies bedeutet: Der Riß wird sich solange im Gleichgewicht befinden, wie die maximale Größe der treibenden Kraft $|d_i|$, d.h. die Energiefreisetzungsrate G^* , kleiner oder gleich der doppelten Energiedichte 2γ ist. Die Ausbreitungsrichtung ergibt sich aus (3.2.21).

Somit ist gezeigt, daß man dieses Prinzip der maximalen Energiefreisetzungsrates aus dem Variationsprinzip (3.2.14) herleiten kann. Anzumerken ist, daß im dreidimensionalen Fall, daß Kriterium (3.2.21) lokalen Charakter hat, und somit an jedem Punkt der Rißfront zu überprüfen ist.

3.2.5 Berechnung der treibenden Kraft

Das J-Integral wird nun auf das lokale, verschobene und gedrehte Koordinatensystem x'_i bezogen, dessen Achsen mit den Vektoren ν_i, η_i, τ_i zusammenfallen. Hierbei ist η_i senkrecht zu ν_i und τ_i (s. Abb. 3.11). In diesem Koordinatensystem ist die Größe der treibenden Kraft gegeben durch

$$|d_i| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} J'_{1'} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (-\sigma'_{k'j'} u'_{k',1'} \kappa_{j'} + W' \kappa_{1'}) ds. \quad (3.2.22)$$

Abbildung 3.11: Das Dreibein τ, ν, η

Durch Einsetzen der bekannten Funktionen $f_{(\alpha)ij'}(\theta')$ und $v_{(\alpha)ij'}(\theta')$ in die Gleichungen (3.2.6) und (3.2.8) erhält man die treibende Kraft zu

$$|d_i| = \frac{1 - \nu^2}{E} [(K_I^*)^2 + (K_{II}^*)^2 + \frac{1}{1 - \nu} (K_{III}^*)^2]. \quad (3.2.23)$$

Mit Hilfe der Gleichung (3.2.9) wird nun die maximale Größe der treibenden

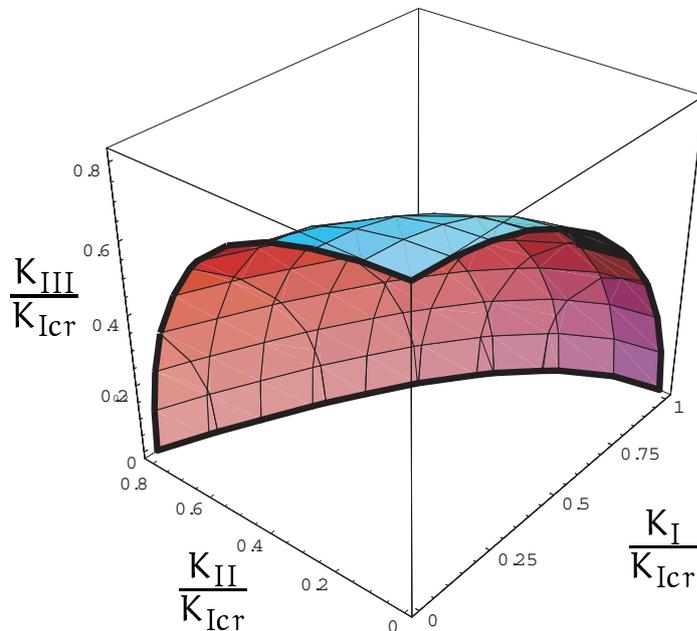
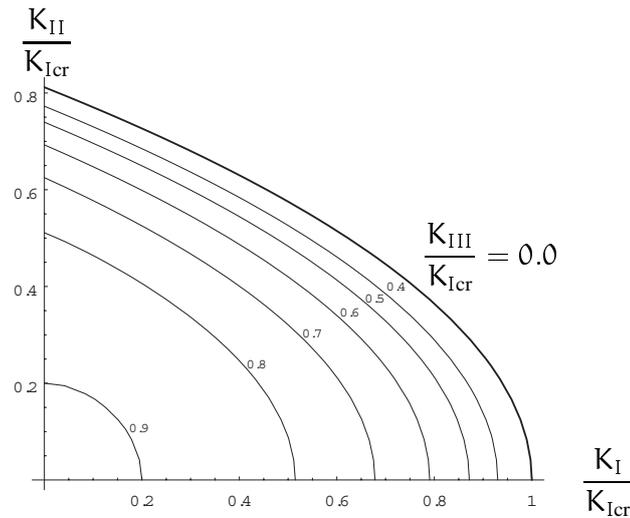


Abbildung 3.12: Die 3-D Bruchgrenzfläche

Kraft und deren Richtung ϕ_{\max} bestimmt, wobei die folgenden Ausdrücke für

Abbildung 3.13: Bruchgrenzflächen für $K_{III} = \text{const}$

$F_{(\alpha\beta)}$ benutzt werden:

$$\begin{aligned}
 F_{(11)} = & 1 - \frac{3\pi^2}{8}m^2 + (\pi^2 - \frac{5\pi^4}{128})m^4 + (\frac{\pi^2}{9} - \frac{11\pi^4}{72} + \frac{119\pi^6}{15360})m^6 \\
 & + 5.07790m^8 - 2.88312m^{10} - 0.0925m^{12} + 2.996m^{14} \\
 & - 4.059m^{16} + 1.63m^{18} + 4.1m^{20}, \tag{3.2.24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{(12)} = & -\frac{3\pi}{2}m + (\frac{10\pi}{3} + \frac{\pi^3}{16})m^3 + (-2\pi - \frac{133\pi^3}{180} + \frac{59\pi^5}{1280})m^5 \\
 & + 12.313906m^7 - 7.32433m^9 + 1.5793m^{11} + 4.0216m^{13} \\
 & - 6.915m^{15} + 4.21m^{17} + 4.56m^{19}, \tag{3.2.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{(21)} = & \frac{\pi}{2}m - (\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi^3}{48})m^3 + (-\frac{2\pi}{3} + \frac{13\pi^3}{30} - \frac{59\pi^5}{3840})m^5 \\
 & - 6.176023m^7 + 4.44112m^9 - 1.5340m^{11} - 2.0700m^{13} \\
 & + 4.684m^{15} - 3.95m^{17} - 1.32m^{19}, \tag{3.2.26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{(22)} = & 1 - \left(4 + \frac{3\pi^2}{8}\right)m^2 + \left(\frac{8}{3} + \frac{29\pi^2}{18} - \frac{5\pi^4}{128}\right)m^4 \\
& + \left(-\frac{32}{15} - \frac{4\pi^2}{9} - \frac{1159\pi^4}{7200} + \frac{119\pi^6}{15360}\right)m^6 \\
& + 10.58254m^8 - 4.78511m^{10} - 1.8804m^{12} + 7.280m^{14} \\
& - 7.591m^{16} + 0.25m^{18} + 12.5m^{20}, \tag{3.2.27}
\end{aligned}$$

$$F_{(13)} = F_{(31)} = F_{(23)} = F_{(32)} = 0, \quad F_{(33)} = \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{m/2}, \tag{3.2.28}$$

mit $m = \phi/\pi$ (vgl. AMESTOY & LEBLOND (1992), Glg. (66) und LEBLOND (1993), Glg. (9)). In Abbildung 3.12 wird die dreidimensionale Bruchgrenzfläche nach Gleichung (3.2.23) dargestellt. Abbildung 3.13 zeigt verschiedene Bruchgrenzkurven für $K_{III} = \text{const.}$ Die Bruchgrenzkurve $K_{III} = 0$ findet gute Übereinstimmung mit den Resultaten von PALANISWAMY & KNAUSS (1978). Schließlich zeigt Abbildung 3.14 die Knickwinkel ϕ_{\max} , für die die

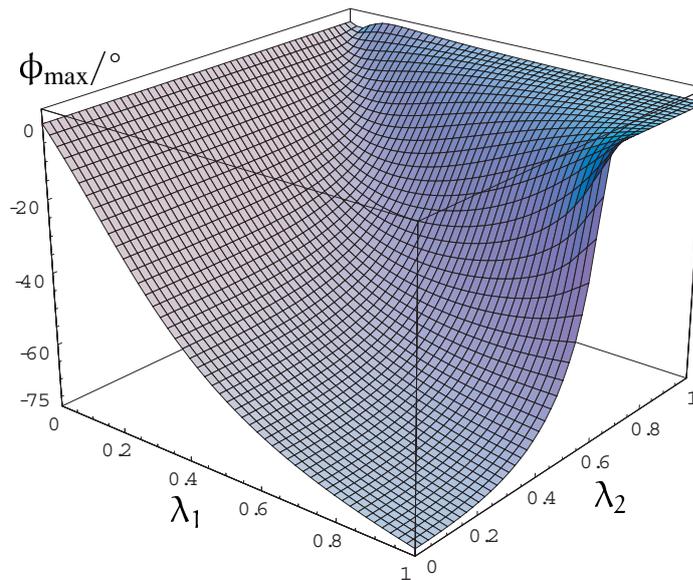


Abbildung 3.14: ϕ_{\max} als Funktion von λ_1 und λ_2

maximale Energiefreisetzungsrates erreicht wird, in Abhängigkeit der *mixed-mode*-Parameter

$$\lambda_1 = \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}|}, \quad \lambda_2 = \frac{|K_{III}|}{|K_{II}| + |K_{III}|}, \tag{3.2.29}$$

wobei die Absolutwerte genommen werden, um den Wertebereich der Parameter auf $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ zu beschränken.

3.3 Simulation der Rißausbreitung

Um die Möglichkeiten der oben dargestellten Gleichungen für die Rißausbreitung zu demonstrieren, werden in diesem Abschnitt die obigen Gleichungen auf den Fall eines zweidimensionalen Risses in einer Scheibe angewandt. Die Ergebnisse einer darauf basierenden numerischen Simulation der Rißausbreitung dienen auch als Grundlage für das im nächsten Kapitel hergeleitete Evolutionsgesetz der Schädigung.

3.3.1 2-D Riß in einer unendlichen Scheibe

Beim zweidimensionalen Problem einer Scheibe mit innenliegendem Riß hat man nur noch die Modi I und II vorliegen. Dementsprechend wird nur ein *mixed-mode*-Parameter

$$\lambda = \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}|} \quad (3.3.1)$$

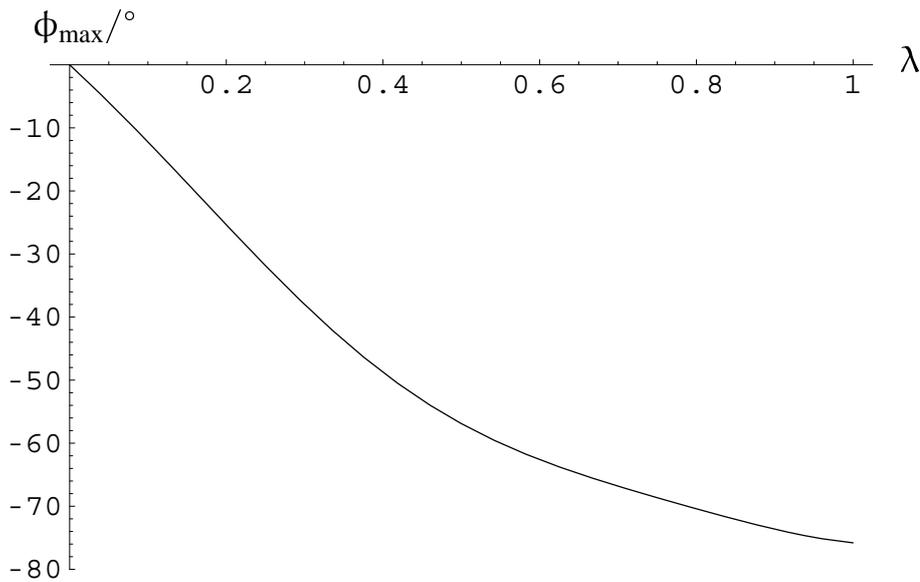
benötigt. Gleichung (3.2.23) vereinfacht sich dann zu

$$|d_i| = \frac{1 - \nu^2}{E} [(K_I^*)^2 + (K_{II}^*)^2]. \quad (3.3.2)$$

Die für die Richtung der maximalen Energiefreisetzungsrates

$$G^* = \max_{\phi} |d_i| \leq 2\gamma, \quad (3.3.3)$$

maßgebenden Maxima $\max_{\phi} |d_i|$ können mit Hilfe der Funktionen $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}$ leicht numerisch bestimmen werden. Der resultierende Graph des Knickwinkels in Abhängigkeit vom *mixed-mode*-Parameter ist in Abbildung 3.15 zu sehen und fällt zusammen mit der Kurve $\lambda_2 = 0$ in Abbildung 3.14.

Abbildung 3.15: Knickwinkel ϕ_{\max} in Abhängigkeit von λ

3.3.2 Rißausbreitungssimulation

Durch eine Kurvenanpassung kann der Graph aus Abbildung 3.15 mit einem relativen Fehler kleiner 2% durch folgende Funktion repräsentiert werden:

$$\phi_{\max} = \text{sgn}(K_{II}) \left(C_1 \lambda^3 - C_2 \sin^2(C_3 \lambda) - C_4 \tanh\left(\frac{2}{C_4} \lambda\right) \right) \quad (3.3.4)$$

$$C_1 = 0.7096600682165185 \quad (3.3.5)$$

$$C_2 = 0.0977254019518794$$

$$C_3 = 3.9174096030707686$$

$$C_4 = 13.158789485704737$$

Untersucht wurde das Rißausbreitungsverhalten eines Risses unter einachsiger Zuglast von der Anfangslänge $2a = 100$, der sich bis zu einer Gesamtlänge von $2a = 400$ ausbreitet. Der Riß wurde um $\beta_0 = 0^\circ, 30^\circ$ und 60° gegenüber der Senkrechten zur Lastachse angestellt, so daß der anfängliche Anteil des Mode II zunahm. Mit Hilfe des Standard Finite-Elemente Programmes ANSYS wurden die Spannungs- und Verschiebungsfelder des Problems berechnet und daraus über die Spannungsintensitätsfaktoren der *mixed-mode*-Parameter. Gleichung (3.3.4) lieferte die jeweils nächste Ausbreitungsrichtung. Simuliert wurden Schrittweiten von 4%, 8% und 16% der anfänglichen Rißlänge. Abbildung 3.16 zeigt einen typischen Schritt der Finite Elemente Berechnung.

Die Abbildung 3.17 zeigt das Riausbreitungsverhalten für die verschiedenen Schrittweiten. Die Schwankungsbreite durch numerische Ungenauigkeiten kann gut aus der Kurve $\beta_0 = 0^\circ$ abgelesen werden, die als analytische Lösung eine gerade Linie senkrecht zur Zugachse hat. Bei beiden *mixed-mode* Rissen steht jeweils zu Beginn der Ausbreitung ein relativ scharfer Knick, der die Rißausbreitungsrichtung unter die Orthogonale zur Lastachse führt, der sich beide Risse im weiteren Verlauf der Ausbreitung dann asymptotisch annähern. Das Ausbreitungsverhalten ist so gut wie gar nicht von der gewählten Schrittlengthe abhängig, so daß die jeweiligen Graphen fast nicht zu unterscheiden sind. Die Tendenz des Risses sich unter Mode I auszubreiten, bestätigen auch die Graphen des *mixed-mode*-Parameters λ , der sich in wenigen Schritten $\lambda = 0$ nähert (s. Abb. 3.18). Der Parameter λ zeigt allerdings eine leichte Abhängigkeit von der Schrittweite. Je kürzer diese ist, umso schneller kann sich λ dem Nullwert annähern. Dies gilt quivalent auch für den Knickwinkel (s. Abb. 3.19). Der ‘‘effektive’’ Winkel β_{eff} ist nicht physikalisch motiviert und ist einfach der Winkel, den die Verbindung der beiden Rißspitzen mit der Senkrechten zur Lastachse bildet. Dieser ‘‘effektive’’ Winkel zeigt noch einmal die Drehung des Risses auf, die ihn asymptotisch orthogonal zur Lastachse ausrichtet; diese Drehung wiederum ist nicht abhängig von der Schrittweite (s. Abb. 3.20).

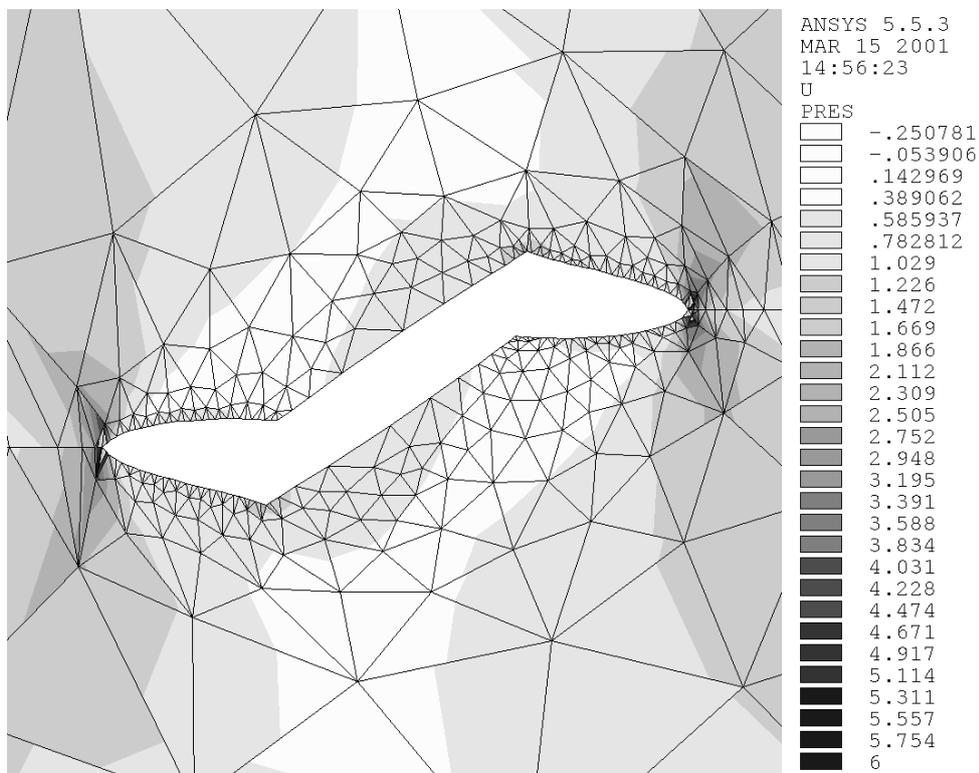
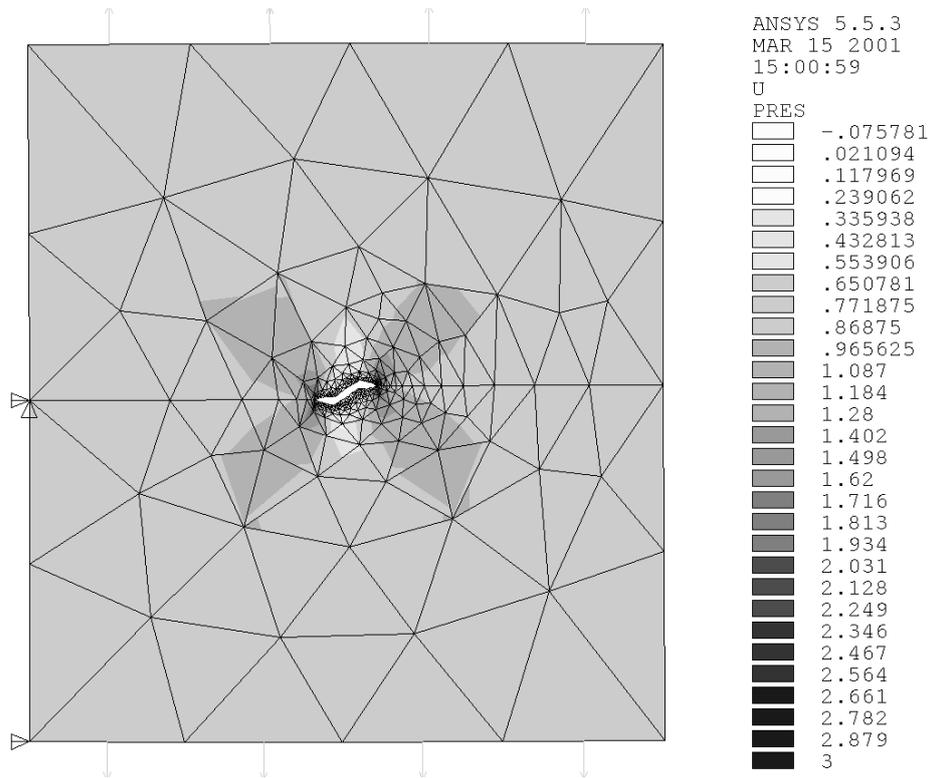


Abbildung 3.16: FEM-Diskretisierung der Rißausbreitungssimulation (mit v. Mises-Spannungen). Oben: Gesamtproblem. Unten: Detailansicht des abgeknickten Risses

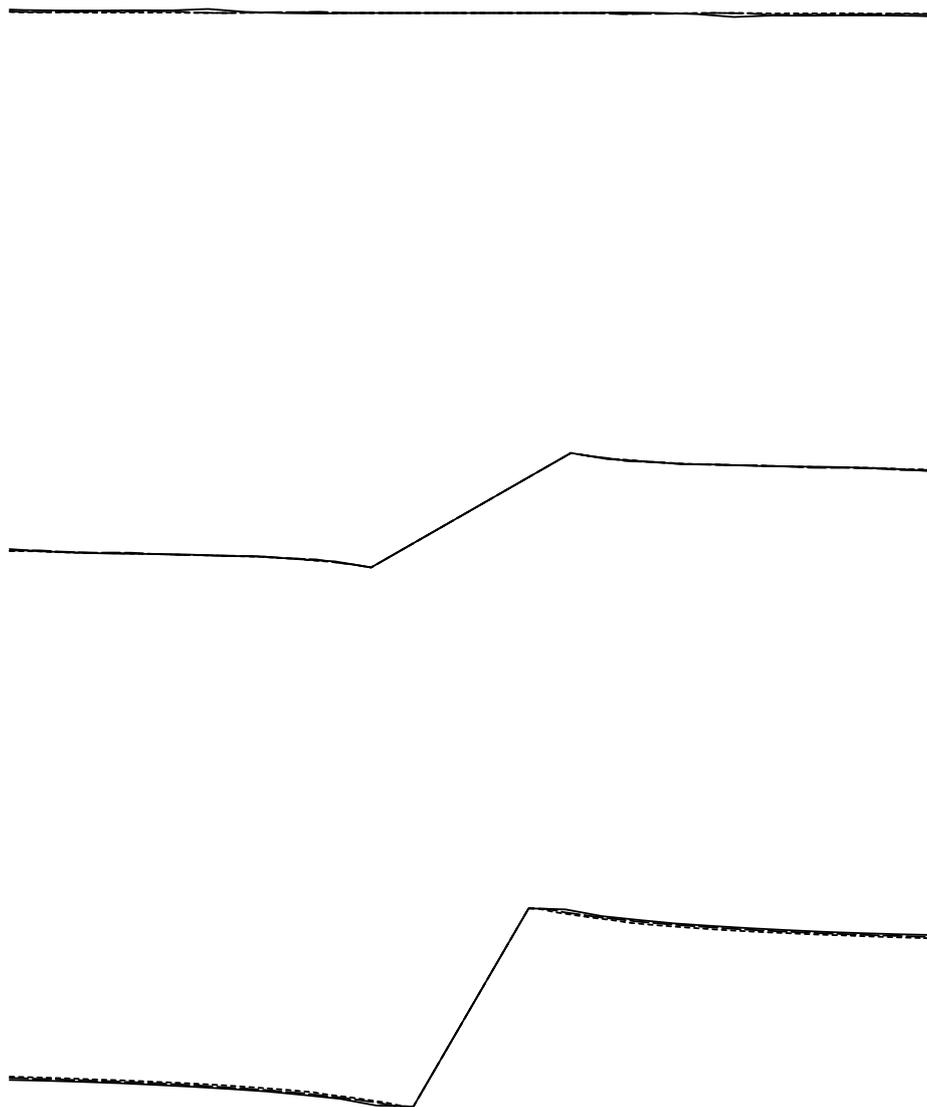


Abbildung 3.17: Rißausbreitungskurven für $\beta_0 = 0^\circ, 30^\circ$ und 60° bei verschiedenen Schrittweiten

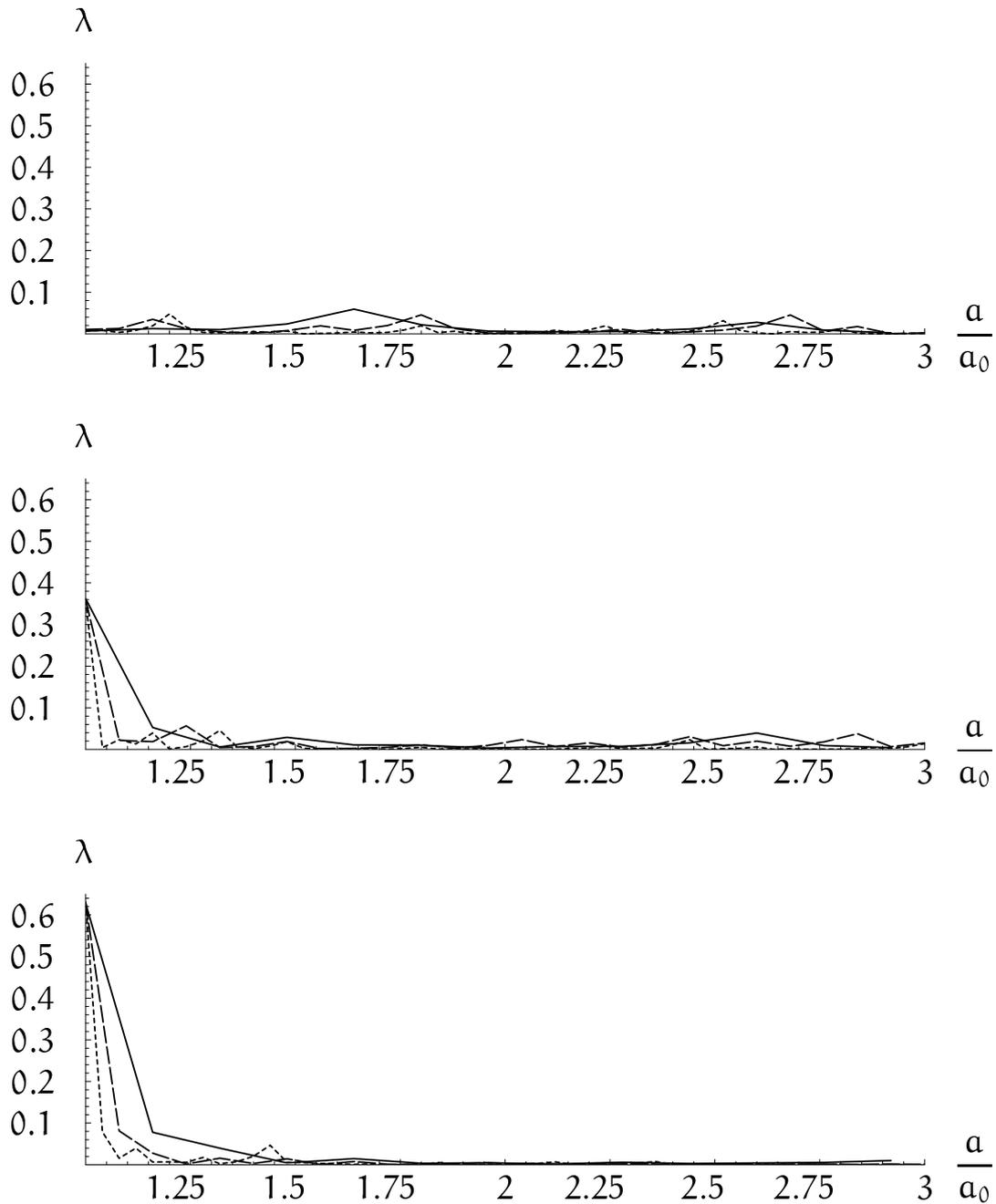
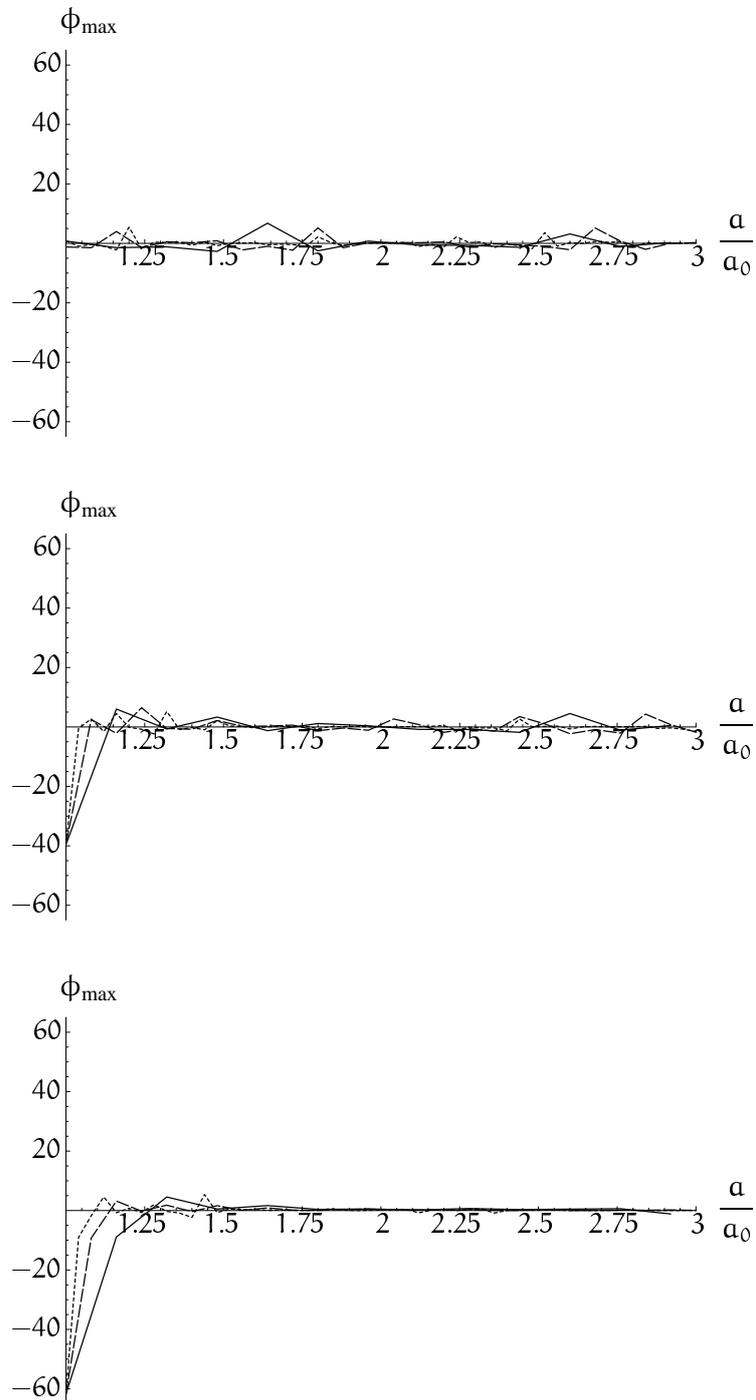


Abbildung 3.18: *mixed-mode*-Parameter über relativer Rißlänge für $\beta_0 = 0^\circ, 30^\circ$ und 60°

Abbildung 3.19: Knickwinkel ϕ_{\max} über relativer Rißlänge für $\beta_0 = 0^\circ, 30^\circ$ und 60°

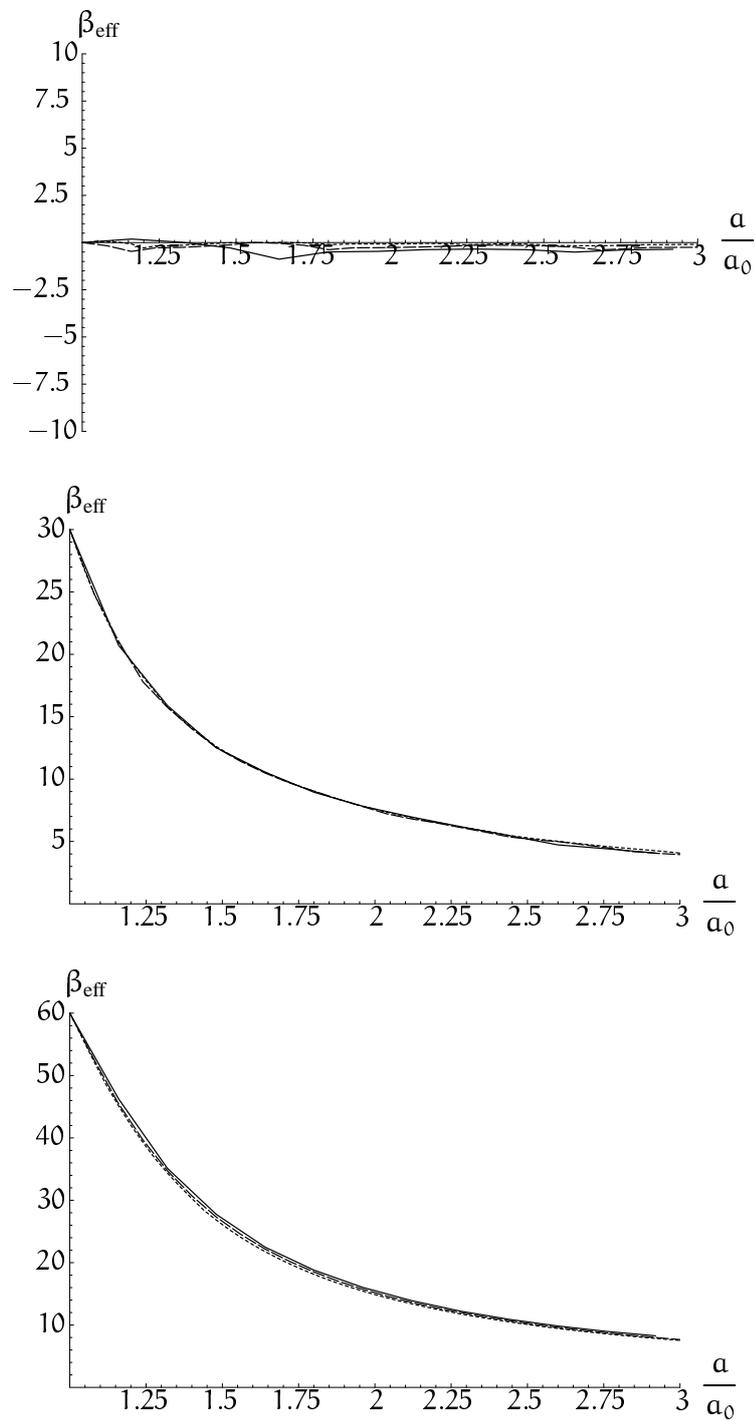


Abbildung 3.20: Effektiver Winkel β_{eff} über relativer Rißlänge für $\beta_0 = 0^\circ, 30^\circ$ und 60°

4 Schädigungsgesetz

Inhaltsverzeichnis

4.1 Mikromechanik der Rißausbreitung	116
4.1.1 Gleichungen der 2-D Rißausbreitung	117
4.1.2 Ersatzrißmodell	119
4.2 Mikro-Makro Übergang	121
4.2.1 Nicht-interagierende Risse	121
4.2.2 Schemata für interagierende Risse	123
Selbstkonsistentes Schema	123
Methode von Mori-Tanaka / Methode des effektiven Feldes	124
Modelle zweiter Ordnung in der Rißdichte	125
4.2.3 Äquivalenz der Dissipation	126
Mikrospannung	129
4.3 Evolutionsgesetz der Rißausbreitung	129
4.3.1 Generalisiertes Paris' law	129
4.3.2 Äquivalenz zu Paris' law	132
4.3.3 Berechnung der Schädigungsevolution	132
4.4 Kontinuums-Tangentialoperator	134
4.4.1 Unilaterale Schädigungsbedingungen	135
4.5 Numerische Simulation	138
4.5.1 Monotoner Zugversuch	138
4.5.2 Zyklischer Zugversuch und Reihenfolgeeffekt	142
Test des Ausgangsmaterials	142
Belastungsfolge a): Last niedrig, hoch	144
Belastungsfolge b): Last hoch, niedrig	148
4.5.3 Lebensdauerberechnung	151

In diesem Kapitel sollen die Gleichungen der Rißausbreitung, wie sie in Kapitel 3 dargestellt werden, als Grundlage der mikromechanischen Betrachtungen dienen. Aus diesen mikromechanischen Betrachtungen werden dann mittels einer geeigneten Homogenisierungsvorschrift das Dissipationspotential der Schädigung und das Schädigungs-Evolutionsgesetz abgeleitet. Hierzu werden zunächst verschiedene Homogenisierungsansätze für Körper mit Rissen, vor allem basierend auf Untersuchungen von KACHANOV, diskutiert (KACHANOV 1992; KACHANOV 1993; MAUGE & KACHANOV 1994). Anschließend wird ein eigener Homogenisierungsansatz präsentiert, der über die Äquivalenz der Mikro- und Makrodissipation die thermodynamische Konsistenz der Homogenisierung sichert.

4.1 Mikromechanik der Rißausbreitung

Aus Gründen der Einfachheit soll hier nur ein Schädigungsgesetz für ebene Probleme hergeleitet werden. Dies hat den Vorteil, daß diesem Schädigungsgesetz nur die wesentlich einfacheren Gleichungen der zweidimensionalen Rißausbreitung zugrunde liegen. Bei ebenen Riproblemen eines Einzelrisses in einer Platte reicht, zumindest für die Beschreibung eines geraden Anfangsrisses, die Angabe zweier Parameter, nämlich der Rißlänge $2a$ und einer Orientierung bezüglich eines Koordinatensystems durch einen Winkel β . Bei dreidimensionalen Rissen sind für das einfache Problem eines elliptischen Innenrisses bereits fünf Parameter erforderlich, die beiden Hauptachsen, der Normalenvektor auf die Riebene und ein Winkel, der die Rotationsorientierung der Hauptachsen bezüglich des Normalenvektors angibt. Hinzu kommt, daß bei dreidimensionalen Riproblemen die Spannungsintensitätsfaktoren (SIFen) entlang der Rißfront variieren und die Gleichgewichtsbedingung somit punktförmig zu erfüllen ist. Wie in Zusammenhang mit den Homogenisierungsanstzen weiter unten diskutiert wird, ist es sinnvoll, das Verhalten eines Einzelrisses in einer Einheitszelle zu untersuchen.

4.1.1 Gleichungen der 2-D Rißausbreitung

Aus oben dargelegten Gründen wird also das Problem eines zweidimensionalen Risses in einer unendlichen Scheibe betrachtet (s. Abb. 4.1). Wenn man von einem geraden Anfangsriß ausgeht, erhält man das einfache Problem eines Risses der Länge $2a$, der zur x -Achse einen Winkel β aufweist.

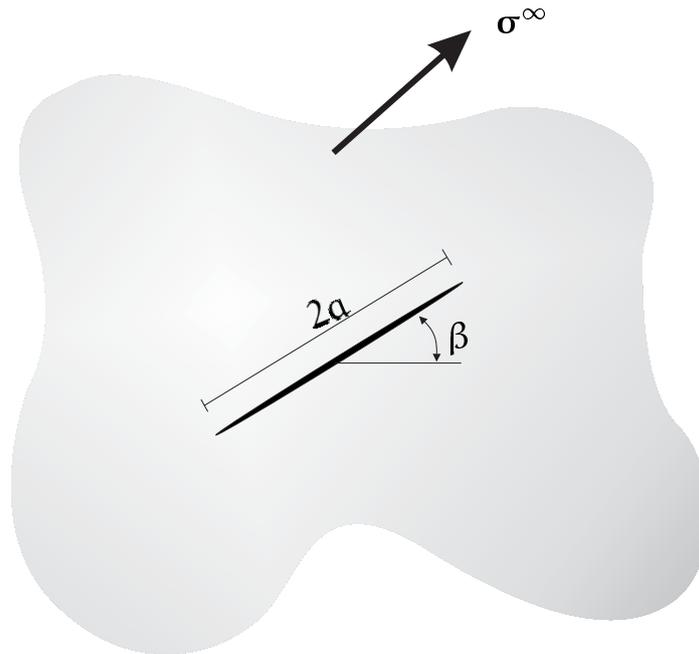


Abbildung 4.1: Angestellter gerader Riß in unendlicher Scheibe

Die SIFen (am nicht abgeknickten Riß) für dieses Problem fand bereits IRWIN (1957) zu

$$K_I = \sqrt{\pi a} \sigma_{\eta\eta}^\infty, \quad (4.1.1)$$

$$K_{II} = \sqrt{\pi a} \sigma_{\eta\xi}^\infty, \quad (4.1.2)$$

mit den auf die Rißebeine projizierten (im Unendlichen angreifenden) Spannungen

$$\sigma_{\eta\eta}^\infty = \sigma_{11}^\infty \sin^2 \beta + \sigma_{22}^\infty \cos^2 \beta + \sigma_{12}^\infty \sin 2\beta, \quad (4.1.3)$$

$$\sigma_{\eta\xi}^\infty = \frac{1}{2}(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) \sin 2\beta + \sigma_{12}^\infty \cos 2\beta. \quad (4.1.4)$$

Wie in Zusammenhang mit der Rißausbreitungssimulation erwähnt, wird nur

noch ein *mixed-mode*-Faktor benötigt

$$\lambda = \frac{|K_{II}|}{K_I + |K_{II}|}, \quad (4.1.5)$$

wobei hier der Absolutwert von K_{II} genommen wird, um Risse mit Schublasten in beiden Richtungen zuzulassen, und somit ein Abknicken des Risses nach links oder nach rechts. Die Abhängigkeit des Knickwinkels von λ ist bereits oben durch folgende Funktion angegeben worden

$$\phi_{\max} = \text{sgn}(K_{II}) \left(C_1 \lambda^3 - C_2 \sin^2(C_3 \lambda) - C_4 \tanh\left(\frac{2}{C_4} \lambda\right) \right), \quad (4.1.6)$$

$$C_1 = 0.7096600682165185,$$

$$C_2 = 0.0977254019518794,$$

$$C_3 = 3.9174096030707686,$$

$$C_4 = 13.158789485704737.$$

Der Term $\text{sgn}(K_{II})$ erscheint, um die Änderung der Knickrichtung bei umgekehrtem Vorzeichen der Schublast $\sigma_{\eta\xi}$ auf den Riß zu bewirken. Damit wird dann die treibende Kraft auf den Riß bestimmt

$$G^* = \max_{\phi} |d_i| = \frac{1 - \nu^2}{E} \left[(K_I^*(\phi_{\max}))^2 + (K_{II}^*(\phi_{\max}))^2 \right]. \quad (4.1.7)$$

Über die Einführung eines Dissipationspotentials in Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrates für die Rißausbreitung kann dann eine Evolutionsgleichung für die Rißlänge

$$\dot{a} = \hat{g}(a, G^*) \dot{G}^* \quad (4.1.8)$$

angegeben werden.

Diese einfache analytische Form geht allerdings schon nach den ersten Ausbreitungsschritten verloren, da für Risse mit mehreren Knicken keine analytischen Ausdrücke für die SIFen zur Verfügung stehen. Aus dem obigen Gleichungssystem kann also nicht die gesamte Trajektorie des Risses bestimmt werden. Vielmehr ist hierzu eine Finite Elemente Analyse des mehrfach abgknickten Risses notwendig, wie sie in Abschnitt 3.3 demonstriert wurde. Da nun aber das Verhalten des Körpers mit Riß als mikromechanische Grundlage einer makroskopischen Schädigungsanalyse dienen soll, wäre eine Rißausbreitungssimulation auf Gaußpunkt-Ebene für eine FEM-Simulation des Makroprozesses notwendig. Solch ein Verfahren ineinander geschachtelter FEM-Analysen haben FEYEL & CHABOCHE (2000) vorgeschlagen und mit Hilfe

der Routinen aus 3.3 könnte eine solche Analyse durchgeführt werden. Die hierfür benötigte Rechenleistung ist allerdings äußerst groß, so daß im folgenden Abschnitt eine alternative Vorgehensweise vorgeschlagen wird.

4.1.2 Ersatzrißmodell

Wie im vorhergehenden Abschnitt dargelegt, sind die Gleichungen für einen geraden Riß relativ einfach analytisch darzustellen. Deshalb wird nun der abgeknickte Riß in jedem infinitesimalen Schritt seiner Ausbreitung wiederum durch einen geraden Riß ersetzt (s. Abb. 4.2). Dieser Ersatzriß soll gewisse

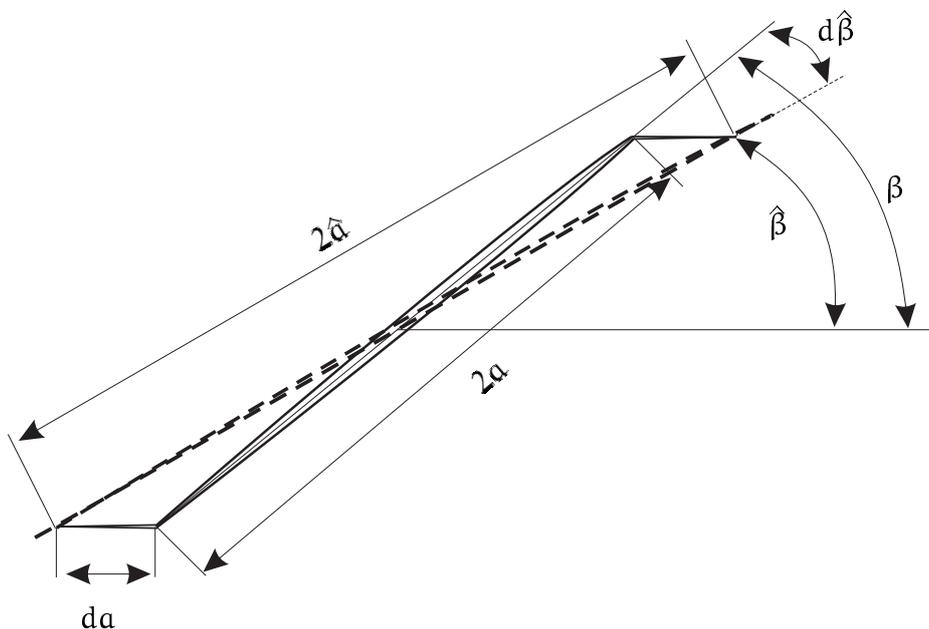


Abbildung 4.2: Abgeknickter Riß und äquivalenter Ersatzriß

Eigenschaften des dazu äquivalenten, abgeknickten Risses aufweisen. Solche Eigenschaften könnten sein (Größen des Ersatzrisses sind durch einen übergestellten “Hut” gekennzeichnet):

- identische SIFen $\hat{K}_I, \hat{K}_{II} = K_I^*, K_{II}^*$,
- identische treibende Kraft $\hat{G}^* = G^*$,
- identischer *mixed-mode*-Faktor $\hat{\lambda} = \lambda^* = \frac{|K_{II}^*|}{K_I^* + |K_{II}^*|}$,
- identischer infinitesimaler Rißzuwachs $d\hat{a} = da$,

- identische Dissipation durch Rißwachstum.

Wie Abbildung 4.2 zu entnehmen ist, gibt es nur zwei Parameter des Ersatzrisses, die angepaßt werden können: \hat{a} und $\hat{\beta}$. Somit können nicht alle obigen Eigenschaften gleichzeitig erfüllt werden. Deshalb ist zu entscheiden, welche essentiell für die mikromechanischen Eigenschaften des Risses und insbesondere für die Homogenisierungsprozedur und die daraus folgende Schädigungsevolution auf der Makroebene sind.

Auf mikromechanischer Ebene ist eine offensichtliche Forderung, daß die Evolution der Rißlänge für den abknickenden und den Ersatzriß identisch sein muß:

$$d\hat{a} = da. \quad (4.1.9)$$

Dies ist notwendig, um weiterhin eine sinnvolle Interpretation der Rißlänge zu ermöglichen und damit den Anschluß an bekannte Rißausbreitungsmodelle, wie z.B. *Paris' law* (Paris 1962), zu erhalten.

Die zweite Forderung ist thermodynamischer Natur und direkt mit der weiter unten vorgeschlagenen Homogenisierungsprozedur verknüpft: Der Ersatzriß und der abknickende Riß sollen bei ihrer Ausbreitung dieselbe Dissipation aufweisen:

$$\hat{\mathcal{D}}_{\text{RiB}} = \mathcal{D}_{\text{RiB}}. \quad (4.1.10)$$

Die infinitesimale Dissipation des abknickenden Risses läßt sich leicht mit Hilfe der treibenden Kraft (auf die beiden Rißspitzen) für die Rißausbreitung ausdrücken

$$\mathcal{D}_{\text{RiB}} = 2G^* \dot{a} \quad (4.1.11)$$

Die Dissipation des geraden Ersatzrisses erhält man aus der Energie, die für seine Erzeugung verbraucht wurde. Bei selbstähnlicher Rißausbreitung gilt

$$\hat{\Psi}_{\text{RiB}} = 2 \int_0^{\hat{a}} \hat{J}_1 d\hat{a}, \quad (4.1.12)$$

wobei der Faktor 2 wiederum aufgrund der zwei Rißspitzen erscheint. \hat{J}_1 bezeichnet die erste Komponente des oben präsentierten J-Integral-Vektors, welche identisch mit dem bekannten J-Integral ist (ESHELBY 1951; CHEREPANOV 1967; CHEREPANOV 1968; RICE 1968A; RICE 1968B)

$$\hat{J}_1 = \frac{1 - \nu^2}{E} (\hat{K}_I^2 + \hat{K}_{II}^2). \quad (4.1.13)$$

Die SIFen \hat{K}_I und \hat{K}_{II} ergeben sich aus Glg. (4.1.1)-(4.1.4). Die Dissipation des Ersatzrisses läßt sich dann durch

$$\hat{\mathcal{D}}_{\text{RiB}} = \hat{\psi}_{\text{RiB}}(\hat{a}, \hat{\beta}) \quad (4.1.14)$$

angeben, wobei die Energie nur von der Rißlänge \hat{a} und dem Winkel $\hat{\beta}$ abhängt

$$\hat{\mathcal{D}}_{\text{RiB}} = \frac{\partial \hat{\psi}_{\text{RiB}}}{\partial \hat{\beta}} \frac{d\hat{\beta}}{dt} + \frac{\partial \hat{\psi}_{\text{RiB}}}{\partial \hat{a}} \frac{d\hat{a}}{dt}. \quad (4.1.15)$$

Wenn nun die erste Forderung (4.1.9) benutzt wird, kann das Wachstum des abknickenden Risses beschrieben werden, indem in jedem Schritt der gerade Teil des abknickenden Risses als Ausgangspunkt der Drehung des Ersatzrisses angenommen wird

$$\hat{\beta}|_{d\hat{a}=0} = \beta. \quad (4.1.16)$$

Auf diese Weise gewinnt man die folgende Differentialgleichung für die Drehung des Ersatzrisses während seiner Ausbreitung

$$\frac{d\hat{\beta}}{d\hat{a}} = 2 (G^* - \hat{J}_1) / \frac{\partial \hat{\psi}_{\text{RiB}}}{\partial \hat{\beta}}. \quad (4.1.17)$$

4.2 Mikro-Makro Übergang

Im folgenden werden einige Homogenisierungsansätze für Körper mit Rissen, wie sie z.B. von KACHANOV (1992) diskutiert werden, angegeben, und ihre Eignung für die Formulierung eines Schädigungsgesetzes diskutiert. Eine Bewertung der Homogenisierungsansätze muß über die von KACHANOV (1992) angegebene hinausgehen, da für ein Schädigungsgesetz nicht nur die korrekte Wiedergabe von homogenisierten Eigenschaften, wie dem Elastizitätsmodul, als Momentaufnahme wichtig ist, sondern auch die Tauglichkeit zur Formulierung eines Evolutionsgesetzes im oben präsentierten finiten Schädigungsrahmen.

4.2.1 Nicht-interagierende Risse

Die einfachste Annahme, um das Problem eines Einzelrisses in einer Einheitszelle zu homogenisieren, ist die, daß die Risse nicht interagieren. Wenn das

ungeschädigte Material isotrop ist, ist somit auch die Matrix, in die der RiB eingebettet ist, isotrop. Die Spannungen, die auf den RiB wirken, sind die des makroskopisch aufgebrauchten Spannungs-Fernfeldes σ^∞ , da Einflüsse der inhomogenen und singulären Felder der benachbarten Risse vernachlässigt werden. Für einen geraden RiB kann das Problem dann analytisch behandelt werden. Die Energie des Risses ist (Gl. (4.1.12))

$$\hat{\psi}_{\text{RiB}} = 2 \int_0^{\hat{a}} \hat{J}_1 d\hat{a}. \quad (4.2.1)$$

Somit kann die (komplementäre) freie Energiedichte der Einheitszelle als

$$\psi = \psi_0 + \frac{1}{A} \hat{\psi}_{\text{RiB}} \quad (4.2.2)$$

geschrieben werden, mit ψ_0 der freien Energiedichte des ungeschädigten Körpers, A der Fläche der Einheitszelle. Es wird gefordert, daß die Energie, die für das RiBwachstum benötigt wurde, durch das elastische Potential der Einheitszelle zur Verfügung gestellt wurde. Der Nachgiebigkeitstensor ergibt sich dann zu

$$\mathbb{C}^{e-1} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma} = \mathbb{C}_0^{e-1} + \Delta \mathbb{C}^{e-1}, \quad (4.2.3)$$

wobei \mathbb{C}_0^{e-1} der ungeschädigte Nachgiebigkeitstensor ist und

$$\Delta \mathbb{C}^{e-1} = \frac{1}{A} \frac{\partial^2 \hat{\psi}_{\text{RiB}}}{\partial \sigma \otimes \partial \sigma} \quad (4.2.4)$$

die Änderung des Nachgiebigkeitstensors aufgrund des Risses darstellt. Der bekannte Zusammenhang zwischen dem J-Integral und den SIFen

$$J_1 = \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} (K_I^2 + K_{II}^2), \quad (4.2.5)$$

mit E_0 dem Elastizitätsmodul und ν_0 der Poissonsahl der Matrix, führt mit Hilfe von (4.1.1)-(4.1.4) auf

$$\hat{\psi}_{\text{RiB}} = \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \pi a^2 \left(\left(\frac{1}{2} (\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) \sin 2\beta + \sigma_{12}^\infty \cos 2\beta \right)^2 + (\sigma_{11}^\infty \sin^2 \beta + \sigma_{22}^\infty \cos^2 \beta + \sigma_{12}^\infty \sin 2\beta)^2 \right). \quad (4.2.6)$$

Daraus erhält man die Änderung des Nachgiebigkeitstensors aufgrund des Risses (die Notation entspricht der von MEHRABADI & COWIN (1990) für den 2-D Fall)

$$\Delta \mathbb{C}^{e-1} = \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \frac{\pi a^2}{A} \begin{pmatrix} 2 \sin^2 \beta & 0 & \sin 2\beta - \sin 4\beta \\ 0 & 2 \cos^2 \beta & \sin 2\beta + \sin 4\beta \\ \sin 2\beta - \sin 4\beta & \sin 2\beta + \sin 4\beta & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.2.7)$$

Dieses Ergebnis für einen einzelnen Riß in einer Einheitszelle, belastet durch ein homogenes Fernfeld, hat einen größeren Anwendungsbereich als erwartet (KACHANOV 1992). Dies geht auf zwei Tatsachen zurück. Die erste ist der wesentliche Unterschied zwischen der Annahme von nicht interagierenden Rissen (*non-interacting cracks*) und der Annahme der kleinen Rißdichte (*dilute concentration/ small crack density*), $a^2/A \ll 1$. Die zweite Annahme linearisiert nämlich in der Rißdichte und kann deshalb *a priori* nicht für große Rißdichten gelten. Für die erste Annahme hat KACHANOV (1992) jedoch gezeigt, daß, wenn die Positionen der Risse statistisch unabhängig sind, sich die gegenläufigen Effekte von Spannungsüberhöhung und Spannungsabschirmung der Risse weitgehend egalalisieren. Die Ergebnisse, die unter dieser Prämisse gewonnen werden, gelten also auch für große Rißdichten.

4.2.2 Schemata für interagierende Risse

In diesem Abschnitt werden einige Homogenisierungsansätze diskutiert, die die Interaktion der Risse untereinander in angenäherter Form berücksichtigen sollen.

Selbstkonsistentes Schema

Hier wird eine repräsentative Inhomogenität (Einschluß, Hohlraum, Riß) in eine Matrix eingefügt, die die effektiven (elastischen) Eigenschaften aufweist, so daß der Einfluß der Interaktion mit den umgebenden Inhomogenitäten durch eine geänderte Steifigkeit des umgebenden Materials repräsentiert wird (BRUGGEMAN 1935; ESHELBY 1957; KRÖNER 1958; BUDIANSKY 1965; HILL 1965; HASHIN 1968). BUDIANSKY & O'CONNEL (1976) haben die Methode für Rißprobleme mit zufälligen Riorientierungen entwickelt. GOTTESMAN, HASHIN & BRULL (1980) haben die Methode auf eine orthotrope

Matrix erweitert und HORII & NEMAT-NASSER (1983) haben die Methode auf 2-D reibungsbehaftete Risse angewendet. Die Methode führt für Risse stets zu einer Reduktion der Steifigkeit des umgebenden Materials, unabhängig von den Positionen der Risse. Ein Abschirmungseffekt kann also nicht wiedergegeben werden. Ein Nachteil der Methode ist, daß der Typ der Anisotropie und die Orientierung ihrer Anisotropieachsen *a priori* festgelegt werden muß. Diese sind außer bei zufälligen Rißorientierungen (Isotropie) und parallelen Feldern von Rissen (Orthotropie, deren Achsen mit den Rißnormalen und -tangente zusammenfallen) nicht offensichtlich. Außerdem muß das entsprechende Rißproblem eines Risses in einer anisotropen Matrix, dessen Orientierung nicht mit den Anisotropieachsen zusammenfällt, gelöst werden, was für den allgemeinen Fall nach Kenntnis des Autors nicht analytisch gelöst ist und deshalb numerisch behandelt werden muß. Der vorhergesagte Steifigkeitsabfall für wachsende Rißdichten ist gegenüber anderen Schemata sehr groß, da Interaktionen nur in Form einer Steifigkeits*reduktion* des Umgebungsmaterials berücksichtigt werden können. Dies führt für viele Rißanordnungen zur Vorhersage von sogenannten “*cut-off*”-Punkten der Rißdichte, bei denen der Elastizitätsmodul verschwindet, z.B. im isotropen 2-D Fall $\rho = 1/A \sum_i a^{(i)2} = 1/Pi \approx 0.318$. KACHANOV, MONTAGUT & LAURES (1990) betonen, daß diese Ergebnisse nicht in Einklang mit numerischen Experimenten von 2-D Rißfeldern stehen und demonstrierten, daß der wirkliche Interaktionseffekt ziemlich stark von diesen Vorhersagen abweichen kann. Ähnliche Kritik gilt auch für das differentielle Schema (eine Übersicht findet man bei HASHIN (1988)), bei der die Rißdichte in infinitesimalen Schritten $d\rho$ erhöht wird, und die sich ergebenden Differentialgleichungen für den Elastizitätsmodul in Abhängigkeit von der Rißdichte integriert werden. Ein Vorteil dieser Methode gegenüber dem selbstkonsistenten Schema ist, daß es keinen “*cut-off*”-Punkt voraussagt.

Methode von Mori-Tanaka / Methode des effektiven Feldes

Die auf MORI & TANAKA (1973) zurückgehende Methode wird vornehmlich in der Mechanik der Komposit-Materialien eingesetzt. BENVENISTE (1986) hat sie auf 2-D Rißprobleme angewendet. Die Analyse wird wiederum auf einen einzelnen Riß in einer Einheitszelle reduziert. Hierbei wird der Riß in die ungeschädigte Matrix eingefügt, und durch ein effektives (Spannungs-

/Dehnungs)-Feld belastet, daß nicht dem aufgebrachten Fernfeld entsprechen muß. Für Risse geht diese Methode auf KANAUN (1974) zurück (s. auch (KANAUN 1980)). Ein Vorteil dieser Methode ist, daß das Belastungsfeld inhomogen sein kann, und somit Informationen über die Positionen der umgebenden Risse in das Ergebnis einfließen können. Die dadurch entstehenden Probleme würden allerdings äußerst komplex. Wichtig anzumerken ist, daß für den Fall eines homogenen, effektiven Feldes, die Vorhersagen dieser Methode mit der oben präsentierten Näherung der nicht-interagierenden Risse zusammenfallen. Dies ist eine Konsequenz der Tatsache, daß für eine Einheitszelle mit einem Riß unter Spannungs-(Dehnungs)-Belastung die mittlere Spannung (Dehnung) nicht zunimmt.

Modelle zweiter Ordnung in der Rißdichte

KACHANOV, MONTAGUT & LAURES (1990) diskutieren zwei Modelle dieses Typs, das von HUDSON (1980) und das von JU & TSENG (1992) (s. auch HUDSON (1981) und HUDSON (1986)). Diese berechnen die effektiven Steifigkeiten für zufällig orientierte und parallele Risse, mit einer Genauigkeit bis zur zweiten Ordnung in der Rißdichte. KACHANOV (1992) stellt heraus, daß das Model nach HUDSON (1980) bei höheren Rißdichten physikalisch nicht sinnvolle Ergebnisse liefert, da dann die Steifigkeit zunimmt. Bei dem Modell von JU & TSENG (1992) scheint das Problem sich überschneidender Risse nicht ausreichend berücksichtigt worden zu sein.

Abschließend soll hier bemerkt werden, daß außer der Methode von MORI & TANAKA (1973) bzw. KANAUN (1980) (die für homogene Effektivfelder mit der Näherung für nicht-interagierende Risse zusammenfällt) keine der näherungsweise Methoden für Rißprobleme großer Rißdichten befriedigende Ergebnisse liefert. Deshalb soll bei dem weiter unten vorgestellten Homogenisierungsverfahren von der Näherung der nicht-interagierenden Risse Gebrauch gemacht werden. Dies hat den Vorteil, daß die im vorhergehenden Abschnitt dargestellte Mikromechanik des Risses in der Einheitszelle das Problem ausreichend beschreibt, da diese Näherung genau auf as Problem eines Einzelrisses in einer unendlichen Scheibe führt. Allerdings haben alle bisher hier präsentierten Homogenisierungsmethoden den Nachteil, daß sie für "Momentaufnahmen" entwickelt wurden, d.h. um möglichst gut den Elastizitätsmodul eines durch eine bestimmte Anordnung von Rissen geschädigten Körpers zu

bestimmen. Für ein Schädigungsgesetz ist jedoch die Evolution der Makrogrößen in Abhängigkeit der Evolution des Risses von entscheidender Bedeutung. Hierbei muß insbesondere sichergestellt werden, daß der zweite Hauptsatz der Thermodynamik, sowie das Prinzip der maximalen Dissipation sowohl auf der Makroebene als auch auf der Mikroebene erfüllt werden. Ziel der Homogenisierung ist es deshalb nicht, direkt den geschädigten Elastizitätsmodul anzugeben, sondern vielmehr ein Evolutionsgesetz der Schädigung abzuleiten, aus dem dann durch Integration des Stoffgesetzes die Änderung des Elastizitätsmoduls folgt. Deshalb wird im folgenden Abschnitt ein Homogenisierungsverfahren für eine durch einen wachsenden Riß geschädigte Einheitszelle vorgeschlagen, welches diese Forderungen explizit erfüllt.

4.2.3 Äquivalenz der Dissipation

Das Schädigungsevolutionsgesetz wurde bereits in Gleichung (2.2.86) präsentiert

$$\bar{\mathbf{d}}^d = \dot{\lambda}^d \frac{\partial \bar{\phi}^d}{\partial \bar{\mathbf{k}}^d}. \quad (4.2.8)$$

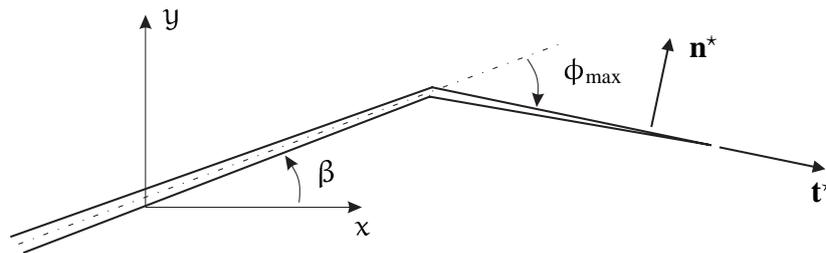
Das Ziel ist es nun, $\dot{\lambda}^d$ und $\bar{\phi}^d$ in Übereinstimmung mit der oben präsentierten Mikromechanik unter Berücksichtigung der obigen Diskussion der Homogenisierungsvorschriften herzuleiten.

Hierfür werden die folgenden Annahmen getroffen, die direkt mit der oben präsentierten Mikromechanik in Einklang stehen. Wir betrachten eine Einheitszelle der Fläche A und der Dicke t , die einen Riß der Länge $2a$ enthält, der gegenüber der x -Achse um einen Winkel β angestellt ist. Die Risse in benachbarten Einheitszellen werden nicht berücksichtigt. Vielmehr wirkt auf die Einheitszelle ein homogenes Fernfeld, so daß von der Näherung der nicht-interagierenden Risse Gebrauch gemacht wird.

Um eine direkte thermodynamische Konsistenz der Schädigungsevolution auf der Makroebene mit der Rißausbreitung auf der Mikroebene zu gewährleisten, wird die Äquivalenz der Mikro- und Makrodissipation gefordert:

$$\mathcal{D}^d = \bar{\mathbf{k}}^d : \bar{\mathbf{d}}^d = \frac{\dot{\psi}_{\text{RiB}}}{A} = \frac{2G^* \dot{a}}{A}. \quad (4.2.9)$$

Hierdurch wird deutlich, warum als Bedingung für den Ersatzriß die thermodynamische Äquivalenz des abgeknickten und des Ersatzrisses nötig war (Gl.

Abbildung 4.3: Rißspitze mit Normalenvektor \mathbf{n}^* und Ausbreitungsrichtung \mathbf{t}^*

(4.1.10)), denn ohne diese thermodynamische Äquivalenz, würde die obige Forderung nicht mehr als physikalisch sinnvoll erscheinen.

Die nächste Forderung folgt aus dem Zusammenhang zwischen dem sich ausbreitenden Riß und der daraus resultierenden Änderung der elastischen Eigenschaften. Bei einem geraden Riß ist bekannt, daß dieser die Struktur nur senkrecht zum Riß schädigt, die Eigenschaften in Ausbreitungsrichtung des Risses bleiben unbeeinflusst, d.h. der Elastizitätsmodul in Ausbreitungsrichtung des Risses ändert sich nicht. Dies wird äquivalent für einen Riß, der sich unter *mixed-mode* Bedingungen ausbreitet, wie folgt definiert: Die einzige Komponente der Rate des Schädigungstensors, die nicht verschwindet, ist diejenige senkrecht zur momentanen Rißausbreitungsrichtung

$$\bar{\mathbf{d}}^d = \bar{\mathbf{d}}_{\mathbf{n}^*\mathbf{n}^*}(\mathbf{n}^* \otimes \mathbf{n}^*). \quad (4.2.10)$$

Abbildung 4.3 verdeutlicht diesen Zusammenhang und führt den Vektor der momentanen Ausbreitungsrichtung \mathbf{t}^* und den Normalenvektor auf die neu am abgelenkten Riß entstehenden Rißufer \mathbf{n}^* ein. Die Wahl der anderen Rißspitze führt offensichtlich auch auf obige Gleichung. Diese Forderung stellt keine Einschränkung der *mixed-mode* Rißausbreitung dar und impliziert keine Mode I Rißausbreitung, vielmehr stellt sie eine Einschränkung der Wirkung des sich ausbreitenden Risses auf die Materialeigenschaften dar. Diese Bedingung darf nicht verwechselt werden mit dem häufig für spröde Schädigung von Beton angewendeten Schädigungsevolutionsgesetz, bei dem sich Schädigung senkrecht zu den Hauptzugspannungsrichtungen entwickelt (ORTIZ 1985; YAZDANI & SCHREYER 1988; YAZDANI 1993). Diese Arbeiten beinhalteten keine *mixed-mode* Ausbreitungsregel für Mikrorisse, sondern die dort vorgestellten Schädigungsmodelle entsprechen vielmehr einer Rißentstehung senkrecht zu den Hauptzugspannungsrichtungen und der selbstähnlichen Ausbreitung dieser Mikrorisse.

Obige Annahme über den Einfluß des Rißwachstums auf die Schädigung (4.2.10) vereinfacht Gl. (4.2.9) zu

$$\bar{k}_{n^*n^*} \cdot \bar{d}_{n^*n^*} = \frac{2G^*\dot{a}}{A}. \quad (4.2.11)$$

Um eine direkte Analogie zwischen den treibenden Kräften auf Mikro- und Makroebene zu etablieren, wird gefordert, daß die treibende Kraft auf die Rißspitze pro Flächeneinheit der Einheitszelle der treibenden Kraft für die Schädigung entspricht:

$$\bar{k}_{n^*n^*} = -\frac{2G^*t}{A}. \quad (4.2.12)$$

Das negative Vorzeichen muß hier eingeführt werden, damit eine Verlängerung des Risses zu einem Anwachsen der Schädigung und damit zu einem Abfall der Steifigkeit führt. Die Breite der Einheitszelle erscheint, da die Rißfront die Länge t aufweist. Wenn dieser Zusammenhang der treibenden Kräfte in Gleichung (4.2.11) einführt wird, ergibt sich das Evolutionsgesetz der Schädigung

$$\boxed{\bar{\mathbf{d}}^d = -\frac{\dot{a}}{t}(\mathbf{n}^* \otimes \mathbf{n}^*)}, \quad (4.2.13)$$

Hieraus kann dann der Multiplikator

$$\dot{\lambda}^d = -\frac{\dot{a}}{t} \quad (4.2.14)$$

und das Schädigungspotential

$$\bar{\phi}^d = |\bar{k}_{n^*n^*}| - \bar{h}_0^* \quad (4.2.15)$$

identifiziert werden, mit \bar{h}_0^* der ‘‘Fließgrenze’’ der Schädigung. Gleichung (4.2.12) in das Schädigungspotential eingeführt

$$\frac{1}{2} \frac{A}{t} \cdot \bar{\phi}^d = G^* - \frac{1}{2} \frac{A}{t} \bar{h}_0^*, \quad (4.2.16)$$

zeigt, daß die ‘‘Fließbedingung’’ der Schädigung der Gleichgewichtsbedingung des Risses entspricht (bis auf einen skalaren Faktor), wenn man die Fließgrenze mit der Oberflächenenergie identifiziert: $A/2t \cdot \bar{h}_0^* = 2\gamma$. Auf diese Weise wird das Prinzip der maximalen Dissipation automatisch sowohl auf der Mikro- als auch auf der Makroebene erfüllt.

Mikrospannung

Um die aus der linear-elastischen Bruchmechanik bekannten Gleichungen benutzen zu können, wurde in obigen Abschnitten als Symbol für die Spannung auf der Mikroskala σ verwandt. Diese Spannung ist jedoch nicht identisch mit Cauchyspannung des makroskopischen Rahmens. Vielmehr ist aufgrund der Annahme nicht-interagierender Risse, und somit einer ungeschädigten (isotropen) Matrix, die auf die Einheitszelle wirkende Mikrospannung σ^∞ diejenige Spannung, die bei einer aufgetragenen Deformation der Einheitszelle im ungeschädigten Material vorgelegen hätte:

$$\sigma^\infty = \bar{\mathbf{C}}_0^e : \bar{\mathbf{e}}, \quad (4.2.17)$$

d.h., daß der Einheitszelle die Deformation der Makroskala aufgeprägt wird.

4.3 Evolutionsgesetz der Rißausbreitung

Was nach der Kopplung der Rißausbreitungsgleichungen mit dem makroskopischen Schädigungsrahmen noch zu spezifizieren bleibt, ist ein Evolutionsgesetz für die Rißlänge a . Um mit dem dann entstehenden Satz von Gleichungen zyklische Lebensdauerberechnungen durchführen zu können, wird hier eine Generalisierung des Evolutionsgesetzes von PARIS (1962) benutzt. *Paris' law* stellt eine Evolutionsgleichung für die Rißlänge in Abhängigkeit der Schwingspielzahl N dar:

$$\frac{da}{dN} = C(K_{I_{\max}} - K_0)^\eta, \quad (4.3.1)$$

mit $K_{I_{\max}}$, dem sich aus der maximalen Last-Amplitude ergebenden SIF und K_0 einem Schwellwert der Rißbelastung für den Rißfortschritt. C und η sind Materialkennwerte.

4.3.1 Generalisiertes Paris' law

Eine thermodynamische Generalisierung des *Paris' laws* findet man bei LE-MAITRE & CHABOCHE (1990). Der Vorteil einer solchen Generalisierung liegt darin, daß man sich nicht auf zyklische Belastungsverläufe mit konstanter

Lastamplitude beschränken muß, sondern beliebige Zeitverläufe der Last beschreiben kann. Grundlage der thermodynamischen Beschreibung ist, wie im obigen Abschnitt, das Fließgesetz, bzw. Dissipationspotential, der Rißausbreitung:

$$f_{\text{RiB}} = \tilde{G}^* - H^* \quad (4.3.2)$$

mit

$$\tilde{G}^* = \left(\sqrt{G^*} - \sqrt{G_0^*} \right)^2, \quad (4.3.3)$$

wobei G_0^* , wie weiter unten deutlich wird, den Grenzwert des Rißfortschritts für eine Anfangsrißlänge a_0 darstellt. Das Dissipationspotential stellt, wie in der assoziierten Plastizität, die ‘‘Fließgrenze’’ für die Rißausbreitung dar:

$$\begin{aligned} f_{\text{RiB}} < 0 &\rightarrow \text{kein Rißfortschritt,} \\ f_{\text{RiB}} = 0 &\rightarrow \text{stabile Rißausbreitung.} \end{aligned}$$

H^* entspricht einem sich entwickelnden Grenzwert für \tilde{G}^* , d.h. einer Verfestigungsfunktion. Die Verfestigungsfunktion haben LEMAITRE & CHABOCHE (1990) in folgender Form postuliert:

$$H^* = C' h^{2/\eta}, \quad (4.3.4)$$

wobei η und C' Materialkennwerte sind, und η identisch mit dem entsprechenden Kennwert des *Paris' laws* (4.3.1) ist. Für den Parameter C' gilt der Zusammenhang

$$C' = \left(C \cdot \sqrt{E'} \right)^{-2/\eta}. \quad (4.3.5)$$

Hierbei ist E' der äquivalente Elastizitätsmodul E' :

$$E' = \begin{cases} E & \text{für den ebenen Spannungszustand,} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{für den ebenen Dehnungszustand.} \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Die Evolutionsgleichungen für a und h können wie folgt ausgedrückt werden:

$$\dot{a} = \dot{\lambda}^a \frac{\partial f_{\text{RiB}}}{\partial \tilde{G}^*} = \dot{\lambda}^a; \quad (4.3.7)$$

$$\dot{h} = -\dot{\lambda}^a \frac{\partial f_{\text{RiB}}}{\partial H^*} = \dot{\lambda}^a, \quad (4.3.8)$$

mit $\dot{\lambda}^a$ dem Multiplikator der Rißausbreitung. Die Konsistenzbedingung $\dot{f}_{\text{RiB}} = 0$, d.h., daß während des Belastungsvorganges die Fließbedingung erfüllt bleiben muß, führt über

$$\dot{f}_{\text{RiB}} = \frac{\partial f_{\text{RiB}}}{\partial \tilde{G}^*} \dot{\tilde{G}}^* + \frac{\partial f_{\text{RiB}}}{\partial h} \dot{h} = \dot{\tilde{G}}^* - \frac{dH^*}{dh} \dot{\lambda}^a = 0 \quad (4.3.9)$$

auf

$$\dot{a} = \dot{\lambda}^a = \langle \dot{\tilde{G}}^* \rangle / \frac{dH^*}{dh}, \quad (4.3.10)$$

wobei $\langle \rangle$ die MCAULEY-Klammern sind

$$\langle a \rangle = \begin{cases} a & , \text{ falls } a > 0, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases} \quad (4.3.11)$$

Durch Integration des Zusammenhangs

$$\dot{h} = \dot{\lambda}^a = \frac{\eta}{2C'} / \frac{dH^*}{dh} \quad (4.3.12)$$

zu

$$h = \left(\frac{\tilde{G}^*}{C'} \right)^{\eta/2} \quad (4.3.13)$$

und Einführen desselben in (4.3.10) erhalten wir schließlich die gesuchte Gleichung für den Rißfortschritt in Abhängigkeit der treibenden Kraft

$$\dot{a} = \frac{\eta}{2C'} \left(\frac{\tilde{G}^*}{C'} \right)^{\eta/2-1} \langle \dot{\tilde{G}}^* \rangle. \quad (4.3.14)$$

Die Fließfunktion können wir mit Hilfe von (4.3.13) zu

$$f_{\text{RiB}} = \tilde{G}^* \left(1 - (\tilde{G}^*/C')^{2/\eta-1} \right) \quad (4.3.15)$$

vereinfachen.

Die Bedeutung von G_0^* kann man aus

$$\dot{h} = \dot{\lambda}^a = \dot{a} \quad \Rightarrow \quad dh = da \quad (4.3.16)$$

erschließen, indem man diese Gleichung mit der Anfangsbedingung $h(a = a_0) = 0$ zu

$$h = a - a_0 \quad (4.3.17)$$

integriert. Dies führt mit (4.3.2) auf

$$f_{\text{RiB}}(a = a_0) = \left(\sqrt{G^*} - \sqrt{G_0^*} \right)^2, \quad (4.3.18)$$

mit der (anfänglichen) Bedingung für Rißfortschritt $G^* = G_0^*$.

4.3.2 Äquivalenz zu Paris' law

Abschließend soll gezeigt werden, daß das Fließgesetz (4.3.2) für monotone Lastzyklen auf eine, dem *Paris' law* äquivalente Gleichung führt. Dies gelingt durch Integration der Evolutionsgleichung (4.3.14) über ein Zeitintervall Δt , mit dem Maximalwert G_{max}^* und dem Minimalwert G_{min}^* von G^* :

$$\begin{aligned} \frac{da}{dN} &= \int_t^{t+\Delta t} \dot{a} dt = \int_{\tilde{G}_{\text{min}}^*}^{\tilde{G}_{\text{max}}^*} \frac{\eta}{2C'} \left(\frac{\tilde{G}^*}{C'} \right)^{\eta/2-1} d\tilde{G}^* \\ &= \frac{1}{C^{\eta/2}} (\tilde{G}_{\text{max}}^* - \tilde{G}_{\text{min}}^*), \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

mit

$$\tilde{G}_{\text{max}}^* = \langle G_{\text{max}}^* - G_0^* \rangle^2; \quad \tilde{G}_{\text{min}}^* = \langle G_{\text{min}}^* - G_0^* \rangle^2. \quad (4.3.20)$$

Falls man G_{min}^* kleiner als den Grenzwert G_0^* wählt, erhält man mit dem Zusammenhang zwischen G^* und K_I für selbständige Rißausbreitung

$$G^* = \frac{(1 - \nu^2) K_I^2}{E} \quad (\text{ebener Dehnungszustand}) \quad (4.3.21)$$

exakt *Paris' law* (vgl. Gl. (4.3.1))

$$\frac{da}{dN} = \frac{1}{C^{\eta/2}} \langle G_{\text{max}}^*{}^{1/2} - G_0^*{}^{1/2} \rangle^\eta = C (K_{\text{Imax}} - K_0)^\eta. \quad (4.3.22)$$

4.3.3 Berechnung der Schädigungsevolution

Zur Berechnung der Schädigungsevolution (4.2.13)

$$\bar{\mathbf{d}}^d = -\frac{\dot{a}}{t} (\mathbf{n}^* \otimes \mathbf{n}^*) \quad (4.3.23)$$

benötigt man zum einen die momentane Rißausbreitungsrichtung, die sich aus Abbildung 4.3 zu

$$\mathbf{n}^* = \begin{pmatrix} -\sin(\beta + \phi_{\max}) \\ \cos(\beta + \phi_{\max}) \end{pmatrix} \quad (4.3.24)$$

ergibt. Desweiteren hängt die Schädigungsevolution entscheidend von der Evolution der Rißlänge

$$\dot{a} = \hat{g}(\tilde{G}^*) \dot{\tilde{G}}^* \quad (4.3.25)$$

ab. Um die hierzu benötigte Zeitableitung von \tilde{G}^* zu bestimmen, sollen zunächst die funktionellen Abhängigkeiten von \tilde{G}^* betrachtet werden. Über Gleichung (4.1.7) hängt \tilde{G}^* von den SIFen am geknickten Riß K_Γ^* , $\Gamma = I, II$ ab. Diese wiederum ergeben sich über Gleichung (3.2.9) aus den SIFen am ungeknickten Riß K_Σ , $\Sigma = I, II$ und dem Knickwinkel ϕ_{\max} :

$$\begin{aligned} G^* &= G^*(K_\Gamma^*) = G^*(K_\Gamma^*(K_\Sigma, \phi_{\max})) \\ &= G^*(K_\Sigma(\sigma^\infty, \alpha, \beta), \phi_{\max}(\lambda(K_\Sigma))). \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Da der Knickwinkel über den *mixed-mode* Faktor λ auch von den SIFen K_Σ abhängt (s. Gl. (4.1.5)), und diese, wie in obiger Gleichung bereits angegeben, von den Spannungen σ^∞ , der Rißlänge α und dem Anstellwinkel β (s. Glg (4.1.1)-(4.1.4)), ergibt sich schließlich folgende funktionelle Abhängigkeit

$$G^* = G^*(\sigma^\infty, \alpha, \beta). \quad (4.3.27)$$

Die gesuchte Zeitableitung erhält man dann zu

$$\dot{G}^* = \frac{\partial G^*}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial G^*}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial G^*}{\partial \sigma^\infty} : \dot{\sigma}^\infty. \quad (4.3.28)$$

Der erste Term ergibt sich wegen der linearen Beziehung $G^* \sim \alpha$ zu

$$\frac{\partial G^*}{\partial \alpha} = \frac{G^*}{\alpha}. \quad (4.3.29)$$

Der zweite Term kann mit Hilfe der funktionellen Abhängigkeiten in Gleichung (4.3.26) durch

$$\frac{\partial G^*}{\partial \beta} = \frac{\partial G^*}{\partial K_\Gamma^*} \left(\frac{\partial K_\Gamma^*}{\partial K_\Sigma} + \frac{\partial K_\Gamma^*}{\partial \phi_{\max}} \cdot \phi'_{\max}(\lambda) \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial K_\Sigma} \right) \frac{\partial K_\Sigma}{\partial \beta} \quad (4.3.30)$$

ausgedrückt werden und ähnlich dazu der dritte Term

$$\frac{\partial G^*}{\partial \sigma^\infty} = \frac{\partial G^*}{\partial K_\Gamma^*} \left(\frac{\partial K_\Gamma^*}{\partial K_\Sigma} + \frac{\partial K_\Gamma^*}{\partial \phi_{\max}} \cdot \phi'_{\max}(\lambda) \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial K_\Sigma} \right) \frac{\partial K_\Sigma}{\partial \sigma^\infty}, \quad (4.3.31)$$

wobei über die wiederholten Indizes der Rißmodi Γ, Σ zu summieren ist. Die Zeitableitung des Anstellwinkels kann mit Hilfe der Differentialgleichung (4.1.17) als

$$\dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial a} \dot{a} = \left(2 (G^* - \hat{J}_1) / \frac{\partial \hat{\Psi}_{\text{RiB}}}{\partial \hat{\beta}} \right) \dot{a} \quad (4.3.32)$$

geschrieben werden. Dies ergibt dann folgende Form der Rißevolutionsgleichung

$$\dot{a} = \frac{\frac{\partial G^*}{\partial \sigma^\infty}}{1 - \hat{g}(G^*) \cdot \left(\frac{G^*}{a} + \frac{\partial G^*}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial a} \right)} : \dot{\sigma}^\infty \quad (4.3.33)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (4.2.17) gewinnt man folgende Schädigungsevolutionsgleichung

$$\bar{\mathbf{d}}^d = \frac{\left((\mathbf{n}^* \otimes \mathbf{n}^*) \otimes \frac{\partial G^*}{\partial \sigma^\infty} : \bar{\mathbf{C}}_0^e \right)}{1 - \hat{g}(G^*) \cdot \left(\frac{G^*}{a} + \frac{\partial G^*}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial a} \right)} : \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{A}} : \bar{\mathbf{d}} \quad (4.3.34)$$

4.4 Kontinuums-Tangentialoperator

Ähnlich der finiten Elastoplastizität muß zur Lösung des Makro-Randwertproblems die Spannungs-Dehungs-Beziehung in Ratenform formuliert werden. Die Lie-Ableitung der Spannungs-Dehungsbeziehung (Abschnitt 2.2 Gl. (2.2.89))

$$\bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{C}}^e : \bar{\mathbf{e}} \quad (4.4.1)$$

ergibt sich mit $\bar{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{b}}^d = 0$ und $\bar{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{e}} = \bar{\mathbf{d}}$ zu

$$\bar{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{C}}^e(\bar{\mathbf{b}}^d) : \bar{\mathbf{d}}, \quad (4.4.2)$$

wobei die funktionelle Abhängigkeit des geschädigten Elastizitätsmodul explizit angegeben wird, um zu betonen, daß simultan zur Spannungs-Dehungs-Beziehung noch die Evolution des geschädigten Finger-Tensors integriert werden muß. Dies erfolgt über den Zusammenhang

$$\dot{\mathbf{b}}^d = \frac{d}{dt} (\mathbf{F}^d \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^{dT}) = \bar{\mathbf{I}}^d \bar{\mathbf{b}}^d + \bar{\mathbf{b}}^d \bar{\mathbf{I}}^{dT}. \quad (4.4.3)$$

Die durch den schädigungsinduzierten Spintensor $\bar{\mathbf{w}}^d$ bewirkten Rotationen \mathbf{R}^d haben auf das Materialverhalten keine Auswirkung, wenn das ungeschädigte Material in der Referenzkonfiguration als isotrop angenommen wird. Darüberhinaus würden schädigungsinduzierte Rotationen bei Entlastung verschwinden, wodurch sie physikalisch nicht von der elastischen Rotation \mathbf{R}^e zu unterscheiden sind, da lediglich der symmetrische Anteil der Deformation über $\bar{\mathbf{b}}^d$ Einfluß auf das geschädigte Materialverhalten hat. Deshalb kann man obige Evolutionsgleichung wie folgt vereinfachen:

$$\dot{\mathbf{b}}^d = \bar{\mathbf{g}}^{-1} \bar{\mathbf{d}}^d \bar{\mathbf{b}}^d + \bar{\mathbf{b}}^d \bar{\mathbf{d}}^d \bar{\mathbf{g}}^{-1}. \quad (4.4.4)$$

Mit \mathbf{d}^d aus Gleichung (4.3.34) ergibt sich

$$\dot{\mathbf{b}}^d = (\bar{\mathbf{g}}^{-1} \bar{\otimes} \bar{\mathbf{b}}^d + \bar{\mathbf{b}}^d \bar{\otimes} \bar{\mathbf{g}}^{-1}) : \bar{\mathbf{A}} : \bar{\mathbf{d}}, \quad (4.4.5)$$

so daß die Gleichungen (4.3.32), (4.4.2), (4.4.5) als gekoppeltes Differentialgleichungs-System zu integrieren sind. Die Normale auf die Ausbreitungsrichtung erhält man aus dem funktionellen Zusammenhang

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n}^*(\beta, \phi_{\max}(\lambda)) = \mathbf{n}^*(\sigma^\infty, \beta). \quad (4.4.6)$$

Die expliziten Ausdrücke, die sich mit Hilfe der Matrix der Knickwinkel-funktionen (3.2.24)-(3.2.27) und der Gleichung für $\phi_{\max}(\lambda)$, Gl. (4.1.6) ergeben, können durch längere, aber elementare Umformungen gewonnen werden.

4.4.1 Unilaterale Schädigungsbedingungen

Es ist bekannt, daß sich ein Körper mit Riß, bei dem der Riß auf Druck belastet wird, sich anders verhält, als unter einer Zuglast. In Modellen, bei denen sich die Risse senkrecht zu den Hauptzugspannungen bilden und ausbreiten,

wird dies durch das Konzept der positiven und negativen Projektionen berücksichtigt, daß von LADEVEZE & LEMAITRE (1984), ORTIZ (1985) und MAZARS (1986) eingeführt wurde, und daß von SIMO & JU (1987), YAZDANI & SCHREYER (1988), JU (1989), STEVENS & LIU (1992), LUBARDA, KRAJČINOVIC & S. MASTILOVIC (1994), SCHREYER (1995) und anderen weiterentwickelt wurde. Hierbei wird über den positiven Projektionsoperator \mathbb{P}^+ der Spannungstensor σ so abgebildet, daß nur die auf positiven Eigenwerten und dazugehörigen Eigenprojektionen basierenden Anteile verbleiben:

$$\sigma^+ = \mathbb{P}^+ : \sigma, \quad (4.4.7)$$

mit

$$\mathbb{P}_{ijkl}^+ = \frac{1}{2}(S_{im}^+ S_{jn}^+ + S_{in}^+ S_{jm}^+), \quad \mathbf{S}^+ = \sum_{\Gamma=1}^m H(\lambda_\sigma^\Gamma) \sigma_\Gamma, \quad (4.4.8)$$

wobei die λ_σ^Γ die Eigenwerte von σ sind, m die Anzahl verschiedener Eigenwerte und σ_Γ die dazugehörigen Eigenprojektionen. H bezeichnet die Heaviside-Funktion. Entsprechend kann man für Druckbelastungen eine negative Projektion σ^- definieren. Das Schädigungspotential hängt dann bei Körpern mit unterschiedlicher Zug- und Druckfestigkeit unterschiedlich von diesen Spannungsanteilen ab. Bei ORTIZ (1985) findet man z.B. ein Fließgesetz der Form

$$f = \frac{1}{2}k\sigma^+ : \sigma^+ + \frac{1}{2}\sigma^- : \sigma^-, \quad (4.4.9)$$

wobei der Parameter k das Verhältnis der unterschiedlichen Bruchfestigkeiten widerspiegeln soll. Für die Ausbreitung von *mixed-mode*-Rissen, wie sie hier betrachtet wird, ist dieser Ansatz nicht ausreichend. Vielmehr soll eine unilaterale Bedingung mit Hilfe der Mikromechanik der Rißausbreitung angegeben werden.

Ein solche Bedingung basiert auf den SIFen des Mikrorisses. Wenn nämlich der SIF für Mode I kleiner als null wird ($K_I < 0$), steht der Riß unter Druckbeanspruchung. Die Rißufer sind, zumindest an der Rißspitze, in Kontakt. Eine zusätzliche Mode II-Belastung ($K_{II} \neq 0$) führt dann zu einem Reibproblem an den Rißspitzen. Um diese Komplikation zu vermeiden, kann man von perfekt haftenden Rißufern ausgehen, d.h. eine beliebig große Mode II-Belastung vermag bei negativem K_I kein Abgleiten der Rißufer aufeinander zu erzeugen. Um diesen Effekt zu erreichen, muß man in der Evolutionsgleichung der

Rißlänge den Term $H(K_I)$ einführen. Mit Hilfe der Gleichungen (4.1.1)-(4.1.4) kann man dies durch die Spannung $\sigma_{\eta\eta}^\infty$ ausdrücken. Schließlich erhält man aus (4.2.17) eine Bedingung für die Dehnungen:

$$\dot{\alpha} = H(\bar{\mathbf{e}} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) \cdot \bar{\mathbf{A}} : \bar{\mathbf{d}}, \quad (4.4.10)$$

die dafür sorgt, daß unter Druck keine Evolution der Schädigung stattfindet. \mathbf{n} ist die Normale auf den Riß

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.4.11)$$

Zu berücksichtigen ist darüberhinaus der Effekt, daß ein Riß unter Druckbeanspruchung, der obige, perfekt haftende Rißufer aufweist, zu keiner Änderung im Elastizitätsmodul führt. Deshalb muß der geschädigte Fingertensor $\bar{\mathbf{b}}^d$ für solche Belastungen der inversen Metrik der Zwischenkonfiguration $\bar{\mathbf{g}}^{-1}$ entsprechen. Der nach obiger Differentialgleichung (4.4.5) berechnete Tensor wird unter dieser Annahme wie folgt modifiziert:

$$\hat{\mathbf{b}}^d = \bar{\mathbf{g}}^{-1} - (\bar{\mathbf{g}}^{-1} - \bar{\mathbf{b}}^d) \cdot H(\bar{\mathbf{e}} : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})). \quad (4.4.12)$$

4.5 Numerische Simulation

Im folgenden Abschnitt soll das im vorhergehenden Abschnitt angegebene Gleichungssystem eines durch Mikrorisse geschädigten Körpers für einen einachsigen Zugstab integriert werden. Dieser enthält einen Mikroriß mit einem Anfangswinkel gegenüber der Zugachse. Untersucht werden sowohl monotone als auch zyklische Zugversuche von ungeschädigtem bzw. vorgeschädigtem Material. Dabei wird für zyklische Versuche der Einfluß des Reihenfolgeeffektes betrachtet. Abschließend wird die Lebensdauer eines Zugstabes unter zyklischer Belastung berechnet.

4.5.1 Monotoner Zugversuch

Zunächst soll das Verhalten im monotonen Zugversuch anhand eines relativ ‐zähen‐ Materials demonstriert werden. Die Bezeichnung ‐zäh‐ rührt daher, daß das Material große Riverlängerungen erträgt, ohne daß diese Risse instabil würden, d.h. das Material weist eine hohe Bruchzähigkeit auf. Der Riß weist anfänglich einen Winkel von $\beta = 30^\circ$ gegenüber der x-Achse auf. Der Zugversuch wird als dehnungsgesteuert, mit vorgegebener Deformation u_y , simuliert, um den Versuch bis hin zur spannungsfreien Trennung des Materials untersuchen zu können. Die Materialdaten des ersten Beispielmateriale sind zusammen mit der resultierenden Spannungs-Dehnungskurve in Abbildung 4.4 angegeben. Zu spezifizieren sind die elastischen Konstanten des ungeschädigten Materials, z.B. der Elastizitätsmodul E und die Poissonsahl ν . In Zusammenhang mit der Mikrorißausbreitung sind dann noch eine Anfangsrißlänge a_0 , der Anfangswinkel β_0 und die anfängliche Grenzwert der Rißausbreitung G_0^* anzugeben. Der angegebene Schwellwert σ_s entspricht der Spannung, für die das ungeschädigte Material durch beliebig viele Zyklen belastet werden kann, ohne eine Schädigungsakkumulation zu bewirken. Diese Spannung fällt zusammen mit der Dauerfestigkeitsgrenze im Wöhler-Diagramm (WÖHLER 1860). Aus Gleichung (4.3.21) und (4.1.1)-(4.1.4) folgt dann mit a_0 und E der Grenzwert G_0^* . Die Parameter des *Paris' law* C' und η vervollständigen den Satz der Parameter. Aufgetragen ist in Abbildung 4.4 die Cauchy-Spannung gegenüber der Ingenieurs-Dehnung $\epsilon = \Delta l/l_0$ in Prozent. Die maximal erreichbare Spannung im Zugversuch entspricht der Bruchspannung im spannungsgesteuerten Versuch und beträgt für das betrachtete Beispielmateriale $\sigma^* = 1376.8$ MPa.

Das unphysikalische Durchschwingen der Spannungs-Dehnungskurve in den Druckbereich beruht auf numerischen Ungenauigkeiten und ist keine Konsequenz des Modells.

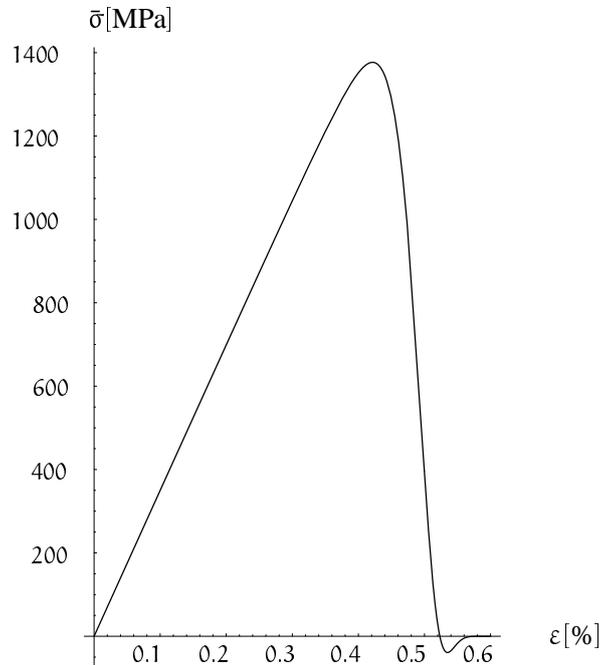


Abbildung 4.4: Spannungs-Dehnungs-Kurve eines Beispielmaterials

Material 1	
$E = 2.67 \cdot 10^5 \text{ MPa}$	$\nu = 1/3$
$\alpha_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$	$\beta_0 = 30^\circ \quad \sigma_s = 20 \text{ MPa}$
$C' = 0.04 \text{ N mm}^{-(1+2/\eta)}$	$\eta = 1.8$
$\sigma^* = 1376.8 \text{ MPa}$	

Abbildung 4.5 zeigt die relative Verlängerung des Mikrorisses, den Winkel β des Ersatzrisses, den Knickwinkel ϕ_{\max} (der als Absolutwert aufgetragen ist), den *mixed-mode*-Parameter λ , die Komponente des geschädigten Fingertensors in Richtung der Zugachse \bar{b}_{22}^d und den daraus resultierenden, geschädigten Elastizitätsmodul in Zugrichtung \bar{E} (relativ zum ungeschädigten Elastizitätsmodul). Der Graph der relativen Rißverlängerung zeigt deutlich das

explosionsartige Rißwachstum ab einer Dehnung von ca. $\varepsilon \approx 0.4\%$, ab der im Spannungs-Dehnungs-Diagramm bereits starke Abweichungen vom linearen Verhalten festzustellen sind. Diese explosionsartige Rißausbreitung führt bei der Dehnung von $\varepsilon = 0.453\%$ zur maximal ertragbaren Spannung des Materials und schließlich bei einer Dehnung von ca. $\varepsilon \approx 0.52\%$ zur spannungsfreien Materialtrennung. Währenddessen dreht sich der Riß so, daß er sich gegen Ende des Versuchs beinahe senkrecht zur Zugrichtung ausbreitet ($\beta \rightarrow 0$). Dies ist in Übereinstimmung mit der Reduktion des *mode-mixity*-Faktors λ , der ein ähnliches Verhalten aufweist und zu verschwindenden Knickwinkeln ϕ_{\max} führt. Der Finger-Tensor sowie der resultierende Elastizitätsmodul zeigen bis zu einer Dehnung von ca. $\varepsilon = 0.35\%$ ein sehr langsames, fast linear abfallendes Verhalten. Ab der Dehnung, bei der die maximale Spannung erreicht wird, fallen beide Größen schnell und ungefähr linear auf Null. Bei einem spannungsgesteuerten Versuch würde somit der makroskopisch durch einen Steifigkeitsabfall beobachtbare Schädigungsprozeß nur den Bereich zwischen $\varepsilon \approx 0.35 - 0.45\%$ ausmachen.

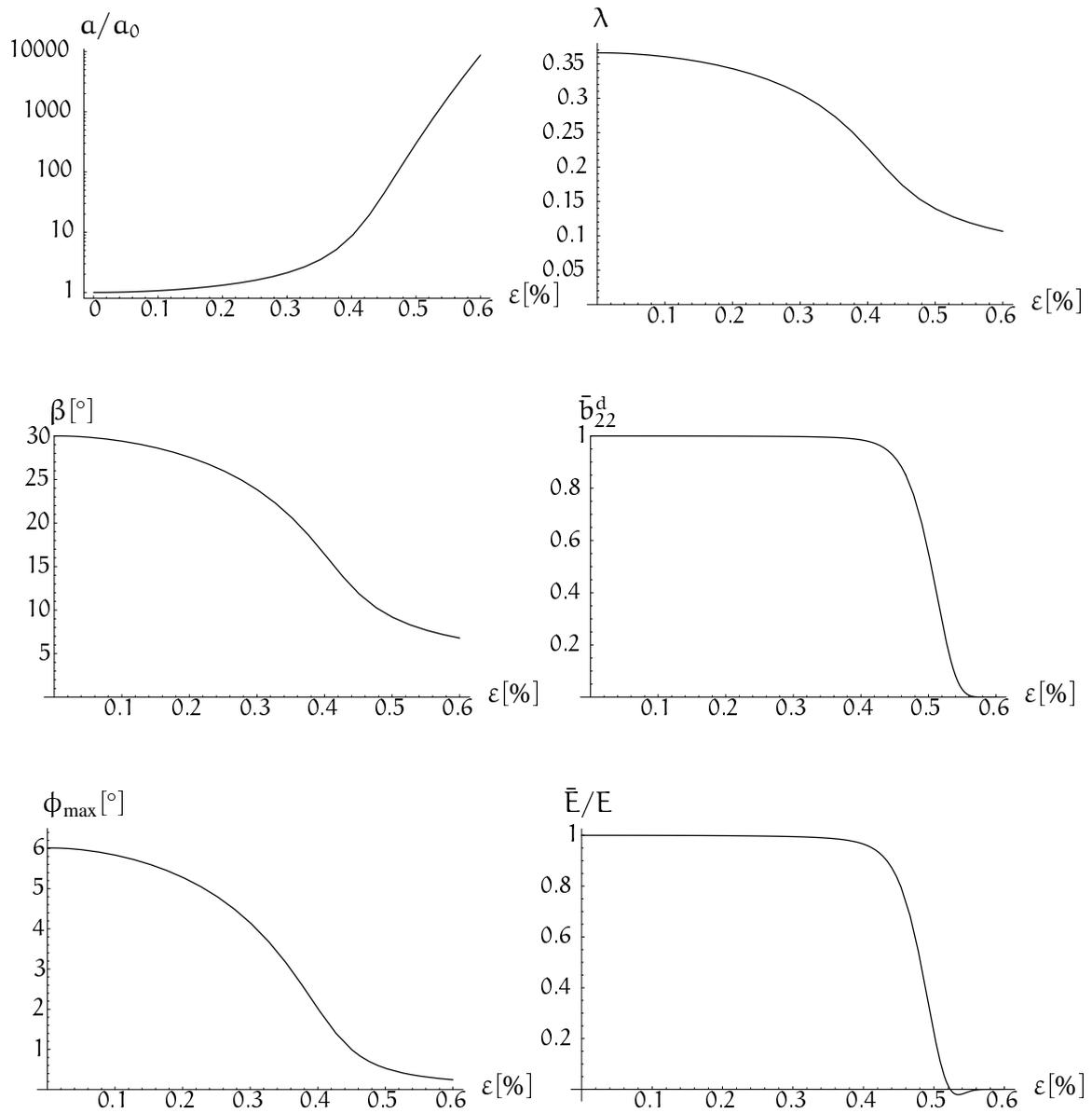


Abbildung 4.5: Einachsiger Zugversuch eines Beispielmaterials

4.5.2 Zyklischer Zugversuch und Reihenfolgeeffekt

Im nächsten Versuch wird ein anderes Beispielmateriale zyklisch durch Zug-Schwell-Lasten belastet. Hierfür wurden die Materialparameter so justiert, daß das Material ein wesentlich spröderes Verhalten aufweist, um die gewünschten Effekte der zyklischen Belastung anhand weniger Zyklenzahlen demonstrieren zu können ($N = 2000$).

Test des Ausgangsmaterials

Zunächst wird das anfänglich ungeschädigte Material wieder einem monotonem Zugversuch unterzogen, um die Bruchspannung des Ausgangsmaterials zu bestimmen. Die resultierende Spannungs-Dehnungs-Kurve zeigt Abbildung 4.6. Die Bruchspannung findet man zu $\sigma^* = 1297.8$. Da dieses Beispielmateriale bei wesentlich kürzeren Rißlängen instabil wird ($\dot{a}(a/a_0 = 3) \rightarrow \infty$), war es hier aufgrund numerischer Schwierigkeiten nicht möglich, den Spannungsabfall in der Spannungs-Dehnungs-Kurve über das Maximum der Spannung hinaus zu verfolgen. Die Ergebnisse dieses Versuchs finden sich in Abbildung 4.7. Der Winkel β , der Knickwinkel ϕ_{\max} und der *mode-mixity*-Faktor λ zeigen ein etwas anderes Verhalten als bei Material 1; diese fallen mit anwachsender Steigung und zeigen für den Versagenspunkt die Tendenz, mit beliebig großer Steigung auf den Nullwert zu fallen. Der Schädigungstensor und der Elastizitätsmodul zeigen ein ähnliches Verhalten, ändern sich jedoch bis zum Bruch nur deutlich unter einem Prozent.

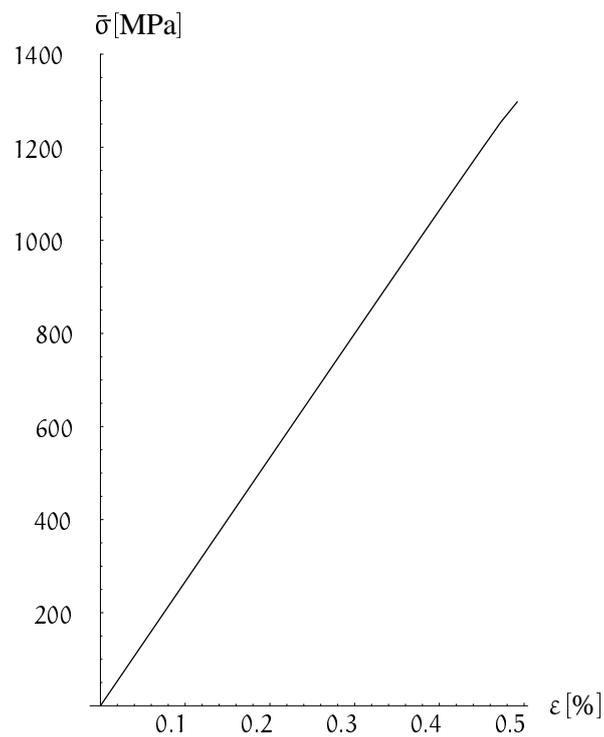


Abbildung 4.6: Spannungs-Dehnungs-Kurve des “spröderen” Ausgangsmaterials für die zyklischen Versuche

Material 2	
$E = 2.67 \cdot 10^5 \text{ MPa}$	$\nu = 1/3$
$\alpha_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$	$\beta_0 = 30^\circ \quad \sigma_s = 20 \text{ MPa}$
$C' = 0.1 \text{ N mm}^{-(1+2/\eta)}$	$\eta = 2.5$
$\sigma^* = 1297.8 \text{ MPa}$	

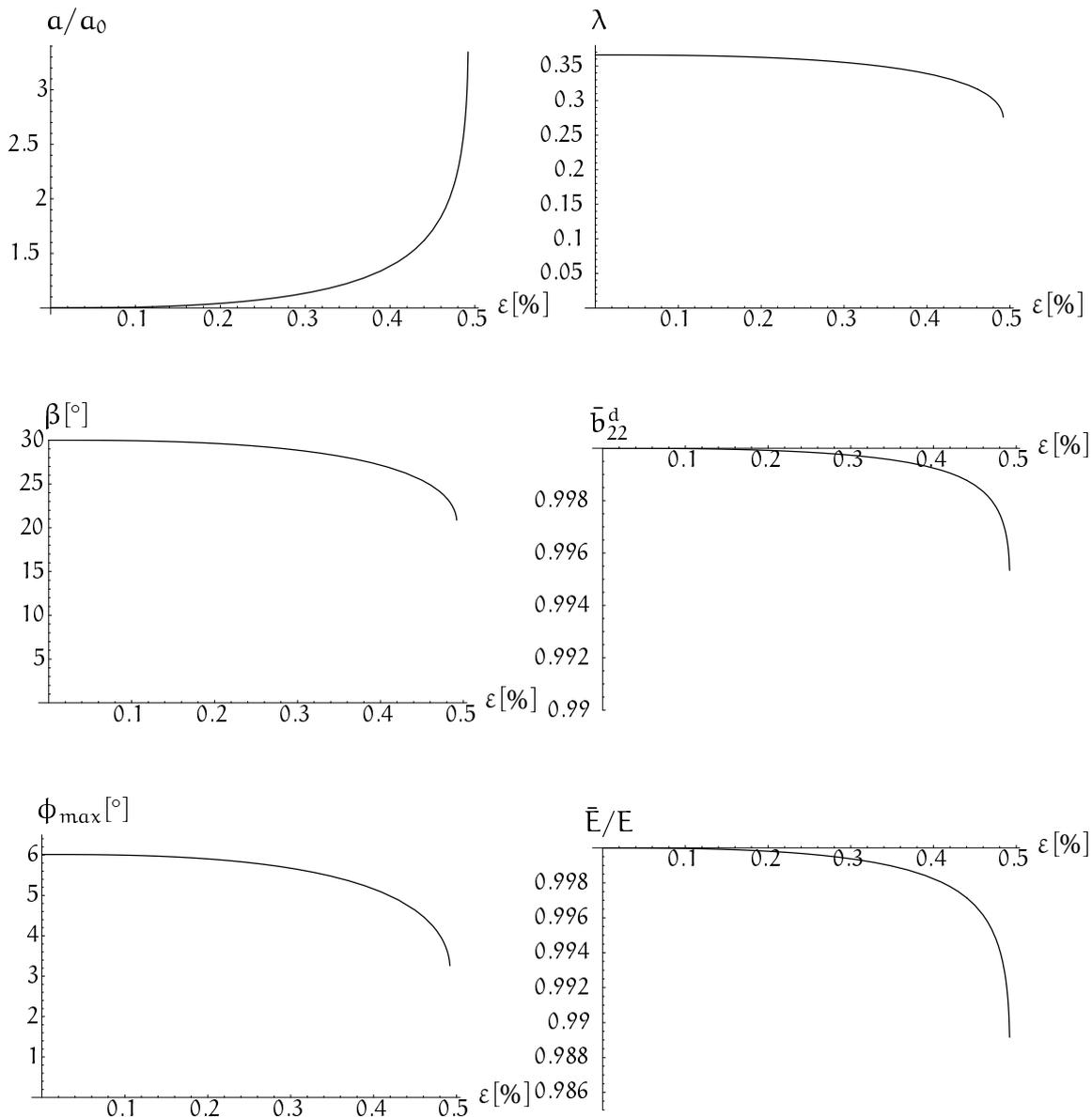


Abbildung 4.7: Zugversuch des “spröderen” Ausgangsmaterials für die zyklischen Versuche

Belastungsfolge a): Last niedrig, hoch

Dieses Material wird nun durch eine Lastfolge belastet, um den Einfluß von Reihenfolgeeffekten auf den Ablauf des Schädigungsprozesses und die resultierende Restbruchspannung zu beobachten. Auch die zyklischen Versuche werden dehnungsgesteuert simuliert. Zunächst wird das Material mit einer Zug-Schwell-Last beaufschlagt, die für das ungeschädigte Material einer Spannung von $\sigma_1 = 32$ MPa entspricht. Nach $N = 1000$ Zyklen wird das

Material mit einer wesentlich höheren Last von $\sigma_2 = 160$ MPa, wiederum für $N = 1000$ Zyklen belastet. Die Verläufe dieser Lastfolge findet man in Abbildung 4.8. Es wird deutlich, daß die Spannung σ_1 so gering über σ_s liegt, daß kaum eine Rißverlängerung und somit auch keine Änderung der anderen Größen für diese Lastamplitude zu verzeichnen ist. Das Verhalten unter der sich daran anschließenden höheren Lastamplitude zeigt ähnliche Tendenzen, wie bei der monotonen Belastung von Material 1. Die Verläufe der Winkel und von λ fallen fast linear gegen null. Durch die Wahl der Materialparameter des “spröderen” Materials 2 ist bereits bei dieser geringen Schwingspielzahl eine Änderung des Elastizitätsmoduls von ca. 5% zu beobachten.

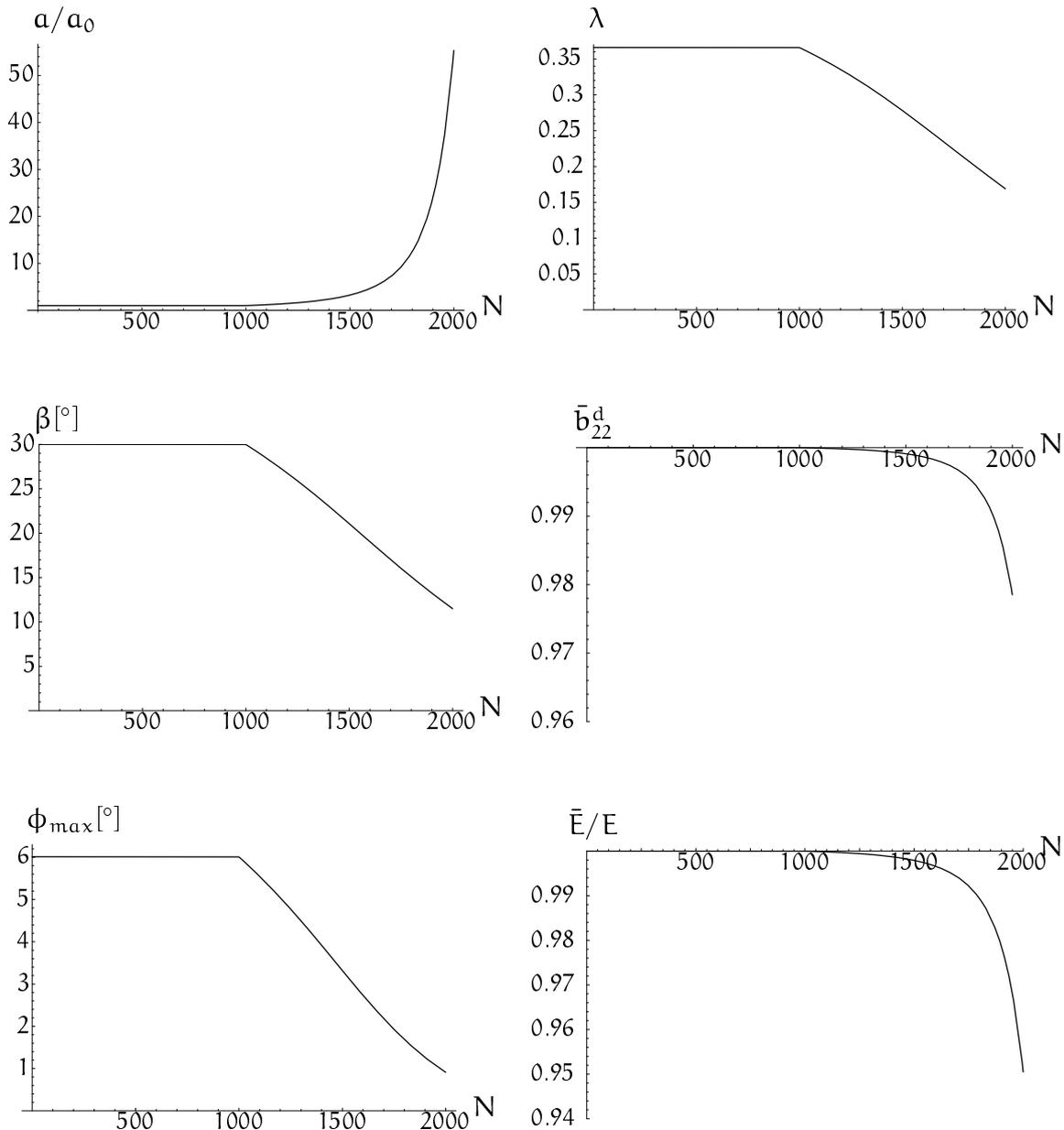


Abbildung 4.8: Untersuchung des Reihenfolgeeffektes:a) Last niedrig, hoch

Anschließend wird das durch diesen Prozeß geschädigte Material bis zum Bruch gezogen (s. Abbildungen 4.9 und 4.10). Die Restbruchspannung beträgt $\sigma^* = 558.3 \text{ MPa}$ und somit nur noch 45% der Bruchspannung des ungeschädigten Ausgangsmaterials.

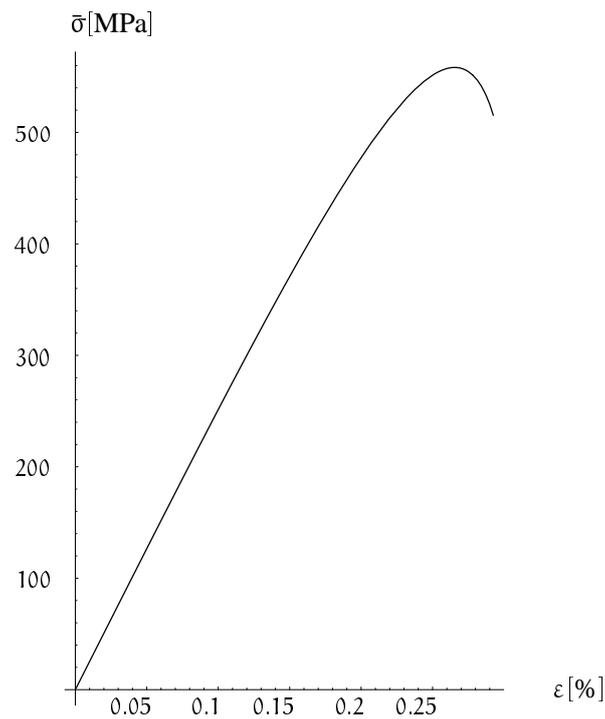


Abbildung 4.9: Spannungs-Dehnungs-Kurve des geschädigten Materials aus a)

Material 2 nach Lastfolge a)	
$E = 2.67 \cdot 10^5 \text{ MPa}$	$\nu = 1/3$
$\alpha_0 = 5.5332 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$	$\beta_0 = 11.5^\circ \quad \sigma_s = 20 \text{ MPa}$
$C' = 0.1 \text{ N mm}^{-(1+2/\eta)}$	$\eta = 2.5$
$\sigma^* = 558.3 \text{ MPa}$	

Die Verläufe der anderen Funktionen sind ähnlich denen des Ausgangsmaterials, lediglich die absolut zu beobachteten Änderungen sind größer als bei denen des ungeschädigten Materials.

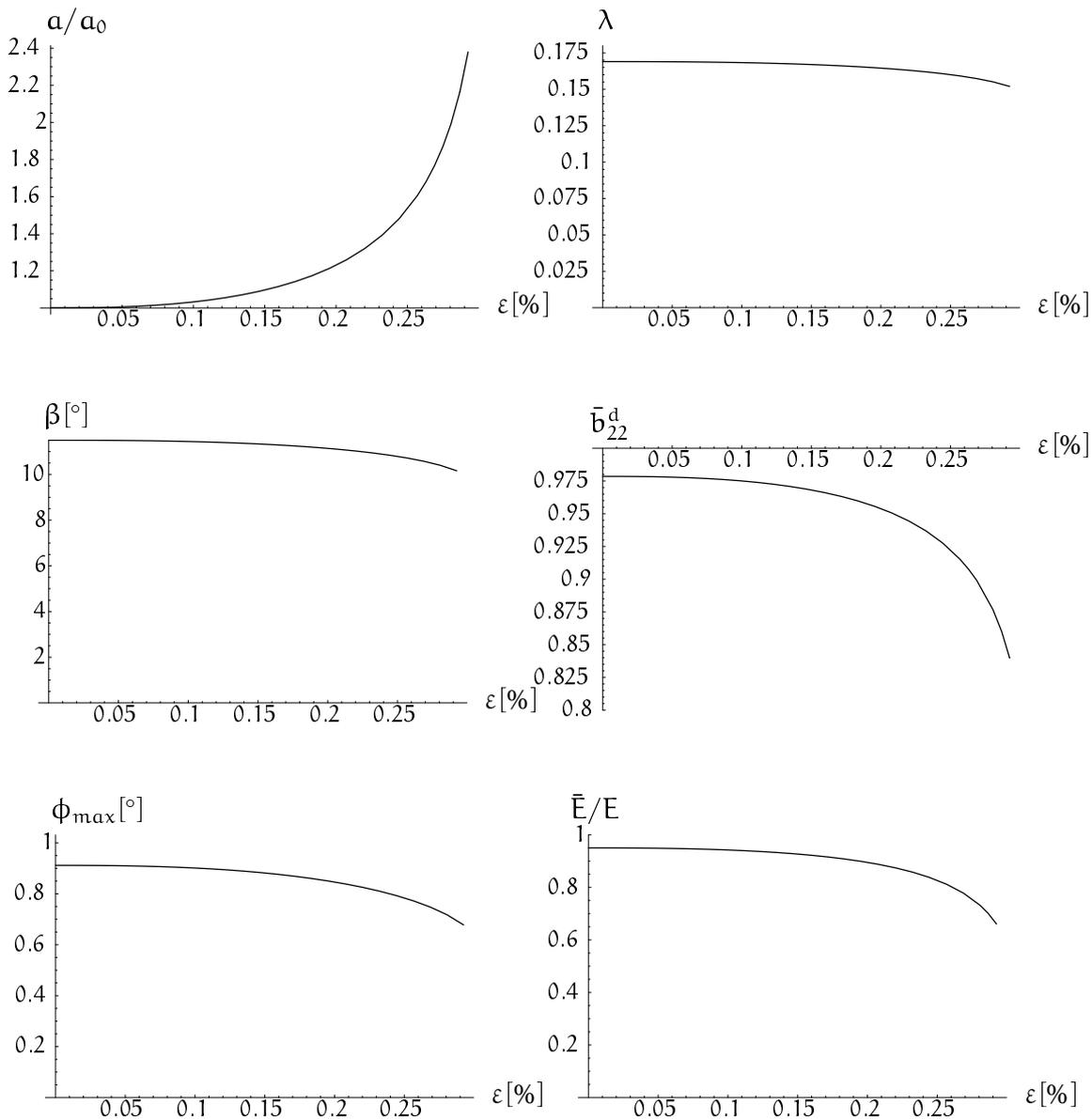


Abbildung 4.10: Verhalten des geschädigten Materials aus a)

Belastungsfolge b): Last hoch, niedrig

Dasselbe Material wird nun durch die umgekehrte Lastfolge $\sigma_1 = 160 \text{ MPa}$; $N = 1000$, dann $\sigma_2 = 32 \text{ MPa}$; $N = 1000$ belastet. Die Verläufe dieser umgekehrten Lastfolge zeigt Abbildung 4.11. Man erkennt, daß bei dieser Lastfolge die Vorschädigung durch σ_1 ausreicht, um eine beträchtliche Schädigungsevolution unter der niedrigen Lastamplitude σ_2 zu erreichen. Unter Lastamplitude σ_1 zeigt sich bei allen Variablen ein Verhalten ähnlich der hohen Lastfolge

im vorherigen Versuch. Dann allerdings führt die niedrige Last zu einer fast linear anwachsenden Rißlänge um noch einmal ca. 20%. Dies bewirkt zwar fast keine Änderung der Rißorientierung β , der Elastizitätsmodul fällt jedoch unter der niedrige Lastamplitude nochmals um ca. 14% seiner Ausgangsgröße.

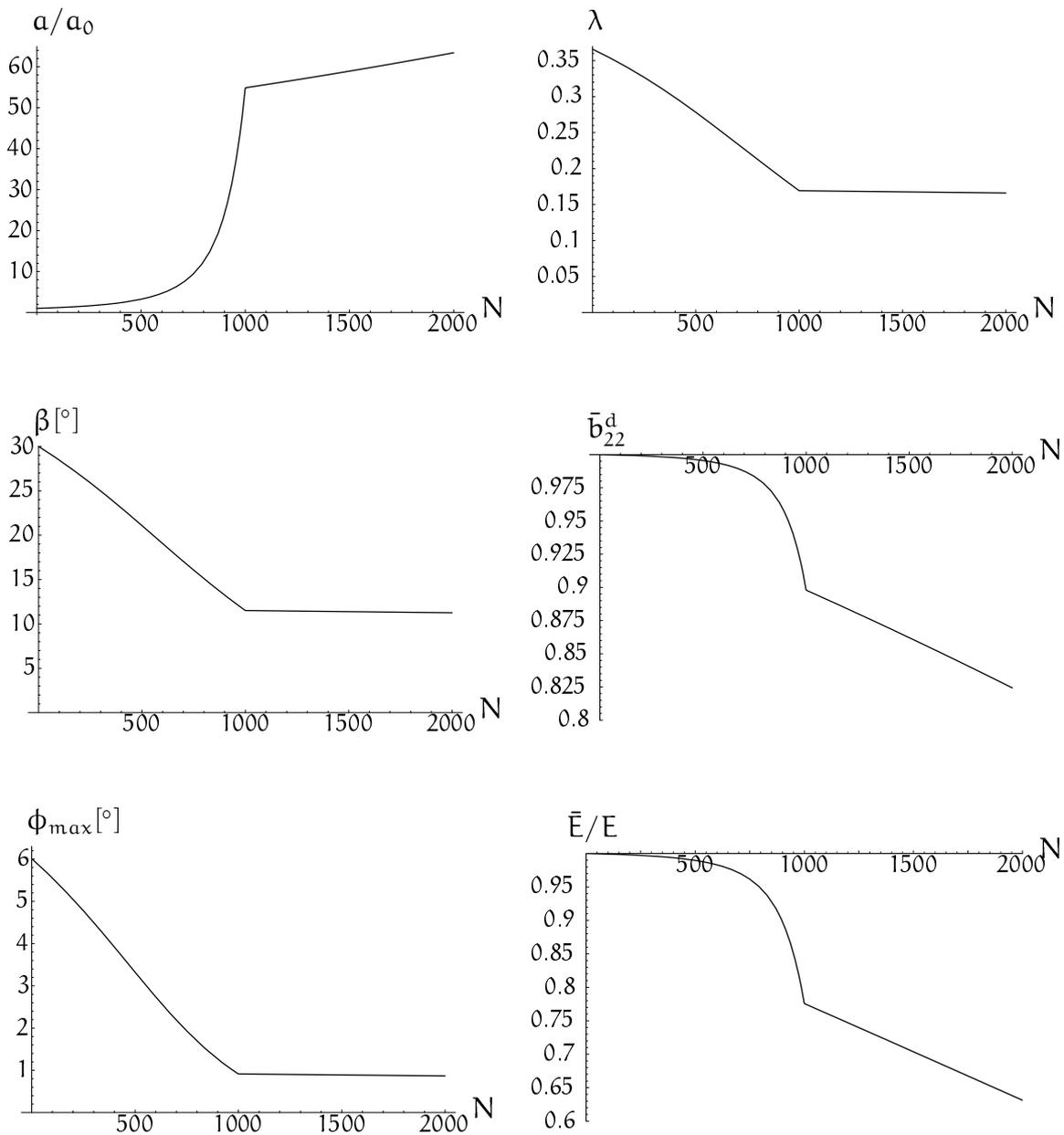


Abbildung 4.11: Untersuchung des Reihenfolgeeffektes:b) Last hoch, niedrig

Ein erneuter Bruchtest (s. Abbildungen 4.13 und 4.12) zeigt eine gegenüber Belastungsfolge a) wesentlich niedrigere Restbruchspannung von $\sigma^* = 353.0\text{MPa}$, also nur noch ca. 27% der Ausgangsbruchspannung.

Dies macht deutlich, daß lineare Schadensakkumulationsregeln, wie z.B. die Palmgren-Miner Regel (PALMGREN 1924), für stark schwankende Lastamplituden keine sinnvollen Ergebnisse liefern können, da der Einfluß der Reihenfolge der verschiedenen Lastamplituden entscheidend ist.

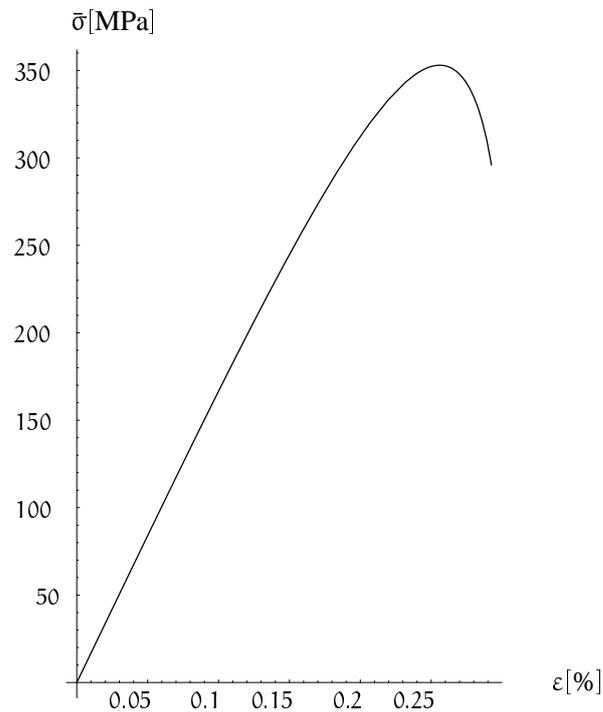


Abbildung 4.12: Spannungs-Dehnungs-Kurve des geschädigten Materials aus b)

Material 2 nach Lastfolge b)	
$E = 2.67 \cdot 10^5 \text{ MPa}$	$\nu = 1/3$
$\alpha_0 = 6.3425 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$	$\beta_0 = 11.2^\circ \quad \sigma_s = 20 \text{ MPa}$
$C' = 0.1 \text{ N mm}^{-(1+2/\eta)}$	$\eta = 2.5$
$\sigma^* = 353.0 \text{ MPa}$	

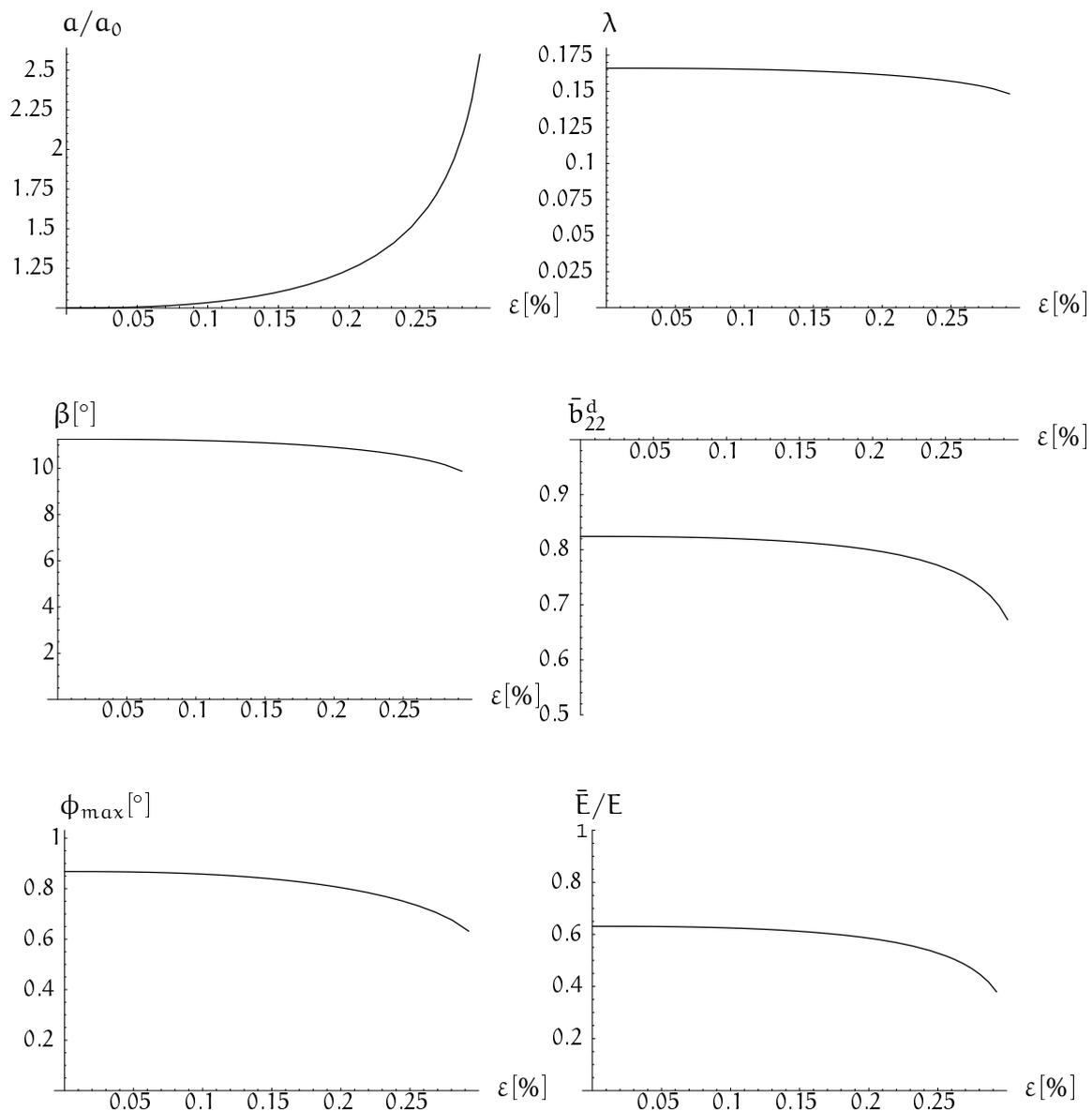


Abbildung 4.13: Verhalten des geschädigten Materials aus b)

4.5.3 Lebensdauerberechnung

Abschließend soll die Tauglichkeit des Modells für Lebensdauerberechnungen anhand eines zyklischen Zugversuchs mit konstanter Lastamplitude demonstriert werden. Für diesen Versuch wird wieder Material 1 (s. Abb. 4.14) verwendet. Die Lastamplitude des dehnungsgesteuerten Versuchs wird mit einer Spannungsamplitude von $\sigma_{\max} = 30$ MPa im ungeschädigten Material verhältnismäßig niedrig angesetzt. Das Diagramm der Spannung σ über der Zyklenzahl

N in Abbildung 4.14 zeigt deutlich den Abfall der Spannung bei gleichbleibender Dehnung durch die Schädigung. Dieser Abfall ist hier bis zur spannungsfreien Trennung des Zugstabes in zwei Hälften simuliert worden. Die Einführung eines Kriteriums für den Übergang eines Mikrorisses in einen Makroriß, der hier nicht vollzogen wird, würde bereits vor der spannungsfreien Trennung des Materials zur Bildung eines Makrorisses führen. Der Graph des Elastizitätsmoduls in Abbildung 4.15 stellt hierbei die Hüllkurve der Spannungsmaxima dar. Die Verläufe der übrigen Größen in Abbildung 4.15 unter-

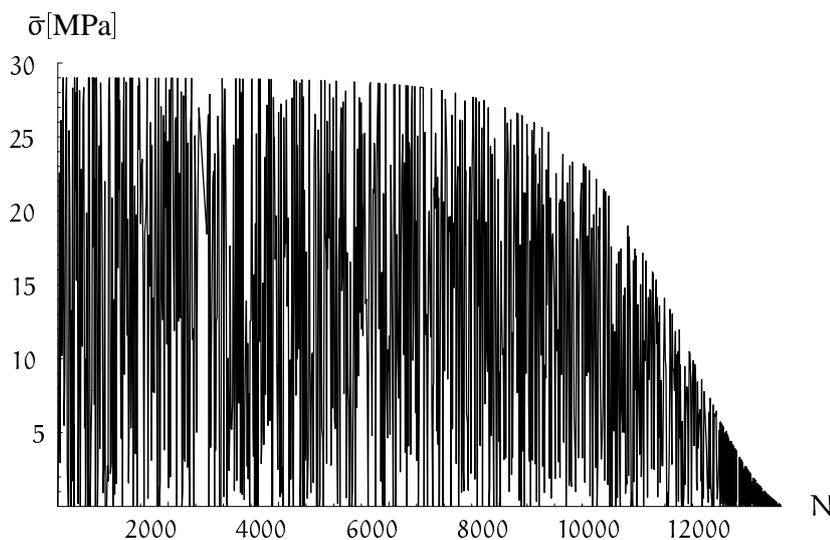


Abbildung 4.14: Diagramm der Spannung über der Zyklenzahl für Material 1

Material 1	$\sigma_{\max} = 30 \text{ MPa}$	
$E = 2.67 \cdot 10^5 \text{ MPa}$	$\nu = 1/3$	
$\alpha_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$	$\beta_0 = 30^\circ$	$\sigma_s = 20 \text{ MPa}$
$C' = 0.04 \text{ N mm}^{-(1+2/\eta)}$	$\eta = 1.8$	
$N^* = 13100$		

scheiden sich qualitativ nicht von denen des Zugversuchs desselben Materials in Abbildung 4.5.

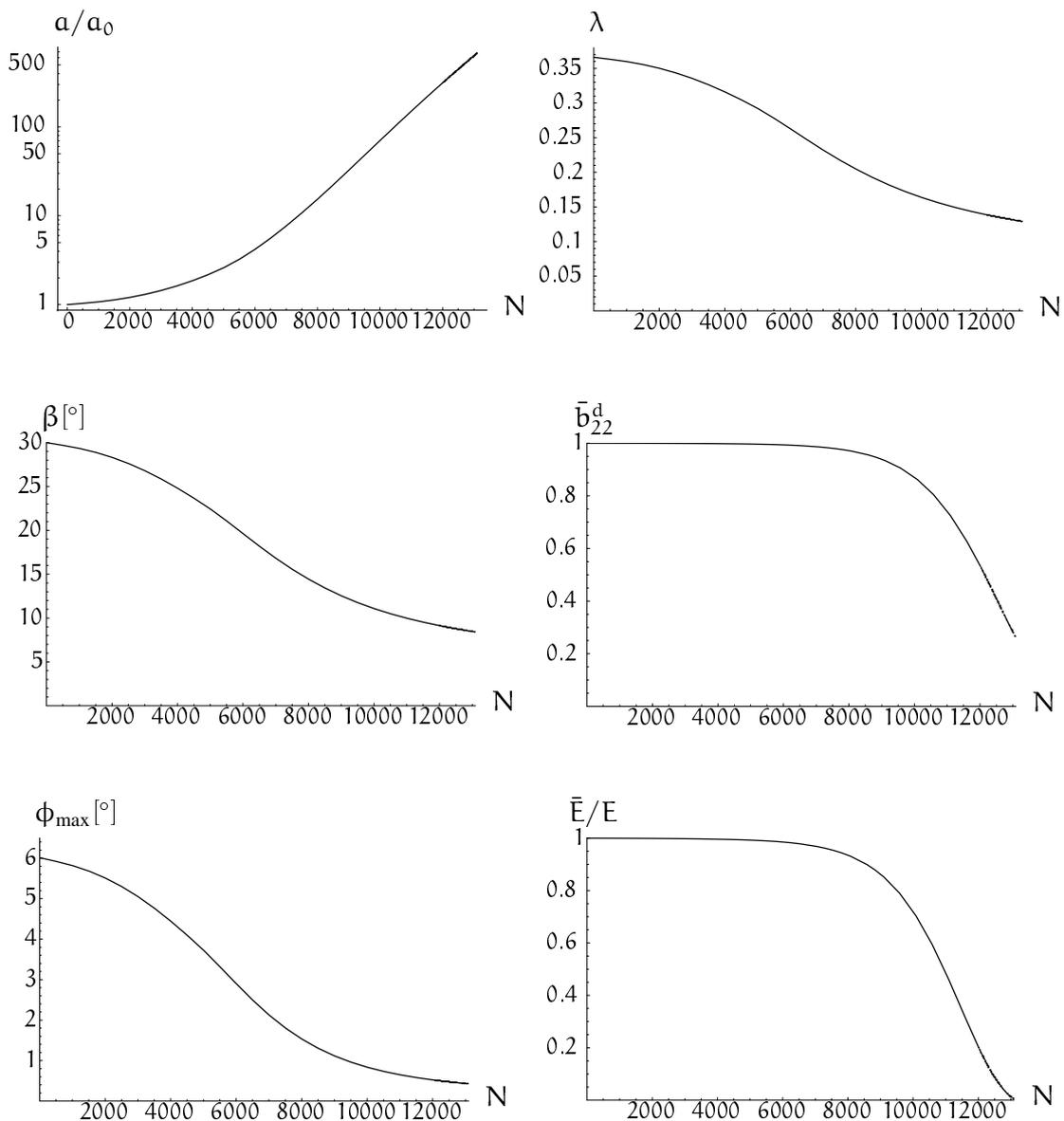


Abbildung 4.15: Ergebnisse des zyklischen Lebensdauer-Versuchs

Bei der Lebensdauerberechnung wird deutlich, daß die Änderung des Elastizitätsmoduls alleine, d.h. ohne zugrundeliegende mikromechanische Größen, wie hier der Rißlänge, nur beschränkt Auskunft über die Restlebensdauer geben kann. Wenn man als Lebensdauer des untersuchten Materials bei der gegebenen Lastamplitude die spannungsfreie Trennung bei $N \approx 13100$ annimmt, dann sind bei einer Änderung des Elastizitätsmodul auf ca. 99% seines Ausgangswertes schon ungefähr 42% seiner Lebensdauer verstrichen.

Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein finiter Rahmen für spröde Schädigung vorgestellt. Innerhalb dieses Rahmens wurde, basierend auf der *mixed-mode* Ausbreitung von Mikrorissen, ein Kontinuums-Schädigungs-Modell entwickelt, wobei der Mikro-Makro Übergang auf einem Postulat der Äquivalenz der Mikro- und Makrodissipation beruhte. Es wurde anhand numerischer Beispiele demonstriert, daß das entwickelte Modell zur Berechnung der Lebensdauer eingesetzt werden kann.

Der auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen Schädigungsanteil beruhende Schädigungsrahmen führte auf die Interpretation der Referenzkonfiguration als fiktive, ungeschädigte Konfiguration, wie sie in der Schädigungsliteratur Verwendung findet. Die Inkonsistenzen, die durch die Einführung einer solchen Konfiguration in einen Rahmen kleiner Formänderungen entstehen, motivierten den präsentierten finiten Rahmen. Innerhalb dieses Rahmens wurden dann die konstitutiven Gesetze mit Hilfe einer Prozedur von COLEMAN & NOLL (1963) direkt aus dem Postulat der freien Energiedichte hergeleitet, wodurch die thermodynamische Konsistenz gesichert wurde. Mittels des eingeführten Schädigungsdeformationsgradienten konnte dann der anisotrop geschädigte Elastizitätstensor auf einfache Weise durch ein push-forward gewonnen werden. Mit Hilfe des Postulates der maximalen Dissipation wurde ein assoziatives Schädigungsgesetz formuliert.

Aufgabe der mikromechanischen Betrachtungen war es, ein Schädigungspotential auf der Makroebene zur Verfügung zu stellen. Hierzu wurde zunächst ein Rißausbreitungsalgorithmus für *mixed-mode* Risse präsentiert, der direkt aus dem Variationsprinzip eines Körpers mit einem Riß abgeleitet wird. Das hieraus folgende Prinzip der maximalen Energiefreisetzungsrates weist mehrere Vorteile auf: Zum einen reichte für dessen Herleitung die Beschränkung aus, daß die bei der Rißausbreitung dissipierte Energie proportional der neu entstandenen Rißfläche ist, so daß keine *ad-hoc* Annahmen über die Richtung

der Rißausbreitung getroffen werden mußten. Zum anderen ergeben sich, vor allem für den zweidimensionalen Fall, relativ einfache Gleichungen, deren Anwendbarkeit auf *mixed-mode* Rißprobleme anhand einer FEM-Implementierung demonstriert wird.

Desweiteren weist das Prinzip der maximalen Energiefreisetzungsrate eine tiefgreifende Analogie zum auf der Makroebene postulierten Prinzip der maximalen Dissipation auf. Um diese Analogie zu erhalten, wurde der Übergang von der Mikromechanik des Risses in einer Einheitszelle zur Schädigungsevolution durch ein Homogenisierungsverfahren in Ratenform durchgeführt, das auf dem Postulat der Äquivalenz der Mikro- und Makrodissipation beruht. Die Forderung, daß auch die treibenden Kräfte auf die Schädigungsevolution und die Rißausbreitung quivalent sein sollen, führte dann zu einem Schädigungspotential auf der Makroebene, daß der Bedingung für Rißfortschritt gleichkommt. Diese Forderung basiert darauf, daß für die Ausbreitung von Defekten in einem Material sowohl in der "verschmierten" Form des Kontinuums-Schädigungs-Modells als auch in der diskreten Form der Rißausbreitung, als treibenden Kräfte sogenannte Konfigurationskrfte, ausschlaggebend sind, die auf einer Änderung der Konfiguration des Materials beruhen, und nicht auf seiner Deformation. Deshalb basiert das vorgeschlagene Homogenisierungsverfahren auf diesen Konfigurationskrften und der durch sie hervorgerufenen Dissipation, und nicht auf der Mittelung der sich ergebenden Spannungen und Dehnungen in der Einheitszelle.

Das durch ein Fließgesetz von LEMAITRE & CHABOCHE (1990) vervollständigte Gleichungssystem wurde für einachsige Zugversuche unter monotoner und zyklischer Belastung integriert. Es wurde gezeigt, daß Reihenfolgeeffekte wiedergegeben werden können, und daß das Modell für Lebensdauerberechnungen eingesetzt werden kann.

Erweiterungen des Modells sind in mehrere Richtungen vorstellbar. Zum einen können die dreidimensionalen Gleichungen der Rißausbreitung dazu benutzt werden, um ein Schädigungsmodell basierend auf elliptischen Rissen zu formulieren. Zum anderen wäre die Kopplung mit einem Schädigungsmodell für duktile Schädigung durch Poren denkbar, um die Ermittlung der Restbruchspannung für Materialien, die große plastische Formänderungen ertragen, realistischer zu gestalten. Für die Berechnung komplexer Bauteilgeometrien und Belastungen ist die Implementierung in einen FEM-Code vorzunehmen. Schließlich muß für den Übergang zur Makroriausbreitung ein passendes Kriterium formuliert werden.

Literatur

- Altenbach, H., J. Altenbach & P. Schießle (1990). Konzept der Schädigungsmechanik und ihre Anwendung bei der werkstoffmechanischen Bauteilanalyse. *Tech. Mechanik* **11**(2), 81–93.
- Altenbach, J., H. Altenbach & K. Naumenko (1997). Lebensdauerabschätzung dünnwandriger Flächentragwerke auf der Grundlage phänomenologischer Materialmodelle für Kriechen und Schädigung. *Techn. Mechanik* **12**(4), 353–364.
- Amestoy, M. & J. B. Leblond (1992). Crack paths in plane situations-ii. detailed form of the expansion of the stress intensity factors. *Int. J. Solids Structures* **29**, 465–501.
- Asaro, R. & J. Rice (1977). Strain localization in ductile single crystals. *J. Mech. Phys. Solids* **25**, 309–.
- Asaro, R. J. (1983). Crystal plasticity. *Journal of Applied Mechanics* **50**, 921–934.
- Ben-Hatira, F., C. Forster & K. Saanouni (1992). Prediction of flow localization and failure in finite elastoplasticity with damage. *Eur. J. of Finite Elements*.
- Benveniste, Y. (1986). On the Mori-Tanaka method in cracked solids. *Mech. Res. Comm.* **13**(4), 193–204.
- Betten, J. (1983). Damage tensors in continuum mechanics. *J. Méc. Théor. Appl.* **2**(1), 13–32.
- Betten, J. (1986). Application of tensor functions to the formulation of constitutive equations involving damage and initial anisotropy. *Engng. Fracture Mech.* **25**, 573–584.
- Bilby, B. A. & G. E. Cardew (1975). The crack with a kinked tip. *Int. J. Fracture* **11**, 708–712.

- Boehler, J. P. (1977). On irreducible representations for isotropic scalar functions. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **57**, 323–327.
- Boehler, J. P. (1987a). Introduction to the invariant formulation of anisotropic constitutive equations. In J. P. Boehler (Ed.), *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*, Number 292 in CISM Courses and Lectures, pp. 13–30. Springer-Verlag.
- Boehler, J. P. (1987b). Physical motivation. In J. P. Boehler (Ed.), *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*, Number 292 in CISM Courses and Lectures, pp. 3–11. Springer-Verlag.
- Boehler, J. P. (1987c). Representation for isotropic and anisotropic non-polynomial tensor functions. In J. P. Boehler (Ed.), *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*, Number 292 in CISM Courses and Lectures, pp. 31–53. Springer-Verlag.
- Boehler, J. P. & A. Sawczuk (1976). Application of representation theorems to describe yielding of transversely isotropic solids. *Mechanics Research Communications* **3**, 277–283.
- Bongmba, C. (2001). *Ein finites anisotropes Materialmodell auf der Basis der Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur Beschreibung duktiler Schädigung*. Ph. D. thesis, Ruhr-Universität Bochum.
- Bruggeman, D. A. G. (1935). Berechnung verschiedener physikalischer Konstanten von heterogenen Substanzen. *Annalen der Physik* **24**, 636–679.
- Bruhns, O. & C. Bongmba (2001). On the numerical implementation of a finite strain anisotropic damage model based upon the logarithmic rate. *European Journal of Finite Elements*. accepted for publication.
- Budiansky, B. (1965). On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **13**, 223–227.
- Budiansky, B. & R. J. O’Connell (1976). Elastic moduli of a cracked solid. *Int. J. Solids Struct.* **12**, 81–97.
- Carol, I., E. Rizzi & K. Willam (2001). On the formulation of anisotropic elastic degradation. i. theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. *Int. J. Solids Struct.* **38**(4), 491–518.

- Chaboche, J.-L. (1978). *Description thermodynamique et phénoménologique de la visco-plasticité cyclique avec écrouissage*. Ph. D. thesis, Université P. et M. Curie.
- Chaboche, J.-L. (1979). Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope. In *Col. EUROMECH 115 at Grenoble* (Edition du CNRS, 1982 ed.).
- Chaboche, J.-L. (1981). Continuous damage mechanics - a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nucl. Eng. Des.* **64**(2), 233–247.
- Chaboche, J.-L. (1982). The concept of effective stress applied to elasticity and viscoplasticity in the presence of anisotropic damage. In J.-P. Boehler (Ed.), *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids* (J. P. Boehler and M. Nijhoff ed.), Den Haag, pp. 737–760. Martinus Nijhoff Publishers.
- Chaboche, J.-L. (1988). Continuum damage mechanics: Part I - General concepts, part II - Damage growth, crack initiation, and crack growth. *Journal of Applied Mechanics* **55**, 59–72.
- Chaboche, J.-L. (1993). Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage. *Int J. Damage Mech.* **2**, 311–329.
- Chaboche, J. L., P. Lesne & J. Moire (1995). Continuum damage mechanics, anisotropy and damage deactivation for brittle materials like concrete and ceramic composites. *Int. J. Damage Mech.* **4**, 5–22.
- Cauchy, A.-L. (1823). Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastique. *Bull. Soc. Philomath. Paris Oeuvres* **2**, 300–304.
- Chen, X. F. & C. L. Chow (1995). On damage strain energy release rate Y. *Int. J. Damage Mech.* **4**(3), 251–263.
- Cherepanov, G. P. (1967). Crack propagation in continuous media. *Prikl. Mat. Mekh. (Appl Math. Mech, USSR)* **31**(3), 467–488.
- Cherepanov, G. P. (1968). Cracks in solids. *Int. J. Solids Structures* **4**, 811–831.
- Chow, C. L. & T. J. Lu (1992). An analytical and experimental study of mixed-mode ductile fracture under nonproportional loading. *Int J. Damage Mech.* **1**, 191–236.

- Chow, C. L. & J. Wang (1987). An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics. *International Journal of Fracture* **33**, 3–16.
- Chrzanowski, M. (1976). Use of the damage concept in describing creep-fatigue interaction under prescribed stress. *Int. J. Mech. Sci* **18**, 69–73.
- Coffin, L. F. (1954). A study of the effects of cyclic thermal stresses in a ductile metal. *Trans. of the ASME* **76**, 931.
- Coleman, B. (1964a). On thermodynamics, strain impulses, and viscoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **17**, 230–254.
- Coleman, B. (1964b). Thermodynamics of materials with memory. *Arch. Rational. Mech. Anal.* **17**, 1–46.
- Coleman, B. D. & M. E. Gurtin (1967). Thermodynamics with internal state variables. *The Journal of Chemical Physics* **14**(2), 597–613.
- Coleman, B. D. & W. Noll (1963). The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **13**, 167–178.
- Cordebois, J. & F. Sidoroff (1982). Anisotropic damage in elasticity and plasticity. *Journal de Mécanique théorique et appliquée Numéro spécial*, 45–60.
- Cordebois, J. P. & F. Sidoroff (1979). Damage induced elastic anisotropy. In J. P. Boehler (Ed.), *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, Number 295 in CNRS, pp. 761–774. Martinus Nijhoff Publishers.
- Davison, L. & M. E. Kipp (1978). Calculation of spall damage accumulation in ductile metals. In K. Kawata and J. Shiratori (Eds.), *Proc. IUTAM Symp. High Velocity Deformation of Solids in Tokyo, Japan 1977*, New York, pp. 163–175. Springer-Verlag.
- Davison, L., A. L. Stevens & M. E. Kipp (1973). Thermodynamical constitution of spalling elastic bodies. *J. Appl. Phys.* **44**(2), 668–.
- Davison, L., L. E. Stevens & M. E. Kipp (1977). Theory of spall damage accumulation in ductile metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **25**, 11–28.
- de S. Jayatilaka, A., I. J. Jenkins & S. V. Prasad (1977). Determination of crack growth in a mixed mode loading system. In *Forth International Conference on Fracture, ICF4 at the University of Waterloo, Canada*, New York. Pergamon Press.

- Doyle, T. C. & J. L. Ericksen (1956). *Nonlinear Elasticity*. Number 4 in *Advances in Applied Mechanics*. New York: Academic Press.
- Dragon, A. & A. Chihab (1985). Quantifying of ductile fracture damage evolution by homogenization. In *SMiRT 8*, Brussels.
- Dragon, A. & Z. Mróz (1979). A continuum model for plastic-brittle behaviour of rock and concrete. *International Journal of Engineering Science* **17**, 121–137.
- Drucker, D. C. (1951). A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. In *Proceeding of the first US national congress of applied mechanics*, New York. ASME.
- Dufailly, J. & J. Lemaitre (1995). Modeling very low cycle fatigue. *Int. J. Damage Mech.* **4**, 153–170.
- Dunne, F. P. E. & D. R. Hayhurst (1992). Continuum damage based constitutive equation for copper under high temperature creep and cyclic plasticity. *Proc. R. Soc. Lond. A* **437**, 545–566.
- Dunne, F. P. E. & D. R. Hayhurst (1994). Efficient cycle jumping techniques for the modelling of materials and structures under cyclic mechanical and thermal loadings. *Eur. J., A/Solids*, **13**(5), 639–600.
- Erdogan, F. & G. C. Sih (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *J. Basic Engineering*, 519–527.
- Ericksen, J. (1991). *Introduction to the Thermodynamics of Solids*. London: Chapman & Hall.
- Eshelby, J. D. (1951). The force on an elastic singularity. *Phil. Trans. Royal Soc. London A* **224**, 87–112.
- Eshelby, J. D. (1957). The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society A* **241**, 376–396.
- Feyel, F. & J. L. Chaboche (2000). Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* **183**, 309–330.
- Finnie, I. & A. Saith (1973). A note on the angled crack problem and the directional stability of cracks. *Int. J. Fracture* **9**, 484–486.
- Fischer, K.-F. (1984). Eine zweiparametrische Formulierung von Bruchkriterien bei statischer Mixed-Mode-Rißöffnung. *ZAMM* **64**, M445–M448.

- Forman, R., V. Kearney & R. Engle (1967). Numerical analysis of crack propagation in a cyclic-load structure. *ASME Trans. J. Basic Eng.* **89D**, 459.
- Ganczarski, A. & J. Skrzypek (1995). Concept of thermo-damage coupling in continuum damage mechanics. In R. B. Hetnarski and N. Noda (Eds.), *First Int. Symposium Thermal Stresses '95*, Hamamatsu, Japan, pp. 83–86.
- Ganczarski, A. & J. Skrzypek (1997). Modeling of damage effect on heat transfer in solids. In R. B. Hetnarski and N. Noda (Eds.), *Sect. Int. Symp. Thermal Stresses '97*, Rochester Inst. of Technology, Rochester, New York, pp. 213–216.
- Germain, P. (1973). *Cours de méchanique des milieux continus*, Volume I. Paris: Masson.
- Gittus, J. (1978). *Irradiation Effects in Crystalline Solids*. London: Applied Science Publ.
- Gottesman, T., Z. Hashin & M. A. Brull (1980). Effective elastic moduli of cracked fiber composites. In B. et al. (Ed.), *Advances in Composite Materials*, Oxford, N. Y., pp. 749–758. Proc. ICCM 3: Pergamon Press.
- Grabacki, J. (1991). On some description of damage process. *Eur. J. Mech., A/Solids* **10**(3), 309–325.
- Grabacki, J. K. (1994). Constitutive equations for some damaged materials. *Eur. J. Mech., A/Solids* **13**(1), 51–71.
- Grady, D. E. (1982). Local inertial effects in dynamic fragmentation. *J. Appl. Phys.* **53**, 322–325.
- Griffith, A. A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Royal Soc. London* **A221**, 163–198.
- Gupta, G. D. (1976). Strain-energy release rate for mixed mode crack problem. *ASME Paper* **76-WA/PVP-7**.
- Gurland, J. (1972). *Acta Metall* **20**(5), 735.
- Gurson, A. L. (1977). Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology* **99**, 2–15.
- Gurtin, M. E. & P. Podio-Guidugli (1996). Configurational forces and the basic laws for crack propagation. *J. Mech. Phys. Solids* **44**, 905–927.

- Gurtin, M. E. & P. Podio-Guidugli (1998). Configurational forces and a constitutive theory of crack propagation that allows for kinking and curving. *J. Mech. Phys. Solids* **46**, 1343–1378.
- Hashin, Z. (1968). Assessment of the self-consistent scheme approximation. *J. Compos. Mater.* **2**, 284–300.
- Hashin, Z. (1988). The differential scheme and its application to cracked materials. *J. Mech. Phys. Solids* **36**, 719–734.
- Hayashi, M. A. & S. Nemat-Nasser (1981). Energy-release rate and crack kinking under combined loading. *J. Appl. Mech.* **48**, 520–524.
- Hayhurst, D. R., P. R. Dimmer & M. W. Chernuka (1975). Estimates of the creep rupture lifetimes of structures using the finite element methods. *J. Mech. Phys. Solids* **23**, 335.
- Hayhurst, D. R., P. R. Dimmer & C. J. Morrison (1984). Development of continuum damage in the creep rupture of notched bars. *Phil. Trans. R. Soc. London* **A311**, 103.
- Hayhurst, D. R. & F. A. Leckie (1973). The effect of creep constitutive and damage relationships upon rupture time of solid circular torsion bar. *J. Mech. Phys. Solids* **21**(6), 431–446.
- Hill, R. (1948). A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **1**, 18–28.
- Hill, R. (1965). A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **13**, 213–222.
- Hoppe, U. (1996). *Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Horii, H. & S. Nemat-Nasser (1983). Overall moduli of solids with microcracks: Load-induced anisotropy. *J. Mech. Phys. Solids* **31**(2), 155–171.
- Hudson, J. A. (1980). Overall properties of cracked solid. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **88**, 371–384.
- Hudson, J. A. (1981). Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. *Geophys. J. Royal Astr. Soc.* **64**, 133–150.
- Hudson, J. A. (1986). A higher order approximation to the wave propagation constants for a cracked solid. *Geophys. J. Royal Astr. Soc.* **87**, 265–274.

- Hussain, M. A., S. L. Pu & J. Underwood (1974). Strain-energy-release-rate for a crack under combined mode I and mode II. *ASTM-STP* **560**, 2–28.
- Ichikawa, M. & S. Tanaka (1982). A critical analysis of the relationship between the energy release and the stress intensity factors for non-coplanar crack extension under combined mode loading. *Int. J. Fract.* **18**, 19–28.
- Irwin, G. R. (1957). Analysis of stress and strain states near the end of a crack transversing a plate. *J. Appl. Mech.* **24**, 361–364.
- Johnson, J. N. (1981). Dynamic fracture and spallation in ductile solids. *J. Appl. Phys.* **53**, 2812–2825.
- Ju, J. W. (1989). On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures* **25**(7), 803–833.
- Ju, J. W. & K. H. Tseng (1992). A three-dimensional statistical micro-mechanical theory for brittle solids with interacting microcracks. *Int. J. Damage Mech.* **1**, 102–131.
- Kachanov, L. M. (1958). On the time to failure under creep conditions. *Isw. AN SSSR. Otd Techn. Nauk* **8**, 26–31.
- Kachanov, L. M. (1974). *Foundations of Fracture Mechanics*. Moscow.
- Kachanov, L. M. (1986). *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Mechanics of Elastic Stability. Dordrecht: Martinus Nijhoff.
- Kachanov, M. (1993). On the effective moduli of solids with cavities and cracks. *Int. J. Fracture* **59**(1), R17–R21.
- Kachanov, M., E. Montagut & J. P. Laures (1990). Mechanics of crack-microcrack interactions. *Mech. Mater.* **10**, 59–71.
- Kachanov, M. I. (1972). *Mekh. Tverdogo Tiela*, Volume 2.
- Kachanov, M. I. (1992). Effective elastic properties of cracked solids: Critical review of some basic concepts. *Appl. Mech. Rev.* **45**(8), 304–335.
- Kanaun, S. (1974). Random field of cracks in elastic continuum. In L. Kachanov (Ed.), *Issledovania po Uprugosti i Plastichnosti (Papers on Elasticity and Plasticity)*, Leningrad, pp. 66–83. Leningrad University Publ.
- Kanaun, S. (1980). Poisson's field of cracks in elastic medium. *J. Appl. Math. Mech.* **44**(6), 808–815.

- Karihaloo, B. L. & D. Fu (1989). A damage-based constitutive law for plain concrete in tension. *Eur. J. Mech./Solids* **8**, 373–384.
- Kaviany, M. (1995). *Principles of Heat Transfer in Porous Media*. New York: Springer-Verlag.
- Kestin, J. & J. M. Rice (1970). Paradoxes in the applications of thermodynamics to strained solids. In E. B. Stuart, B. Gal'Or, and A. J. Brainard (Eds.), *A Critical Review of Thermodynamics*, Baltimore, Md., pp. 275–298. Mono Book Corp.
- Knott, J. F. (1973). *Fundamentals of Fracture Mechanics*. Butterworths.
- Kondaurov, W. I. (1988). Continuous damage of nonlinear elastic media (in Russian). *Izv. AN SSSR: Mech. Tverdogo Tela* **52**(2), 302–310.
- Kowalewski, Z. L. (1996). Creep rupture of copper under complex stress state at elevated temperatures. *I. Mech. E.* **C494/037**, 113–122.
- Kowalewski, Z. L., D. R. Hayhurst & B. F. Dyson (1994). Mechanisms-based creep constitutive equations for an aluminium alloy. *J. Strain Analysis* **29**, 309–316.
- Krajcinovic, D. (1983). Constitutive equations for damaging materials. *Journal of Applied Mechanics* **50**, 355–360.
- Krajcinovic, D. (1989). Damage mechanics. *Mechanics of Materials* **8**, 117–197.
- Krajcinovic, D. & G. U. Fonseka (1981). The continuous damage theory of brittle materials. *Journal of Applied Mechanics* **48**, 809–824.
- Krajcinovic, D. & M. A. G. Silva (1982). Statistical aspect of the continuous damage theory. *Int. J. Solids Structures* **18**(7), 551–562.
- Kröner, E. (1958). Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. *Z. Phys.* **151**, 504–518.
- Ladeveze, P. (1990). A damage approach for composite structures theory and identification. In A. Vautrin and H. Sol (Eds.), *Mechanical Identification of Composites*, pp. 44–57. Elsevier.
- Ladeveze, P. & J. Lemaitre (1984). Damage effective stress in quasi-unilateral conditions. In *Proc. IUTAM Congress*, Lynby, Denmark.
- Le, K. C. (1989). Equilibrium criterion for a nonlinear elastic slitted body. In *Advances in Fracture*, Oxford, pp. 49–53. Pergamon Press.

- Le, K. C. (1990). Variational principles of nonlinear brittle fracture mechanics. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)* **54**, 658–665.
- Le, K. C. & H. Schütte (1998). Variational formulation of the crack problem with a virtual crack kinking. In E. Inan and K. Z. Markov (Eds.), *Continuum Models and Discrete Systems*, pp. 727–735. Proc. 9th Int. Symp.
- Le, K. C., H. Schütte & H. Stumpf (1998). Dissipative driving force in ductile crystals and the strain localization phenomenon. *Int. J. Plasticity* **14**(10–11), 1109–1131.
- Le, K. C., H. Schütte & H. Stumpf (1999). Determination of the driving force acting on a kinked crack. *Arch. Appl. Mech.* **69**, 337–344.
- Leblond, J. B. (1993). Crack kinking and curving in three-dimensional elastic solids - Application to the study of crack path stability in hydraulic fracturing. In H. P. Rossmanith and K. J. Miller (Eds.), *Mixed-mode Fatigue and Fracture*, London, pp. 219–243. Mechanical Engineering Publications.
- Leckie, F. A. & D. R. Hayhurst (1974). Creep rupture of structures. *Proceedings of the Royal Society of London* **A340**, 323–347.
- Leckie, F. A. & E. T. Onat (1981). Tensorial nature of damage measuring internal variables. In J. Hult and J. Lemaitre (Eds.), *Physical Non-Linearities in Structural Analysis*, pp. 140–155. Springer-Verlag.
- Lemaitre, J. (1971). Evaluation of dissipation and damage in metals. In *Proc. ICM in Kyoto, Japan*, Number Vol. 1.
- Lemaitre, J. (1984). How to use damage mechanics. *Nuclear Engng. and Design* **80**, 233–245.
- Lemaitre, J. (1985). A continuum damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology* **107**, 83–89.
- Lemaitre, J. (1987). Formulation and identification of damage kinetic constitutive equations. In D. Krajcinovic and J. Lemaitre (Eds.), *Continuum Damage Mechanics; Theory and Applications*, Number 295 in CISM Courses and Lectures, pp. 37–90. Springer-Verlag.
- Lemaitre, J. (1996). *A Course on Damage Mechanics* (2 ed.). Berlin: Springer-Verlag.
- Lemaitre, J. & J. L. Chaboche (1975). A non-linear model of creep fatigue damage cumulation and interaction. In J. Hult (Ed.), *Mechanics of Visco-*

- Elastic Media and Bodies in Gothenburg, Sweden*, pp. 291–301. IUTAM Symp.: Springer-Verlag.
- Lemaitre, J. & J. L. Chaboche (1978). Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement. *J. Méc. Appl.* **2**(3), 317–365.
- Lemaitre, J. & J. L. Chaboche (1990). *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lin, J., F. P. E. Dunne & D. R. Hayhurst (1996). Physically based temperature dependence of elastic-viscoplastic constitutive equations for copper between 20 and 500° c. *Philosophical Mag., A.* **74**(2), 359–382.
- Lin, J., F. P. E. Dunne & D. R. Hayhurst (1999). Aspects of testpiece design responsible for errors in cyclic plasticity experiments. *Int. J. Damage Mech.* **8**(2), 109–.
- Lis, Z. (1992). Creep damage of solids under non-proportional loading. *Z. angew. Math. Mech.* **72**(4), T164–T166.
- Lis, Z. & A. Litewka (1996). Mathematical model of creep rupture under cyclic loading. *Math. Modelling and Scient Computing* **6** (**submitted for publication**).
- Litewka, A. (1985). Effektive material constants for orthotropically damaged elastic solids. *Arch. Mech.* **37**(6), 631–642.
- Litewka, A. (1987). Analytical and experimental study of fracture of damaging solids. In *Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Solids*, Villard-de-Lans, pp. 655–665. IUTAM/ICM Symp.
- Litewka, A. (1989). Creep rupture of metals under multi-axial state of stress. *Arch. Mech.* **41**(1), 3–23.
- Lubarda, V. A. & D. Krajcinovic (1993). Damage tensors and the crack density distribution. *International Journal of Solids and Structures* **30**(20), 2859–2877.
- Lubarda, V. A., D. Krajcinovic & s. mastilovic (1994). Damage model for brittle elastic solids with unequal tensile and compressive strengths. *Eng. Fracture. Mech.* **49**, 681–697.
- Mandel, J. (1980). *Thermodynamique des comportements rheologiques*.
- Manson, J. B. (1954). Behaviour of materials under conditions of thermal stress. Technical Report 2933, NASA, Techn. Note.

- Manson, S. (1979). Some useful concepts for the designer in treating cumulative damage at elevated temperature. In *I.C.M. 3*, Volume Vol. 1, Cambridge, pp. 13–45.
- Marigo, J. J. (1985). Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids. *Engng. Fracture Mechanics* **21**(4), 861–874.
- Marsden, J. E. & T. J. R. Hughes (1983). *Mathematical Foundations of Elasticity*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Martin, J. B. & F. A. Leckie (1972). *J. Mech. Phys. and Solids* **20**(4), 223.
- Mauge, C. & M. Kachanov (1994). Effective elastic properties of an anisotropic material with arbitrarily oriented interacting cracks. *J. Mech. Phys. Solids* **42**, 561–584.
- Maugin, G. (1992). *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge: University Press.
- Maugin, G. A. (1993). *Material Inhomogeneities in Elasticity*. London: Chapman and Hall.
- Maugin, G. A. (1995). Material forces: Concepts and applications. *Appl. Mech. Rev.* **48**, 213–245.
- Mazars, J. (1985). Description of micro and macroscale damage of concrete structures. In *Symp. on Mechanics of Damage and Fatigue in Haifa, Israel*.
- Mazars, J. (1986). A model of unilateral elastic damageable material and its application to concrete. In F. Wittmann (Ed.), *Energy Toughness and Fracture Energy of Concrete*, Amsterdam, The Netherlands. Elsevier.
- Mehrabadi, M. M. & S. C. Cowin (1990). Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. *Quart. J. Mech. Appl. Math* **43**, 15–41.
- Miner, M. A. (1945). Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics* **12**(3), A159–A164.
- Mohr, O. (1900). *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure* **44**, 1524.
- Moreau, J. J. (1970). Sur les lois de frottement, de viscosité et plasticité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Mat.* **271**, 608–611.
- Mori, T. & K. Tanaka (1973). Average stress in matrix and average elastic energy. *Acta Met.* **21**, 571–574.

- Mou, Y. H. & R. P. S. Han (1996). Damage evolution in ductile materials. *Int. J. Damage Mech.* **5**, 241–258.
- Murakami, S. (1983). Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory. *Journal of Engineering Materials and Technology* **105**, 99–105.
- Murakami, S. (1987). Anisotropic aspects of material damage and application of continuum damage mechanics. In D. Krajcinovic and J. Lemaitre (Eds.), *Continuum Damage Mechanics; Theory and Applications*, Number 295 in CISM Courses and Lectures, pp. 91–134. Springer-Verlag.
- Murakami, S. (1988). Mechanical modeling of material damage. *Journal of Applied Mechanics* **55**, 280–286.
- Murakami, S. & K. Kamiya (1997). Constitutive and damage evolution equations of elastic–brittle materials based on irreversible thermodynamics. *Int. J. Solids Structures* **39**(4), 473–486.
- Murakami, S. & M. Mizuno (1992). A constitutive equation of creep, swelling and damage under neutron irradiation applicable to multiaxial and variable states of stress. *Int. J. Solids Structures* **29**(19), 2319–2328.
- Murakami, S. & N. Ohno (1981). A continuum theory of creep and creep damage. In A. R. S. Ponter and D. R. Hayhurst (Eds.), *Creep in Structures*, pp. 422–444. Springer-Verlag.
- Murzewski, J. (1957). Une theorie statistique du corps fragile quasihomogéné. In *Pro. IX-e Congrès International de Mécanique Appliquée*, Number 5, Université de Bruxelles, pp. 313–320.
- Murzewski, J. (1958). The tensor of failure and its application to determination of the strength of welded joints. *Bull. Acad. Polon Sci.* **6**(3), 159–163.
- Murzewski, J. (1992). Brittle and ductile damage of stochastically homogeneous solids. *Int. J. Damage Mech.* **1**, 276–289.
- Najar, J. (1994). Brittle residual strain and continuum damage at variable uniaxial loading. *Int. J. Damage Mech.* **3**, 260–277.
- Naumenko, K. (1996). Modellierung und Berechnung der Langzeitfestigkeit dünnwandiger Flächentragwerke unter Einbeziehung von Werkstoffkriechen und Schädigung. Technical Report MBI-96-2, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg.

- Needleman, A., V. Tvergaard & E. Giessen (1995). Evolution of void shape and size in creeping solids. *Int. J. Damage Mech.* **4**(2), 134–152.
- Nemes, J. A., J. Eftis & P. W. Randles (1990). Viscoplastic constitutive modeling of high strain - rate deformation, material damage and spall fracture. *Trans. ASME* **57**(6), 282–291.
- Noll, W. (1958). A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Arch. Rational. Mech. Anal* **2**, 197–226.
- Noll, W. (1964). Euclidian geometry and Minkowskian chronometry. *Amer. Math. Monthly* **71**, 129–144.
- Ortiz, M. (1985). Constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. *Mech. Mater.* **4**, 67–93.
- Palaniswamy, K. & W. G. Knauss (1978). On the problem of crack extension in brittle solids under general loading. In S. Nemat-Nasser (Ed.), *Mechanics Today*, Volume 4, Oxford, pp. 87–148. Pergamon Press.
- Palmgren, A. (1924). Die Lebensdauer von Kugellagern. *VDI Zeitschrift* **68**, 339–341.
- Paris, P. C. (1962). *The growth of fatigue cracks due to variations in load*. Ph. D. thesis, Lehigh University.
- Perzyna, P. (1986). Internal state variable description of dynamic fracture of ductile solids. *Int. J. Solids Structures* **22**(7), 797–818.
- Plumtree, A. & J. Lemaitre (1979). Application of damage concepts to predict creep-fatigue failures. In *Press Vessels and Piping Conf. in Montreal*. ASME.
- Qi, W. & A. Bertram (1997). Anisotropic creep damage modeling of single crystal superalloys. *Technische Mechanik* **17**(4), 313–322.
- Rabotnov, Y. N. (1968). Creep rupture. In *Proc. 12 Int. Congr. Appl. Mech. in Stanford, Calif.*, pp. 342–349.
- Rabotnov, Y. N. (1969). *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.
- Radaj, D. & M. Heib (1977). Numerische Untersuchungen zum Reißbruchkriterium bei überlagerten Zug-, Druck- und Schubbeanspruchungen. *Schweißen und Schneiden* **29**(4), 135–140.

- Randy, J. G. & F. A. Cozzarelli (1988). The strain-controlled creep damage law and its application to the rupture analysis of thick-walled tubes. *Int. J. Non-linear Mechanics* **23**(2), 147–165.
- Rice, J. M. (1968a). A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *ASME Trans. J. Appl. Mech.* **33**, 379–385.
- Rice, J. R. (1968b). Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In H. Liebowitz (Ed.), *Fracture - A Treatise*, Volume 8, New York, pp. 191–311. Academic Press.
- Rice, J. R. (1974). Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* **22**, 17–26.
- Rides, M., A. C. Cocks & D. R. Hayhurst (1989). The elastic response of damaged materials. *J. Appl. Mech.* **56**(9), 493–498.
- Rousselier, G. (1981). Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage. In Dourdan and Nemat-Nasser (Eds.), *IUTAM Symp. on Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture*, pp. 331–355. North-Holland.
- Rousselier, G. (1986). Les modèles de rupture ductile et leurs possibilités actuelles dans le cadre de l'approche locale de la rupture. In *Seminaire International Approches Locales de la Rupture*, Moret-sur-Loing, France.
- Saanouni, K., C. H. Forster & F. B. Hatira (1994). On the anelastic flow with damage. *Int. J. Damage Mech.* **3**, 140–169.
- Schieße, P. (1994). *Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung*. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Schmitt, J. H. & J. M. Jalinier (1982). *Acta Metall* **30**(9), 1789.
- Schreyer, H. (1995). Continuum damage based on elastic projection operators. *Int. J. Damage Mechanics* **4**, 171–185.
- Sidoroff, F. (1981). Description of anisotropic damage application to elasticity. In J. Hult and J. Lemaitre (Eds.), *IUTAM Coll. on Physical Non-Linearities in Structural Analysis*, pp. 237–244. Springer-Verlag.

- Sih, G. C. (1974). Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture* **10**(3), 305–321.
- Simo, J. C. & J. W. Ju (1987). Strain- and stress-based continuum damage models—I. Formulation. *International Journal of Solids and Structures* **23**(7), 821–840 and 841–869.
- Singh, U. K. & P. J. Digby (1989). A continuum damage models for simulation of the progressive failure of brittle rocks. *Int. J. Solids Struct.* **25**(6), 647–663.
- Skoczniński, B. (1996). Generalization of the Coffin equations with respect to the effect of large mean plastic strain. *Journ. of Eng. Materials and Technol.*, 387–393.
- Skrzypek, J. (1999). *Modeling of Material Damage and Failure of Structures*. Berlin: Springer.
- Skrzypek, J. & A. Ganczarski (1998). Modeling of damage effect on heat transfer in time-dependent non homogeneous solids. *J. Thermal Stresses* **21**(3–4), 205–231.
- Steinmann, P. & I. Carol (1998). A framework for geometrically nonlinear continuum damage mechanics. *International Journal of Engineering Science* **36**, 1793–1814.
- Stevens, D. J. & D. Liu (1992). Strain-based constitutive model with mixed evolution rules for concrete. *J. Engng. Mech. ASCE* **118**, 1184–1200.
- Stigh, U. (1985). Material damage and constitutive properties. Technical report, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden.
- Stumpf, H. & K. C. Le (1990). Variational principles of nonlinear fracture mechanics. *Acta Mech.* **83**, 25–37.
- Suquet, P. (1982). *Plasticité et Homogénéisation*. Ph. D. thesis, Univ. Paris VI.
- Taher, S. F., M. H. Baluch & A. H. Al-Gadhib (1994). Towards a canonical elastoplastic damage model. *Eng. Fracture Mechanics* **48**(2), 151–166.
- Tetelman, A. S. & A. J. jr. McEvily (1970). *Fracture of Structural Materials*. John Wiley.
- Tomkins, B. (1981). *Creep and Fatigue in High Temperature Alloys*. Elsevier Applied Science.

- Trapzyński, W. A., D. R. Hayhurst & F. A. Leckie (1981). Creep rupture of copper and aluminium under non-proportional loading. *J. Mech. Phys. Solids* **29**(5/6), 353–374.
- Tresca, H. (1872). Mémoire sur l'écoulement des corps solides. In *Mémoires Présentés par Divers Savants*, Volume 20, pp. 75–135. Acad. Sci. Paris.
- Truesdell, C. & W. Noll (1965). The Non-linear Field Theories of Mechanics. In S. Flügge (Ed.), *Handbuch der Physik* (1992, 2 ed.), Volume III/3. Berlin: Springer-Verlag.
- Tvergaard, V. (1981). *Material failure by void coalescence in localized shear bands*. Ph. D. thesis, Techn. Univ. of Denmark, Lyngby.
- Tvergaard, V. (1988). Numerical study of localization in a void sheet. DCAMM Report No. 377, Techn. Univ. of Denmark, Lyngby.
- Vakulenko, A. A. & M. L. Kachanov (1971). Continuum theory of medium with cracks. *Izv. A. N. SSSR, M. T. T.* **4**, 159–166.
- Valanis, K. C. (1990). A theory of damage in brittle materials. *Engng. Fracture Mech.* **36**, 403–416.
- von Mises, R. (1913). Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. *Gött. Nach. Math.-Phys. Kl.*, 582–592.
- von Mises, R. (1928). Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **8**, 161–285.
- Voyiadjis, G. Z. & P. I. Kattan (1992). A plasticity-damage theory for large deformation of solids-I. Theoretical formulation. *International Journal of Engineering Science* **30**(9), 1089–1108.
- Voyiadjis, G. Z. & T. Park (1996). Anisotropic damage for the characterization of the onset of macro-crack initiation in metals. *Int. J. Damage Mech.* **5**, 68–92.
- Voyiadjis, G. Z., A. R. Venson & P. I. Kattan (1995). Experimental determination of damage parameters in uniaxially-loaded metal-matrix composites using the overall approach. *International Journal of Plasticity* **11**(8), 895–926.
- Walpole, L. J. (1984). *Proc. R. Soc. A* **391**, 149–.
- Wang, J. (1992). Low cycle fatigue and cycle dependent creep with continuum damage mechanics. *Int. J. Damage Mech.* **1**, 237.

- Westergaard, H. M. (1939). Bearing pressures and cracks. *J. Appl. Mech.* **61**, A49–A53.
- Wheeler, O. (1972). Numerical analysis of crack propagation in a cyclic-load structure. *ASME Trans. J. Basic Eng.* **94**, 181.
- Williams, J. G. & P. D. Ewing (1972). Fracture under complex stress - the angled crack problem. *Int. J. Fracture Mech.* **8**(4), 441–446.
- Williams, M. L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.* **24**, 109–114.
- Wöhler, A. (1860). Über die Festigkeits-Versuche mit Eisen und Stahl. *Zeitschrift für Bauwesen* **8,10,13,16,20**.
- Wu, C. H. (1978a). Elasticity problems of slender z-crack. *Journal of Elasticity* **8**(2), 183–205.
- Wu, C. H. (1978b). Fracture under combined loads by maximum-energy-release-rate criterion. *J. Appl. Mech.* **45**, 553–558.
- Wu, C. H. (1978c). Maximum-energy-release-rate criterion applied to a tension-compression specimen with crack. *Journal of Elasticity* **8**(3), 235–257.
- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. Meyers (1997). Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate. *Acta Mechanica* **124**, 89–105.
- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. Meyers (1998a). On objective corotational rates and their defining spin tensors. *International Journal of Solids and Structures* **35**(30), 4001–4014.
- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. Meyers (1998b). Strain rates and material spins. *Journal of Elasticity* **52**, 1–41.
- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. T. M. Meyers (1999). Strain rates and material spins. *Journal of Elasticity* **52**, 1–41.
- Xiao, H., O. T. Bruhns & A. T. M. Meyers (2000). The choice of objective rates in finite elastoplasticity: General results on the uniqueness of the logarithmic rate. *Proceedings of the Royal Society of London A* **456**, 1865–1882.
- Yazdani, S. (1993). On a class of continuum damage theories. *Int. J. Damage Mechanics* **3**, 162–186.

- Yazdani, S. & H. L. Schreyer (1988). An anisotropic damage model with dilatation for concrete. *Mech. Mater.* **7**, 231–244.
- Zang, P. & H. Lee (1993). Creep damage and fracture at high temperature. *Eng. Fracture Mechanics* **44**(2), 283–288.
- Zheng, Q.-S. & J. Betten (1996). On damage effective stress and equivalence hypothesis. *Int. J. Damage Mech.* **5**(3), 219–240.
- Ziegler, H. (1958). An attempt to generalize Onsager's principle and its significance for rheological problems. *ZAMP* **9**, 748–763.

Anhang

Herleitung der treibenden Kraft

In der Rate der freien Energiedichte (2.2.78) in Abschnitt 2.2 erschien der Term

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}$$

der zur Berechnung der treibenden Kraft auf die Schädigung benötigt wurde. Die Herleitung dieser Ableitung wird hier im Detail angegeben. Man kann obigen Term als

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial (F^d)_E^\varepsilon} \frac{\partial (F^d)_E^\varepsilon}{\partial (C^d)_{AB}} \frac{\partial (C^d)_{AB}}{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}$$

schreiben. Zunächst berechnet man

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial (F^d)_E^\varepsilon} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial (\bar{c}^e)_{\gamma\delta}} \frac{\partial (\bar{c}^e)_{\gamma\delta}}{\partial (F^d)_E^\varepsilon}$$

mit Hilfe von (2.2.81) zu

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial (F^d)_E^\varepsilon} = \frac{1}{2} \bar{\tau}^{\gamma\delta} \frac{\partial \left((F^{d-1})_\gamma^K (F^{d-1})_\delta^L C_{KL} \right)}{\partial (F^d)_E^\varepsilon}.$$

Die benötigte Ableitung berechnet man aus der Identität $\mathbf{F}^d \mathbf{F}^{d-1} = \mathbf{1}$ zu

$$\frac{\partial (F^{d-1})_\gamma^K}{\partial (F^d)_E^\varepsilon} = - (F^{d-1})_\varepsilon^K (F^{d-1})_\gamma^K.$$

Damit erhält man

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial (F^d)_E^\varepsilon} = - (\bar{c}^e)_{\varepsilon\delta} \bar{\tau}^{\delta\gamma} (F^{d-1})_\delta^E.$$

Aus Gleichung (2.2.13) kann man leicht die Ableitung $\partial \mathbf{C}^d / \partial \mathbf{F}^d$ berechnen, so daß

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial (\mathbf{C}^d)_{AB}} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial (\mathbf{F}^d)_E^\xi} \frac{\partial (\mathbf{F}^d)_E^\xi}{\partial (\mathbf{C}^d)_{AB}} = -\frac{1}{2} \bar{g}^{\varepsilon\beta} \bar{\tau}^{\delta\gamma} (\mathbf{F}^{d-1})_\gamma^A (\mathbf{F}^{d-1})_\beta^B.$$

Wenn man wiederum Gleichung (2.2.13) benutzt, gelangt man schließlich zu

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial (\mathbf{C}^d)_{AB}} \frac{\partial (\mathbf{C}^d)_{AB}}{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}} = -\frac{1}{2} \bar{g}^{\alpha\delta} (\bar{c}^e)_{\delta\gamma} \bar{\tau}^{\gamma\beta},$$

was die Ableitung war, die benutzt wurde um Gleichung (2.2.83) herzuleiten.

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 128**

978-3-935892-2-5