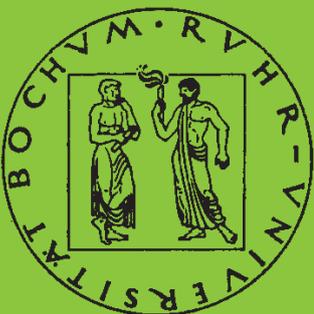


**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik**

**Dirk Eichel**

**Zur Kondensation strukturdynamischer  
Aufgaben mit Hilfe von Polynommatrizen**

Heft Nr. 123



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
INSTITUT FÜR MECHANIK

Dirk Eichel

**Zur Kondensation  
strukturdynamischer Aufgaben  
mit Hilfe von Polynommatrizen**

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 123  
2000

Herausgeber:  
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum  
Schriftenreihe  
Universitätsstr. 150  
44870 Bochum

©2000 Dr.-Ing. Dirk Eichel  
Werner Hellweg 242  
44894 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie) des Werkes oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1997 bis 2000 im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der *Arbeitsgruppe für numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik* am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich recht herzlich für die Betreuung und Unterstützung meiner Arbeit. Durch zahlreiche fachliche Anregungen und interessante Diskussionen hat er diese Arbeit stets gefördert.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns danke ich für sein Interesse und die freundliche Bereitschaft zur Übernahme des Korreferats.

Besonders möchte ich mich bei Herrn Dr.-Ing. P. Jaschke für wertvolle Anregungen und kritische Diskussionen bedanken.

Allen Mitarbeitern der *Arbeitsgruppe für numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik* gilt mein Dank für die gute Zusammenarbeit und kollegiale Unterstützung.

Bochum, im Juni 2000

Dirk Eichel

Dissertation eingereicht am: 12.01.2000  
Tag der mündlichen Prüfung: 08.05.2000

Erster Referent: Prof. Dr.-Ing. H. Waller  
Zweiter Referent: Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Stand der Forschung . . . . .	3
1.2	Ziel der Arbeit . . . . .	5
1.3	Inhalt der Arbeit . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Kondensation und Substrukturtechnik</b>	<b>8</b>
2.1	Vorbemerkungen . . . . .	8
2.2	Exakte dynamische Kondensation . . . . .	11
2.3	Maßnahmen zur Aufwandsverringerung bei der Kondensation . . . . .	14
2.3.1	Näherungen bei der Kondensation . . . . .	15
2.3.2	Berechnung der kondensierten Gleichungen mit Hilfe von Eigenschwingungsformen . . . . .	18
2.4	Substrukturtechnik . . . . .	22
2.4.1	Übersicht der Verfahren . . . . .	25
2.4.2	Berechnung der Eigenwerte der kondensierten Gleichungen . . . . .	30
2.4.3	Rücktransformation auf die Slave-Freiheitsgrade . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Polynommatrizen</b>	<b>33</b>
3.1	Vorbemerkungen . . . . .	34
3.2	Eigenwertaufgabe - Begriffe und Definitionen . . . . .	35
3.3	Lineare Polynommatrizen . . . . .	38
3.3.1	Linearisierung im Frequenzbereich . . . . .	38
3.3.2	Zustandsraumdarstellung . . . . .	40

3.3.3	Orthogonalitätseigenschaften . . . . .	44
3.4	Eigenwertlöser . . . . .	47
3.5	Faktorenzerlegung einer Polynommatrix . . . . .	52
3.5.1	Abspaltung eines Linearfaktors einer Polynommatrix . . . . .	52
3.5.2	Vollständige sukzessive Faktorisierung einer Polynommatrix . . . . .	54
3.5.3	Rekursive Bestimmung der Linearfaktoren einer Polynommatrix . . . . .	57
3.5.4	Numerische Stabilität der Faktorisierung . . . . .	59
3.6	Näherung einer Polynommatrix mit einem Teil ihrer Linearfaktoren . . . . .	66
3.6.1	Grundlegende Betrachtungen . . . . .	66
3.6.2	Darstellung der Eigenschaften eines dynamischen Systems mittels Linearfaktoren . . . . .	68
3.6.3	Ermittlung der Linearfaktoren . . . . .	70
3.6.4	Näherung einer Polynommatrix am Beispiel der dynamischen Steifigkeitsmatrix eines kondensierten Gleichungssystems . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Anwendung der Faktorenzerlegung auf das kondensierte Gleichungssystem</b>	<b>79</b>
4.1	Darstellung eines kondensierten Gleichungssystems mit Hilfe einer gebrochenrationalen Polynommatrix . . . . .	80
4.1.1	Herleitung der gebrochenrationalen Steifigkeitsmatrix eines kondensierten Gleichungssystems . . . . .	80
4.1.2	Das Spektrum des kondensierten Gleichungssystems . . . . .	82
4.1.3	Eigenschaften der gebrochenrationalen Formulierung . . . . .	83
4.2	Berechnung eines kondensierten Gleichungssystems minimaler Ordnung . . . . .	86
4.2.1	Herleitung der Systemmatrizen minimaler Ordnung . . . . .	86
4.2.2	Berechnung eines Gleichungssystems minimaler Ordnung durch sukzessive Abspaltung der Slave-Eigenwerte . . . . .	88
4.2.3	Berechnung eines Gleichungssystems minimaler Ordnung durch rekursive Berechnung der Linearfaktoren . . . . .	92
4.3	Näherung der kondensierten Gleichungen mit Hilfe von Struktur- und Slave-Eigenformen . . . . .	96
4.3.1	Kriterien zur Reduktion . . . . .	97

---

4.3.2	Näherung der kondensierten Gleichungen minimaler Ordnung . . . . .	97
4.4	Kondensation mit Hilfe von Linearfaktoren . . . . .	102
4.4.1	Kopplung von Teilsystemen . . . . .	106
4.4.2	Anwendungsbeispiele . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>126</b>
<b>A</b>	<b>Ergänzungen zum Kapitel Polynommatrizen</b>	<b>129</b>
A.1	Berechnung einer regulären Polynommatrix . . . . .	129
A.2	Inverse einer Polynommatrix . . . . .	130
A.2.1	Berechnung der Inversen mittels Linearisierung . . . . .	130
A.2.2	Berechnung der inversen Polynommatrix durch Faktorisierung . . . . .	134
A.3	Bestimmung von Koeffizientenmatrizen einer reduzierten Polynommatrix mit Hilfe von Linearfaktoren und der Ausgangsmatrix . . . . .	136
A.4	Ergänzungen zur numerischen Stabilität bei der sukzessiven Faktorisierung einer Polynommatrix . . . . .	137
<b>B</b>	<b>Elementmatrizen</b>	<b>145</b>
<b>C</b>	<b>Zustandsraumdarstellungen</b>	<b>147</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>149</b>

## Häufig verwendete Formelzeichen

Kleine griechische Buchstaben:

$\gamma$	Polynomgrad
$\lambda$	Parameter einer Polynommatrix
$\lambda_i$	Eigenwert
$\lambda_{s,i}$	Eigenwert der Slave-Struktur
$\mu$	Polynomgrad
$\nu$	Reduktionsschritt
$\sigma$	Polynomgrad
$\rho$	Polynomgrad
$\rho_d$	Dichte
$\zeta$	Inverser Parameter $\lambda^{-1}$
$\omega$	Kreisfrequenz

Kleine lateinische Buchstaben:

$a_{ij}(\lambda)$	Elemente einer Polynommatrix
$d(\lambda)$	Charakteristisches Polynom der Struktur-Eigenwerte
$d_s(\lambda)$	Charakteristisches Polynom der Slave-Eigenwerte
$d_i$	Rangabfall einer Matrix
$f$	Frequenz
$f_i$	Eigenfrequenz
$g_{ij}$	Elemente der Matrix $\mathbf{G}$
$j$	imaginäre Einheit $j = \sqrt{-1}$
$l$	Anzahl verschiedener Eigenwerte
$l$	Elementlänge
$m$	Anzahl der Master-Freiheitsgrade
$m$	Einheit Meter
$n$	Anzahl der Freiheitsgrade des unkondensierten Systems
$p(\lambda)$	Charakteristisches Polynom
$s$	Anzahl der Slave-Freiheitsgrade
$sv_i$	Singulärwert
$t$	Zeit
$v_i$	Vielfachheit eines Eigenwerts
$w$	Verschiebungen
$x$	Koordinatenrichtung
$y$	Koordinatenrichtung
$z$	Koordinatenrichtung

Große lateinische Buchstaben:

$A$	Querschnittsfläche
$E$	Elastizitätsmodul
$E_{kin}$	Kinetische Energie
$E_{pot}$	Potentielle Energie
$F$	Kraft
$I$	Flächenträgheitsmoment
$M$	Moment
$R$	Rayleigh-Quotient

Matrizen:

$\mathbf{A}(\lambda)$	Polynommatrix minimaler Ordnung
$\tilde{\mathbf{A}}(\lambda)$	Näherung von $\mathbf{A}(\lambda)$
$\mathbf{A}^\nu(\lambda)$	um $\nu - 1$ Linearfaktoren reduzierte Matrix $\mathbf{A}(\lambda)$
$\mathbf{A}^*(\lambda)$	Nicht normierte Matrix $\mathbf{A}(\lambda)$
$\mathbf{A}$	Zustandsraummatrix
$\mathbf{A}_i$	Koeffizientenmatrizen von $\mathbf{A}(\lambda)$ und $\mathbf{F}(\lambda)$
$\mathbf{A}_r(\lambda)$	Normierungsmatrix
$\mathbf{A}_{r,i}(\lambda)$	Koeffizientenmatrizen von $\mathbf{A}_r(\lambda)$
$\mathbf{B}(\lambda)$	Polynommatrix minimaler Ordnung
$\tilde{\mathbf{B}}(\lambda)$	Näherung von $\mathbf{B}(\omega)$
$\mathbf{B}^\nu(\lambda)$	um $\nu - 1$ Linearfaktoren reduzierte Matrix $\mathbf{B}(\lambda)$
$\mathbf{B}^*(\lambda)$	Nicht normierte Matrix $\mathbf{B}(\lambda)$
$\mathbf{B}$	Zustandsraummatrix
$\mathbf{B}_i$	Koeffizientenmatrizen von $\mathbf{B}(\lambda)$
$\mathbf{B}_r$	Normierungsmatrix
$\mathbf{C}(\lambda)$	Polynommatrix
$\mathbf{C}$	Zustandsraummatrix
$\mathbf{C}$	Begleitmatrix im Frequenzbereich
$\mathbf{C}_D$	Dämpfungsmatrix
$\mathbf{C}_i$	Koeffizientenmatrizen von $\mathbf{C}(\lambda)$
$\mathbf{D}(\lambda)$	Dynamische Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{D}_k(\lambda)$	Kondensierte dynamische Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{E}(\lambda)$	Gebrochenrationale Polynommatrix
$\mathbf{F}(\lambda)$	Polynommatrix
$\mathbf{F}(\lambda)$	Zählermatrix der gebrochenrationalen Darstellung des kondensierten Systems
$\mathbf{F}^\nu(\lambda)$	Um $\nu - 1$ Linearfaktoren reduzierte Polynommatrix
$\mathbf{F}_r(\lambda)$	Normierungsmatrix
$\mathbf{F}_{r,i}(\lambda)$	Koeffizientenmatrizen von $\mathbf{F}_r(\lambda)$

<b>G</b>	Rechteckige Matrix bei einer Kondensation nach PETERSMANN
<b>H</b> ( $\lambda$ )	Frequenzgangmatrix
<b>H<sub>i</sub></b> ( $\lambda$ )	Frequenzgangmatrix eines Teilsystems
<b>I</b>	Einheitsmatrix
<b>K</b>	Steifigkeitsmatrix
<b>K<sub>ss</sub></b>	Steifigkeitsmatrix der Slave-Struktur
<b>K<sub>G</sub></b>	Steifigkeitsmatrix bei statischer Kondensation
<b>L</b>	Modalmatrix der Linkseigenvektoren im Zustandsraum
<b>M</b>	Massenmatrix
<b>M<sub>ss</sub></b>	Massenmatrix der Slave-Struktur
<b>M<sub>G</sub></b>	Massenmatrix bei statischer Kondensation
<b>R</b> ( $\lambda$ )	Zählermatrix der Frequenzgangmatrix
<b>R</b>	Modalmatrix der Rechtseigenvektoren im Zustandsraum
<b>T</b> ( $\lambda$ )	Transformationsmatrix
<b>T<sub>d</sub></b> ( $\lambda$ )	Dynamische Transformationsmatrix
<b>W</b> ( $\lambda$ )	Polynommatrix
<b>V</b> ( $\lambda$ )	Polynommatrix
<b>X</b>	Modalmatrix der Rechtseigenvektoren
<b>Y</b>	Modalmatrix der Linkseigenvektoren
<b>Z</b>	Modalmatrix der Rechtsseigenvektoren von <b>B</b> ( $\lambda$ )
<b><math>\Lambda</math></b>	Spektralmatrix
<b><math>\Lambda_s</math></b>	Spektralmatrix der Slave-Eigenwerte

Vektoren:

<b>f</b>	Vektor der Kräfte und Momente
<b>f<sub>i</sub></b>	Rechtseigenvektor einer nicht reduzierten Matrix <b>B</b> ( $\lambda$ )
<b>q</b>	Vektor der Modalkoordinaten
<b>u</b>	Eingangsgrößen im Zustandsraum
<b>w<sub>i</sub></b>	Iterationsvektor
<b>x</b>	Generalisierte Koordinaten (Verschiebungen, Verdrehungen)
<b>x</b>	Eingangsgrößen
<b>x<sub>i</sub></b>	Rechtseigenvektor
<b><math>\hat{x}_i</math></b>	Rechtseigenvektor einer nicht reduzierten Matrix <b>A</b> ( $\lambda$ ) bzw. <b>F</b> ( $\lambda$ )
<b>y</b>	Ausgangsgrößen
<b>y<sub>i</sub></b>	Linkseigenvektor
<b>z</b>	Zustandsraumvektor
<b>z<sub>i</sub></b>	Eigenvektor im Zustandsraum

Indizes:

$adj$	Adjungierte Matrix
$l$	Links
$r$	Rechts
$s$	Slave-System

Allgemeine Symbole:

$ (\ ) $	Determinante
$\det$	Determinante
$\tilde{(\ )}$	Näherung
$(\ )^T$	Transponierte Matrix
$(\dot{\ })$	Zeitableitung
$(\ )^*$	Nicht normierte Matrix
$(\hat{\ })$	Polynommatrix mit dem inversen Parameter $\zeta = \lambda^{-1}$



# Kapitel 1

## Einleitung

Technische Konstruktionen unterliegen ständig steigenden Anforderungen in bezug auf ihre Bearbeitungsgenauigkeit, Sicherheit und nicht zuletzt auf ihre Wirtschaftlichkeit. Einhergehend mit einer Entwicklung hin zu immer leichteren Bauteilen werden die Konstruktionen neben statischen und quasistatischen Belastungen im zunehmendem Maße dynamischen Beanspruchungen ausgesetzt. Zusätzlich zur statischen Analyse ist somit eine Untersuchung des Schwingungsverhaltens einer Konstruktion notwendig.

Die im folgenden betrachteten Strukturen besitzen linear-elastisches Verhalten und lassen sich mit Hilfe von partiellen Differentialgleichungen beschreiben. Mit der ständigen Weiterentwicklung leistungsfähiger Rechner werden seit den sechziger Jahren im zunehmenden Maße numerische Berechnungsmethoden zur Lösung strukturdynamischer Probleme im Ingenieurwesen eingesetzt. Für die rechnergestützte Analyse eines mechanischen Systems sind besonders diejenigen mathematischen Modelle geeignet, die das zu untersuchende Systemverhalten mit einer beschränkten Anzahl von Freiheitsgraden beschreiben. Da ein kontinuierliches System eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden besitzt, ist eine Diskretisierung des durch die analytischen Differentialgleichungen abgebildeten Gebietes z.B. mit Hilfe von Differenzgleichungen oder finiten Elementen notwendig. Die Eigenschaften des Systems werden dann durch gewöhnliche Differentialgleichungen angenähert.

Das am weitesten verbreitete numerische Berechnungsverfahren zur Lösung physikalisch-technischer Probleme ist die Methode der finiten Elemente (FEM). Die Struktur wird bei diesem Verfahren durch Verschiebungen und Kräfte an einer endlichen Anzahl von diskreten Punkten dargestellt. Die Spannungen und Verschiebungen einer Struktur, und damit das Strukturverhalten, werden mit Hilfe von Ansatzfunktionen innerhalb bestimmter Teilbereiche (Elemente) beschrieben. Werden für das gesamte Bauteil gleichbleibende Struktureigenschaften gewährleistet, so gilt für finite Elemente-Ansätze das gleiche Konvergenzverhalten wie für Ansätze über die Gesamtstruktur.

Zur ausreichend genauen Darstellung von Systemen mit Bereichen unterschiedlicher struktureller Eigenschaften ist jedoch eine Diskretisierung mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden notwendig. Die Größe der anfallenden Datenmenge - Gleichungssysteme der Dimension

$n = 10^4$  bis  $n = 10^6$  sind nicht unrealistisch ([45]) - kann dazu führen, daß eine Lösung des Differentialgleichungssystems nicht mehr wirtschaftlich oder überhaupt nicht mehr möglich ist. Aus diesem Grund wurden zur Verringerung des Rechen- und Speicheraufwands verschiedene Reduktionsverfahren entwickelt.

Das Ziel der Reduktionsmethoden ist es, die Anzahl der zur Abbildung des Systemverhaltens benötigten Gleichungen so zu reduzieren, daß die Güte der ursprünglichen Approximation zumindest in einem bestimmten (Frequenz-)Bereich unverändert bleibt. Durch die Aufteilung einer großen und/oder komplizierten Struktur in kleinere Teilstrukturen ist eine Systemanalyse wirtschaftlich an den Teilsystemen möglich. Ein solches Vorgehen wird als **Substrukturtechnik** bezeichnet.

Eine Reduktion der Freiheitsgrade der Teilsysteme und damit die der Freiheitsgrade des Gesamtsystems kann mit Hilfe der **Kondensation** erfolgen. Da bei der Analyse großer Systeme mit vielen Freiheitsgraden häufig nur das Systemverhalten an wenigen Punkten von Interesse ist und zudem äußere Erregungen nicht an allen Freiheitsgraden auftreten, wurden Kondensationsverfahren entwickelt, die diese passiven Koordinaten aus dem Gleichungssystem eliminieren. Werden bei der Kondensation keine Näherungen eingeführt, so bleibt die Genauigkeit der dimensionsreduzierten Systembeschreibung gegenüber der ursprünglichen Darstellung unverändert.

Zur statischen Analyse linear elastischer Systeme ist die Berechnung einer Steifigkeitsmatrix und die Lösung eines linearen Gleichungssystems erforderlich. Die Anwendung der Kondensation und der Substrukturtechnik führt bei der statischen Untersuchung der Konstruktion zu einer Beschreibung des Teilsystemverhaltens mit nur wenigen Freiheitsgraden. Das Zusammenfügen der einzelnen Substrukturen ergibt den gegenüber der unkondensierten Darstellung unverändert genauen Verformungszustand des Gesamtsystems.

Zur Beschreibung des dynamischen Systemverhaltens ist zusätzlich zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix die Erfassung der Trägheitseinflüsse durch eine Massenmatrix notwendig. Um die Dämpfungseigenschaften einer Struktur abzubilden, kann zudem die Einführung einer Dämpfungsmatrix erforderlich sein. Neben einem erhöhten Speicheraufwand sind jetzt zur Lösung des resultierenden Eigenwertproblems (Berechnung von Eigenwerten und -vektoren) rechen- und speicherintensivere Algorithmen notwendig als bei der statischen Analyse.

Um die Trägheitseinflüsse der Massen in einem dimensionsreduzierten Gleichungssystem erfassen zu können, ist eine einmalige Kondensation, d.h. eine Kondensation für eine feste Frequenz, nicht mehr ausreichend. Um das Systemverhalten für den gesamten Frequenzbereich mit unveränderter Genauigkeit wiederzugeben, ist eine frequenzabhängige, sogenannte **exakte dynamische Kondensation** notwendig. Hierbei entstehen Gleichungssysteme, die im hohen Maße nichtlinear von der Frequenz abhängig sind. Die Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren ist iterativ durchzuführen, wobei in jedem Iterationsschritt ein Gleichungssystem von der Größe der aus der Systembeschreibung eliminierten Freiheitsgrade zu lösen ist. Die Kondensation erfolgt im Frequenzbereich, eine algebraische Darstellung des reduzierten Gleichungssystems im Zeitbereich ist nicht unmittelbar möglich. Aus diesem Grund verblei-

ben die kondensierten Gleichungen im Frequenzbereich, womit die Verwendungsmöglichkeiten der Formulierung stark eingeschränkt sind.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein neues Verfahren zur Kondensation linearer Differentialgleichungssysteme wie sie bei Verwendung der FEM entstehen vorgestellt. Die Kondensation erfolgt dabei unter Verwendung der Substrukturtechnik an rechen technisch gut handhabbaren Teilstrukturen. Es wird sowohl eine effiziente Lösung der Eigenwertaufgabe als auch eine für weitere Untersuchungen (Zeitbereichssimulationen, Einsatz in der Regelungstechnik) gut handhabbare Darstellung der freiheitsgradreduzierten Gleichungssysteme angestrebt. Die Tauglichkeit der kondensierten Systemdarstellung zur Beschreibung dynamischer Systeme wird abschließend anhand von einfachen Rechenbeispielen aufgezeigt.

Neben dem Verfahren der Kondensation sind zahlreiche weitere Verfahren zur Aufwandsverringerung bei der Eigenwertlösung und zur dimensionsreduzierten Systemdarstellung aus der Literatur bekannt. Es soll daher im folgenden zunächst eine kurze Übersicht der wichtigsten Verfahren gegeben werden, anschließend wird das Ziel der Arbeit präzisiert.

## 1.1 Stand der Forschung

Die Ordnungsreduktion von Gleichungssystemen spielt sowohl bei der Eigenwertanalyse in der Strukturodynamik als auch bei der Simulation dynamischer Vorgänge sowie beim Reglerentwurf eine große Rolle. Aus der Literatur sind eine Vielzahl von Reduktionsverfahren bekannt.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Reduktion der Systemordnung in der Regelungstechnik und bei struktur dynamischen Aufgaben besteht darin, daß in der Regelungstechnik im allgemeinen das Systemverhalten als bekannt vorausgesetzt wird, wohingegen in der Strukturodynamik das Schwingungsverhalten erst mit dem reduzierten Ansatz bestimmt werden soll. Eine Übersicht von Reduktionsmethoden in der Regelungstechnik im Frequenz- und Zeitbereich sowie eine ausführliche Angabe von Literatur bis 1990 enthält [84]. Eine Aufstellung von Verfahren zur Ordnungsreduktion in der Strukturodynamik bis 1993 wird in [77] angegeben.

Zur Lösung der Eigenwertaufgabe großer Systeme in der Strukturodynamik wird der Umstand ausgenutzt, daß für den Ingenieur im allgemeinen nur einige wenige Eigenfrequenzen innerhalb des gesamten Spektrums interessant sind. Zur Ermittlung der Eigenwerte und -vektoren wird daher ein Eigenwertproblem erzeugt, das in der Ordnung gegenüber dem Ausgangsproblem stark verringert ist, den zu untersuchenden Frequenzbereich jedoch ausreichend genau approximiert.

Neben den eingangs erwähnten Methoden der Kondensation und der Substrukturtechnik werden zur Lösung des linearen Eigenwertproblems großer Strukturen die **Lanczos-Methode** ([92], [93], [79], [15], [13], [16], [55]) und die **Subspace-Iteration** ([5], [93]) eingesetzt. Bei diesen iterativen Verfahren wird mittels einer Transformation ein Eigenwertproblem geringer

Ordnung erzeugt (vgl. Kapitel 2.1).

Bei dem Verfahren der **Modalsynthese** werden zur Darstellung von Substrukturen modale Koordinaten benutzt. Die Beschreibung des Teilstrukturverhaltens geschieht durch Ansatzvektoren im Sinne des Ritz-Verfahrens, wobei die Vektoren Eigenformen der Teilstruktur ([34], [6], [71], [112], [47], [14], [46], [31], [50], [94]) aber z.B. auch Lanczos-Vektoren ([2], [17], [13]) sein können (vgl. Kapitel 2.4). Die Größe des entstehenden Gleichungssystems ist abhängig von der Anzahl der im Ansatz verwendeten Vektoren. Bei einem unvollständigen Ansatz wird das Schwingungsverhalten der Struktur näherungsweise beschrieben. Die Güte der Approximation wird im wesentlichen von der Art der verwendeten Ansatzvektoren bestimmt (vgl. Kapitel 2.4). Liegen modale Parameter einer Teilstruktur aus einer Rechnung oder einem Experiment vor, so können die Daten zur Beschreibung des Gesamtsystems verwendet werden ([73], [74], [57]).

Im Unterschied zu dem Modalsynthese-Verfahren wird bei der **exakten dynamischen Kondensation** eine Verringerung der Dimension des Gleichungssystems erreicht, ohne die Anzahl und die Genauigkeit der ermittelbaren Eigenwerte einzuschränken. Die Kondensation findet im allgemeinen an Substrukturen statt. Die Lösung der Eigenwertaufgabe für das Gesamtsystem erfolgt iterativ und ist mit einem hohen Rechenaufwand verbunden. Zur Aufwandsverringerung bei der exakten dynamischen Kondensation wurden zahlreiche Verfahren entwickelt. Das wohl bekannteste ist die **statische Kondensation** von GUYAN ([36]) und IRONS ([48]). Durch eine einmalige Kondensation bei der Kreisfrequenz  $\omega = 0$  und der damit einhergehenden Vernachlässigung von Massenträgheitseinflüssen der Teilstruktur gelangt man zu einer leicht handhabbaren Systemdarstellung. Bei ungedämpften Strukturen ergibt sich eine lineare Eigenwertaufgabe; der einfachen Formulierung steht jedoch ein eingeschränkter Gültigkeitsbereich der ermittelbaren Eigenfrequenzen gegenüber (vgl. Kapitel 2.3.1). Zur Verringerung des Rechenaufwandes bei der iterativen dynamischen Kondensation werden Eigenformen der an den beizubehaltenden (Master-)Freiheitsgraden fest eingespannten Teilstruktur zur Beschreibung des reduzierten Gleichungssystems benutzt ([90], [66], [81]). Damit kann der Rechenaufwand bei der iterativen Eigenwertlösung für die Gesamtstruktur reduziert werden, es ist jedoch für jede Substruktur eine Eigenwertaufgabe zu lösen, deren Größe der Anzahl der aus dem Gleichungssystem entfernten (Slave-)Freiheitsgrade entspricht. Werden nur einige wenige Teilstruktur-Eigenformen des unteren Spektrums berechnet, läßt sich eine weitere Aufwandsverringerung erreichen. Für die unteren Eigenwerte und die zugehörigen Eigenformen des Gesamtsystems lassen sich sehr gute Näherungen erzielen (vgl. Kapitel 2.3.1). Auf die Verwandtschaft von Kondensationsverfahren, die Eigenformen der Teilstruktur zur Systembeschreibung verwenden, und Modalsynthese-Verfahren wird in [101] hingewiesen.

## 1.2 Ziel der Arbeit

Mit Hilfe der exakten dynamischen Kondensation ist die Darstellung eines großdimensionierten Gleichungssystems ohne Einschränkung der Genauigkeit mit wenigen physikalischen Koordinaten möglich. Dem Vorteil eines in der Dimension stark reduzierten Gleichungssystems steht der Nachteil einer analytisch schwer handhabbaren Formulierung gegenüber. Die Darstellung des kondensierten Gleichungssystems findet bisher im allgemeinen im Frequenzbereich statt, wodurch die Verwendungsmöglichkeiten der Systemformulierung stark eingeschränkt sind. Die iterativ durchzuführende Lösung der nichtlinearen Eigenwertaufgabe erfordert einen hohen Rechenaufwand, da die Kondensation für jeden einzelnen Frequenzschritt erfolgen muß. Für jeden Iterationsschritt werden die Matrizen des Ausgangssystems vollständig benötigt, der Bedarf an Speicherplatz kann daher größer sein als der für das unkondensierte Gleichungssystem.

Zur Systemidentifikation und für Simulationsrechnungen im Zeitbereich wäre eine Darstellung der kondensierten Gleichungssysteme der Substrukturen sowie des Gleichungssystems der Gesamtstruktur in Form von linearen Differentialgleichungen günstig. Einer Darstellung mit linearen Differentialgleichungen im Zeitbereich entspricht eine Formulierung mittels Polynommatrizen im Frequenzbereich.

Durch die Formulierung des bei einer frequenzabhängigen Kondensation entstehenden Gleichungssystems mit Hilfe von Polynommatrizen wird eine kompakte und analytisch gut handhabbare Systemdarstellung erwartet. Die Eigenschaften von Polynommatrizen sind ausführlich untersucht worden, und zur iterativen Lösung des Eigenwertproblems für diese Matrizen wurden eine Reihe von effektiven Verfahren entwickelt (siehe z.B. [114], [59], [27], [33], [51], [103]).

Ziele dieser Arbeit sind daher:

- Es soll eine Kondensationsvorschrift aufgestellt werden, die eine analytische Systembeschreibung sowohl im Frequenz- als auch im Zeitbereich ermöglicht. Die Systemdarstellung soll mittels Polynommatrizen bzw. mit linearen Differentialgleichungen erfolgen.
- Die Kondensation soll analytisch, d.h. frequenzabhängig, an einer Substruktur durchgeführt werden. Die Kopplung der Teilstrukturen zu einer Gesamtstruktur soll ebenfalls analytisch möglich sein.
- Durch die Formulierung des kondensierten Gleichungssystems einer Substruktur mit wenigen ausgewählten Teilstruktur-Eigenformen soll eine weitere Aufwandsverringering erreicht werden. Das Schwingungsverhalten der Gesamtstruktur soll dabei in einem interessierenden Frequenzbereich mit ausreichender Genauigkeit approximiert werden.

## 1.3 Inhalt der Arbeit

Die Kapitel 2 und 3 enthalten die der Arbeit zugrundeliegenden Verfahren und mathematischen Werkzeuge. Das sind zum einen Methoden wie die Substrukturtechnik und die Kondensation (Kapitel 2), die zur effizienten Analyse strukturdynamischer Aufgaben eingesetzt werden. Zum anderen werden Grundlagen zur Rechnung mit Polynommatrizen (Kapitel 3.1 bis 3.4) sowie die Faktore zerlegung einer Polynommatrix (Kapitel 3.5) angegeben. Im Kapitel 3.6 wird ein neues Näherungsverfahren für Polynommatrizen hergeleitet. Basierend auf der Beschreibung eines kondensierten Gleichungssystems mit Hilfe von Polynommatrizen gelingt im Kapitel 4 die Formulierung einer neuen Kondensationsvorschrift.

Die Kapitel sind im einzelnen wie folgt aufgebaut:

Im Kapitel 2 werden die Methoden der Kondensation und der Substrukturtechnik dargestellt und damit die Grundlagen für die weiteren Betrachtungen geschaffen. Es wird zunächst das Vorgehen bei der exakten dynamischen Kondensation betrachtet. Es folgt eine Übersicht verschiedener Näherungsansätze sowie die Angabe von Gültigkeitsbereichen der Näherungen. Hierbei sind insbesondere Verfahren von Interesse, die auf eine Systembeschreibung mittels Eigenformen einer Teilstruktur führen. Es werden die Grundlagen der Substrukturtechnik dargestellt und eine Übersicht verschiedener Vorgehensweisen aufgezeigt.

Das bei einer dynamischen Kondensation entstehende Gleichungssystem läßt sich mit Hilfe einer gebrochenrationalen Polynommatrix darstellen. Kapitel 3 enthält die Grundlagen zur Rechnung mit Polynommatrizen und läßt sich in zwei Abschnitte unterteilen. Im ersten Abschnitt wird die Eigenwertaufgabe bei Polynommatrizen betrachtet, Methoden zur Linearisierung der Matrizen angegeben und die Eigenschaften der linearen Matrizen aufgezeigt. Zur Lösung des nichtlinearen Eigenwertproblems von Polynommatrizen werden verschiedene Verfahren angegeben, dabei wird insbesondere auf die Rayleigh-Quotienten-Iteration eingegangen. Im zweiten Teil des Kapitels wird ein Verfahren zur Faktorisierung einer Polynommatrix aufgezeigt. Mit Hilfe der Faktore zerlegung einer Polynommatrix wird anschließend ein neues Verfahren zur Approximation dieser Matrizen hergeleitet. Die Näherung der Polynommatrizen erfolgt dabei durch die nur teilweise Berücksichtigung der Eigenwerte und -vektoren der Matrizen. Für ein kondensiertes Gleichungssystem wird gezeigt, daß über die faktorisierte Formulierung einer Polynommatrix eine frequenzbewertete Näherung eines linearen Schwingungssystems möglich ist.

Im Kapitel 4 wird zunächst die Darstellung eines frequenzabhängig, analytisch kondensierten Gleichungssystems mit Hilfe einer gebrochenrationalen Polynommatrix angegeben. Es werden das Eigenwertspektrum sowie die Eigenschaften der Formulierung im Zustandsraum untersucht. Das im Kapitel 3 hergeleitete Verfahren zur Faktoren- bzw. Spektralzerlegung und zur Näherung einer Polynommatrix wird im vierten Kapitel auf die gebrochenrationale Polynommatrix eines kondensierten Gleichungssystems angewendet. Durch die Umordnung des Spektrums des Gleichungssystems läßt sich die Realisierung einer kondensierten Systemdarstellung mit einer minimalen Anzahl von Variablen im linearen Zustandsraum angeben.

Durch das Vernachlässigen von Eigenwerten und -formen des dimensionsreduzierten Gleichungssystems ist eine ausreichend genaue Approximation des Schwingungsverhaltens eines dynamischen Systems innerhalb eines bestimmten Frequenzbereichs möglich. Die Kondensation erfolgt an Teilsystemen einer Gesamtstruktur. Es werden zur Darstellung und Approximation der Substruktureigenschaften Eigenformen der Teilstruktur als Ansatzvektoren verwendet. Es läßt sich somit eine Kondensationsvorschrift für lineare dynamische Systeme angeben. Die analytische Kopplung einzelner Substrukturen zu einem Gesamtsystem gelingt mit Hilfe von Koppelementen. Die Eignung der Kondensationsvorschrift zur Beschreibung dynamischer Systeme wird anhand einfacher Beispiele nachgewiesen. Durch die Anwendung der Kondensation auf die Substrukturen eines Biegebalkens und eines Rahmens läßt sich der Gültigkeitsbereich für die genäherte Modelldarstellung aufzeigen.

Der Anhang enthält Ergänzungen zu den Kapiteln 2 bis 4. Es wird die numerische Stabilität bei der Faktorisierung einer Polynommatrix untersucht. Es werden zudem Verfahren zur Inversion einer Polynommatrix angegeben. Herkömmliche Verfahren zur Inversion einer Polynommatrix werden mit der Inversion einer faktorisierten Polynommatrix verglichen.

# Kapitel 2

## Kondensation und Substrukturtechnik

Es wird das Verfahren der Kondensation sowie die Substrukturtechnik vorgestellt. Beide Methoden werden gemeinsam genutzt, um den Aufwand zur Lösung großer Gleichungssysteme, wie sie z.B. bei Verwendung der Finite Elemente Methode (FEM) entstehen, zu verringern.

Mit Hilfe der Kondensation wird die Dimension eines Gleichungssystems reduziert. Wurde ein Bauteil unter Anwendung der Substrukturtechnik in kleinere Teilstrukturen zerlegt, ist eine effektive Anwendung der Kondensation auf die Teilsysteme möglich.

Die Anwendung der Kondensation auf Teilstrukturen bildet den Rahmen für alle folgenden Betrachtungen.

### 2.1 Vorbemerkungen

Die aus der diskreten Modellbildung mit der FEM resultierenden Bewegungsgleichungen für ein lineares zeitinvariantes System lauten

$$\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_D\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (2.1)$$

$\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{C}_D$  und  $\mathbf{M}$  sind die Steifigkeits-, Dämpfungs- und Massenmatrix mit der Dimension  $n \times n$ .  $\mathbf{x}(t)$  ist ein  $(n \times 1)$ -Vektor mit den Koordinaten der Verschiebungen und Verdrehungen und  $\mathbf{f}(t)$  ein  $(n \times 1)$ -Vektor der äußeren Erregungskräfte und -momente. Die Anzahl der Freiheitsgrade und damit die Größe des Differentialgleichungssystems wird durch die Anzahl der Elemente des Vektors  $\mathbf{x}(t)$  bestimmt.

Im folgenden werden ungedämpfte Systeme betrachtet, so daß die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}_D = \mathbf{0}$  ist. Mit der Annahme einer harmonischen Bewegung und Erregung der Struktur, lassen sich mit Hilfe der Beziehungen

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}}(\omega)e^{j\omega t}, \quad \mathbf{f}(t) = \hat{\mathbf{f}}(\omega)e^{j\omega t} \quad (2.2)$$

die Bewegungsgleichungen (2.1) im Frequenzbereich wie folgt darstellen:

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\hat{\mathbf{x}}(\omega) = \mathbf{D}(\lambda)\hat{\mathbf{x}}(\omega) = \hat{\mathbf{f}}(\omega). \quad (2.3)$$

Hierbei ist  $\lambda = \omega^2$  und  $\omega$  die Eigenkreisfrequenz. Die Matrix  $\mathbf{D}(\lambda)$  wird aufgrund ihrer Frequenzabhängigkeit auch als **dynamische Steifigkeit** bezeichnet.

Da die folgenden Betrachtungen vorwiegend im Frequenzbereich stattfinden, werden im weiteren die Vektoren  $\hat{\mathbf{x}}(\omega)$  und  $\hat{\mathbf{f}}(\omega)$  als  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{f}$  dargestellt und Vektoren im Zeitbereich mit  $\mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{f}(t)$  gekennzeichnet.

### Eigenwertanalyse

Die Lösung des homogenen Gleichungssystems (2.3) ( $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ) führt auf die lineare Eigenwertaufgabe

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (2.4)$$

Für die Eigenwerte

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_n \quad (2.5)$$

ergeben sich aus

$$(\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{M}) \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \quad (2.6)$$

$n$  linear unabhängige Eigenvektoren  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ . Die Eigenwerte  $\lambda_i$  sind die Nullstellen der charakteristischen Determinante

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) = 0. \quad (2.7)$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden die im Anhang B für einen Balken und einen Stab angegebenen Steifigkeitsmatrizen und konsistenten Massenmatrizen verwendet. Die Matrizen sind symmetrisch und positiv definit ( $\mathbf{M}$ ) bzw. positiv semidefinit ( $\mathbf{K}$ ), d.h. alle Eigenwerte sind positiv und reell bzw. Null.

Die Lösung der Eigenwertaufgabe (2.6) liefert die Eigenwerte und -vektoren eines linearen Systems. Anhand dieser, als **modale Parameter** bezeichneten, Größen lassen sich wichtige Eigenschaften eines Schwingungssystems erkennen.

Die Größe und Verteilungsdichte der Eigenwerte sowie das Aussehen der Schwingungsformen lassen Aussagen über die Anfälligkeit einer Struktur zu. Wird ein Bauteil durch von außen angreifende Kräfte erregt, können durch einen Vergleich der Erregerfrequenzen und der Angriffspunkte der Erregungen mit den Eigenfrequenzen und den Eigenformen Aussagen über die Beanspruchung der Struktur getroffen werden (Resonanzverhalten). Unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenvektoren gelingt eine Entkopplung der Schwingungsanteile. Die einzelnen Schwingungsformen können getrennt betrachtet werden, und es kann eine Auswahl von Schwingungsformen erfolgen, die zur Systembeschreibung benutzt werden. Werden nur wenige bestimmte Eigenformen zur Beschreibung der Struktureigenschaften in einem interessierenden Frequenzbereich verwendet, läßt sich eine Reduktion des

Gleichungssysteme erreichen. Diese Eigenschaft wird z.B. bei der Lösung großer Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung genutzt. Beim Reglerentwurf für dynamische Systeme werden sogenannte modale Regelungen eingesetzt, wobei man zum einen die Entkopplungseigenschaften der Eigenvektoren ausnutzt und zum anderen versucht, direkten Einfluß auf die Eigenwerte der Struktur zu nehmen, um so die Systemeigenschaften zu beeinflussen. Die modalen Parameter können auch zur Schadenslokalisierung und zur Schadensfrüherkennung bei Bauteilen eingesetzt werden ([63]).

Das lineare Eigenwertproblem (2.4) wurde insbesondere für symmetrische Matrizen ausgiebig untersucht, und zu seiner Lösung stehen zahlreiche Algorithmen zur Verfügung. Neben der Symmetrie wird die, aufgrund der Kopplung einzelner Strukturen, bei der FEM entstehende Bandstruktur der Matrizen ausgenutzt.

Die explizite Berechnung der Polynomkoeffizienten der Determinante (2.7) ist aufwendig und führt bereits bei Gleichungssystemen geringer Größe zu großen Differenzen in den Beträgen der Koeffizienten und damit zu schlecht konditionierten Polynomen. Verfahren zur Lösung des Eigenwertproblems (2.4) vermeiden im allgemeinen die Berechnung der charakteristischen Determinante.

Eigenwertlöser wie der QR- oder der QZ-Algorithmus ([115], [100]) ermitteln gleichzeitig sämtliche im Spektrum enthaltenen Eigenwerte und -vektoren. Die Güte der berechneten Eigenwerte ist abhängig von der Kondition des Eigenwertproblems, die Algorithmen verlangen, daß die Systemmatrizen vollständig im Arbeitsspeicher untergebracht werden.

Da der Bedarf an Speicherplatz mit dem Quadrat und die zur Eigenwertlösung benötigte Rechenzeit ungefähr mit der vierten Potenz zur Anzahl der Freiheitsgrade steigen ([30]), ist es günstig, Verfahren zur Eigenwertermittlung einzusetzen, die weniger speicher- und rechenaufwendig sind. Für die Beschreibung der dynamischen Eigenschaften einer Struktur mit einigen tausend Freiheitsgraden ist oftmals die Ermittlung einiger (hundert) unterer Eigenfrequenzen und Eigenformen ausreichend. Dies ist im wesentlichen damit zu begründen, daß die Schwingungsanteile bei den höheren Frequenzen schnell abklingen oder überhaupt nicht angeregt werden. Aufgrund der Vielzahl möglicher Schwingungsformen komplexer Bauteile ist jedoch bereits zur Erfassung der unteren Eigenschwingungsformen eine gleichmäßig feine Diskretisierung der Struktur und damit eine große Anzahl von Freiheitsgraden notwendig.

Verfahren wie die von Misessche Iteration und die Inverse Iteration ([23], [115]) konvergieren bei Vorgabe eines geeigneten Startvektors gegen den betragshöchsten bzw. betragsniedrigsten Eigenwert im Spektrum (vgl. Kapitel 3.4). Zur Berechnung von weiteren Eigenwerten muß eine, bei großen Matrizen aufwendige, Deflation bzw. eine Spektralverschiebung erfolgen.

Die bereits Eingangs erwähnte Subspace-Iteration und das Lanczos-Verfahren gehören zu einer Gruppe von Verfahren, die einen Unterraum des gesamten Eigenwertproblems betrachten. Die Subspace-Iteration wird benutzt, um die ersten (vier bis 20) Eigenwerte und -vektoren großer bandförmig besetzter Gleichungssysteme zu bestimmen ([66]). Die modalen Parameter werden bei Vorgabe von Näherungsvektoren simultan iterativ bestimmt, wobei in jedem Schritt ein Eigenwertproblem reduzierter Größe zu lösen ist. Beim Lanczos-Verfahren

wird ebenfalls mit Hilfe von einigen wenigen Ansatzvektoren eine Ähnlichkeitstransformation durchgeführt, wodurch eine tridiagonale Matrix erzeugt wird. Die sogenannten Lanczosvektoren werden rekursiv aus bereits ermittelten Vektoren berechnet und stellen Näherungen der gesuchten Eigenvektoren dar. Mit dem Lanczos-Verfahren werden sowohl die Eigenwerte im unteren wie die im oberen Spektrum gut approximiert. Das Verfahren wird oft als das beste zur Berechnung von sehr großen, dünnbesetzten, symmetrischen Matrizen bezeichnet ([66]).

Mit Hilfe des Verfahrens der Kondensation läßt sich die, aufgrund einer feinen Diskretisierung mit der FEM hohe Freiheitsgradanzahl eines Gleichungssystems wieder reduzieren.

## 2.2 Exakte dynamische Kondensation

Durch die Dimensionsverringering großer Gleichungssysteme ist ein wirtschaftlicherer und handlicherer Umgang bei der Lösung dieser Systeme, insbesondere bei der iterativen Lösung des Eigenwertproblems, möglich. Eine Reduzierung der Freiheitsgradanzahl kann mit Hilfe der Kondensation erreicht werden.

Eine Kondensation oder Verdichtung der Strukturmatrizen  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{M}$  in (2.3) führt auf Matrizen mit einer verringerten Dimension. Die Beschreibung der Eigenschaften einer Struktur erfolgt dann lediglich durch einen Teil der Komponenten des Vektors  $\mathbf{x}$ . Das in der Dimension verringerte Gleichungssystem soll dabei das Verhalten der Struktur möglichst ohne Informationsverlust beschreiben.

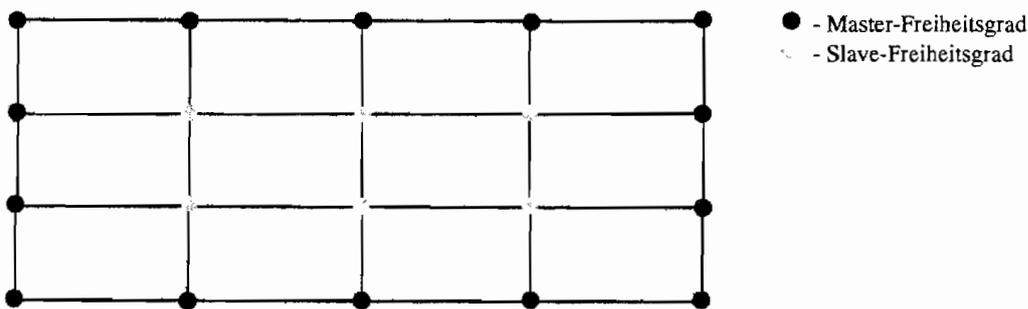


Abbildung 2.1: In Master- und Slave-Freiheitsgrade unterteilte Plattenstruktur

Zur formalen Durchführung der Kondensation ist die Partitionierung des Gleichungssystems (2.3) in  $m$  beizubehaltende Master-Freiheitsgrade  $\mathbf{x}_m$  und  $s = n - m$  zu entfernende Slave-Freiheitsgrade  $\mathbf{x}_s$  notwendig. Um einzelne Strukturen, die auf wenige Freiheitsgrade kondensiert wurden, miteinander koppeln zu können, müssen mindestens die entsprechenden Koppelknoten zu Master-Freiheitsgrade gewählt werden. In Abbildung [?] wurde eine Plat-

tenstruktur auf die Randfreiheitsgrade kondensiert, das Aneinanderfügen weiterer Strukturen an die Platte ist damit möglich. Im Rahmen dieser Arbeit wird sich auf das Lösen der Eigenwertaufgabe einer Struktur beschränkt. Im weiteren sollen daher äußere Kräfte nur an den Master-Freiheitsgraden angreifen, die Slave-Koordinaten sind lastfrei. Die Gleichungen (2.3) lassen sich dann wie folgt angeben:

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

oder kompakter

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{mm}(\lambda) & \mathbf{D}_{ms}(\lambda) \\ \mathbf{D}_{sm}(\lambda) & \mathbf{D}_{ss}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

mit  $\mathbf{D}_{ij}(\lambda) = \mathbf{K}_{ij} - \lambda \mathbf{M}_{ij}$ ;  $i, j = m, s$ . Aus der unteren Zeile von (2.9) erhält man die Beziehung zwischen den Slave- und Master-Freiheitsgraden

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{T}_d(\lambda) \mathbf{x}_m \quad (2.10)$$

mit der dynamischen Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_d(\lambda) = -\mathbf{D}_{ss}(\lambda)^{-1} \mathbf{D}_{sm}(\lambda). \quad (2.11)$$

Wird ein System lediglich durch die Master-Freiheitsgrade  $\mathbf{x}_m$  beschrieben, ist es möglich bei Vorgabe der Vektorkomponenten  $\mathbf{x}_m$  und eines Parameters  $\lambda$  die Koordinaten des Vektors  $\mathbf{x}_s$  zu berechnen und damit den gesamten Zustand des Systems zu rekonstruieren.

Mit Hilfe der frequenzabhängigen Matrix  $\mathbf{T}_d(\lambda)$  läßt sich eine Transformationsbeziehung angeben, mit der sich das Ausgangsgleichungssystem (2.3) auf einen Unterraum verringerter Dimension projizieren läßt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_d(\lambda) \end{pmatrix} \mathbf{x}_m = \mathbf{T}(\lambda) \mathbf{x}_m. \quad (2.12)$$

Wird die Beziehung (2.12) in (2.9) eingesetzt, ergibt die Linksmultiplikation der Gleichungen mit  $\mathbf{T}^T(\lambda)$  einen Ausdruck

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T}_d^T(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{mm}(\lambda) & \mathbf{D}_{ms}(\lambda) \\ \mathbf{D}_{sm}(\lambda) & \mathbf{D}_{ss}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{T}_d(\lambda) \end{pmatrix} \mathbf{x}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T}_d^T(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

und damit das reduzierte Gleichungssystem der Dimension  $m$

$$\mathbf{D}_k(\lambda) \mathbf{x}_m = \mathbf{f}_m \quad (2.14)$$

mit der kondensierten dynamischen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{D}_k(\lambda) = \mathbf{K}_k(\lambda) - \lambda \mathbf{M}_k(\lambda). \quad (2.15)$$

Die in der Dimension reduzierten Strukturmatrizen sind von der Frequenz abhängig.

$$\mathbf{M}_k(\lambda) = \mathbf{M}_{mm} + \mathbf{M}_{ms} \mathbf{T}_d(\lambda) + \mathbf{T}_d^T(\lambda) \mathbf{M}_{sm} + \mathbf{T}_d^T(\lambda) \mathbf{M}_{ss} \mathbf{T}_d(\lambda), \quad (2.16)$$

$$\mathbf{K}_k(\lambda) = \mathbf{K}_{mm} + \mathbf{K}_{ms} \mathbf{T}_d(\lambda) + \mathbf{T}_d^T(\lambda) \mathbf{K}_{sm} + \mathbf{T}_d^T(\lambda) \mathbf{K}_{ss} \mathbf{T}_d(\lambda). \quad (2.17)$$

Das formale Multiplizieren von links mit  $\mathbf{T}^T(\lambda)$  ergibt sich durch die Forderung nach gleicher kinetischer und potentieller Energie von kondensierter Struktur und Ausgangssystem

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}_m^T \mathbf{M}_k(\lambda) \mathbf{x}_m, \quad (2.18)$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{x}_m^T \mathbf{K}_k(\lambda) \mathbf{x}_m. \quad (2.19)$$

Werden die kondensierten Gleichungen (2.14) mit der exakten Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_d(\lambda)$  ermittelt, lautet die in  $\lambda$  nichtlineare dynamische Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{D}_k(\lambda) = \mathbf{D}_{mm}(\lambda) - \mathbf{D}_{ms}(\lambda) \mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda) \mathbf{D}_{sm}(\lambda). \quad (2.20)$$

Die nichtlineare Eigenwertaufgabe

$$\mathbf{D}_k(\lambda) \mathbf{x}_m = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

liefert die gleichen Eigenwerte und -formen, wie die ursprüngliche Aufgabe (2.4) für die unkondensierten Ausgangsgleichungen, weshalb das Vorgehen auch als exakte dynamische Kondensation bezeichnet wird.

Sind die Ausgangsmatrizen symmetrisch, bleibt die Symmetrie auch bei dem kondensierten Gleichungssystem erhalten, eine Bandstruktur der Systemmatrizen geht bei der Kondensation jedoch verloren.

Die Dimension der kondensierten Systemmatrix  $\mathbf{D}_k(\lambda)$  hat sich gegenüber der der Originalmatrix  $\mathbf{D}(\lambda)$  um die Anzahl der Slave-Freiheitsgrade auf  $m = n - s$  verringert. Der Berechnungsaufwand gegenüber dem Ausgangssystem ist jedoch nicht unbedingt geringer geworden. Zur iterativen Lösung des nichtlinearen Eigenwertproblems (2.21) ist in jedem Schritt die inverse frequenzabhängige Matrix  $\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)$  zu ermitteln. Um eine explizite Berechnung der Inversen zu vermeiden, erfolgt die Bestimmung der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_d(\lambda)$  durch das Auflösen des Gleichungssystems

$$\mathbf{D}_{ss}(\lambda) \mathbf{T}_d(\lambda) = \mathbf{D}_{sm}(\lambda). \quad (2.22)$$

Werden nur wenige Koordinaten als Master-Freiheitsgrade gewählt, ist die Dimension dieses Gleichungssystems und damit der Aufwand zur Berechnung von  $\mathbf{T}_d(\lambda)$  entsprechend groß.

Die Ermittlung der kondensierten Matrix  $\mathbf{D}_k(\lambda)$  erfordert in jedem Iterationsschritt zahlreiche Matrizenoperationen. Da die Matrizen  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{M}$  zur iterativen Lösung der Eigenwertaufgabe vollständig gebraucht werden und zudem weiterer Speicherplatz für die Rechenoperationen benötigt wird, hat sich der Speicheraufwand gegenüber den Ausgangsgleichungen nicht verringert.

Zur Reduzierung des Berechnungs- und Speicheraufwands für die kondensierten Gleichungen wurden unterschiedliche Vereinfachungen bei der Kondensation eingeführt. Einige dieser Ansätze sollen im folgenden dargestellt werden.

## 2.3 Maßnahmen zur Aufwandsverringering bei der Kondensation

Die größte Schwierigkeit bei der Berechnung der kondensierten Gleichungen (2.14) liegt in der Ermittlung der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_d(\lambda)$  und der damit verbundenen Inversion der frequenzabhängigen Matrix  $\mathbf{D}_{ss}(\lambda)$ . Daher ist eine Aufwandsverringering bei der Kondensation im allgemeinen gleichbedeutend mit einer Näherung in  $\mathbf{T}_d(\lambda)$  bzw. einer näherungsweise Berechnung der Matrix  $\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)$ .

Eine Aufwandsverringering bei der Kondensation läßt sich durch folgende Maßnahmen erreichen:

- Vereinfachung der Kondensationsvorschrift.
- Erzeugung gut behandelbarer Eigenwertaufgaben, so daß die kondensierten Gleichungen mit einem möglichst geringen Aufwand gelöst werden können.

Eine Vereinfachung bei der Kondensationsvorschrift kann durch die einmalige Erfassung von Trägheitseinflüssen in der dynamischen Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_d(\lambda)$  erreicht werden. Eine verbesserte Darstellung der exakt kondensierten Gleichungen ergibt sich durch die Formulierung mit Hilfe von Eigenschwingungsformen einer Struktur.

Führt das kondensierte Gleichungssystem auf die Lösung einer linearen Eigenwertaufgabe, können Standard-Algorithmen zu Berechnung der Eigenwerte und -vektoren angewendet werden. Die in der Kondensationsvorschrift enthaltenen Vereinfachungen haben jedoch eine Einschränkung des Gültigkeitsbereichs sowie eine geringe Genauigkeit der approximierten Eigenfrequenzen zur Folge.

Von der Kondensationsvorschrift wird weiterhin eine ausreichend genaue Beschreibung des Schwingungsverhaltens in einem interessierenden Frequenzbereich gefordert.

Zudem wird die statische Genauigkeit der kondensierten Systeme verlangt, da eine genaue Erfassung des statischen Verschiebungszustandes Voraussetzung für eine brauchbare Näherung der unteren Eigenfrequenzen ist.

### 2.3.1 Näherungen bei der Kondensation

Der Grad der durch eine Kondensation erreichten Verdichtung ist im wesentlichen von der Näherung in der Kondensationsvorschrift abhängig. Je größer die Vereinfachungen bei der Kondensation sind, desto wichtiger sind im allgemeinen die Anzahl und die Lage der Master-Freiheitsgrade. Die Auswahl der Master-Koordinaten erfolgt aufgrund von Erfahrungen, durch Versuche und ist teilweise automatisierbar ([67], [49], [48], [43], [97]).

Für  $\mathbf{T}_d(\lambda) = \mathbf{0}$  geht das Gleichungssystem (2.14) über in die stark vereinfachte Beziehung

$$\mathbf{D}_{mm}(\lambda)\mathbf{x}_m = \mathbf{f}_m. \quad (2.23)$$

In diesem Fall kann das Gleichungssystem nur dann das Schwingungsverhalten der Struktur ausreichend genau beschreiben, wenn die Kopplung zwischen Master- und Slave-Freiheitsgraden vernachlässigbar gering ist.

Werden bei der Kondensation lediglich die Massenträgheiten berücksichtigt, die alleine durch die Masterfreiheitsgrade erfaßt werden, entsteht eine rein statische Beziehung zwischen den Master- und Slave-Freiheitsgraden  $\mathbf{T}_d(\lambda) = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}$ , es ergibt sich das kondensierte Gleichungssystem

$$\left(\mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{sm}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} - \lambda\mathbf{M}_{mm}\right)\mathbf{x}_m = \mathbf{f}_m. \quad (2.24)$$

Weitere Vereinfachungen in den Strukturmatrizen ergeben sich, wenn bei der Modellbildung die sogenannte "lumped mass"-Methode verwendet wird ([106]). Hierbei ist die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  eine Diagonalmatrix; die Massenbelegung der Struktur wird mittels Punktmassen an den Knoten beschrieben. Die Matrizen  $\mathbf{M}_{ms}$  und  $\mathbf{M}_{sm}$  fallen somit wiederum aus den kondensierten Gleichungen heraus. Für die Berechnung möglichst genauer Eigenwerte und -vektoren in einem größeren Frequenzbereich ist jedoch die Verwendung konsistenter Massenmatrizen sowie die vollständige Berücksichtigung der Massenträgheiten notwendig.

Weniger weitreichende Vereinfachungen entstehen, wenn in der Matrix  $\mathbf{T}_d(\lambda)$  die Frequenz  $\lambda$  durch einen festen Näherungswert  $\tilde{\lambda}$  ersetzt wird.

$$\mathbf{T}_d(\tilde{\lambda}) = -\mathbf{D}_{ss}(\tilde{\lambda})^{-1}\mathbf{D}_{sm}(\tilde{\lambda}). \quad (2.25)$$

Aufgrund der Frequenzunabhängigkeit der Transformationsmatrix ergibt sich für die kondensierten Gleichungen ein lineares Eigenwertproblem. Da die alleine durch die Slave-Freiheitsgrade erfaßten Trägheitskräfte für den gesamten Frequenzbereich nur näherungsweise berücksichtigt werden, hängt die Qualität der ermittelten Eigenwerte direkt von der Nähe zum Näherungswert  $\tilde{\lambda}$  ab. RÖHRLE bezeichnet dieses Vorgehen als einmalige Kondensation, im Gegensatz zu der iterativen Kondensation mit verschiedenen  $\tilde{\lambda}$ -Werten und gibt in [86] Fehler-schranken und Gültigkeitsbereiche an.

Für  $\tilde{\lambda} = 0$  stellt die Näherung (2.25) die nach GUYAN [36] bekannte Kondensation dar. Bei dieser auch als **statische Kondensation** bezeichneten Methode werden die Massenträgheiten in der Transformationsmatrix vernachlässigt, d.h. zur Näherung der Struktur werden

ausschließlich statische Ansatzvektoren benutzt.

$$\mathbf{T}_d = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}. \quad (2.26)$$

Es ergibt sich das kondensierte Gleichungssystem

$$(\mathbf{K}_G - \lambda\mathbf{M}_G)\mathbf{x}_m = \mathbf{f}_m, \quad (2.27)$$

mit den symmetrischen Matrizen

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{M}_{mm} - \mathbf{M}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} - \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{sm} + \mathbf{K}_{ms}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss}\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}. \quad (2.29)$$

Aufgrund der einfachen Kondensationsvorschrift und der Möglichkeit zur Lösung des entstehenden linearen Eigenwertproblems mittels Standardverfahren wird die statische Kondensation in der Praxis häufig angewendet. Wegen der Näherung (2.26) ist der Gültigkeitsbereich der Gleichungen (2.27) jedoch stark eingeschränkt. Die Genauigkeit der Eigenwerte der Aufgabe  $(\mathbf{K}_G - \lambda\mathbf{M}_G)\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$  nimmt aufgrund der vernachlässigten Massenträgheiten mit steigender Frequenz ab. Wie später gezeigt wird, endet der Gültigkeitsbereich der Näherung (2.27) beim kleinsten Eigenwert  $\lambda_{s,1}$  der an den Master-Freiheitsgraden gefesselten (Sub-)Struktur. Eine Vergrößerung des Gültigkeitsbereichs ist durch eine entsprechende Auswahl der Master-Freiheitsgrade möglich. Je geringer der Verdichtungsgrad bei der Kondensation, desto steifer wird die Slave-Struktur und desto höher liegt deren niedrigste Eigenfrequenz. Daher ist die Güte der erzeugten Näherung bei diesem Verfahren im wesentlichen von der Wahl der Master-Freiheitsgrade abhängig. Eine wesentliche Steigerung der Approximationsgüte der Eigenwerte und -vektoren bei der statischen Kondensation kann mit Hilfe von Rayleigh Funktionalen für die exakte dynamische Kondensation erreicht werden ([88]). Eine Übersicht von weiteren Maßnahmen zur Verbesserung der Näherung enthält [81].

Wird in der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_d(\lambda)$  nur die inverse Matrix  $\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)$  für einen festen Wert  $\tilde{\lambda}$  berechnet

$$\mathbf{T}_d(\lambda, \tilde{\lambda}) = -\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\tilde{\lambda})\mathbf{D}_{sm}(\lambda), \quad (2.30)$$

ergibt sich ein Gleichungssystem mit einer Polynommatrix  $\mathbf{D}_k(\lambda)$  3. Grades. Wird  $\tilde{\lambda} = 0$  gewählt

$$\mathbf{T}_d(\lambda, 0) = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{D}_{sm}(\lambda), \quad (2.31)$$

erhält man das kondensierte Gleichungssystem

$$\mathbf{D}_k(\lambda, 0) = \mathbf{K}_G - \lambda\mathbf{M}_G + \lambda^2\mathbf{A}_1 + \lambda^3\mathbf{A}_2 \quad (2.32)$$

mit den Matrizen  $\mathbf{K}_G$  und  $\mathbf{M}_G$  aus der statischen Kondensation nach Guyan und den Matrizen

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1^T\mathbf{M}_{ss}\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^T\mathbf{M}_{ss}\mathbf{B}_1 - \mathbf{M}_{ms}\mathbf{B}_1, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2^T\mathbf{M}_{ss}\mathbf{B}_2. \quad (2.34)$$

$\mathbf{B}_1$  und  $\mathbf{B}_2$  werden dabei aus den Gleichungen

$$\mathbf{K}_{ss}\mathbf{B}_1 = \mathbf{K}_{sm}, \quad \mathbf{K}_{ss}\mathbf{B}_2 = \mathbf{M}_{sm} \quad (2.35)$$

bestimmt. Das Verfahren liefert genauere Ergebnisse als die vorher genannten. Es sind jedoch die Lösung einer kubischen Eigenwertaufgabe sowie zahlreiche Matrizenoperationen erforderlich womit der Aufwand gestiegen ist.

Eine weitere Möglichkeit zur vereinfachten Berechnung der kondensierten Gleichungen besteht darin, die inverse Matrix  $\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)$  näherungsweise mit Hilfe einer Reihenentwicklung zu bestimmen. Wird die Reihe nach dem ersten Glied abgebrochen, entspricht dies der statischen Kondensation.

Die Matrix  $\mathbf{D}_{ss}(\lambda)$  beschreibt das an den Master-Freiheitsgraden gefesselte System (siehe Abbildung 2.3):

$$\mathbf{D}_{ss}(\lambda)\mathbf{x}_s = (\mathbf{K}_{ss} - \lambda\mathbf{M}_{ss})\mathbf{x}_s = \mathbf{0}. \quad (2.36)$$

Die Inverse der Matrix  $\mathbf{D}_{ss}(\lambda)$  läßt sich in der unendlichen Reihe

$$\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda_s) = -(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss})^{-1}\mathbf{K}_{ss}^{-1} \quad (2.37)$$

$$= -\left(\mathbf{I} + \lambda\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss} + \lambda^2(\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss})^2 + \dots\right)\mathbf{K}_{ss}^{-1} \quad (2.38)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i (\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss})^i \mathbf{K}_{ss}^{-1} \quad (2.39)$$

entwickeln ([7]).

Mit

$$\mathbf{T}_d(\lambda) = -\mathbf{K}_{ss}\mathbf{K}_{sm} + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i (\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss})^i \mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{A} \quad (2.40)$$

läßt sich die kondensierte dynamische Steifigkeitsmatrix dann wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{D}_k(\lambda) = \mathbf{K}_G - \lambda\mathbf{M}_G - \lambda^2\mathbf{A}^T \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i (\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss})^i \mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{A}, \quad (2.41)$$

mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_{sm} - (\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss})^T \mathbf{K}_{sm}. \quad (2.42)$$

Die Matrix  $(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss})^{-1}$  läßt sich durch Lösen der Eigenwertaufgabe (2.36) mit Hilfe der Modalmatrix  $\mathbf{X}_s$  der Eigenvektoren  $\mathbf{x}_{s,i}$  und der Spektralmatrix  $\mathbf{\Lambda}_s$  mit den Eigenwerten  $\lambda_{s,i}$  in der Form

$$(\mathbf{I} - \lambda\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss})^{-1} = (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{X}_s\mathbf{\Lambda}_s^{-1}\mathbf{X}_s^{-1}\mathbf{M}_{ss})^{-1} \quad (2.43)$$

angeben. Wird Gleichung (2.43) von links mit  $\mathbf{X}_s$  und von rechts mit  $\mathbf{X}_s^{-1}$  multipliziert, ergibt sich die Diagonalmatrix

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{\Lambda}_s^{-1})^{-1} = \mathbf{I} + \lambda \mathbf{\Lambda}_s + (\lambda \mathbf{\Lambda}_s^{-1})^2 + \dots \quad (2.44)$$

Die Reihe (2.44) und damit auch (2.39) konvergieren nur dann, wenn für sämtliche Werte  $\lambda/\lambda_{s,i}$  in (2.44) die gleiche Entwicklung der Diagonalelemente

$$(1 - \lambda/\lambda_{s,i})^{-1} = 1 + \lambda/\lambda_{s,i} + (\lambda/\lambda_{s,i})^2 + \dots; \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (2.45)$$

gilt. Da dies aber nur für  $\lambda/\lambda_{s,i} < 1$  zutrifft ([7]), endet der Gültigkeitsbereich der Reihe (2.39) beim niedrigsten Eigenwert der Aufgabe (2.36), d.h. die Entwicklung (2.39) ist nur für Frequenzen  $\lambda_s < \lambda_{s,1}$  gültig. Wird die Reihe (2.39) an der Stelle  $i$  abgebrochen, hängt die Güte der Näherung vom Verhältnis des untersuchten Frequenzbereichs zu  $\lambda_{s,1}$  ab. Das bedeutet, je kleiner der Ausdruck  $\lambda/\lambda_{s,1}$ , desto geringer ist der entstehende Fehler. Da die statische Kondensation in der Reihenentwicklung (2.39) als Sonderfall ( $i = 0$ ) enthalten ist, endet auch deren Gültigkeit beim betragsniedrigsten Eigenwert des an den Master-Freiheitsgraden fest eingespannten Systems.

### 2.3.2 Berechnung der kondensierten Gleichungen mit Hilfe von Eigenschwingungsformen

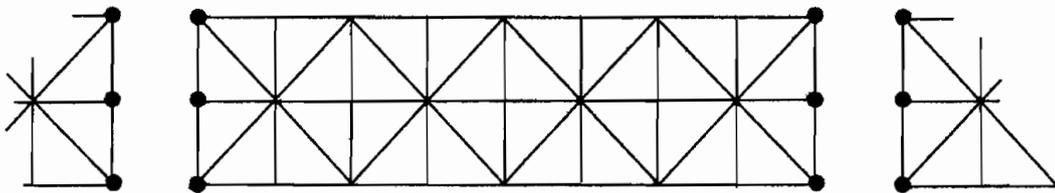


Abbildung 2.2: Auf die Koppel-Freiheitsgrade kondensierte Substruktur

Aufgrund der nur näherungsweise Erfassung der Beziehung zwischen den Master- und Slave-Freiheitsgraden, führen die im vorherigen Abschnitt angegebenen Verfahren zu erheblichen Einschränkungen im Gültigkeitsbereich der kondensierten Gleichungen. Bei den im folgenden beschriebenen Kondensationsverfahren erfolgt, ausgehend von der exakten dynamischen Kondensation, eine Beschreibung der inversen Matrix  $\mathbf{D}_{ss}(\lambda)^{-1}$  mit Hilfe von Eigenformen der zu kondensierenden Struktur. Es ergibt sich dadurch eine vereinfachte Schreibweise des kondensierten Gleichungssystems, desweiteren können durch das nicht Berücksichtigen von Eigenformen Näherungslösungen erzeugt werden, wodurch eine weitere Aufwandsverringern ohne zu großen Genauigkeitsverlust möglich ist.

Wird die, durch die Gleichungen (2.1) beschriebene und in der Abbildung 2.2 dargestellte, Struktur an den Master-Freiheitsgraden (hier die Koppel-Freiheitsgrade) gelagert, ergibt sich die in Abbildung 2.3 dargestellte Struktur.

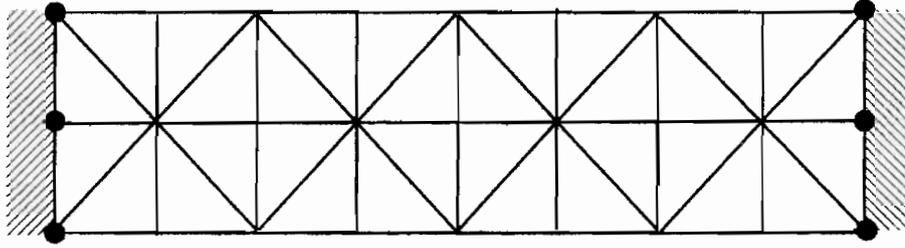


Abbildung 2.3: An den Master-Freiheitsgraden gelagerte Slave-Struktur

Die an den Master-Freiheitsgraden fest eingespannte Struktur wird durch die Differentialgleichungen

$$\mathbf{K}_{ss}\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{M}_{ss}\ddot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

beschrieben und im weiteren als Slave-Struktur oder Slave-System bezeichnet. Werden die Gleichungen (2.46) in den Frequenzbereich transformiert, ergibt sich die Eigenwertaufgabe

$$(\mathbf{K}_{ss} - \lambda\mathbf{M}_{ss})\mathbf{x}_s = \mathbf{D}_{ss}(\lambda)\mathbf{x}_s = \mathbf{0}. \quad (2.47)$$

Zur Lösung des linearen Eigenwertproblems für das Slave-System können Standard-Eigenwertlöser verwendet werden. Die Eigenvektoren der Slave-Struktur  $\mathbf{x}_{s,i}$  werden in der Modalmatrix  $\mathbf{X}_s$  und die entsprechenden Eigenwerte  $\lambda_{s,i}$  in der diagonalbesetzten Spektralmatrix  $\mathbf{\Lambda}_s$  zusammengefaßt. Die Vektoren werden folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_s^T \mathbf{M}_{ss} \mathbf{X}_s &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{X}_s^T \mathbf{K}_{ss} \mathbf{X}_s &= \mathbf{\Lambda}_s. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Die dynamische Steifigkeitsmatrix der Slave-Struktur  $\mathbf{D}_{ss}(\lambda)$  läßt sich in der folgenden Weise angeben

$$\mathbf{D}_{ss}(\lambda) = \mathbf{X}_s^{-T} \mathbf{X}_s^T (\mathbf{K}_{ss} - \lambda\mathbf{M}_{ss}) \mathbf{X}_s \mathbf{X}_s^{-1} = \mathbf{X}_s^{-T} (\mathbf{\Lambda}_s - \lambda\mathbf{I}) \mathbf{X}_s^{-1}. \quad (2.49)$$

Die Inversion der Matrix  $\mathbf{D}_{ss}(\lambda)$  ergibt den Ausdruck

$$\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda) = (\mathbf{K}_{ss} - \lambda\mathbf{M}_{ss})^{-1} = \mathbf{X}_s (\mathbf{\Lambda}_s - \lambda\mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}_s^T. \quad (2.50)$$

Zur Berechnung der inversen Matrix  $\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)$  aus der Formulierung von  $\mathbf{D}_{ss}(\lambda)$ , mit Hilfe der modalen Parameter, ist somit lediglich die Inversion einer Diagonalmatrix  $\mathbf{\Lambda}_s - \lambda\mathbf{I}$  erforderlich.

Von LEUNG [66] und PETERSMANN [81] wird ein Verfahren vorgeschlagen, das zur Kondensation sowohl die Eigenformen des Slave-Systems als auch den im Ruhezustand geltenden statischen Zusammenhang  $\mathbf{x}_s = -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm}\mathbf{x}_m$  benutzt. Die Herleitung des Verfahrens kann,

wie von den beiden oben genannten Autoren gezeigt, auf verschiedene Arten erfolgen, soll hier jedoch nicht angegeben werden.

Wird die Beziehung (2.50) in die kondensierten Gleichungen (2.20) eingesetzt, ergibt sich nach einigen Umformungen und unter Verwendung der Normierungen (2.48) das Gleichungssystem

$$\left[ \mathbf{K}_G - \lambda \mathbf{M}_G + \lambda^2 \mathbf{G} (\mathbf{\Lambda}_s - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \right] \mathbf{x}_m = \mathbf{f}_m, \quad (2.51)$$

mit den Matrizen  $\mathbf{K}_G$  und  $\mathbf{M}_G$  aus der statischen Kondensation nach Guyan und der konstanten Matrix der Dimension  $m \times s$

$$\mathbf{G} = \mathbf{M}_{ms} \mathbf{X}_s - \mathbf{K}_{ms} \mathbf{X}_s \mathbf{\Lambda}_s^{-1}. \quad (2.52)$$

Die zu invertierende Matrix ist jetzt nur noch diagonal besetzt, wodurch eine einfache Berechnung möglich ist. Das dargestellte Vorgehen erfordert die vollständige Lösung der Eigenwertaufgabe (2.47) für die Slave-Struktur.

Eine Aufwandsverringerung kann erreicht werden indem, ähnlich wie bei der modalen Analyse, nur eine bestimmte Anzahl unterer Eigenformen der Slave-Struktur zur Berechnung der kondensierten Gleichungen verwendet werden. Im Unterschied zum Verfahren der modalen Analyse ändert sich durch das Weglassen der Eigenformen jedoch nicht die Dimension des Gleichungssystems.

Der durch die Approximation entstandene Fehler kann durch eine Untersuchung des Terms

$$\lambda^2 \mathbf{G} (\mathbf{\Lambda}_s - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{G}^T \quad (2.53)$$

abgeschätzt werden.

Die einzelnen Elemente der Matrix (2.53) lauten

$$a_{ij}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda^2 (\lambda_{s,\nu} - \lambda)^{-1} g_{ik} g_{jk}. \quad (2.54)$$

Liegt der gesuchte Eigenwert in der Nähe der  $k$ -ten Eigenfrequenz  $\lambda_{s,k}$ , hat diese Schwingungsform der Slave-Struktur einen größeren Einfluß auf die Gesamtlösung als die übrigen. Anders formuliert: je weiter das interessierende Spektrum der Struktur-Eigenfrequenzen von dem des Slave-Systems entfernt ist, desto geringer ist der Anteil der Slave-Eigenformen an der Schwingung. Eine grobe Abschätzung der im Ansatz noch zu berücksichtigenden Slave-Eigenformen kann durch die höchste zu berechnende Frequenz  $\lambda_{max}$  gegeben werden:

$$\lambda_{s,max} = 2\lambda_{max}. \quad (2.55)$$

Mit der Berücksichtigung der Slave-Eigenfrequenzen bis zum Doppelten der interessierenden Eigenfrequenz ist ein Eigenfrequenzfehler bei unter 2% zu erwarten ([24]).

Es ist anzumerken, daß die genäherten Eigenfrequenzen der Struktur über denen bei einer vollständigen Berücksichtigung aller Slave-Eigenformen liegen. Dies ist darauf zurückzuführen, daß durch das Weglassen der Slave-Eigenformen dem System ein Teil seiner Beweglichkeit genommen wird, was eine Versteifung der Struktur zur Folge hat. Das betragsmäßige Überschätzen der Eigenfrequenzen aufgrund von aufgeprägten Zwängungen wurde von COLLATZ [9] und COURANT [10] bewiesen. Oberhalb der höchsten berücksichtigten Slave-Eigenfrequenz  $\lambda_{s,max}$  muß dies jedoch nicht mehr gelten. Die genäherten Eigenfrequenzen können dann sowohl nach oben als auch nach unten von denen bei einem vollständigen Ansatz abweichen. Dies ist darauf zurückzuführen, daß oberhalb der Frequenz  $\lambda_{s,max}$  Eigenfrequenzen übersprungen werden können ([86]).

Von LEUNG [66] wird der Vorschlag gemacht, die Elemente der inversen Matrix  $\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda) = \mathbf{X}_s (\mathbf{A}_s - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}_s^T$  durch die Schreibweise

$$\frac{1}{\lambda_{s,i} - \lambda} = \frac{1}{\lambda_{s,i}} + \frac{\lambda}{\lambda_{s,i}^2} + \frac{\lambda^2}{\lambda_{s,i}^2 (\lambda_{s,i} - \lambda)} \quad (2.56)$$

darzustellen. Mit der Normierung (2.48) ergeben sich dann die Matrizen

$$\mathbf{X}_s \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}_s^T = \mathbf{K}_{ss}^{-1}, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{X}_s \mathbf{A}^{-2} \mathbf{X}_s^T = \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{M}_{ss} \mathbf{K}_{ss}^{-1} \quad (2.58)$$

und die Inverse der Matrix  $\mathbf{D}_{ss}(\lambda)$  in der Form

$$\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda) = \mathbf{K}_{ss}^{-1} - \lambda \mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{M}_{ss} \mathbf{K}_{ss}^{-1} + \lambda^2 \mathbf{X}_s \mathbf{A}^{-2} (\mathbf{A}_s - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}_s^T. \quad (2.59)$$

Dieser Ausdruck wird in die kondensierten Gleichungen

$$\left[ \mathbf{D}_{mm}(\lambda) - \mathbf{D}_{ms}(\lambda) \mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda) \mathbf{D}_{sm}(\lambda) \right] \mathbf{x}_m = \mathbf{f}_m \quad (2.60)$$

eingesetzt.

Werden bei der Berechnung der Inversen Matrix (2.59) nicht sämtliche Slave-Eigenformen berücksichtigt, ergeben sich wiederum Näherungen. Aufgrund des Ansatzes (2.56) bleibt die genäherte Matrix  $\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)$  für  $\lambda = 0$  genau. Für eine gleiche Anzahl verwendeter Eigenformen liefert das Verfahren bei gleichem Gültigkeitsbereich eine etwas bessere Näherung als die Formulierung (2.51). Die Steigerung der Konvergenz ist dabei auf die zusätzliche Berücksichtigung der inversen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{ss}^{-1}$  zurückzuführen. Es ist anzumerken, daß bei der Berechnung von (2.59) mit einem unvollständigen Satz von Eigenformen, aufgrund der Erweiterung (2.56), zusätzlich konjugiert komplexe oder negative Eigenwerte als Lösung auftreten können, die jedoch außerhalb des untersuchten Frequenzbereichs liegen.

Die Verwendung der Eigenformen der Slave-Struktur zur Berechnung der kondensierten Gleichungen erfüllt die Forderung nach einem möglichst großen Geltungsbereich des reduzierten Gleichungssystems. Der Aufwand zur Erzeugung und Lösung der kondensierten Formulierung kann dadurch jedoch größer werden, als der zur Lösung des unkondensierten Gleichungssystems.

Die Vorteile der reduzierten Systembeschreibung können genutzt werden, wenn die Kondensation in Verbindung mit dem Verfahren der Substrukturtechnik verwendet wird.

## 2.4 Substrukturtechnik

Zur Analyse und Identifikation komplizierter und/oder großer Strukturen sind oftmals sehr viele Freiheitsgrade notwendig. Dies kann dazu führen, daß die Berechnung der Gesamtstruktur, aufgrund des hohen Speicherplatzbedarfes und langer Rechenzeiten, in geschlossener Form nicht mehr wirtschaftlich oder überhaupt nicht möglich ist. Wird die Struktur in einzelne Teilsysteme, sogenannte Substrukturen zerlegt, besitzen diese eine geringere Anzahl von Freiheitsgraden. Eine weitere Reduktion der Substruktur-Freiheitsgrade kann, wie bereits gezeigt, durch das Verfahren der Kondensation geschehen.

Bei der Verwendung der Substrukturtechnik zur Lösung großer statischer Probleme liefert die Analyse der Teilstrukturen die gleichen Ergebnisse wie für die Gesamtstruktur. In Verbindung mit der Kondensation der Teilstrukturen auf die Randfreiheitsgrade ist eine Verringerung des Speicherplatzbedarfes ohne Genauigkeitsverlust möglich. Eine ausreichend genaue Beschreibung des dynamischen Verhaltens einer Substruktur durch deren Randfreiheitsgrade, führt, aufgrund der über die gesamte Teilstruktur gleichmäßig verteilten Trägheitseinflüsse, zu frequenzabhängigen Gleichungssystemen. Zur Berechnung der Eigenwerte und -vektoren des Gesamtsystems ist, wie in den vorherigen Kapiteln 2.2 und 2.3 gezeigt wurde, ein nicht-lineares Eigenwertproblem iterativ zu lösen. Da die Kondensation und die Kopplung der Substrukturen in jedem Iterationsschritt erfolgen, ist die Lösung des Eigenwertproblems rechenaufwendig.

Das grundsätzliche Vorgehen bei der Substrukturtechnik ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

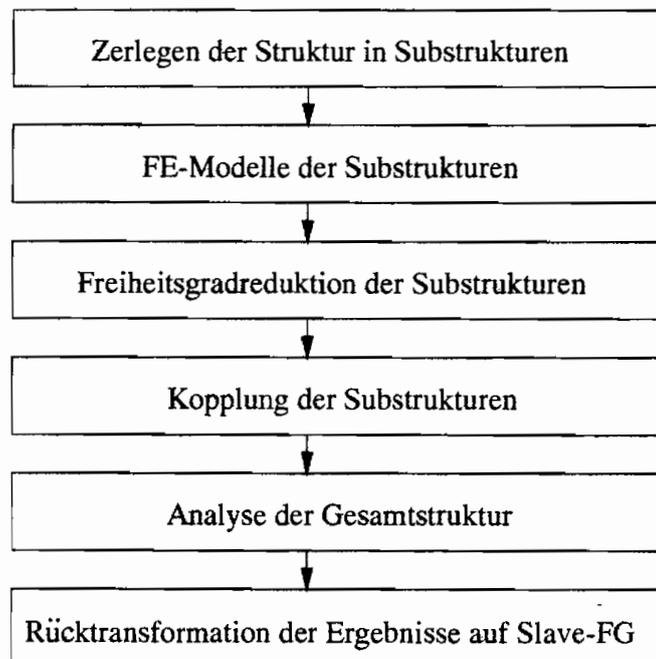


Abbildung 2.4: Prinzipielles Vorgehen bei der Substrukturtechnik

Der entscheidende Schritt hierbei ist die Reduktion der Freiheitsgrade der Teilsysteme. Der dazu in den Teilstrukturen verwendete Näherungsansatz bestimmt über die Genauigkeit der

Beschreibung der Gesamtstruktur. Da für den Zusammenbau der Teilstrukturen die Randfreiheitsgrade an den Elementgrenzen als Kopplungsknoten dienen, müssen diese Koordinaten zur Beschreibung der Substruktur beibehalten werden (vgl. Abbildung 2.5). Die Wahl der Anzahl und der Lage der Master-Freiheitsgrade ist somit nicht willkürlich und zudem entscheidend für die Abbildungsgenauigkeit des dynamischen Systems. Eine Übersicht von Kriterien zur Auswahl der Freiheitsgrade wird in [24] angegeben. Bei der Beschreibung der Substrukturen ist eine sorgfältige Definition der Schnittstellen Voraussetzung, um somit die Kompatibilität der zu koppelnden Teilstrukturen zu gewährleisten. Ein Zusammenfügen angrenzender Strukturen im Koordinatensystem der Gesamtstruktur ist dann ohne Probleme möglich.

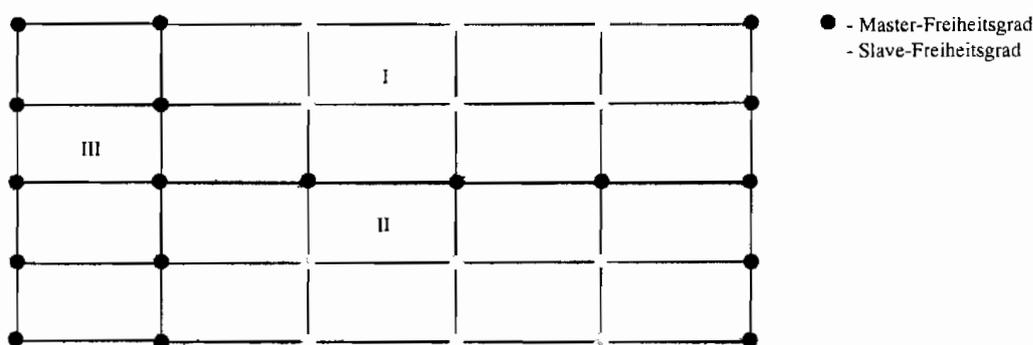


Abbildung 2.5: Aus drei Substrukturen (I, II und III) zusammengesetzte Platte

Die wichtigsten Vorteile der Substrukturtechnik lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Eine zeitlich und örtlich getrennte Entwicklung von Bauteilen ist möglich. Die Modifikation einzelner Baugruppen (Variantenuntersuchung) kann durchgeführt werden, ohne daß jedesmal das gesamte System neu untersucht werden muß.
- Es kann eine Parallelisierung von Prozessen bei der Lösung des Eigenwertproblems erfolgen.
- Durch die Verwendung von identischen Strukturen, sogenannten Copystrukturen, ist eine mehrmalige Verwendung einer berechneten Substruktur möglich.
- Durch die geringe Anzahl von Freiheitsgraden der Substrukturen ist ein wirtschaftlicheres Arbeiten möglich. Die Untersuchung des dynamischen Verhaltens der einzelnen Teilstrukturen kann zunächst unabhängig von der Gesamtstruktur erfolgen. Die ermittelten Daten für die Substruktur können dann zur Berechnung der Eigenschaften der Gesamtstruktur benutzt werden.
- Die Identifikation eines Gesamtsystems mit experimentellen Verfahren ist wegen des hohen Aufwands oft nicht möglich. Die Untersuchungen können jedoch mit vertretbarem Aufwand an den Substrukturen durchgeführt werden.
- Ist eine Rücktransformation auf die aus dem Gleichungssystem eliminierten Freiheitsgrade notwendig, kann diese für jede Substruktur getrennt erfolgen.

- Nichtlineare und lineare Gebiete einer Struktur können durch verschiedene Substrukturen erfaßt werden.

Im folgenden werden einige Richtlinien die bei der Substrukturtechnik zu beachten sind zusammengefaßt. Bei der Aufteilung einer Struktur in Substrukturen sollte beachtet werden, daß die Substrukturen sich möglichst einfach und mit geringem Aufwand, berechnen lassen. Weiterhin sollte das Schwingungsverhalten der Teilstruktur nach Möglichkeit bereits Aussagen über das Verhalten der Gesamtstruktur zulassen (siehe Abbildung 2.6). Sehr große Unterschiede der Steifigkeit und Massenträgheit zwischen einzelnen Substrukturen gilt es zu vermeiden. Durch die Darstellung des Gleichungssystems der Gesamtstruktur in Form von Differentialgleichungen, unterliegt eine weitere numerische Behandlung wenigen Einschränkungen. Eine Kopplung der Teilstrukturen sollte weitestgehend automatisch möglich sein ([30], [24]).

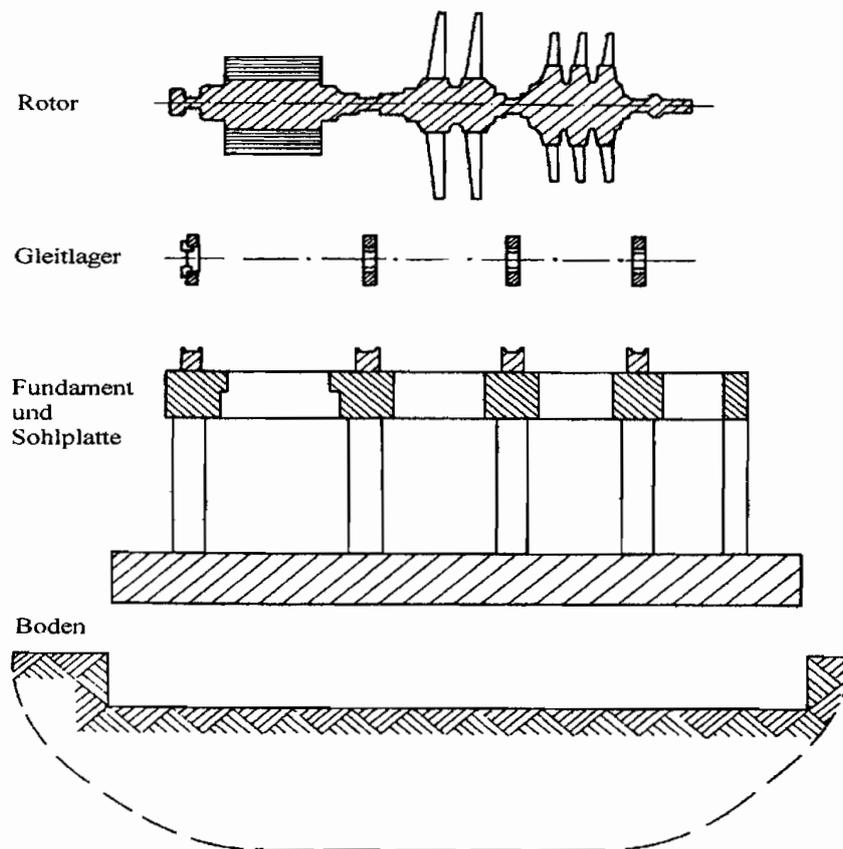


Abbildung 2.6: In Substrukturen zerlegtes System Rotor-Fundament ([30])

### 2.4.1 Übersicht der Verfahren

Die in der Substrukturtechnik verwendeten Verfahren lassen sich grob in zwei Gruppen aufteilen:

Die erste Gruppe verwendet zur Reduktion der Substrukturgleichungen die Methoden der Kondensation. Dazu gehören u.a. die Verfahren von GUYAN [36], IRONS [48], RÖHRLE [86] (vgl. Kapitel 2.3.1). Die Güte der Gesamtstrukturbeschreibung hängt bei diesen Methoden im wesentlichen von der verwendeten Näherung bei der Erzeugung der kondensierten Gleichungen ab. Um brauchbare Resultate zu erzielen, ist eine sorgfältige Auswahl der Master-Freiheitsgrade notwendig, da sonst untere Eigenfrequenzen verloren gehen können ([43]). Um bestimmte Eigenschwingungen mit ausreichender Genauigkeit beschreiben zu können, ist ebenfalls die Wahl entsprechender Master-Koordinaten notwendig, da mit der Wahl der Koordinaten auch eine entsprechende Verteilung der Energie stattfindet. Diese Nachteile treten nicht auf, wenn die gegenüber den Ausgangsgleichungen exakte kondensierte Beschreibung (2.14) benutzt wird. Die Verfahren von LEUNG, PETERSMANN (vgl. Abschnitt 2.3.2) und RUGE [90] verwenden zur Darstellung der reduzierten Gleichungssysteme die Eigenformen der an den Master-Koordinaten fest eingespannten Struktur. Dagegen werden unter Verwendung der **Methode von Kron** die Eigenformen der freischwingenden Substruktur zur Systembeschreibung benutzt ([98], [29], [19]).

Neben dem Verfahren der Kondensation werden bei der Substrukturtechnik auch die Verfahren der **Modalsynthese** angewendet. Bei den Modalsyntheseverfahren werden zur Beschreibung der Gesamtstruktur modale Parameter der Teilstrukturen benutzt. Die Anzahl der modalen Koordinaten kann durch die Vernachlässigung von Schwingungsformen der Teilstrukturen verringert werden, hierdurch ist eine Aufwandsverringerung und eine Reduktion der Systemordnung möglich. Die Eigenwerte und -vektoren der Teilstrukturen können sowohl rechnerisch als auch experimentell ermittelt werden. Auf die Verwandtschaft von Modalsyntheseverfahren und Verfahren der Kondensation wird unter anderem von [81] hingewiesen. Eine Übersicht von Verfahren der Modalsynthese wird z.B. von den Autoren [76], [11] sowie von [30] gegeben. Zur Reduktion der Substruktur werden bei den Verfahren der Modalsynthese Ansatzvektoren im Sinne des Ritz-Verfahrens verwendet (siehe Tabelle 2.62). Die Verfahren lassen sich weiter unterteilen in solche, die die Eigenformen der Slave-Struktur einer Teilstruktur benutzen ([47], [14], [44]), Verfahren, die die Eigenformen der freischwingenden Substruktur verwenden ([34], [46]) sowie hybride Methoden ([6], [111]).

Diejenigen Verfahren, die die Eigenformen der an den Master-Koordinaten gefesselten Substruktur zur Beschreibung verwenden, liefern im allgemeinen die besten Ergebnisse ([6]). Das gilt sowohl für Verfahren, die zur Beschreibung der Substruktur kondensierte Gleichungssysteme verwenden, als auch für die Modalsynthese-Methoden.

Das Modalsynthese-Verfahren von GRAIG und BAMPTON [14] ist direkt vergleichbar mit der kondensierten Formulierung (2.51). Zur Transformation wird die folgende Beziehung

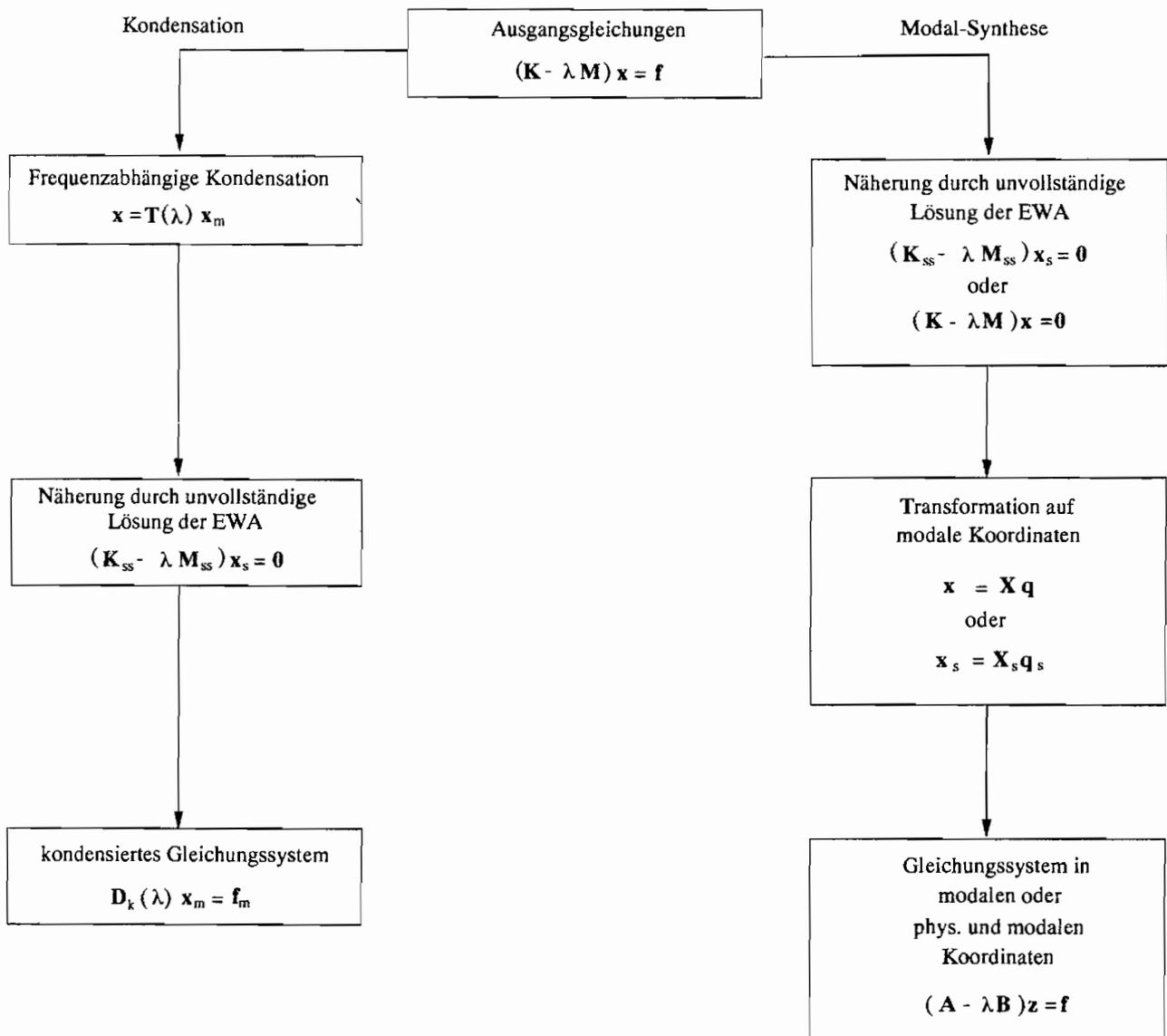


Abbildung 2.7: Anwendung der dynamischen Kondensation und der Modalsynthese-Verfahren in der Substrukturtechnik

verwendet

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} & \mathbf{X}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{q}_s \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

mit den Modalkoordinaten  $\mathbf{q}_s$  der Slave-Struktur.

Wird (2.61) in die Gleichungen (2.9) eingesetzt, ergibt sich die Formulierung in physikalischen Master-Koordinaten und Modalkoordinaten

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_G & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_s \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{M}_G & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{I} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{q}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

Werden die Modalkoordinaten aus der oberen Zeile von (2.62) durch die Beziehung

$$\mathbf{q}_s = \lambda (\mathbf{\Lambda}_s - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{x}_m \quad (2.63)$$

eliminiert, entsteht das kondensierte Gleichungssystem (2.51).

Sind die Randfreiheitsgrade einer Substruktur physikalische Freiheitsgrade, lassen sich, beim Zusammenfügen der Elemente (2.62) zu einer Gesamtstruktur, die Kompatibilitätsbedingungen an den Elementgrenzen alleine durch diese Koordinaten erfüllen. Die modalen Koordinaten der einzelnen Teilsysteme bleiben im gekoppelten Gleichungssystem erhalten. Für eine Struktur, die aus zwei Substrukturen  $\alpha$  und  $\beta$  besteht, und deren Masterkoordinaten gleichzeitig die Kopplungskoordinaten sind, ergibt sich mit den Bedingungen an den Kopplungsknoten

$$\mathbf{x}_m^\alpha = \mathbf{x}_m^\beta = \mathbf{x}_m^{\alpha,\beta}, \quad \mathbf{f}_m^\alpha + \mathbf{f}_m^\beta = \mathbf{f}_m^{\alpha,\beta} \quad (2.64)$$

das Gleichungssystem

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_G^\alpha + \mathbf{K}_G^\beta & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_s^\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_s^\beta \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{M}_G^\alpha + \mathbf{M}_G^\beta & \mathbf{G}^\alpha & \mathbf{G}^\beta \\ \mathbf{G}^{\alpha T} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}^{\beta T} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m^{\alpha,\beta} \\ \mathbf{q}_s^\alpha \\ \mathbf{q}_s^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_m^{\alpha,\beta} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

(2.65) führt auf eine lineare Eigenwertaufgabe, wobei die Dimension der Matrizen durch das Vernachlässigen von Slave-Eigenformen der Substrukturen gegenüber dem ursprünglichen System entsprechend verringert werden kann.

Werden die unteren Eigenformen der freibeweglichen Substruktur als Ansatzvektoren benutzt, lassen sich die Eigenfrequenzen oftmals bereits im unteren Frequenzbereich nur sehr unbefriedigend abbilden ([30]). Dies ist im wesentlichen dadurch begründet, daß die Statik in diesem Fall nur dann genau abgebildet wird, wenn alle Vektoren im Ansatz verwendet werden. Um den statischen Verschiebungszustand auch mit einem reduzierten modalen Ansatz

wiedergeben zu können, wurde von MACNEAL [71] eine Residualverschiebung eingeführt, die den Einfluß der nicht berücksichtigten Eigenformen erfassen soll. Für untere Frequenzen lassen sich mit diesem Ansatz gute Ergebnisse erzielen ([30]). Modifikationen des Verfahrens werden von CHANG und GRAIG [8] und YOO und HAUG [112] angegeben.

Ein Nachteil der Modalsynthese-Verfahren ist die Beschreibung des Systemverhaltens unter Verwendung von Modalkoordinaten. Die Dimension der Gleichungssysteme ist somit abhängig von der Anzahl der berücksichtigten Eigenformen. Sind die Koppelfreiheitsgrade keine physikalischen Koordinaten, muß vor dem Zusammenbau der Teilsysteme eine Transformation in physikalische Koordinaten durchgeführt werden ([68]). Aus diesen Gründen ist es schwierig, die Methoden in FE-Techniken zu integrieren ([66]).

Die Verfahren der Kondensation und der Modalsynthese werden von HASSELMAN [41], [42] auf modal gedämpfte und von LEUNG [66] auf allgemein gedämpfte Systeme erweitert. Die Behandlung nicht-konservativer Systeme wird von HALE [37] und HALE und BERGMAN [38] sowie von LEUNG [66] behandelt.

In Tabelle 2.1 sind verschiedene Methoden der Kondensation und der Modalsynthese aufgeführt, wobei diese sich im wesentlichen durch die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}(\lambda)$  unterscheiden.

Verfahren	Transformation $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{pmatrix} =$
Statische Kondensation (GUYAN ) (2.27)	$\begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} \end{pmatrix} \mathbf{x}_m$
$\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)$ mit $\lambda = \tilde{\lambda} = 0$ (2.32)	$\begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{D}_{sm}(\lambda) \end{pmatrix} \mathbf{x}_m$
Reihenentwicklung (2.41)	$\begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} + \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i (\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{M}_{ss})^i \mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{x}_m$ , mit $\mathbf{A}$ nach (2.42)
Ansatz mit Ritz-Vektoren	$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} & \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$ , mit Ritzvektoren $\Theta$ und Ritzkoordinaten $\mathbf{y}$
GRAIG, BAMPTON (2.62)	$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} & \mathbf{X}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$
LEUNG, PETERSMANN (2.51)	$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1}\mathbf{K}_{sm} & \mathbf{X}_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$ , mit $\mathbf{q} = \lambda (\mathbf{\Lambda}_s - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{G}^T \mathbf{x}_m$
Exakte dynamische Kondensation (2.14)	$\begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)\mathbf{D}_{sm}(\lambda) \end{pmatrix} \mathbf{x}_m$
LEUNG (2.60)	$\begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)\mathbf{D}_{sm}(\lambda) \end{pmatrix} \mathbf{x}_m$ , mit $\mathbf{D}_{ss}^{-1}$ nach (2.59)

Tabelle 2.1: Vergleich von Verfahren der Modalsynthese und Kondensation ([66], [81])

## 2.4.2 Berechnung der Eigenwerte der kondensierten Gleichungen

Die Lösung der nichtlinearen Eigenwertaufgabe

$$\mathbf{D}_k(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.66)$$

eines kondensierten Gleichungssystems erfolgt durch die Berechnung der Determinante  $\det[\mathbf{D}_k(\lambda)]$  mit Hilfe iterativer Verfahren, wie dem Newton-Verfahren, der Regula Falsi oder dem Sekantenverfahren ([100], [20]). Eine Aussage über die Anzahl der Nullstellen unterhalb eines Wertes  $\lambda_T$  ist dabei durch den Trägheitssatz von Sylvester ([28]) möglich.

Die Determinanten-Verfahren unterscheiden sich im wesentlichen durch ihre Konvergenzordnung und dem jeweiligen Rechenaufwand, wobei das Newton- und das Sekanten-Verfahren eine höhere Konvergenzordnung besitzen als die Regula Falsi (vgl. Kapitel 3.4). Ein Vorteil des Sekanten-Verfahrens gegenüber dem herkömmlichen Newton-Verfahren besteht darin, daß keine expliziten Ableitungen des charakteristischen Polynoms berechnet werden müssen. Ein weiterer Vorteil ist die Konvergenz des Sekanten-Verfahrens gegen mehrfache Nullstellen. Bei dem auf einer Newton-Iteration beruhenden Spur-Verfahren wird eine explizite Berechnung der Ableitungen ebenfalls vermieden ([59], [81]).

Die Konvergenz des Sekanten- und des Spur-Verfahrens ist nur für stetige Determinantenverläufe gewährleistet. Bei der exakten dynamischen Kondensation nach (2.14) bzw. bei den Darstellungen unter Verwendung der Slave-Eigenformen (2.51) oder (2.60) treten bei der Berechnung der Nullstellen der Determinante

$$p(\lambda) = \det[\mathbf{D}_k(\lambda)] \quad (2.67)$$

Unstetigkeiten in Form von Polstellen auf. Diese Unendlichkeitsstellen sind die Nullstellen des Slave-Systems. Durch Multiplikation der Determinante (2.67) mit dem charakteristischen Polynom der Slave-Struktur  $d_s(\lambda) = \prod_{j=1}^g (\lambda - \lambda_j)$  lassen sich die Polstellen unterdrücken.

Die Abbildungen 2.8 und 2.9 zeigen die Determinantenverläufe einer durch die dynamische Kondensation berechneten Matrix  $\mathbf{D}_k(\lambda)$  (in zehn finite Elemente unterteilte und auf die Randkoordinaten kondensierten Balkenstruktur mit  $E = 1 \frac{N}{m^2}$ ,  $l = 1m$ ,  $A = 1m^2$ ,  $\rho_d = 1 \frac{kg}{m^3}$ ). In Abbildung 2.8 wird der Verlauf mit Unstetigkeiten und in 2.9 der um die Polstellen bereinigte Determinantenverlauf dargestellt. Ein nochmaliges Konvergieren gegen einen bereits ermittelten Eigenwert  $\lambda_i$  kann vermieden werden, indem die Determinante durch den Faktor  $\lambda - \lambda_i$  dividiert wird.

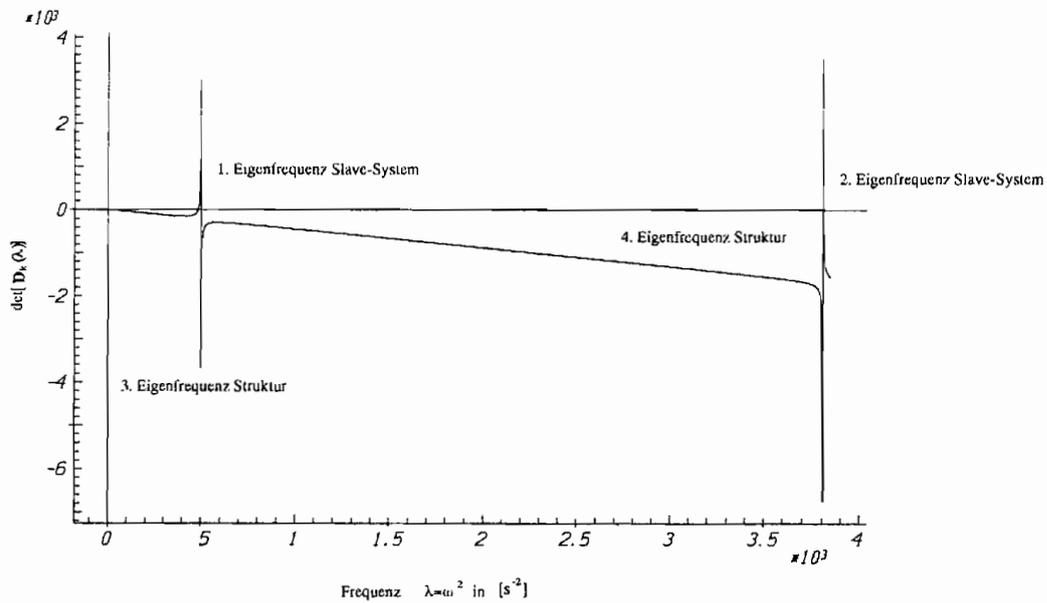


Abbildung 2.8: Determinantenverlauf  $\det[\mathbf{D}_k(\lambda)]$  mit Pol- und Nullstellen

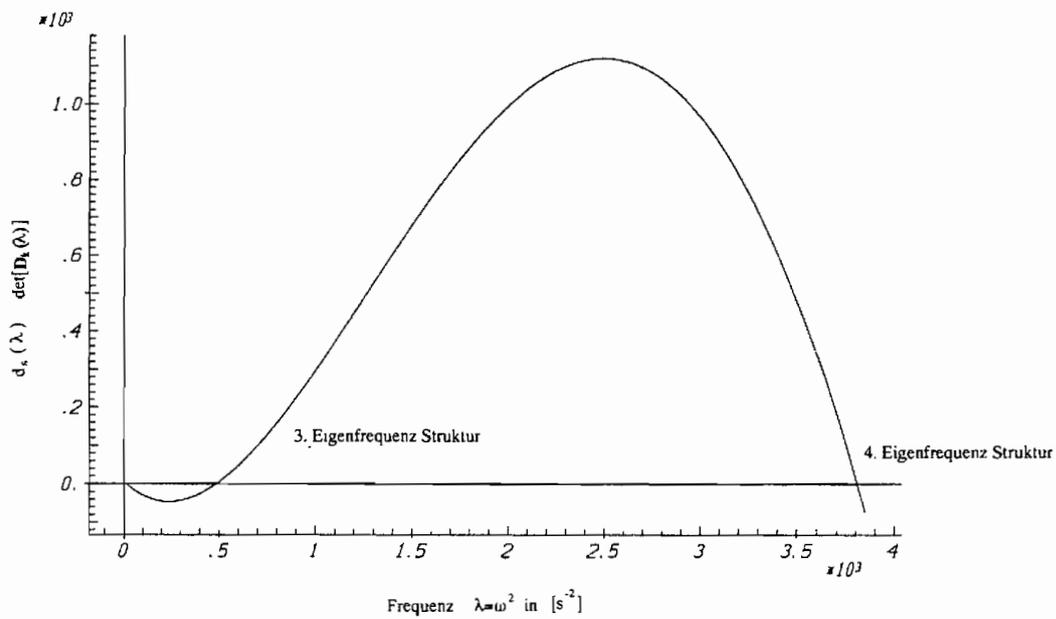


Abbildung 2.9: Um die Polstellen bereinigter Determinantenverlauf  $\det[\mathbf{D}_k(\lambda)]d_s(\lambda)$

### 2.4.3 Rücktransformation auf die Slave-Freiheitsgrade

Die mit Hilfe der kondensierten Gleichungen ermittelten Eigenvektoren liefern zunächst lediglich die Vektorkomponenten mit den Master-Koordinaten. Die Bestimmung der vollständigen Eigenformen geschieht mit Hilfe einer Rücktransformation. Dazu kann die zur Reduktion verwendete Beziehung

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{T}_d(\lambda)\mathbf{x}_m \quad (2.68)$$

benutzt werden. Es ist zu beachten, daß die, durch die Rücktransformation berechneten, Eigenvektoren nicht mehr unbedingt orthogonal sind.

Die Rücktransformation auf die Slave-Koordinaten ist ebenfalls über die exakte Beziehung

$$\mathbf{x}_s = -\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)\mathbf{D}_{sm}(\lambda)\mathbf{x}_m \quad (2.69)$$

möglich.

Unter Verwendung der Reihenentwicklung (2.39) läßt sich zeigen, daß die genäherte Eigenfrequenz zwischen den zwei Slave-Eigenwerten liegen muß, die die exakte Eigenfrequenz eingrenzen ([24]). Das bedeutet, die Gültigkeit der Transformation ist auf den Bereich

$$\lambda_{s,i} < \lambda < \lambda_{s,i+1} \quad (2.70)$$

beschränkt.

# Kapitel 3

## Polynommatrizen

In diesem Kapitel werden Eigenschaften von Polynommatrizen untersucht. Polynommatrizen entstehen z.B. durch die Abbildung linearer Mehrgrößensysteme im Frequenzbereich und sind von großer Bedeutung bei der Untersuchung der dynamischen Eigenschaften einer Struktur.

Wie später in Kapitel 4 ausführlich gezeigt wird, führt die exakte dynamische Kondensation linearer Gleichungssysteme ebenfalls auf Polynommatrizen. Durch die im folgenden aufgezeigten Eigenschaften der Matrizen wird eine analytische Behandlung der kondensierten Gleichungssysteme im Frequenzbereich möglich.

Das Kapitel gliedert sich in zwei Teile:

- Im ersten Teil werden die Eigenwertaufgabe speziell für Polynommatrizen betrachtet, die Eigenschaften linearer Polynommatrizen aufgezeigt und Algorithmen zur Lösung des Eigenwertproblems von Polynommatrizen angegeben.
- Im zweiten Teil des Kapitels wird gezeigt, wie durch die Anwendung von Sätzen zur Faktorenerlegung einer Polynommatrix eine Spektralzerlegung der Matrix ohne vorherige Linearisierung möglich ist. Es werden verschiedene Vorgehensweisen bei der Faktorisierung einer Polynommatrix aufgezeigt und die numerischen Eigenschaften der Verfahren untersucht. Durch die Darstellung einer Polynommatrix als das Produkt linearer Matrizen, sogenannter Linearfaktoren, ist eine Betrachtung einzelner Teile des Eigenwertspektrums und damit eine modale Analyse einer Polynommatrix möglich. Es wird ein Verfahren zur Gradreduktion einer Polynommatrix vorgestellt, wobei die Approximation der Matrix durch einen Teil ihrer Eigenformen erfolgt.

### 3.1 Vorbemerkungen

#### Definition einer Polynommatrix

Unter einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  wird eine Matrix der Dimension  $m \times m$  verstanden, deren Elemente Polynome vom skalaren Parameter  $\lambda$  sind. Eine solche Matrix läßt sich auch in Form eines Polynoms vom Parameter  $\lambda$  angeben, dessen Koeffizienten konstante  $m \times m$  Matrizen sind. Ist  $\rho$  die höchste Potenz von  $\lambda$  in den Elementen von  $\mathbf{F}(\lambda)$ , so spricht man von einer Polynommatrix vom Grad  $\rho$ .

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\lambda + \dots + \mathbf{A}_\rho\lambda^\rho. \quad (3.1)$$

Die Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_\rho$  werden im weiteren als reell, jedoch nicht unbedingt als symmetrisch angenommen. Die Matrizen können von beliebig kleinem Rang sein, die sogenannte **Leitmatrix**  $\mathbf{A}_\rho$  ist mindestens vom Rang Eins.

#### Beispiele für Polynommatrizen

Polynommatrizen höheren Grades ( $\rho > 1$ ) treten z.B. bei der exakten dynamischen Kondensation auf. Die in der Dimension reduzierte dynamische Steifigkeitsmatrix lautet

$$\mathbf{D}_k(\lambda) = \mathbf{D}_{mm}(\lambda) - \mathbf{D}_{ms}(\lambda)\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)\mathbf{D}_{sm}(\lambda). \quad (3.2)$$

Die inverse Matrix  $\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)$  läßt sich mit Hilfe der Modalmatrix  $\mathbf{X}_s$  und der Spektralmatrix  $\mathbf{\Lambda}_s$  des Slave-Systems angeben. Werden die Summenterme der kondensierten dynamischen Steifigkeitsmatrix (3.2) mit einem gemeinsamen Nenner dargestellt, erhält man die gebrochenrationale Polynommatrix

$$\mathbf{D}_k(\lambda) = \frac{\mathbf{D}_{mm}(\lambda)d_s(\lambda) - \mathbf{D}_{ms}(\lambda)\mathbf{X}_s(\mathbf{\Lambda}_s - \lambda)_{adj}\mathbf{X}_s^T\mathbf{D}_{sm}(\lambda)}{d_s(\lambda)} \quad (3.3)$$

oder kurz

$$\mathbf{D}_k(\lambda) = \frac{\mathbf{F}(\lambda)}{d_s(\lambda)}. \quad (3.4)$$

Die Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  im Zähler von (3.4) hat die Dimension  $m \times m$  und den Polynomgrad  $\rho = s + 1$ , wobei  $m$  die Anzahl der Master- und  $s$  die Anzahl der Slave-Freiheitsgrade ist. Die Eigenschaften der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  werden ausführlich im nachfolgenden Kapitel 4 untersucht.

Bei der Untersuchung von geschwindigkeitsproportional (viskos) gedämpften Schwingungen mit Hilfe der FEM ergibt sich die quadratische Eigenwertaufgabe

$$(\mathbf{K} + \mathbf{D}\lambda + \mathbf{M}\lambda^2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

mit  $\lambda = j\omega$ .

Bei rotierenden Bauteilen können aufgrund von Kreisel-, Zentrifugal- und Lagerkräften unsymmetrische Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen auftreten ([86]), die Eigenwerte sind dann nicht mehr unbedingt reell. Unter Verwendung der sogenannten **modalen Dämpfung** lassen sich für Systeme, die zu einer quadratischen Eigenwertaufgabe führen, die Entkoppelungseigenschaften der Eigenvektoren unmittelbar nutzen, wenn angenommen wird, daß sich die Dämpfung proportional zu  $\mathbf{K}$  und/oder  $\mathbf{M}$  verhält:

$$\mathbf{D} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M}. \quad (3.6)$$

Eine genauere Bestimmung der modalen Parameter als mit der FEM kann durch die Verwendung von frequenzabhängigen Systemmatrizen erreicht werden. Bei der dynamischen Element Methode (DEM) werden frequenzabhängige Ansatzfunktionen zur Berechnung der Strukturmatrizen benutzt ([103], [88]). Mit der Massenmatrix  $\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_1\lambda + \mathbf{M}_2\lambda^2 + \dots + \mathbf{M}_{p-1}\lambda^{p-1}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}(\lambda) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1\lambda + \mathbf{K}_2\lambda^2 + \dots + \mathbf{K}_{p-1}\lambda^{p-1}$  ergibt sich das Eigenwertproblem  $p$ -ter Ordnung

$$(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\lambda + \dots + \mathbf{A}_p\lambda^p) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

mit  $\lambda = \omega^2$ .

Für einen Balken wird in [103] das kubische Eigenwertproblem

$$(-\mathbf{K} + \mathbf{M}\lambda + \mathbf{F}_2\lambda^2 + \mathbf{F}_3\lambda^3) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

mit  $\lambda = -\omega^2$  angegeben. Die Matrizen  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{M}$  entsprechen den Matrizen, die bei der FEM anfallen. In [103] wird gezeigt, daß die mit der DEM berechneten Näherungen stets kleiner oder gleich denen sind, die mit der FEM ermittelt werden und daher genauere Eigenwerte liefern.

Polynommatrizen entstehen ebenfalls bei einer näherungsweise Beschreibung von Matrizen, deren Elemente nichtlineare Funktionen eines reellen oder komplexen Skalars sind, mit Hilfe der Taylor-Reihe. Durch die Approximation der Funktionen mit Hilfe von Polynomen gelingt eine Algebraisierung der Gleichungen und man erhält Zugang zu zahlreichen numerischen Methoden. Als Beispiel sei die Taylor-Schur-Entwicklung bei der Eigenwertanalyse von Gleichungen genannt, die sich bei der Randelementmethode (REM) ergeben ([62]).

## 3.2 Eigenwertaufgabe - Begriffe und Definitionen

Die Eigenvektoren oder auch Eigenformen einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  ergeben sich als nicht-triviale Lösungen  $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$  aus der Eigenwertaufgabe

$$\mathbf{F}(\lambda_i)\mathbf{x}_i = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Die Vektoren  $\mathbf{x}_i$  werden **Rechtseigenvektoren** genannt. Die sogenannten **Linkseigenvektoren** ergeben sich als Lösungen der Eigenwertaufgabe

$$\mathbf{y}_i^T \mathbf{F}(\lambda_i) = \mathbf{0}^T \quad (3.10)$$

oder mit der transponierten Matrix  $\mathbf{F}^T(\lambda)$  aus

$$\mathbf{F}^T(\lambda_i)\mathbf{y}_i = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

Für symmetrische Matrizen  $\mathbf{F}(\lambda)$  sind Rechts- und Linkseigenvektoren identisch.

Das homogene Gleichungssystem (3.9) besitzt nur dann nichttriviale Lösungen  $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}$ , wenn für die charakteristische Determinante von  $\mathbf{F}(\lambda)$

$$\det[\mathbf{F}(\lambda)] = p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \dots + p_n\lambda^n = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = 0 \quad (3.12)$$

gilt.

Die Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $\mathbf{F}(\lambda)$  sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und für die Eigenwertaufgaben (3.9) und (3.10) gleich. Das charakteristische Polynom  $p(\lambda)$  ist vom Grad  $n$  und besitzt eine entsprechende Anzahl von Nullstellen. Für  $l$  voneinander verschiedene Eigenwerte  $\lambda_i$  gelten die Grenzen

$$0 \leq l \leq n \leq m\rho \leq \infty. \quad (3.13)$$

Ein Koeffizientenvergleich der Ausdrücke auf der linken Seite in (3.12) liefert die Beziehungen

$$p_n = \det(\mathbf{A}_\rho) \quad (3.14)$$

$$p_0 = \det(\mathbf{A}_0) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i. \quad (3.15)$$

Für eine reguläre Leitmatrix  $\mathbf{A}_\rho$  ergibt sich hieraus die Anzahl der in  $\mathbf{F}(\lambda)$  enthaltenen Eigenwerte  $n = m\rho$  und es gilt die Einschränkung

$$1 \leq n = m\rho. \quad (3.16)$$

### Regularität einer Polynommatrix

Für eine singuläre Leitmatrix  $\mathbf{A}_\rho$  fehlt der Koeffizient des charakteristischen Polynoms bei der höchsten Potenz  $\lambda^n$ . Je nach Rangabfall der Leitmatrix nimmt der Grad des Polynoms dann ab, und es existieren entsprechend weniger Eigenwerte. Ist  $\mathbf{A}_\rho$  nicht singulär, so wird die Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  als **regulär** bezeichnet. Bei der Erzeugung des speziellen Eigenwertproblems (Kapitel 3.3.3) und bei der Linearisierung (Kapitel 3.3) wird eine reguläre Leitmatrix vorausgesetzt.

Ist die Matrix  $\mathbf{A}_\rho$  singulär und  $\mathbf{A}_0$  regulär, läßt sich durch das Ersetzen von  $\lambda$  durch  $\zeta = \lambda^{-1}$  eine reguläre Matrix  $\hat{\mathbf{F}}(\zeta)$  erzeugen:

$$\hat{\mathbf{F}}(\zeta)\mathbf{x} = (\mathbf{A}_\rho + \mathbf{A}_{\rho-1}\zeta + \dots + \mathbf{A}_1\zeta^{\rho-1} + \mathbf{A}_0\zeta^\rho)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.17)$$

Das charakteristische Polynom  $p(\lambda) = \det [\hat{\mathbf{F}}(\zeta)]$  hat den Polynomgrad  $n = m\rho$  und besitzt entsprechend dem Rangabfall von  $\mathbf{A}_\rho$  zusätzliche Nullstellen bei  $\zeta = 0$  als Lösung. Die Eigenvektoren bleiben beim Übergang von der Aufgabe  $\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  zu  $\hat{\mathbf{F}}(\zeta)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  unverändert erhalten.

Es ist anzumerken, daß für Matrizen  $\mathbf{F}(\lambda)$ , deren Eigenwerte alle von Null verschieden sind, die Möglichkeit besteht, durch eine Transformation eine reguläre Matrix zu erzeugen. Dieses Vorgehen wird im Anhang A.1 dargestellt.

Aus  $p_0 = \det(\mathbf{A}_0)$  läßt sich erkennen, daß für eine singuläre Matrix  $\mathbf{A}_0$  mindestens ein Eigenwert bei Null existiert. Besteht das charakteristische Polynom (3.12) lediglich aus einem konstanten Koeffizienten  $p(\lambda) = p_0$ , existieren überhaupt keine Eigenwerte. In diesem Fall ist  $l = 0$ . Eine Polynommatrix, deren Eigenwerte alle von Null verschieden sind, wird **nicht singulär** genannt. Entsprechend versteht man unter einer **singulären** Polynommatrix eine Matrix, die mindestens einen Eigenwert bei Null besitzt.

### Rangabfall einer Polynommatrix

Einen wichtigen Sonderfall stellen die sogenannten **einfachen Polynommatrizen** dar. Die Definition der Matrizen geschieht über den Rangabfall der Matrix bei einem Eigenwert  $\lambda_i$ . Der Rangabfall oder auch **Defekt**  $d_i$  der singulären Matrix  $\mathbf{F}(\lambda_i)$  kann für den Eigenwert  $\lambda_i$  nicht größer sein als dessen Vielfachheit  $v_i$

$$1 \leq d_i \leq v_i. \quad (3.18)$$

Erzeugt ein Eigenwert der Vielfachheit  $v_i$  einen entsprechenden Rangabfall bei der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda_i)$ , so ist  $d_i = v_i$  und der Eigenwert **nichtdefektiv**. Sind sämtliche voneinander verschiedene  $l$  Eigenwerte nichtdefektiv

$$d_i = v_i; \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (3.19)$$

spricht man von einer einfachen oder einfach strukturierten Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$ .

Da der Rangabfall einer einfachen Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  der Dimension  $m \times m$  nicht größer als  $m$  sein kann, muß die maximale Vielfachheit eines Eigenwerts kleiner oder gleich  $m$  sein. Für eine Matrix  $\mathbf{F}(\lambda_i)$  mit dem Defekt  $d_i = v_i$  lassen sich ebensoviele linear unabhängige Vektoren  $\mathbf{x}_i$  bzw.  $\mathbf{y}_i^T$  finden. Da Polynommatrizen der Dimension  $m$  und mit einem Polynomgrad  $\rho > 1$  mehr als  $m$  Eigenvektoren besitzen können, sind diese nicht linear unabhängig (mehr als  $m$  Vektoren sind in  $\mathbb{C}^m$  linear abhängig). Für einfache und reguläre Matrizen  $\mathbf{F}(\lambda)$  lassen sich jedoch immer  $m$  linear unabhängige Vektoren finden und zu einer Modalmatrix  $\mathbf{X}$  zusammensetzen ([59]).

Für eine Matrix  $\mathbf{F}(\lambda_i)$  mit dem Rangabfall  $d_i = 1$  gibt es genau einen linear unabhängigen Eigenvektor  $\mathbf{x}_i$ , alle übrigen sind zu diesem proportional. Der Eigenvektor wird durch die Vorgabe einer Vektorkomponente ermittelt und gibt eine Richtung vor.

$$\hat{\mathbf{x}}_i = c\mathbf{x}_i. \quad (3.20)$$

Die Länge des Vektors wird durch den Faktor  $c$  bestimmt und kann beliebig gewählt werden. Für einen Rangabfall  $d_i > 1$  existieren entsprechend  $d_i$  linear unabhängige Eigenvektoren  $\mathbf{x}_i^{(1)}, \mathbf{x}_i^{(2)}, \dots, \mathbf{x}_i^{(d_i)}$ .

Anmerkungen zu defektiven Eigenwerten:

Die allgemeine Lösung mit  $d_i$  frei wählbaren Parametern  $c_k$  stellt ein Vektorgebilde dar, das einen  $d_i$ -dimensionalen Eigenraum als Lösung zum Eigenwert  $\lambda_i$  aufspannt

$$\mathbf{x}_i = c_1 \mathbf{x}_i^{(1)} + c_2 \mathbf{x}_i^{(2)} + \dots + c_{d_i} \mathbf{x}_i^{(d_i)}. \quad (3.21)$$

Besitzt die Matrix  $\mathbf{F}(\lambda_i)$  bei einem Eigenwert  $\lambda_i$  der Vielfachheit  $v_i$  einen Rangabfall  $d_i < v_i$  so ist der Eigenwert defektiv, es fehlen  $\nu = v_i - d_i$  Eigenvektoren. Diese können bei linearen Eigenwertaufgaben als sogenannte Hauptvektoren aus der Rekursionsformel

$$\mathbf{F}(\lambda_i) \mathbf{x}_i^\tau = \mathbf{x}_i^{\tau-1}; \quad \tau = 1, 2, \dots, \nu \quad (3.22)$$

bestimmt werden ([114]), wobei die Tatsache ausgenutzt wird, daß sich der Rangabfall einer Matrix  $\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A} - \mathbf{B}\lambda$  durch Potenzieren erhöht.

### 3.3 Lineare Polynommatrizen

Im folgenden werden Darstellungsmöglichkeiten für im Parameter  $\lambda$  nichtlineare Matrizen  $\mathbf{F}(\lambda)$  als lineare Abbildungen angegeben. Im Zeitbereich entspricht dies der Darstellung von Differentialgleichungssystemen der Ordnung  $\rho > 1$  im linearen Zustandsraum.

Mit Hilfe der wichtigen Eigenschaft der Orthogonalität der Eigenvektoren einer linearen Polynommatrix ist eine Diagonalisierung der Koeffizientenmatrizen und damit eine Spektralzerlegung einer Polynommatrix möglich.

#### 3.3.1 Linearisierung im Frequenzbereich

Die nichtlineare Eigenwertaufgabe  $\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  mit  $\mathbf{F}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\rho} \mathbf{A}_i \lambda^i$  kann durch die Vergrößerung der Dimension von  $m$  auf  $m\rho$  in ein lineares Eigenwertproblem

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\lambda) \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

überführt werden.

$\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  sind symmetrische Matrizen der Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_\rho & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{A}_\rho & -\mathbf{A}_{\rho-1} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_\rho & \dots & -\mathbf{A}_4 & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_\rho & -\mathbf{A}_{\rho-1} & \dots & -\mathbf{A}_3 & -\mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_\rho \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_\rho & -\mathbf{A}_{\rho-1} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_\rho & \dots & -\mathbf{A}_4 & -\mathbf{A}_3 \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_\rho & \dots & -\mathbf{A}_4 & -\mathbf{A}_3 & -\mathbf{A}_2 \\ -\mathbf{A}_\rho & \dots & -\mathbf{A}_4 & -\mathbf{A}_3 & -\mathbf{A}_2 & -\mathbf{A}_1 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Bei einer regulären Matrix  $\mathbf{B}$  kann die allgemeine Eigenwertaufgabe (3.23) in die spezielle Aufgabe

$$(\mathbf{C} - \mathbf{I}\lambda)\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

mit  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$  überführt werden. Die Matrix  $\mathbf{C}$  hat dabei die Gestalt einer (Frobenius'schen) Begleitmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_\rho^{-1}\mathbf{A}_{\rho-1} & -\mathbf{A}_\rho^{-1}\mathbf{A}_{\rho-2} & \dots & -\mathbf{A}_\rho^{-1}\mathbf{A}_2 & -\mathbf{A}_\rho^{-1}\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_\rho^{-1}\mathbf{A}_0 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Der expandierte  $(m\rho \times 1)$ -Vektor  $\mathbf{z}$  ergibt sich zu

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \lambda^{\rho-1} \mathbf{x} \\ \lambda^{\rho-2} \mathbf{x} \\ \vdots \\ \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Neben den beiden Linearisierungen mit den Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  bzw.  $\mathbf{C}$  existieren noch zahlreiche weitere Möglichkeiten. Die Darstellungen zeichnen sich insbesondere durch Spiegelungen an den Haupt- und Nebendiagonalen der Matrix  $\mathbf{C}$  aus.

Die Abbildung der nichtlinearen Eigenwertaufgabe (3.9), als ein lineares Eigenwertproblem, ist äquivalent zu der Darstellung eines Differentialgleichungssystems der Ordnung  $\rho > 1$  als Systeme 1. Ordnung im Zustandsraum, die Matrix  $\mathbf{C}$  entspricht dann der Zustandsraummatrix  $\mathbf{A}$ .

### 3.3.2 Zustandsraumdarstellung

Ein zeitinvariantes, kontinuierliches System, das sich durch lineare Differentialgleichungen  $\rho$ -ter Ordnung

$$\mathbf{I} \frac{d^\rho \mathbf{x}(t)}{dt^\rho} + \mathbf{A}_{\rho-1} \frac{d^{\rho-1} \mathbf{x}(t)}{dt^{\rho-1}} + \dots + \mathbf{A}_1 \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_\rho \frac{d^\rho \mathbf{y}(t)}{dt^\rho} + \dots + \mathbf{B}_1 \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} + \mathbf{B}_0 \mathbf{y}(t) \quad (3.28)$$

beschreiben läßt, kann im Zustandsraum durch die Gleichungen

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t), \quad (3.29)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{y}(t) \quad (3.30)$$

abgebildet werden.

Hat das System  $m$  Ein- und Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}(t)$  und  $\mathbf{x}(t)$ , so ist  $\mathbf{z}(t)$  der Zustandsvektor mit  $m\rho$  Komponenten. Die sogenannte Zustandsraummatrix  $\mathbf{A}$  ist eine Matrix der Größe  $m\rho \times m\rho$ , die Matrix  $\mathbf{B}$  hat die Dimension  $m\rho \times m$  und  $\mathbf{C}$  die Dimension  $m \times m\rho$ . Die Durchgangsmatrix  $\mathbf{D}$  hat die Größe  $m \times m$ .

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, ein lineares Differentialgleichungssystem in eine äquivalente Zustandsraumbeschreibung zu überführen. Die im folgenden für die Differentialglei-

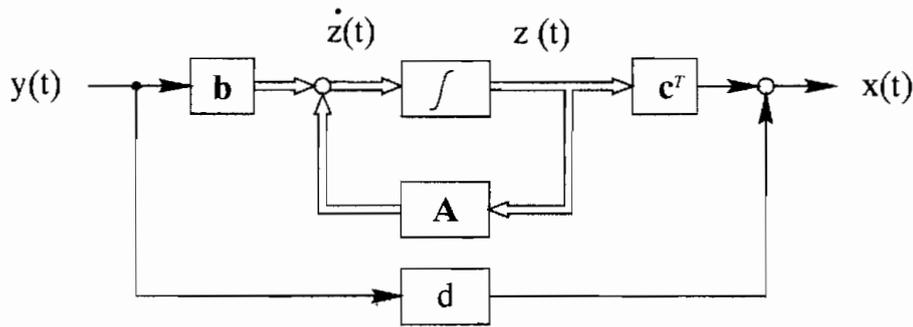


Abbildung 3.1: Zustandsraumdarstellung eines Ein-Größen-Systems

chung (3.28) mit je  $m$  Ein- und Ausgangsgrößen angegebene Darstellung wird auch Beobachtungsnormalform genannt.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & \dots & -\mathbf{A}_{\rho-2} & -\mathbf{A}_{\rho-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\rho-1} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \vdots & \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 & & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \dots & \mathbf{A}_{\rho-1} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{\rho-1} - \mathbf{A}_{\rho-1}\mathbf{B}_\rho \\ \mathbf{B}_{\rho-2} - \mathbf{A}_{\rho-2}\mathbf{B}_\rho \\ \vdots \\ \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1\mathbf{B}_\rho \\ \mathbf{B}_0 - \mathbf{A}_0\mathbf{B}_\rho \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}), \quad \mathbf{D} = \mathbf{B}_\rho. \tag{3.31}$$

Weitere Darstellungsformen der Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  werden im Anhang C angegeben.

### Übergang in den Frequenzbereich

Die Zustandsraumgleichungen lassen sich mit Hilfe der Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}\mathbf{z}(t) \equiv \int_0^\infty e^{-st}\mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}(s) \tag{3.32}$$

im Bildbereich darstellen. Angewendet auf (C.1) ergibt sich für  $\mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{0}$  die Formulierung

$$s\mathbf{Z}(s) = \mathbf{A}\mathbf{Z}(s) + \mathbf{B}\mathbf{F}(s). \tag{3.33}$$

Für eine harmonische Erregung  $\mathbf{f}(t) = \hat{\mathbf{f}}e^{j\omega t}$  mit  $\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{0}$  wird der Laplace-Parameter zu  $s = j\omega$ . Mit (3.30) und  $j\omega = \lambda$  läßt sich die folgende Übertragungsfunktion im Frequenzbereich angeben

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{H}(\lambda)\hat{\mathbf{f}} \quad (3.34)$$

mit der Übertragungsmatrix

$$\mathbf{H}(\lambda) = \mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda)^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (3.35)$$

$\mathbf{H}(\lambda)$  läßt sich als eine gebrochenrationale Polynommatrix darstellen

$$\mathbf{H}(\lambda) = \frac{\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_1\lambda + \dots + \mathbf{R}_\rho\lambda^\rho}{d_0 + d_1\lambda + \dots + d_\rho\lambda^\rho}. \quad (3.36)$$

Besitzen die Polynome im Zähler und Nenner keine gemeinsamen Nullstellen, entsprechen die Nullstellen des Nennerpolynoms von  $\mathbf{H}(\lambda)$  den Eigenfrequenzen des abgebildeten Systems. Ist das gradniedrigste Nennerpolynom von (3.36) identisch mit dem charakteristischen Polynom

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda), \quad (3.37)$$

ist die Zustandsdarstellung mit den Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  eine Realisierung niedrigster Ordnung. Eine Darstellung mit einem Minimum an Zustandsvariablen erfüllt die Eigenschaften der Steuer- und Beobachtbarkeit.

### Steuer- und Beobachtbarkeit

Es werden die Begriffe der Steuer- und Beobachtbarkeit von Systemen, die durch eine Ein-Ausgangsgrößenbeschreibung dargestellt werden, definiert. Die Eigenschaften der Steuer- und Beobachtbarkeit eines Systems können als Kriterium dienen, um festzustellen, ob zur Beschreibung eines Systems eine minimale Anzahl von Eigenformen verwendet wird. Steuer- und Beobachtbarkeit einer Systemdarstellung sind Voraussetzungen für die numerische Behandlung eines linearen Systems im Zustandsraum.

Unter dem Begriff der Steuerbarkeit versteht man, daß die Zustandsgrößen  $\mathbf{z}(t)$ , ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{z}(t_0)$ , durch bestimmte Eingangsgrößen  $\mathbf{f}(t_1)$  auf einen Zustand  $\mathbf{z}(t_1)$  überführt werden können. Die Lösung des Differentialgleichungssystems (C.1) lautet

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{z}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{f}(\tau)d\tau. \quad (3.38)$$

$e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{z}_0$  ist die Lösung für das homogene Gleichungssystem mit  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0)$  und

$$\mathbf{G}(t - \tau) = \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B} \quad (3.39)$$

die Antwort des Systems auf einen Dirac-Impuls  $\delta(t)$ . Bei Vorgabe eines Zustands  $\mathbf{z}(t_0)$  und eines Endzustandes  $\mathbf{z}(t_1) = 0$ , muß somit für  $t_0 = 0$  aus

$$\mathbf{0} = e^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{z}_0 + \int_{t=0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (3.40)$$

der Vektor der Eingangsgrößen  $\mathbf{f}(t)$  bestimmt werden können. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Zeilen der Matrix

$$\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \quad (3.41)$$

linear unabhängig sind. Mit der Taylor-Entwicklung  $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 t^2/2! + \mathbf{A}^3 t^3/3! \dots$  läßt sich die Bedingung durch die Forderung nach einer nicht-singulären Matrix

$$\mathbf{U} = \left( \begin{array}{cccc} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{array} \right) \quad (3.42)$$

mit dem Rang  $n$  angeben.  $\mathbf{U}$  ist die sogenannte Steuerbarkeitsmatrix.

Unter der Beobachtbarkeit eines Systems versteht man, wenn bei Kenntnis der Eingangsgrößen  $\mathbf{f}(t)$  und der Ausgangsgrößen  $\mathbf{x}(t)$  der Anfangszustand  $\mathbf{z}(t_0)$  im Intervall  $t_0 \leq t \leq t_1$  eindeutig bestimmt werden kann. Die Zustandsgrößen zum Zeitpunkt  $t > t_0$  mit  $t_0 = 0$  lassen sich durch die Beziehung

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \quad (3.43)$$

angeben, wobei  $\Delta \mathbf{x}(t)$  aus

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \int_{t=0}^{t_1} \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}(\tau) \mathbf{f}(\tau) d\tau - \mathbf{D} \mathbf{f}(t) \quad (3.44)$$

bestimmt werden kann.  $\mathbf{z}(t_0)$  läßt sich aus der Gleichung (3.44) berechnen, wenn die Vektoren der Spalten

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \quad (3.45)$$

linear unabhängig sind. Diese Bedingung ist identisch mit der Forderung nach einem Rang  $n$  der Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{V} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{array} \right). \quad (3.46)$$

### 3.3.3 Orthogonalitätseigenschaften

Nach einer Linearisierung einer Polynommatrix oder bei der Untersuchung ungedämpfter schwingungsfähiger Systeme mit Hilfe der FEM entsteht das lineare Eigenwertproblem

$$\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.47)$$

Die Eigenwertaufgabe (3.47) wird auch als **allgemeine Eigenwertaufgabe** bezeichnet. Ist  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ , ergibt sich die **spezielle Eigenwertaufgabe**

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I}\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.48)$$

Die Eigenwertprobleme (3.47) und (3.48) sind Spezialfälle der Aufgabe (3.9), womit die dort angestellten Betrachtungen auch hier gelten. Die Eigenvektoren der linearen Eigenwertaufgabe besitzen, im Unterschied zur nichtlinearen Aufgabe, die Eigenschaft der Orthogonalität, eine Transformation von (3.47) bzw. (3.48) auf Diagonalform oder im Fall defektiver Eigenwerte auf die sogenannte Jordan-Form ist somit möglich.

Defektive Eigenwerte, d.h.  $d_i < v_i$ , treten z.B. bei Systemen mit kritischer Dämpfung auf ([62]). Hier wird jedoch davon ausgegangen, daß sämtliche Eigenwerte nichtdefektiv sind, also  $d_i = v_i$  ist und somit eine einfache Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  vorliegt. Weiterhin wird eine reguläre Leitmatrix  $\mathbf{B}$  vorausgesetzt bzw. angenommen, daß eine solche Matrix stets erzeugt werden kann (vgl. Kapitel 3.1). Die allgemeine Eigenwertaufgabe (3.47) kann somit durch Linksmultiplikation mit der Kehrmatrix  $\mathbf{B}^{-1}$  auf die spezielle Aufgabe (3.48) überführt werden.

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{I}\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3.49)$$

#### Transformation auf Diagonalform

Wie bereits bei der Berechnung der inversen Matrix  $\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)$  gezeigt wurde, können mit Hilfe der modalen Parameter die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  der linearen Eigenwertaufgabe

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{y}^T(\mathbf{A} + \mathbf{B}\lambda) = \mathbf{0}^T \quad (3.50)$$

aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenvektoren diagonalisiert werden.

Werden die  $m$  Eigenvektoren  $\mathbf{x}_k$  bzw.  $\mathbf{y}_k$  als linear unabhängig vorausgesetzt, ergeben sich für zwei verschiedene Eigenwerte  $\lambda_i \neq \lambda_k$  die Gleichungen

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \lambda_k\mathbf{B}\mathbf{x}_k \quad (3.51)$$

$$\mathbf{y}_i^T\mathbf{A} = \mathbf{y}_i^T\lambda_i\mathbf{B}. \quad (3.52)$$

Durch die Erweiterung der ersten Gleichung mit  $\mathbf{x}_k$  und der zweiten mit  $\mathbf{y}_i^T$  erhält man die Beziehungen

$$\mathbf{y}_i^T\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_i^T\lambda_k\mathbf{B}\mathbf{x}_k, \quad (3.53)$$

$$\mathbf{y}_i^T\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_i^T\lambda_i\mathbf{B}\mathbf{x}_k. \quad (3.54)$$

Werden die beiden Ausdrücke subtrahiert, ergibt sich der Ausdruck

$$0 = (\lambda_k - \lambda_i) \mathbf{y}_i^T \mathbf{B} \mathbf{x}_k \quad (3.55)$$

und damit wegen  $\lambda_i \neq \lambda_k$

$$0 = \mathbf{y}_i^T \mathbf{B} \mathbf{x}_k. \quad (3.56)$$

Daraus folgt, daß die Rechts- und Linkseigenvektoren  $\mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{y}_i$  eines Matrizenpaares  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  für zwei verschiedene Eigenwerte  $\lambda_i \neq \lambda_k$  **B-orthogonal** oder für  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$  **orthogonal** sind.

Werden die Vektoren  $\mathbf{x}_i$  bzw.  $\mathbf{y}_i$  zu sogenannten **Modalmatrizen** zusammengefaßt

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_m^T), \quad (3.57)$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) \quad (3.58)$$

und die Eigenwerte in der diagonalbesetzten **Spektralmatrix**  $\mathbf{\Lambda}$  angeordnet

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m], \quad (3.59)$$

lassen sich die Vektoren  $\mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{y}_i$  so normieren, daß die folgenden Beziehungen gelten

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{Y}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{\Lambda}. \quad (3.60)$$

Damit kann die allgemeine Eigenwertaufgabe (3.50) durch eine sogenannte Äquivalenztransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \mathbf{q} \quad (3.61)$$

und anschließender Multiplikation der Gleichungen von links mit  $\mathbf{Y}^T$  auf Diagonalform überführt werden.

$$\mathbf{Y}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B} \lambda) \mathbf{X} \mathbf{q} = (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I} \lambda) \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.62)$$

Sind die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  symmetrisch und somit  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ , lassen sich die Gleichungen (3.62) vereinfachen zu

$$\mathbf{X}^T (\mathbf{A} + \mathbf{B} \lambda) \mathbf{X} \mathbf{q} = (\mathbf{\Lambda} - \mathbf{I} \lambda) \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.63)$$

Besitzt die Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  mehrfache Eigenwerte, können die Rechts- und Linkseigenvektoren  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  immer so definiert werden, daß die Normierungen (3.60) gelten. Dieses Vorgehen wird auch als Biorthonormalisierung bezeichnet ([114]).

Für symmetrische Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  muß die Aussage  $\mathbf{x}_k^T \mathbf{B} \mathbf{x}_i = 0$  bei mehrfachen Eigenwerten jedoch nicht mehr gelten. Mit Hilfe einer regulären Blockdiagonalmatrix  $\mathbf{D}_B$  läßt sich jedoch die folgende Normierung durchführen

$$\mathbf{D}_B^T \mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{D}_B^T \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{\Lambda}. \quad (3.64)$$

Die Komponenten des Vektors  $\mathbf{q}$  werden **Modalkoordinaten** genannt. Durch die Transformation in die Modalkoordinaten wird eine Entkopplung des Gleichungssystems in  $m$  skalare Gleichungen erreicht. Stellen die Eigenvektoren Schwingungsformen dar, lassen sich diese getrennt voneinander betrachten. Werden einzelne Schwingungsanteile nicht angeregt oder klingen diese aufgrund hoher Eigenwerte schnell ab, kann durch das Vernachlässigen dieser Eigenformen eine Reduktion des Gleichungssystems stattfinden. Werden  $k < m$  Vektoren berücksichtigt, hat die Modalmatrix  $\tilde{\mathbf{X}}$  die Dimension  $m \times k$  und  $\tilde{\mathbf{Y}}^T$  die Größe  $k \times m$ . Das reduzierte Gleichungssystem der Dimension  $k \times k$  lautet

$$\tilde{\mathbf{Y}}^T(\mathbf{A} + \mathbf{B}\lambda)\tilde{\mathbf{X}}\mathbf{q} = (\tilde{\Lambda} - \mathbf{I}\lambda)\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.65)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{Y}} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k), \quad (3.66)$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k) \quad (3.67)$$

und

$$\tilde{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k] \quad (3.68)$$

Eine Rücktransformation in die Ausgangskoordinaten ist über die Beziehung

$$\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{Y}}^T \mathbf{B} \mathbf{x} \quad (3.69)$$

möglich.

Mit Hilfe der Rechts- und Linkseigenvektoren  $\mathbf{x}_i$  und  $\mathbf{y}_i$  läßt sich die sogenannte **Spektralzerlegung** einer linearen Polynommatrix angeben:

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)\mathbf{Z}_i, \quad (3.70)$$

$\mathbf{Z}_i$  sind die Eigendyaden oder Eigenprojektionen der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$ , die wie folgt definiert sind:

$$\mathbf{Z}_i = \frac{\mathbf{B}\mathbf{x}_i\mathbf{y}_i^T\mathbf{B}}{\mathbf{y}_i^T\mathbf{B}\mathbf{x}_i}. \quad (3.71)$$

Die Dyaden besitzen die Eigenschaften

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{Z}_i; \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i. \quad (3.72)$$

Mit Hilfe der Eigendyaden  $\mathbf{Z}_i$  läßt sich somit sowohl für die Matrix  $\mathbf{A}$  als auch für  $\mathbf{B}$  eine Spektralzerlegung angeben. Bei linearen Polynommatrizen ist es also möglich, die Koeffizientenmatrizen gleichzeitig auf Diagonalform zu transformieren. Für Matrizen  $\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\lambda + \dots + \mathbf{A}_\rho\lambda^\rho$  vom Polynomgrad  $\rho > 1$  ist eine gleichzeitige Diagonalisierung von mehr als zwei Koeffizientenmatrizen im allgemeinen jedoch nicht möglich (Ausnahme: diagonalähnliche Polynommatrizen, die z.B. bei modal gedämpften Mehrmassenschwingern (3.5) mit einer Dämpfungsmatrix (3.6) auftreten (vgl. [114])). Für Polynommatrizen mit  $\rho > 1$  wird im Kapitel 3.5 ein Verfahren zur Spektralzerlegung der Matrix angegeben.

Ergänzende Anmerkungen zu Eigenprojektionen:

Für  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$  (spezielles Eigenwertproblem) gilt  $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{Z}_i$  und es lassen sich dann die folgenden Identitäten angeben:

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \mathbf{Z}_i, \quad f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \mathbf{Z}_i, \quad \mathbf{Z}_i \mathbf{Z}_j = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{für } i \neq j \\ \mathbf{Z}_i & \text{für } i = j \end{cases}. \quad (3.73)$$

Es ist somit möglich Matrizenfunktionen  $f(\mathbf{A})$  durch skalare Funktionen  $f(\lambda_i)$  auszudrücken, so ist z.B.

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{Z}_i. \quad (3.74)$$

## 3.4 Eigenwertlöser

Zur Ermittlung der Eigenwerte und -vektoren der linearen Eigenwertaufgabe

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\lambda) \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (3.75)$$

können, unter Ausnutzung der Symmetrie und Bandstruktur der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$ , Standardalgorithmen verwendet werden. Diese sind ausgiebig untersucht worden und werden in zahlreichen Programmpaketen angeboten (z.B. NAG, LAPACK).

Das nichtlineare Matrizeneigenwertproblem

$$\mathbf{F}(\lambda) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.76)$$

mit der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\rho} \mathbf{A}_i \lambda^i$  der Dimension  $m \times m$  mit  $\rho > 1$  läßt sich unter Verwendung der Linearisierung (3.24) in die lineare Eigenwertaufgabe

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\lambda) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.77)$$

bzw. in die Aufgabe

$$(\mathbf{C} + \mathbf{I}\lambda) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.78)$$

mit den expandierten, symmetrischen Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , bzw. mit der nicht-symmetrischen Matrix  $\mathbf{C}$  der Dimension  $m\mu \times m\mu$  überführen. Es können somit Algorithmen zur Lösung der linearen Eigenwertaufgabe eingesetzt werden. Durch die Linearisierung steigt jedoch die Größe der Matrizen und somit auch der (Arbeits-)Speicherbedarf. Daher ist es günstig, Verfahren zu Eigenwertlösung zu verwenden, die mit der ursprünglichen Matrizendimension arbeiten.

Die Eigenwerte der Aufgabe (3.76) sind die Nullstellen der Determinante

$$p(\lambda) = \det[\mathbf{F}(\lambda)]. \quad (3.79)$$

Mit Hilfe iterativer Verfahren, wie dem Sekantenverfahren oder dem Newton-Verfahren, werden, ausgehend von geeigneten Startwerten, die Nullstellen der Determinante angenähert. Die Vorgabe geeigneter Startwerte setzt die Kenntnis der ungefähren Lage der Nullstellen voraus. Eine grobe Abschätzung der Lage der Nullstellen von  $p(\lambda)$  kann mit Hilfe von Intervallschachtelungsverfahren, wie z.B. dem Bisektionsverfahren oder der Regula Falsi geschehen. Diese Verfahren konvergieren aufgrund der Einschließungseigenschaft nur gegen Nullstellen in einem gewählten Intervall  $I = [a, b]$ , besitzen jedoch eine niedrige Konvergenzordnung. Verfahren mit verbesserten Konvergenzeigenschaften sind z.B. das Newton-Verfahren mit quadratischer Konvergenz oder das Sekanten-Verfahren mit einer Konvergenzordnung von 1,682 (siehe Tabelle 3.1).

Verfahren	Konvergenzordnung
Bisektion	1
(einfache) Regula Falsi	1
Newton	2
Sekanten	1.682
Inverse Iteration	1
Simultane Iteration	1
Rayleigh-Quotienten-Iteration	2

Tabelle 3.1: Vergleich der Konvergenzeigenschaften von iterativen Verfahren zur Lösung der nichtlinearen Eigenwertaufgabe ([103], [20])

Man unterscheidet weiterhin zwischen global und lokal konvergenten Verfahren. Zu den global konvergenten Verfahren gehören die Inverse Iteration sowie die Simultane Iteration ([103]). Diese Verfahren berechnen die Nullstelle, die den geringsten Abstand zu dem gewählten Startwert aufweist. Die inverse Iteration erweist sich als das sicherste Verfahren zur Berechnung eines Eigenvektors und damit eines Eigenwerts von  $\mathbf{F}(\lambda)$  ([103]). Die Simultane Iteration ermittelt die betragsgrößten Eigenwerte und -vektoren der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  und ist auch für die Berechnung mehrfacher Eigenwerte geeignet. Wurden die betragsgrößten Eigenwerte ermittelt, lassen sich nach einer entsprechenden Transformation auch beliebige Teile des Spektrums von  $\mathbf{F}(\lambda)$  berechnen. Der Nachteil der beiden letztgenannten Verfahren ist ihre nur lineare Konvergenz.

Das Sekanten-Verfahren, das Newton-Verfahren und die Rayleigh-Quotienten-Iteration stellen lokal konvergente Verfahren dar. Die beiden letztgenannten Verfahren sollten jedoch nur bei Kenntnis von sehr guten Näherungen der Nullstellen verwendet werden. Die Rayleigh-Quotienten-Iteration ist dabei ein schnell und sicher konvergierendes Verfahren, das für hinreichend genaue Näherungen von Eigenwert und -vektor quadratisch gegen den dem Startwert nächstliegenden einfachen Eigenwert konvergiert.

Im Rahmen dieser Arbeit werden zur Ermittlung der Eigenwerte einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  das Sekanten-Verfahren, sowie zur Nachiteration die Rayleigh-Quotienten-Iteration verwendet. Das Sekantenverfahren sowie Modifikationen des Verfahrens (z.B. das Anderson-Björck-Verfahren) sind weit verbreitet und werden z.B. in [20], [62] angegeben und hier nicht näher erläutert. Weniger bekannt ist das Verfahren der Rayleigh-Quotienten-Iteration für nichtlineare Polynommatrizen. Diese Methode wird im folgenden kurz dargestellt.

### Rayleigh-Quotienten-Iteration

Der Rayleigh-Quotient der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  läßt sich mit Hilfe der, aus der Linearisierung (3.23) gewonnenen, symmetrischen und reellen Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  wie folgt angeben

$$R(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z}}. \quad (3.80)$$

Wird vorausgesetzt daß  $\mathbf{B}$  definit ist, so sind die Eigenwerte  $\lambda_i$  die Extremwerte des Rayleigh-Quotienten, d.h. Werte, die die Bedingung  $\frac{\partial R}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0}$  bei den Eigenvektoren  $\mathbf{z}_i$  erfüllen:

$$\lambda_i = R(\mathbf{z}_i). \quad (3.81)$$

Wird der Rayleigh-Quotient (3.80) statt mit einem Eigenvektor  $\mathbf{z}$  mit einem beliebigen von Null verschiedenen Vektor  $\mathbf{w}$  gebildet

$$R(\mathbf{w}) = \frac{\mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{B} \mathbf{w}}, \quad (3.82)$$

stellt  $R(\mathbf{w})$  eine sehr gute Näherung für den Eigenwert  $\lambda_i$  dar, dessen Eigenvektor dem Vektor  $\mathbf{w}$  am nächsten ist. Das läßt sich damit begründen, daß der Fehler des so ermittelten Eigenwerts kleiner ist als der Fehler des entsprechenden Vektors ([23], [115]).

Mit dem Rechtseigenvektor

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \lambda^{\rho-1} \mathbf{x} \\ \lambda^{\rho-2} \mathbf{x} \\ \vdots \\ \lambda \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

lassen sich jetzt für den Nenner und Zähler des Quotienten (3.80) die folgenden Ausdrücke ableiten

$$\mathbf{z}^T \mathbf{A} \mathbf{z} = -\mathbf{x}^T [\mathbf{F}(\lambda) - \lambda \mathbf{F}'(\lambda)] \mathbf{x}, \quad (3.84)$$

$$\mathbf{z}^T \mathbf{B} \mathbf{z} = -\mathbf{x}^T \mathbf{F}'(\lambda) \mathbf{x} \quad (3.85)$$

mit  $\mathbf{F}'(\lambda) = \frac{d\mathbf{F}(\lambda)}{d\lambda}$ .

Werden die Gleichungen (3.84) und (3.85) in den Ausdruck (3.80) eingesetzt, ergibt sich der verallgemeinerte Rayleigh-Quotient für eine Polynommatrix

$$R(\mathbf{x}, \lambda) = \lambda - \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{F}(\lambda) \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{F}'(\lambda) \mathbf{x}}. \quad (3.86)$$

Für den einfachen Eigenwert  $\lambda_i$  und den Eigenvektor  $\mathbf{x}_i$  ist der Nenner  $\mathbf{x}_i^T \mathbf{F}'(\lambda_i) \mathbf{x}_i$  von Null verschieden, wenn die Leitmatrix von  $\mathbf{F}(\lambda)$  regulär und sämtliche Eigenwerte von  $\mathbf{F}(\lambda)$  nichtdefektiv sind. Der Quotient (3.86) wird dann zu

$$R(\mathbf{x}_i, \lambda_i) = \lambda_i. \quad (3.87)$$

Der Rayleigh-Quotient in der Form (3.86) wird jetzt in Verbindung mit der Inversen Iteration zur Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  benutzt.

Die Iterationsvorschrift für die Inverse Iteration lautet

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{F}^{-1}(\lambda_k) \mathbf{w}_k. \quad (3.88)$$

Hierbei wird das von Misessche Potenzverfahren mit der Iterationsvorschrift  $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{F}(\lambda_k) \mathbf{w}_k$  auf die Matrix  $\mathbf{F}^{-1}(\lambda_k)$  angewendet. Wie bereits in Kapitel 3.1 erwähnt, sind die Eigenvektoren der Aufgaben

$$[\mathbf{F}(\lambda_k) - \lambda \mathbf{I}] \mathbf{w}_k = \mathbf{0}; \quad [1/\lambda_k \mathbf{F}(\lambda_k) - \mathbf{I}] \mathbf{w}_k = \mathbf{0} \quad (3.89)$$

bzw.

$$[\mathbf{F}^{-1}(\lambda_k) - 1/\lambda_k \mathbf{I}] \mathbf{w}_k = \mathbf{0} \quad (3.90)$$

identisch. Das Potenzverfahren von von Mises konvergiert gegen den zum betragsgrößten Eigenwert der Matrix  $\mathbf{F}^{-1}(\lambda_k)$  gehörenden Eigenvektor. Vorausgesetzt  $\lambda_k$  ist eine Näherung zum gesuchten Eigenwert  $\lambda_i$ , so ist  $\mathbf{F}(\lambda_k)$  regulär. Der betragsgrößte Eigenwert der Matrix  $\mathbf{F}^{-1}(\lambda_k)$  ist dann  $\sigma = 1/(\lambda_i - \lambda_k)$ . Somit konvergiert die Inverse Iteration gegen den zum inversen Shift  $\sigma = 1/(\lambda_i - \lambda_k)$  gehörenden Eigenvektor.

Zu dem verbesserten Vektor  $\mathbf{w}_{k+1}$  wird in einem zweiten Schritt der zugehörige Eigenwert mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten bestimmt.

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{\mathbf{w}_{k+1}^T \mathbf{F}(\lambda_k) \mathbf{w}_{k+1}}{\mathbf{w}_{k+1}^T \mathbf{F}'(\lambda_k) \mathbf{w}_{k+1}}. \quad (3.91)$$

Die Eigenvektoren werden dabei in jedem Schritt wie folgt normiert:

$$\mathbf{w}_k^T \mathbf{w}_k = 1. \quad (3.92)$$

Als Abbruchkriterium dient

$$\frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1}} < \text{eps}, \quad (3.93)$$

wobei  $\text{eps}$  die Rechengenauigkeit darstellt.

Für einen reellen Eigenwert wird der Startvektor  $\mathbf{w}_0$  ebenfalls reell gewählt, wobei

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{w}_k \neq 0 \quad (3.94)$$

gelten muß.

Zur Berechnung komplexer Eigenwerte sind komplexe Startwerte notwendig, da die Rechnung sonst im reellen bleibt. Als Startvektor für reelle Eigenwerte kann z.B.  $\mathbf{w}^T = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$  vorgegeben werden. Ist der Eigenwert  $\lambda_0$  bereits eine sehr gute Näherung des gesuchten Eigenwerts, konvergiert das Verfahren auch für ungünstig gewählte Startvektoren  $\mathbf{w}_0$ . Umgekehrt konvergiert das Verfahren bei Vorgabe einer guten Näherung für  $\mathbf{x}_i$  auch für einen ungenauen Eigenwert  $\lambda_0$ .

Ein Beweis für die Konvergenz der Rayleigh-Quotienten-Iteration für Polynommatrizen wird u.a. in [103] angegeben.

### Folge linearer Eigenwertprobleme

Als eine Erweiterung der Rayleigh-Quotienten-Iteration läßt sich die Lösung einer Folge linearer Eigenwertprobleme ansehen. Das nichtlineare Eigenwertproblem  $\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  wird auf die Lösung einer Folge linearer Eigenwertprobleme

$$\mathbf{F}(\lambda_i)\mathbf{z} = \theta\mathbf{G}\mathbf{z} \quad (3.95)$$

zurückgeführt. Für einen Eigenwert  $\lambda_i$  wird die Matrix  $\mathbf{F}(\lambda_i)$  singular, für die Eigenwertaufgabe (3.95) ergibt sich der erste Eigenwert bei  $\theta_1 = 0$ . Die Matrix  $\mathbf{G}$  kann beliebig gewählt werden, sie darf nur nicht singular sein (z.B.  $\mathbf{G} = \mathbf{I}$ ). Das Verfahren gliedert sich in zwei Schritte. Zuerst wird, ausgehend von einem Startwert  $\omega_0$  als Eigenwertnäherung der betragskleinste Eigenwert  $\theta_{1,k+1}$  für die Aufgabe  $\mathbf{F}(\omega_k)\mathbf{z} = \theta\mathbf{G}\mathbf{z}$  und der entsprechende Eigenvektor  $\mathbf{z}_{1,k+1}$  bestimmt. Dies kann z.B. mit Hilfe der inversen Iteration oder mit dem Lanczos-Verfahren geschehen. Im zweiten Teil des Iterationsschritts wird die Eigenwertnäherung verbessert, wobei  $\omega_{k+1} = f(\omega_k, \theta_{1,k+1}, \mathbf{z}_{1,k+1})$  ist. Die verbesserte Näherung kann z.B. mit Hilfe der Rayleigh-Quotienten-Iteration berechnet werden ([103]).

### 3.5 Faktorenerlegung einer Polynommatrix

Für eine einfache und reguläre Polynommatrix vom Grad  $\rho$  und mit der Dimension  $m \times m$

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\lambda + \mathbf{A}_2\lambda^2 + \dots + \mathbf{A}_\rho\lambda^\rho \quad (3.96)$$

wird gezeigt, wie durch sukzessive Abspaltung der Eigenwerte der Matrix eine Faktorenerlegung in der Form

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_\rho \mathbf{X}_1 (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_1) \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_2 (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_2) \mathbf{X}_2^{-1} \dots \mathbf{X}_\rho (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_\rho) \mathbf{X}_\rho^{-1} \quad (3.97)$$

erreicht werden kann. Die Eigenwerte und -vektoren werden dabei blockweise zu  $\rho$  Spektral-matrizen  $\mathbf{\Lambda}_\nu$  und Modalmatrizen  $\mathbf{X}_\nu$  der Dimension  $m$  zusammengesetzt.

Die Grundlagen für die Faktorenerlegung einer einfachen und regulären Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  werden in den Arbeiten von FALK [22] sowie von LANCASTER [59] angegeben. Die Sätze zur Faktorisierung einer Polynommatrix in den Abschnitten 3.5.1, 3.5.2 und 3.5.3 beruhen im Wesentlichen auf dem von FALK beschriebenen Verfahren zur Reduktion von Polynommatrizen [22].

#### 3.5.1 Abspaltung eines Linearfaktors einer Polynommatrix

Die Eigenwertaufgabe für die Polynommatrix (3.96) lautet

$$\mathbf{y}_j^T \mathbf{F}(\lambda_j) = \mathbf{0}^T; \quad \mathbf{F}(\lambda_j) \mathbf{x}_j = \mathbf{0}. \quad (3.98)$$

Das charakteristische Polynom  $p(\lambda) = \det[\mathbf{F}(\lambda)]$  ist vom Grad  $n = m\rho$  und besitzt für eine reguläre Leitmatrix  $\mathbf{A}_\rho$  ebenso viele Nullstellen.

Für einen Eigenwert  $\lambda_j$  lassen sich vom Parameter  $\lambda$  abhängige Vektoren  $\mathbf{w}_j^T(\lambda)$  bzw.  $\mathbf{v}_j(\lambda)$  so angeben, daß ein Linearfaktor  $\lambda - \lambda_j$  aus der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  abgespalten werden kann.

$$\mathbf{y}_j^T \mathbf{F}(\lambda) = (\lambda - \lambda_j) \mathbf{w}_j^T(\lambda); \quad \mathbf{F}(\lambda) \mathbf{x}_j = \mathbf{v}_j(\lambda) (\lambda - \lambda_j). \quad (3.99)$$

Die Elemente der Vektoren  $\mathbf{w}_j(\lambda)$  und  $\mathbf{v}_j(\lambda)$  sind Polynome vom Polynomgrad  $\rho - 1$ .

Werden für  $m$  Eigenwerte  $\lambda_j$  die entsprechenden Links- bzw. Rechtseigenvektoren zu Modal-matrizen  $\mathbf{Y}$  bzw.  $\mathbf{X}$  zusammengefaßt

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \dots & \mathbf{y}_m \end{pmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_m \end{pmatrix}, \quad (3.100)$$

lassen sich die vektoriellen Formulierungen (3.99) durch die Matrixgleichungen

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{D}(\lambda) \mathbf{W}(\lambda); \quad \mathbf{F}(\lambda) \mathbf{X} = \mathbf{V}(\lambda) \mathbf{D}(\lambda) \quad (3.101)$$

mit den Diagonalmatrizen

$$\mathbf{D}(\lambda) = \mathbf{I}\lambda - \mathbf{\Lambda}; \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m] \quad (3.102)$$

ersetzen. Die Polynommatrizen  $\mathbf{W}(\lambda)$  bzw.  $\mathbf{V}(\lambda)$  haben gegenüber  $\mathbf{F}(\lambda)$  einen um eins verringerten Polynomgrad.

Da für eine symmetrische Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  Links- und Rechtseigenvektoren identisch sind und damit  $\mathbf{W}^T(\lambda) = \mathbf{V}(\lambda)$  ist, bzw. im nicht symmetrischen Fall einfach mit  $\mathbf{F}^T(\lambda)$  gerechnet werden kann, werden die folgenden Herleitungen nur für die Rechtseigenvektoren  $\mathbf{X}$  angegeben.

Wird der rechte Ausdruck in (3.101)

$$\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{X} = \mathbf{V}(\lambda)\mathbf{D}(\lambda) \quad (3.103)$$

von rechts mit der inversen Modalmatrix  $\mathbf{X}^{-1}$  multipliziert, ergibt sich eine Darstellung

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{V}(\lambda)\mathbf{D}(\lambda)\mathbf{X}^{-1}. \quad (3.104)$$

Die Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  setzt sich aus einer Matrix  $\mathbf{V}(\lambda)$  vom Polynomgrad  $\rho-1$  und einem linearen Faktor  $\mathbf{D}(\lambda)\mathbf{X}^{-1}$  mit  $m$  abgespaltenen Eigenwerten und -vektoren zusammen. Das Spektrum der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  wurde somit auf die Matrizen  $\mathbf{V}(\lambda)$  und  $\mathbf{D}(\lambda)$  verteilt. Die noch unbekannt Matrix  $\mathbf{V}(\lambda)$  mit dem um  $m$  Eigenwerte reduzierten Spektrum kann wie folgt bestimmt werden:

Für einen Polynomansatz

$$\mathbf{V}(\lambda) = \mathbf{C}(\lambda)\mathbf{X} = (\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1\lambda + \dots + \mathbf{C}_{\rho-1}\lambda^{\rho-1})\mathbf{X}, \quad (3.105)$$

lautet (3.104)

$$\mathbf{F}(\lambda) = (\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1\lambda + \dots + \mathbf{C}_{\rho-1}\lambda^{\rho-1})\mathbf{X}\mathbf{D}(\lambda)\mathbf{X}^{-1}. \quad (3.106)$$

Die Koeffizientenmatrizen von  $\mathbf{C}(\lambda)$  lassen sich durch einen Koeffizientenvergleich der linken und rechten Seite in (3.106) ermitteln. Ausgehend von der Koeffizientenmatrix bei der höchsten Potenz von  $\lambda$  ergibt sich die nach Horner bekannte Rekursionsformel

$$\mathbf{A}_i + \mathbf{C}_i\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{C}_{i-1}; \quad i = \rho - 1, \dots, 1, 0 \quad (3.107)$$

mit

$$\mathbf{C}_{\rho-1} = \mathbf{A}_\rho. \quad (3.108)$$

Die Reduktionsvorschrift (3.107) läßt sich anhand des folgenden Matrizenschemas verdeutlichen:

$$(\mathbf{C}_0 \quad \mathbf{C}_1 \dots \mathbf{C}_{\rho-1}) = (\mathbf{A}_0 \quad \mathbf{A}_1 \dots \mathbf{A}_\rho) \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \\ \hat{\mathbf{A}}^{\rho-1} & \hat{\mathbf{A}}^{\rho-2} & \dots & \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

mit

$$\hat{\mathbf{A}}^j = \mathbf{X} \mathbf{\Lambda}^j \mathbf{X}^{-1}; \quad j = 1, \dots, \rho - 1. \quad (3.110)$$

Die Matrix  $\mathbf{D}(\lambda)$  enthält die aus der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  abgespaltenen Eigenwerte, und die Eigenwertaufgabe  $\mathbf{X}\mathbf{D}(\lambda)\mathbf{X}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  liefert die entsprechenden Eigenvektoren. Die Rechtseigenvektoren entsprechen denen der Eigenwertaufgabe  $\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , die Linkseigenvektoren sind im allgemeinen nicht mit denen der Aufgabe  $\mathbf{y}^T\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{0}$  identisch.

Die normierte Spektralmatrix  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1}$  mit den abgespaltenen Eigenwerten besitzt die Eigenschaft

$$\mathbf{F}(\hat{\mathbf{A}}) = \mathbf{0} \quad (3.111)$$

und entspricht der sogenannten "Rechts-Lösenden" (right solvent) der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$ , wie sie von LANCASTER [59] angegeben wird.

Das Spektrum der reduzierten Polynommatrix  $\mathbf{C}(\lambda)$  enthält die restlichen  $m(\rho - 1)$ , gegenüber der Ausgangsmatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  unveränderten, Eigenwerte. Die entsprechenden Eigenformen des Eigenwertproblems  $\mathbf{C}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  sind, wie später gezeigt wird (Kapitel 3.5.3), in die Vektoren der Aufgabe  $\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  durch eine Transformationsbeziehung überführbar.

Durch die hier gezeigte Abspaltung von Eigenwerten einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  ist es möglich, beliebige Blöcke von  $m$  bekannten Eigenwerten und -vektoren der Matrix in Linearfaktoren zusammenzufassen. Durch die Abspaltung weiterer Linearfaktoren einer reduzierten Matrix läßt sich eine vollständige Faktorisierung der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  erreichen.

### 3.5.2 Vollständige sukzessive Faktorisierung einer Polynommatrix

Wird der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  der Index 1 zugeordnet, lautet diese nach dem ersten Reduktionsschritt

$$\mathbf{F}^1(\lambda) = \mathbf{F}^2(\lambda)\mathbf{X}\mathbf{D}(\lambda)\mathbf{X}^{-1} \quad (3.112)$$

mit

$$\mathbf{F}^2(\lambda) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1\lambda + \dots + \mathbf{C}_{\rho-1}\lambda^{\rho-1}. \quad (3.113)$$

Durch das wiederholte Anwenden der Reduktionsvorschrift (3.107) auf die jeweils aktuelle Matrix  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$  wird eine stetige Faktorisierung der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  erreicht. Die fortlaufende Reduktion der Matrix  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$  gelingt durch eine sukzessive Abspaltung der Linearfaktoren  $\mathbf{X}_\nu\mathbf{D}_\nu(\lambda)\mathbf{X}_\nu^{-1}$  aus der Matrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\lambda) &= \mathbf{F}^2(\lambda)\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1} & (3.114) \\ \mathbf{F}(\lambda) &= \mathbf{F}^3(\lambda)\mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1} \\ &\vdots \\ \mathbf{F}(\lambda) &= \mathbf{F}^\rho(\lambda)\mathbf{X}_{\rho-1}\mathbf{D}_{\rho-1}(\lambda)\mathbf{X}_{\rho-1}^{-1} \dots \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1} \\ \mathbf{F}(\lambda) &= \mathbf{F}^{\rho+1}\mathbf{X}_\rho\mathbf{D}_\rho(\lambda)\mathbf{X}_\rho^{-1} \dots \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1}. \end{aligned}$$

Mit  $\mathbf{F}^{\rho+1} = \mathbf{A}_\rho$  ergibt sich die vollständige Spektralzerlegung einer Polynommatrix

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_\rho \mathbf{X}_\rho \mathbf{D}_\rho(\lambda) \mathbf{X}_\rho^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda) \mathbf{X}_1^{-1}. \quad (3.115)$$

Durch die sukzessive, blockweise Abspaltung von Eigenwerten einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  wird deren vollständige Faktorisierung erreicht. Es läßt sich eine Spektralzerlegung einer Polynommatrix vom Grad  $\rho > 1$  ohne vorherige Linearisierung der Matrix angeben, die Dimension der Matrix bleibt während der Rechnung unverändert.

Die Reduktion einer Polynommatrix wurde blockweise für jeweils  $m$  Eigenwerte durchgeführt, eine Abspaltung einzelner oder in Blöcken  $k < m$  zusammengefaßter Eigenwerte ist jedoch ebenfalls möglich und wird in [22] beschrieben. Wie später in Kapitel 3.6 gezeigt wird, ist eine näherungsweise Beschreibung der Eigenschaften eines dynamischen Systems mit einem Teil der Linearfaktoren einer kondensierten dynamischen Steifigkeitsmatrix möglich. Voraussetzung dazu ist das Zusammenfassen von jeweils  $m$  Eigenvektoren zu regulären Modalmatrizen  $\mathbf{X}_\nu$ .

Das Abspalten der Eigenwerte einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  kann in beliebiger Reihenfolge geschehen. Für eine einfache und reguläre Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  (die Leitmatrix  $\mathbf{A}_\rho$  ist regulär und sämtliche Eigenwerte sind nichtdefektiv) lassen sich  $m\rho$  Eigenvektoren  $\mathbf{x}_\nu$  der aktuellen Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)^\nu$  immer zu  $\rho$  regulären Modalmatrizen  $\mathbf{X}_\nu$  zusammenstellen ([22]).

Es hat sich gezeigt, daß bei dicht zusammenliegenden Eigenwerten die Fehler in den Koeffizientenmatrizen der reduzierten Matrix so groß werden können, daß es zu einer Verschiebung des in der reduzierten Matrix verbleibenden Eigenwertspektrums kommt. Bei einer zu großen Abweichung des Spektrums von der ursprünglichen Lage ist die Reduktion instabil.

Die Empfindlichkeit einer Polynommatrix gegenüber Rundungsfehlern in den Matrizelementen ist auf die betragsmäßig große Differenz der Elemente verschiedener Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}_i$  zurückzuführen. Die Verwendung des Horner Schemas (3.107) stellt eine Möglichkeit dar, die Rundungsfehler bei der Auswertung der Polynommatrix zu verringern. Durch das abwechselnde Multiplizieren und Addieren wird eine direkte Aufsummierung von betragsmäßig stark unterschiedlichen Termen und die Auslöschung kleiner Beträge vermieden (vgl. Kapitel 3.5.4).

Für reelle Matrizen  $\mathbf{F}(\lambda)$  mit komplexen Nullstellen, z.B. Strukturen mit Dämpfung, kann die hier gezeigte Reduktion unverändert angewendet werden. Eine vollständige Reduktion mit reellen Zahlen wird für komplexe Eigenwerte in [22] angegeben.

### Weitere Anmerkungen zur Reduktion

Mit Hilfe der angegebenen Reduktionsvorschrift für die Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  ist eine fortlaufende Gradreduktion der Matrix möglich. Dies kann zur Lösung der Eigenwertaufgabe

$$\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x}_j = \mathbf{0}; \quad j = 1, 2, \dots, \rho m \quad (3.116)$$

genutzt werden. Wurden  $m$  Eigenwerte und Vektoren der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  bestimmt, können diese aus der Matrix abgespalten werden. Anschließend ist die Eigenwertaufgabe für eine reduzierte Matrix

$$\mathbf{F}^2(\lambda)\mathbf{x}_j = \mathbf{0}; \quad j = 1, 2, \dots, (\rho - \nu)m \quad (3.117)$$

zu lösen, wobei sich der Aufwand entsprechend verringert.

Weiterhin ist zu bemerken, daß sich die Matrix  $\mathbf{X}_\nu$  aus den Rechtseigenvektoren der Polynommatrix  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$  zusammensetzt. Aufgrund der Transformationseigenschaft

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{X}_\nu^{-1} \hat{\mathbf{A}}_\nu \mathbf{X}_\nu \quad (3.118)$$

der Modalmatrix  $\mathbf{X}_\nu$  entspricht die inverse Modalmatrix  $\mathbf{X}_\nu^{-1}$  im allgemeinen nicht der Matrix  $\mathbf{Y}_\nu^T$  der Linkseigenvektoren von  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$ . Die Inversion der Matrix  $\mathbf{X}_\nu$  läßt sich umgehen, wenn die Linkseigenvektoren des Linearfaktors  $\mathbf{X}_\nu \mathbf{D}_\nu(\lambda) \mathbf{X}_\nu^{-1}$  bestimmt werden. Die Eigenwertaufgabe für einen abgespaltenenen Linearfaktor lautet

$$(\mathbf{\Lambda}_\nu - \mathbf{I}\lambda_j)\mathbf{X}_\nu^{-1}\mathbf{x}_j = \mathbf{0} \quad (3.119)$$

bzw. mit den Linkseigenvektoren

$$\mathbf{y}_j^T \mathbf{X}_\nu (\mathbf{\Lambda}_\nu - \mathbf{I}\lambda_j) = \mathbf{0}. \quad (3.120)$$

Die Linkseigenvektoren  $\mathbf{y}_j^T$  lassen sich so normieren, daß

$$\mathbf{Y}_\nu^T = \mathbf{X}_\nu^{-1} \quad (3.121)$$

gilt.

Durch die Darstellung einer Polynommatrix in der faktorisierten Form (3.115) ist es möglich die inverse Matrix  $\mathbf{F}^{-1}(\lambda)$  in folgender Weise anzugeben:

$$\mathbf{F}^{-1}(\lambda) = \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1^{-1}(\lambda) \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2^{-1}(\lambda) \mathbf{X}_2^{-1} \dots \mathbf{X}_\rho \mathbf{D}_\rho^{-1}(\lambda) \mathbf{X}_\rho^{-1} \mathbf{A}_\rho^{-1}. \quad (3.122)$$

Die Ausdrücke  $\mathbf{D}_\nu^{-1}(\lambda)$  sind hierbei einfach zu invertierende Diagonalmatrizen. Im Anhang A.2 wird das Vorgehen zur Inversion einer Polynommatrix durch Linearisierung dargestellt, wie es z.B. von LANCASTER [59] angegeben wird. Die auf der Linearisierung der Polynommatrix basierende Inversion setzt eine Normierung der Eigenvektoren mit den expandierten Matrizen der Dimension  $m\rho \times m\rho$  voraus. Bei dem hier gezeigten Verfahren gelingt die Inversion einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  durch die Inversion mehrerer linearer Polynommatrizen geringer Dimension. Diese Vorgehensweise ist eine numerisch günstige Alternative zu den bisher benutzten Verfahren.

Im Anhang A.2 werden, anhand einer bei der Kondensation entstandenen Polynommatrix, die beiden Vorgehensweisen (Linearisierung und Faktorisierung) verglichen.

### 3.5.3 Rekursive Bestimmung der Linearfaktoren einer Polynommatrix

#### Rekursive Bestimmung der Vektoren eines Linearfaktors

Bei der Faktorisierung einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  durch das wiederholte Anwenden des Reduktionsschemas (3.107) werden die Eigenwerte der Matrix nicht verändert, die Eigenvektoren  $\mathbf{x}_j$  werden jeweils aus der reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  berechnet und sind im allgemeinen nicht mit denen der Matrix  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$  identisch.

Die Ermittlung der Eigenvektoren der Originalmatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  aus den Vektoren der reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  kann über die zuvor abgespaltenen Linearfaktoren geschehen. Damit ist gleichzeitig die Transformation der Eigenvektoren der Originalmatrix auf die Vektoren der reduzierten Matrix bzw. auf die Vektoren eines Linearfaktors  $\mathbf{X}_{\nu+1}\mathbf{D}_{\nu+1}(\lambda)\mathbf{X}_{\nu+1}^{-1}$  möglich.

Sind  $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_j$  die Eigenvektoren der Original-Eigenwertaufgabe

$$\mathbf{F}(\lambda_j)\overset{\circ}{\mathbf{x}}_j = \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, \rho m, \quad (3.123)$$

können diese mit Hilfe einer Transformation  $\mathbf{T}(\lambda_j)\overset{\circ}{\mathbf{x}}_j = \mathbf{x}_j$  in die Vektoren  $\mathbf{x}_j$  überführt werden.  $\mathbf{x}_j$  sind die Eigenvektoren der Eigenwertaufgabe für eine Polynommatrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  mit dem um  $(\rho - \nu)m$  Eigenwerte und -formen gegenüber der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  reduzierten Spektrum.

$$\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda_j)\mathbf{x}_j = \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, (\rho - \nu)m. \quad (3.124)$$

Die Eigenwertaufgabe einer teilweise faktorisierten Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  für den  $(\nu + 1)$ -ten Reduktionsschritt lautet

$$\mathbf{F}(\lambda_j)\overset{\circ}{\mathbf{x}}_j = \mathbf{F}^{\nu+2}(\lambda_j)\mathbf{X}_{\nu+1}\mathbf{D}_{\nu+1}(\lambda_j)\underbrace{\mathbf{X}_{\nu+1}^{-1}\mathbf{X}_\nu\mathbf{D}_\nu(\lambda_j)\mathbf{X}_\nu^{-1} \dots \mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda_j)\mathbf{X}_1^{-1}}\overset{\circ}{\mathbf{x}}_j = \mathbf{0}. \quad (3.125)$$

Der Ausdruck  $\mathbf{F}^{\nu+2}(\lambda_j)\mathbf{X}_{\nu+1}\mathbf{D}_{\nu+1}(\lambda_j)$  entspricht der Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda_j)$  der Eigenwertaufgabe (3.124). Ist  $\lambda_j$  ein Eigenwert der Vielfachheit  $v_j$ , wird vorausgesetzt, daß dieser weder im Spektrum der Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+2}(\lambda)$  noch in den Matrizen  $\mathbf{D}_\nu(\lambda_j), \dots, \mathbf{D}_2(\lambda_j), \mathbf{D}_1(\lambda_j)$  des unterklammerten Teils von (3.125) enthalten ist. In diesem Fall entspricht der unterklammerte Teil der Gleichung (3.125) für einen Eigenwert  $\lambda_j$  der Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  dem Einheitsvektor  $\mathbf{e}_j$  mit der  $j$ -ten Komponente ungleich null. Dies läßt sich daran erkennen, daß für den Eigenwert  $\lambda_j$  die  $j$ -te Spalte der Matrix  $\mathbf{D}_{\nu+1}(\lambda_j)$  zu null wird. Die Gleichungen (3.125) können dann nur zu null werden, wenn

$$\mathbf{D}_{\nu+1}(\lambda_j)\mathbf{e}_j = \mathbf{0} \quad (3.126)$$

gilt. Der unterklammerte Teil von (3.125) lautet somit

$$\mathbf{X}_{\nu+1}^{-1}\mathbf{X}_\nu\mathbf{D}_\nu(\lambda_j)\mathbf{X}_\nu^{-1} \dots \mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda_j)\mathbf{X}_1^{-1}\overset{\circ}{\mathbf{x}}_j = \mathbf{e}_j. \quad (3.127)$$

Multipliziert man den Ausdruck von links mit  $\mathbf{X}_{\nu+1}$ , ergibt sich der Vektor  $\mathbf{x}_j$  der reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda_j)$

$$\mathbf{X}_{\nu}\mathbf{D}_{\nu}(\lambda_j)\mathbf{X}_{\nu}^{-1} \dots \mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda_j)\mathbf{X}_1^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{x}}_j = \mathbf{X}_{\nu+1}\mathbf{e}_j = \mathbf{x}_j \quad (3.128)$$

oder kurz

$$\mathbf{T}(\lambda_j) \overset{\circ}{\mathbf{x}}_j = \mathbf{x}_j. \quad (3.129)$$

Mit Hilfe der Transformationsbeziehung (3.129) lassen sich die Vektoren einer reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  aus den zuvor abgespaltenen Linearfaktoren  $\mathbf{X}_{\nu}\mathbf{D}_{\nu}(\lambda_j)\mathbf{X}_{\nu}^{-1}$  und den Eigenvektoren der Eigenwertaufgabe für die Ausgangsmatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  (3.123) bestimmen. Die Beziehung (3.129) gilt unter der Voraussetzung, daß in jedem Reduktionsschritt mehrfache Eigenwerte in einer gemeinsamen Spektralmatrix zusammengefaßt werden, da sonst die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}(\lambda_j)$  singulär werden kann.

Für eine reguläre Matrix  $\mathbf{T}(\lambda_j)$  gilt

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}}_j = \mathbf{T}(\lambda_j)^{-1}\mathbf{x}_j. \quad (3.130)$$

Es lassen sich somit die Vektoren einer reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}$  in die entsprechenden Vektoren der Ausgangsmatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  transformieren.

### Vollständige rekursive Faktorisierung einer Polynommatrix

Die Vektoren des Eigenwertproblems für die Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  (3.124) sind gleichzeitig die Vektoren des Linearfaktors  $\mathbf{X}_{\nu+1}\mathbf{D}_{\nu+1}(\lambda_j)\mathbf{X}_{\nu+1}^{-1}$ . Ausgehend vom ersten Linearfaktor  $\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda_j)\mathbf{X}_1^{-1}$  mit den Eigenvektoren der Originalaufgabe (3.123), lassen sich alle folgenden Faktoren  $\nu > 1$  aus zuvor ermittelten Faktoren, also rekursiv, berechnen:

$$\mathbf{x}_j = \overset{\circ}{\mathbf{x}}_j; \quad j = 1, \dots, m$$

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{F}^2(\lambda)\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda_j)\mathbf{X}_1^{-1}$$

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda_j)\mathbf{X}_1^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{x}}_j; \quad j = m+1, \dots, 2m$$

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{F}^3(\lambda)\mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda_j)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda_j)\mathbf{X}_1^{-1}$$

⋮

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{X}_{\nu-1}\mathbf{D}_{\nu-1}(\lambda_j)\mathbf{X}_{\nu-1}^{-1} \dots \mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda_j)\mathbf{X}_1^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{x}}_j; \quad j = \nu m + 1, \dots, \nu m + m$$

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)\mathbf{X}_{\nu}\mathbf{D}_{\nu}(\lambda_j)\mathbf{X}_{\nu}^{-1} \dots \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda_j)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda_j)\mathbf{X}_1^{-1}$$

(3.131)

Werden sämtliche  $\nu = \rho$  Linearfaktoren ermittelt, ist  $\mathbf{F}^{\rho+1}(\lambda) = \mathbf{A}_\rho$ , und es kann die vollständige Produktzerlegung der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  angegeben werden:

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_\rho \mathbf{X}_\rho \mathbf{D}_\rho(\lambda_j) \mathbf{X}_\rho^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda_j) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda_j) \mathbf{X}_1^{-1}. \quad (3.132)$$

Das Spektrum der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  wird alleine durch die Matrizen  $\mathbf{X}_\nu \mathbf{D}_\nu(\lambda_j) \mathbf{X}_\nu^{-1}$  erfaßt. Die Normierung der Linearfaktoren erfolgt durch die Leitmatrix  $\mathbf{A}_\rho$ . Für eine vollständige rekursive Zerlegung einer Polynommatrix in ihre Linearfaktoren müssen somit die Eigenwerte und -vektoren der Ausgangsmatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  sowie deren Leitmatrix  $\mathbf{A}_\rho$  bekannt sein. Die Faktorisierung der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  ist ohne eine explizite Kenntnis der Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}_0, \dots, \mathbf{A}_{\rho-1}$  möglich.

### 3.5.4 Numerische Stabilität der Faktorisierung

Bei der sukzessiven und bei der rekursiven Faktorisierung einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  kommt es aufgrund einer endlichen Maschinengenauigkeit zu Rundungsfehlern. Es hat sich gezeigt, daß die Fehler je nach verwendeter Methode unterschiedlich groß sind. Die Ursachen dafür werden im folgenden untersucht.

#### Sukzessive Faktorisierung

Bei der Berechnung der reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  aus  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$  kann es aufgrund von Rundungsfehlern zu einer Verschiebung des in  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  verbleibenden Eigenwertspektrums kommen. Bei einer zu großen Abweichung der Eigenwerte von Originalmatrix und reduzierter Matrix ist die Reduktionsfolge (3.115) instabil.

Es hat sich gezeigt, daß die Reihenfolge, in der die Eigenwerte abgespalten werden, einen entscheidenden Einfluß auf die Stabilität der Reduktion hat.

Der wesentliche Grund für eine fehlerhafte Berechnung einer, um die aus  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$  abgespaltenen Eigenwerte reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  liegt in der Verteilung der Eigenwerte der Originalmatrix  $\mathbf{F}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\rho} \mathbf{A}_i \lambda^i$  und der damit verbundenen Empfindlichkeit der Eigenwerte gegenüber Veränderungen in den Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}_i$ .

Bei gleichen Vorzeichen und großen Differenzen der Eigenwerte einer Polynommatrix entstehen große Betragsunterschiede in den Elementen verschiedener Koeffizientenmatrizen. Die endliche Maschinengenauigkeit führt zu Rundungsfehlern bei der sukzessiven Berechnung der Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  aus der Matrix  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$ .

Obwohl die Reduktion der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  mit dem gut konditionierten Horner-Schema (3.107) stattfindet, werden die Koeffizientenmatrizen der reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  mit zunehmender Anzahl der Rechenoperationen fehlerhafter bestimmt. Da jede Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}_i^{\nu+1}$  mit Hilfe unterschiedlich vieler Operationen berechnet wird, sind auch die Fehler

in den Matrizen unterschiedlich groß. Die Koeffizienten  $\mathbf{A}_i^2$  werden nach Schema (3.107) aus der Ausgangsmatrix  $\mathbf{F}^1(\lambda)$  wie folgt ermittelt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_0^2 &= \mathbf{A}_1^1 + \mathbf{A}_2^1 \hat{\Lambda}_1 + \dots + \mathbf{A}_{\rho-1}^1 \hat{\Lambda}_1^{\rho-2} + \mathbf{A}_\rho^1 \hat{\Lambda}_1^{\rho-1} \\
 \mathbf{A}_1^2 &= \mathbf{A}_2^1 + \mathbf{A}_3^1 \hat{\Lambda}_1 + \dots + \mathbf{A}_\rho^1 \hat{\Lambda}_1^{\rho-2} \\
 &\vdots \\
 \mathbf{A}_{\rho-2}^2 &= \mathbf{A}_{\rho-1}^1 + \mathbf{A}_\rho^1 \hat{\Lambda}_1 \\
 \mathbf{A}_{\rho-1}^2 &= \mathbf{A}_\rho^1
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

mit  $\hat{\Lambda}_1^j = \mathbf{X}_1 \Lambda_1^j \mathbf{X}_1^{-1}$ .

Zur Bestimmung der Matrix  $\mathbf{A}_0^2$  werden  $\rho - 1$  Summanden addiert, dagegen kann die Leitmatrix  $\mathbf{A}_\rho^2$  ohne Rechnung und damit unverändert genau der Leitmatrix  $\mathbf{A}_\rho^1$  von  $\mathbf{F}^1(\lambda)$  zugeordnet werden.

Die Koeffizientenmatrizen bei den jeweiligen Potenzen von  $\lambda$  haben einen unterschiedlich starken Einfluß auf die Genauigkeit der einzelnen Eigenwerte. Die betragsniedrigen Eigenwerte sind stärker von den Koeffizientenmatrizen bei den niedrigen  $\lambda$ -Potenzen abhängig, wohingegen die betragshöheren Eigenwerte empfindlicher auf relative Veränderungen in den Koeffizientenmatrizen bei den höheren Potenzen reagieren.

Das Reduktionsschema (3.133) führt als erstes zu einer fehlerhaften Berechnung der Elemente der Matrizen  $\mathbf{A}_i^2$  bei den niedrigen  $\lambda$ -Potenzen und somit zu fehlerhaften betragsniedrigen Eigenwerten der reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^2(\lambda)$ .

### Beispiel:

Eine Struktur, bestehend aus fünf finiten Balkenelementen, wird auf die Randkoordinaten kondensiert ( $E = 1 \frac{N}{m^2}$ ,  $l = 1m$ ,  $A = 1m^2$ ,  $\rho_d = 1 \frac{kg}{m^3}$ ). Nach (3.4) ergibt sich bei einer exakten dynamischen Kondensation und mit den Randbedingungen des einseitig eingespannten Balkens eine Polynommatrix

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(\lambda) &= \begin{pmatrix} 9.5039\text{E}+37 & 1.4255\text{E}+38 \\ 1.4255\text{E}+38 & 2.8511\text{E}+38 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.5075\text{E}+35 & -1.5812\text{E}+36 \\ -1.5812\text{E}+36 & -9.4985\text{E}+36 \end{pmatrix} \lambda \\
 &+ \begin{pmatrix} 2.2094\text{E}+32 & 1.2305\text{E}+33 \\ 1.2305\text{E}+33 & 1.2411\text{E}+34 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} -2.4577\text{E}+28 & 1.9108\text{E}+29 \\ 1.9108\text{E}+29 & 2.7463\text{E}+30 \end{pmatrix} \lambda^3 \\
 &+ \begin{pmatrix} 8.6116\text{E}+23 & 8.8682\text{E}+24 \\ 8.8682\text{E}+24 & 1.6877\text{E}+26 \end{pmatrix} \lambda^4 + \begin{pmatrix} -1.1177\text{E}+18 & -1.5011\text{E}+19 \\ -1.5011\text{E}+20 & -3.6209\text{E}+21 \end{pmatrix} \lambda^5 \\
 &+ \begin{pmatrix} 5.9902\text{E}+15 & 1.0264\text{E}+15 \\ 1.0264\text{E}+15 & 2.9925\text{E}+16 \end{pmatrix} \lambda^6 + \begin{pmatrix} -1.3775\text{E}+08 & -2.9605\text{E}+09 \\ -2.9605\text{E}+09 & -1.0088\text{E}+11 \end{pmatrix} \lambda^7 \\
 &+ \begin{pmatrix} 1.3168\text{E}+02 & 3.4984\text{E}+03 \\ 3.4984\text{E}+03 & 1.3542\text{E}+05 \end{pmatrix} \lambda^8 + \begin{pmatrix} -4.2521\text{E}-05 & -1.3734\text{E}-03 \\ -1.3734\text{E}-03 & -5.8803\text{E}-02 \end{pmatrix} \lambda^9
 \end{aligned} \tag{3.134}$$

Die Lösung der Eigenwertaufgabe  $\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  liefert den niedrigsten Eigenwert bei  $\lambda_1 = 12.36$  und den höchsten bei  $\lambda_{18} = 2234660.96$ . Für  $\lambda = \lambda_1$  wird (3.134) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\lambda_1) = & \begin{pmatrix} 9.5039\text{E}+37 & 1.4255\text{E}+38 \\ 1.4255\text{E}+38 & 2.8511\text{E}+38 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5.5713\text{E}+36 & -1.9536\text{E}+37 \\ -1.9536\text{E}+37 & 1.1740\text{E}+38 \end{pmatrix} + \dots \\ & + \begin{pmatrix} 7.1724\text{E}+10 & 1.9055\text{E}+12 \\ 1.9055\text{E}+12 & 7.3761\text{E}+13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.8626\text{E}+05 & -9.2461\text{E}+06 \\ -9.246106\text{E}+ & -3.9588\text{E}+08 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.135)$$

und für  $\lambda = \lambda_{18}$  ergibt sich die Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\lambda_{18}) = & \begin{pmatrix} 9.5039\text{E}+37 & 1.4255\text{E}+38 \\ 1.4255\text{E}+38 & 2.8511\text{E}+38 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.0072\text{E}+42 & -3.5334\text{E}+42 \\ -3.5334\text{E}+42 & 2.1225\text{E}+43 \end{pmatrix} + \dots \\ & + \begin{pmatrix} 1.1886\text{E}+52 & 2.1755\text{E}+54 \\ 2.1755\text{E}+54 & 8.42122\text{E}+55 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5.9089\text{E} + 52 & -1.9085\text{E} + 54 \\ -1.9085\text{E} + 54 & -8.1715\text{E} + 55 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.136)$$

Es läßt sich erkennen, daß bei  $\lambda = \lambda_1$  die Koeffizientenmatrizen bei den niedrigen Potenzen von  $\lambda$  an Einfluß gewinnen. Bei  $\lambda = \lambda_{18}$  wirken sich dagegen die Summanden bei den hohen  $\lambda$ -Potenzen stärker auf die Gesamtsumme aus.

Es hat sich als numerisch günstig erwiesen die Eigenwerte in der Reihenfolge  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m\rho}$  abzuspalten, wobei  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{m\rho}$  ist. Eine Abspaltung der Eigenwerte in der Reihenfolge  $\lambda_{m\rho}, \lambda_{m\rho-1}, \dots, \lambda_1$  führt dagegen sehr schnell zu großen Rundungsfehlern in den Koeffizientenmatrizen der reduzierten Polynommatrix und zu einer instabilen Reduktion.

Besitzt die Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  mehrfache und/oder dicht zusammenliegende Eigenwerte in ihrem Spektrum, kann es, aufgrund der besonderen Empfindlichkeit dieser Nullstellen gegenüber Störungen in den Koeffizientenmatrizen, günstig sein, diese Eigenwerte jeweils in einem Schritt gemeinsam abzuspalten.

Im Anhang A.4 werden für eine durch die exakte dynamische Kondensation entstandene Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  vom Grad  $\rho = 19$  mit der Dimension  $4 \times 4$  Eigenwerte in unterschiedlicher Reihenfolge abgespalten. Die Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  liefert die Eigenwerte für eine ungefesselte, aus zehnfiniten Balkenelementen zusammengesetzte, Struktur sowie die Eigenwerte der an den Randkoordinaten gefesselten Slave-Struktur. Das Eigenwertspektrum der Matrix setzt sich aus 22 Eigenwerten der Struktur sowie 18 dreifachen Slave-Eigenwerten zusammen (vgl. Kapitel 4.1.2).

Da im unteren Spektrum der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  die einfachen Eigenwerte der Struktur und die mehrfachen Eigenwerte des Slave-Systems nahe beieinander liegen (siehe Abbildung 3.2), wirkt sich die Abspaltung von einem oder mehrerer dieser Eigenwerte entsprechend stark auf die Genauigkeit der im Spektrum verbleibenden Eigenwerte aus.

Bei der sukzessiven Reduktion der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  hat sich gezeigt, daß es günstig ist, mehrfache Eigenwerte immer gemeinsam in einem Schritt abzuspalten und die Reihenfolge

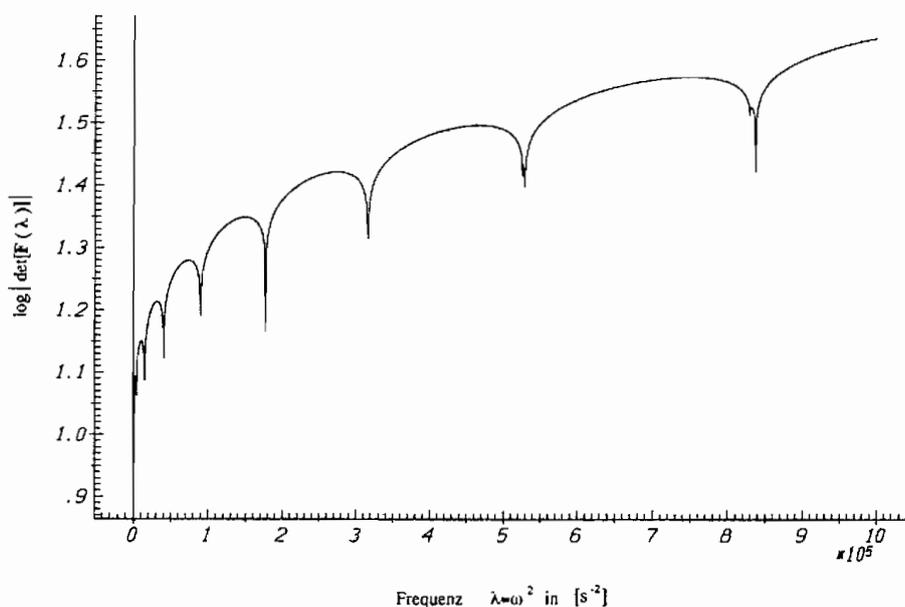


Abbildung 3.2: Eigenwertspektrum von  $\lambda = 0$  bis  $\lambda = 10^6$  einer kondensierten Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  vom Grad  $\rho = 19$ , Dimension  $m = 4$

nicht alleine von der Größe des Betrags der Eigenwerte abhängig zu machen. In Abbildung 3.3 sind der dritte Eigenwert der Struktur und der erste dreifache Eigenwert des Slave-Systems zu erkennen. Beide Eigenwerte liegen im Spektrum dicht zusammen. Werden zwei Eigenwerte des dreifachen Slave-Eigenwerts aus  $\mathbf{F}(\lambda)$  abgespalten, verschieben sich die in der reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^2(\lambda)$  verbliebenen Eigenwerte aufgrund von Rundungsfehlern. In Abbildung 3.4 ist zu erkennen, daß der jetzt einfache Slave-Eigenwert und der in der Nähe befindliche Struktur-Eigenwert in  $\mathbf{F}^2(\lambda)$  dichter zusammenrücken.

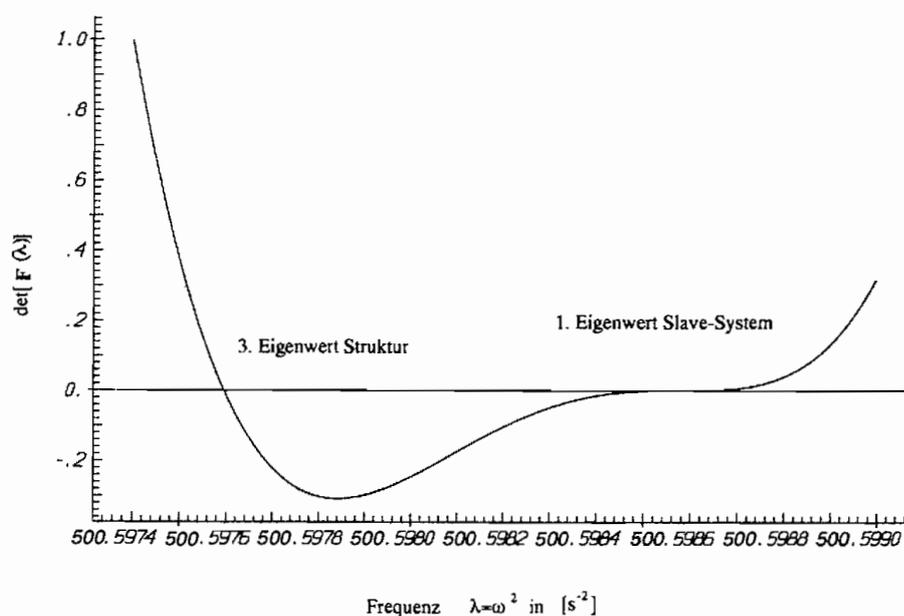


Abbildung 3.3: Nahe beieinanderliegender einfacher Struktur- und dreifacher Slave-Eigenwert

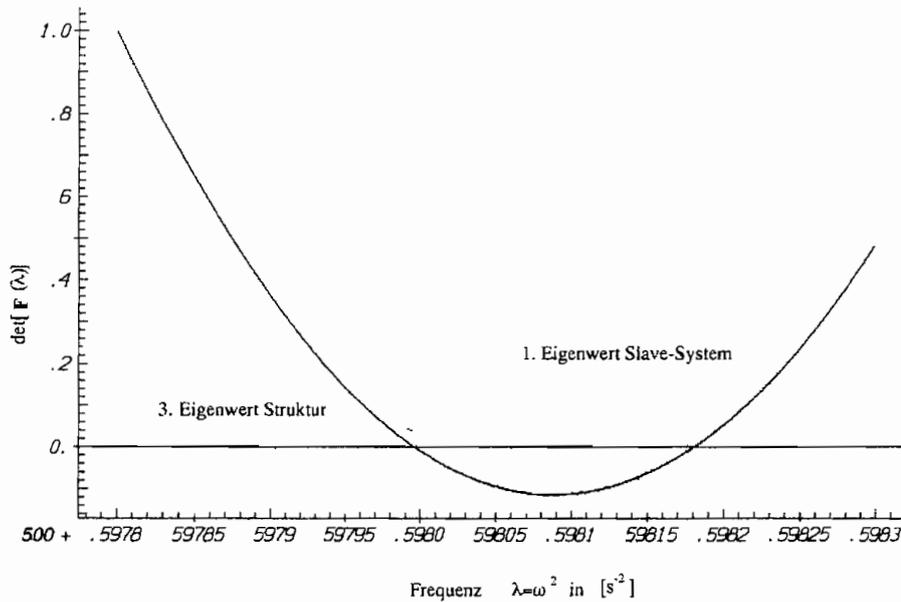


Abbildung 3.4: Einfacher Struktur- und einfacher Slave-Eigenwert nach der Abspaltung von zwei Eigenwerten des dreifachen Slave-Eigenwerts

Es hat sich ebenfalls als numerisch vorteilhaft erwiesen, mehrfache Eigenwerte vor einem benachbarten einfachen Eigenwert abzuspalten, da insbesondere mehrfache Eigenwerte empfindlich auf Rundungsfehler in den Koeffizientenmatrizen reagieren (vgl. Anhang A.4)..

Eine deutliche Verbesserung der Stabilität bei der Reduktion einer, durch die dynamische Kondensation entstandenen, Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  lässt sich durch die Formulierung der Matrix mit dem inversen Parameter  $\zeta = \lambda^{-1}$  erreichen.

### Sukzessive Faktorisierung mit den inversen Eigenwerten

Um die betragsniedrigen Eigenwerte durch die reduzierte Matrix  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$  möglichst genau abzubilden, ist es günstig, die Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}_i^\nu$  bei den niedrigen  $\lambda$ -Potenzen möglichst fehlerfrei zu berechnen. Dies gelingt durch die Formulierung der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  mit Hilfe des inversen Parameters  $\zeta = \lambda^{-1}$ .

Wird die Eigenwertaufgabe

$$\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\lambda + \dots + \mathbf{A}_\rho\lambda^\rho)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.137)$$

durch den Parameter  $\lambda$  dividiert, so gehen die Punkte  $\lambda$  in Punkte  $\zeta = \lambda^{-1}$  über

$$\hat{\mathbf{F}}(\zeta)\mathbf{x} = (\mathbf{A}_\rho + \mathbf{A}_{\rho-1}\zeta + \dots + \mathbf{A}_1\zeta^{\rho-1} + \mathbf{A}_0\zeta^\rho)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (3.138)$$

die Rechts- bzw. Linkseigenvektoren bleiben jedoch gleich.

Die Faktorisierung der Matrix  $\hat{\mathbf{F}}(\zeta)$  erfolgt durch Abspaltung der Eigenwerte  $\zeta_i$ . Nach der Faktorisierung wird die Spektralverschiebung wieder rückgängig gemacht, und es ergibt sich

die Darstellung

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_0^2 \mathbf{X}_{\rho-1} (\mathbf{\Lambda}_{\rho-1} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{X}_{\rho-1}^{-1} \dots \mathbf{X}_2 (\mathbf{\Lambda}_2 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 (\mathbf{\Lambda}_1 - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{X}_1^{-1}. \quad (3.139)$$

Der Vorteil der Reduktion mittels der inversen Eigenwerte liegt in der weniger fehlerhaften Berechnung der Koeffizientenmatrizen bei den niedrigen Potenzen von  $\lambda$  (d.h. bei den hohen Potenzen von  $\zeta = \lambda^{-1}$ ).

Das Schema zur Berechnung der reduzierten Matrix mittels der inversen Eigenwerte sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\rho-1}^2 &= \mathbf{A}_{\rho-1}^1 + \mathbf{A}_{\rho-2}^1 \hat{\mathbf{\Lambda}}_1^{-1} + \dots + \mathbf{A}_1^1 \hat{\mathbf{\Lambda}}_1^{-(\rho-2)} + \mathbf{A}_0^1 \hat{\mathbf{\Lambda}}_1^{-(\rho-1)} \\ \mathbf{A}_{\rho-2}^2 &= \mathbf{A}_{\rho-2}^1 + \mathbf{A}_{\rho-3}^1 \hat{\mathbf{\Lambda}}_1^{-1} + \dots + \mathbf{A}_0^1 \hat{\mathbf{\Lambda}}_1^{-(\rho-2)} \\ &\vdots \\ \mathbf{A}_1^2 &= \mathbf{A}_1^1 + \mathbf{A}_0^1 \hat{\mathbf{\Lambda}}_1^{-1} \end{aligned} \quad (3.140)$$

$$\mathbf{A}_0^2 = \mathbf{A}_0^1 \quad (3.141)$$

mit  $\hat{\mathbf{\Lambda}}_1^{-i} = \mathbf{X}_1 \mathbf{\Lambda}_1^{-i} \mathbf{X}_1^{-1}$ .

Bei der Reduktion mit Hilfe der inversen Eigenwerte werden die Koeffizientenmatrizen der niedrigen  $\lambda$ -Potenzen (d.h. der hohen Potenzen von  $\zeta$ ) durch weniger Rechenoperationen ermittelt, die Matrix  $\mathbf{A}_0$  bleibt bis zum letzten Reduktionsschritt unverändert ( $\mathbf{A}_0^2 = \mathbf{A}_0$ ).

Die Koeffizientenmatrizen bei den niedrigen  $\lambda$ -Potenzen haben, wie bereits erwähnt, einen größeren Einfluß auf die betragsniedrigen Eigenwerte  $\lambda_j$  als die Matrizen bei den hohen  $\lambda$ -Potenzen. Die bei einer kondensierten Matrix dicht zusammenliegenden und daher empfindlichen Eigenwerte des unteren Spektrums werden bei einer Darstellung der Polynommatrix mit dem inversen Parameter  $\lambda^{-1}$ , weniger fehlerhaft berechnet. Da die betragshohen Eigenwerte weiter auseinander liegen und daher weniger empfindlich auf Rundungsfehler in den Koeffizientenmatrizen reagieren, ist die Reduktion mit dem Parameter  $\zeta$  insgesamt stabiler (vgl. Anhang A.4).

Eine möglichst fehlerfreie Berechnung der Koeffizientenmatrizen bei den niedrigen Potenzen von  $\lambda$  ist Voraussetzung für eine genaue Berechnung der betragagniedrigen Eigenwerte und -vektoren. Eine genaue Bestimmung der Linearfaktoren für die unteren Eigenwerte ist dann wichtig, wenn, wie später gezeigt wird (Kapitel 3.6), eine Näherung der Polynommatrix mit den modalen Parametern des unteren Spektrums erfolgen soll.

### Rekursive Faktorisierung

Die Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  des kondensierten Gleichungssystems (3.4) kann unmittelbar aus den rekursiv zu ermittelnden Linearfaktoren

$$\mathbf{X}_\nu \mathbf{D}_\nu(\lambda) \mathbf{X}_\nu^{-1} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_\nu(\lambda) = \lambda \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_\nu; \quad \nu = 1, \dots, \rho \quad (3.142)$$

zusammengesetzt werden.

Sind die modalen Parameter der Originalmatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  bekannt, lassen sich die Originaleigenvektoren durch die Beziehung

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{X}_{\nu-1} \mathbf{D}_{\nu-1}(\lambda_j) \mathbf{X}_{\nu-1}^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda_j) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda_j) \mathbf{X}_1^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{x}}_j; \quad j = 1, \dots, m\rho \quad (3.143)$$

auf die Vektoren der jeweiligen Linearfaktoren transformieren.

Wird vorausgesetzt, daß die Originaleigenvektoren  $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_j$  genau ermittelt wurden, so hängt die Genauigkeit der Vektoren  $\mathbf{x}_j$  alleine von den Eigenschaften der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{X}_{\nu-1} \mathbf{D}_{\nu-1}(\lambda_j) \mathbf{X}_{\nu-1}^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda_j) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda_j) \mathbf{X}_1^{-1} \quad (3.144)$$

ab.

Enthalten die bereits ermittelten Linearfaktoren einen Eigenwert in der Nähe eines abzuspaltenden Eigenwerts  $\lambda_j$ , kann  $\mathbf{T}_j$  schlecht konditioniert sein. Es ist daher sinnvoll, nahe beieinanderliegende Eigenwerte in einem gemeinsamen Linearfaktor zu erfassen.

In Tabelle 3.2 sind die kleinsten Singulärwerte der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}_j$  für die ersten Linearfaktoren jeweils bei einer Reduktionsfolge A1 (siehe Anhang A.4) und einer Anordnung (Reduktionsfolge C)

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_1 &= \text{diag}[\lambda_3, \lambda_{s,1}, \lambda_{s,1}, \lambda_{s,1}] \\ \mathbf{\Lambda}_2 &= \text{diag}[\lambda_4, \lambda_{s,2}, \lambda_{s,2}, \lambda_{s,2}] \\ &\vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{18} &= \text{diag}[\lambda_{20}, \lambda_{s,18}, \lambda_{s,18}, \lambda_{s,18}] \\ \mathbf{\Lambda}_{19} &= \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{21}, \lambda_{22}] \end{aligned} \quad (3.145)$$

dargestellt.

Red.-Schritt $\nu$	Reduktionsfolge A1		Reduktionsfolge C	
	Eigenwert $\lambda_j$	$sv_mx(\mathbf{T}_j)$	Eigenwert $\lambda_j$	$sv_m(\mathbf{T}_j)$
1	0.0 (2)	-	500.597	-
	500.597	-	500.598 (3)	-
	3805.42	-	-	-
2	500.598 (3)	8.4834E-08	3805.4	4.0100E-01
	14644.5	4.1306E-01	3805.5(3)	4.0101E-01
3	3805.5 (3)	3.7692E-07	14644.5	6.0198E-02
	40135.8	1.3612E-01	14646.4(3)	2.0873E-01
4	14646.4 (3)	1.8062E-07	40135.8	9.0535E-02
	90042.3	4.8566E-02	40154.9 (3)	9.0613E-02
5	40154.9 (3)	2.3780E-06	90042.3	6.4571E-02
	177108.1	2.0994E-02	90158.2 (3)	6.4702E-02
6	90158.2 (3)	4.4788E-06	177108.1	3.9306E-02
	317430.8	1.0624E-02	177626.0 (3)	3.9531E-02

Tabelle 3.2: Kleinste Singulärwerte  $sv_m$  der Matrix  $\mathbf{T}_j$  bei den Eigenwerten  $\lambda_j$  (Vielfachheit  $v_j$  in Klammern) bei unterschiedlicher Zusammensetzung der Linearfaktoren  $\mathbf{X}_\nu \mathbf{D}_\nu(\lambda) \mathbf{X}_\nu^{-1}$

### 3.6 Näherung einer Polynommatrix mit einem Teil ihrer Linearfaktoren

Besitzt eine Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  mit der Dimension  $m \times m$  einen Polynomgrad  $\rho > 1$ , läßt sich mit den, in den vorherigen Abschnitten hergeleiteten, Zerlegungssätzen eine Aufteilung des Eigenwertspektrums in einzelne Linearfaktoren der Matrix erreichen.

Durch das Vernachlässigen bestimmter Linearfaktoren kann eine Reduktion des Spektrums und damit eine Verringerung des Polynomgrades von  $\mathbf{F}(\lambda)$  stattfinden. Eine möglichst feine Reduktion einer Polynommatrix durch das Vernachlässigen von Linearfaktoren setzt einen hohen Polynomgrad und/oder eine geringe Dimension der Matrix voraus.

Polynommatrizen mit diesen Eigenschaften ergeben sich bei der exakten dynamischen Kondensation. Die Anwendung des im folgenden dargestellten Näherungsverfahrens auf die Polynommatrizen kondensierter Gleichungssysteme erfolgt in Kapitel 4.

#### 3.6.1 Grundlegende Betrachtungen

Das Vernachlässigen von Linearfaktoren einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  entspricht dem Vorgehen bei der modalen Reduktion eines linearen Gleichungssystems. Das bedeutet zur Approximation einer Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  in einem bestimmten Parameterbereich werden nur einige wenige Eigenformen benutzt.

Zur Reduktion des Polynomgrades von  $\mathbf{F}(\lambda)$  wird das Spektrum der Matrix in einen zu berücksichtigenden und einen zu vernachlässigenden Teil aufgeteilt.

Wird mit Hilfe der sukzessiven Reduktion nach dem Horner Schema (3.107) oder durch die Rekursionsfolge (3.131) ein Teil der Eigenwerte aus dem Spektrum einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  abgespalten, lautet diese nach  $\mu$  Reduktionsschritten

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda) \mathbf{X}_\mu \mathbf{D}_\mu(\lambda) \mathbf{X}_\mu^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda) \mathbf{X}_1^{-1}, \quad (3.146)$$

wobei  $\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\rho-\mu} \mathbf{A}_i^{\mu+1} \lambda^i$  eine gegenüber  $\mathbf{F}(\lambda)$  um  $m\mu$  Eigenwerte reduzierte Matrix ist.

Der Polynomgrad der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  kann reduziert werden, indem ein Teil des Spektrums vernachlässigt wird. Beschreibt  $\mathbf{F}(\lambda)$  die Eigenschaften eines dynamischen Systems, soll die approximierte Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  die Eigenwerte und -formen enthalten, welche das Systemverhalten in einem interessierenden Frequenzbereich ausreichend genau approximieren.

Die genäherte Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  kann prinzipiell auf zwei Arten erzeugt werden:

**1. Abspaltung der zu vernachlässigenden Eigenwerte**

Werden die aus dem Spektrum zu entfernenden Eigenwerte aus der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  abgespalten, enthält die Matrix  $\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)$  das zur Näherung benutzte Eigenwertspektrum.

$$\tilde{\mathbf{F}}(\lambda) = \mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda) \mathbf{F}_r(\lambda). \quad (3.147)$$

$\mathbf{F}_r(\lambda)$  ist eine noch zu bestimmende Restmatrix, die den Fehler, der durch das Vernachlässigen der abgespaltenen Eigenwerte entsteht, berücksichtigt.

Die in der reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)$  verbliebenen Eigenwerte sind mit denen in  $\mathbf{F}(\lambda)$  identisch. Wie in Abschnitt 3.5.3 gezeigt wurde, liefert die Matrix  $\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)$  zu dem Eigenwert  $\lambda_i$  im allgemeinen nicht die gleiche Eigenform wie die Originalmatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$ . Die zur Näherung verwendeten Eigenformen stimmen somit nicht mit denen des abzubildenden Systems überein. Eine Transformation der Original-Eigenvektoren auf die zur Näherung verwendeten Vektoren ist ohne Kenntnis der vernachlässigten Eigenformen nicht möglich. Eine unmittelbare Näherung der Systemeigenschaften mit experimentell ermittelten modalen Parametern kann nicht stattfinden.

Oftmals ist es ausreichend, das Schwingungsverhalten einer Struktur mit einer geringen Anzahl unterer Eigenformen zu beschreiben. Übersteigt die Anzahl der zu vernachlässigenden Eigenwerte die der in  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  verbleibenden, ist eine Approximation in der Form (3.147) unwirtschaftlich, da die in der Näherung nicht zu berücksichtigenden Eigenwerte und -formen berechnet werden müssen.

### 1. Ansatz mit den abgespaltenen Eigenwerten

Mit dem Ansatz

$$\tilde{\mathbf{F}}(\lambda) = \mathbf{F}_r(\lambda) \mathbf{X}_\mu \mathbf{D}_\mu(\lambda_j) \mathbf{X}_\mu^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda_j) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda_j) \mathbf{X}_1^{-1} \quad (3.148)$$

wird die Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  mit Hilfe der abgespaltenen Eigenwerte und -formen genähert. Die Matrix  $\mathbf{F}_r(\lambda)$  soll den Fehler kompensieren, der durch das Vernachlässigen der Eigenwerte und -formen der reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)$  entsteht.

Die modalen Parameter der Eigenwertaufgabe  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  stimmen mit denen für die Originalmatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  überein, wobei das Vorgehen dem bei einer modalen Reduktion entspricht. Die Eigenwerte und -vektoren können für ein dynamisches System sowohl aus einem Rechenmodell als auch aus experimentellen Daten bestimmt werden.

Werden maximal die Hälfte der möglichen Eigenformen zur Näherung benutzt, ist der Rechenaufwand geringer als bei einem Ansatz (3.147).

Wie später gezeigt wird (Kapitel 4), ist es mit Hilfe des Ansatzes (3.148) möglich, das dynamische Verhalten einer Gesamtstruktur in einem interessierenden Frequenzbereich mit wenigen Schwingungsformen einer Teilstruktur ausreichend genau zu beschreiben.

### 3.6.2 Darstellung der Eigenschaften eines dynamischen Systems mittels Linearfaktoren

Die Modalanalyse wird bei linearen Systemdarstellungen angewendet. Durch eine Transformation eines linearen Gleichungssystems in modale Koordinaten findet eine Entkopplung der Gleichungen statt. Die einzelnen Schwingungsformen können getrennt betrachtet und anschließend durch eine Rücktransformation wieder zu einem Gleichungssystem in physikalischen Koordinaten ergänzt werden.

Bei der Zerlegung einer Polynommatrix in ihre Linearfaktoren findet keine Entkopplung der Gleichungen und somit keine Trennung einzelner Schwingungsformen statt. Die einzelnen Linearfaktoren können jeweils als ein geschlossenes Teilsystem betrachtet werden. Die Inversen der Linearfaktoren sind dann Teilübertragungsfunktionen (siehe Abbildung 3.5):

$$\mathbf{H}_j(\lambda) = \mathbf{X}_j \mathbf{D}_j^{-1}(\lambda) \mathbf{X}_j^{-1}; \quad j = 1, \dots, \mu \quad (3.149)$$

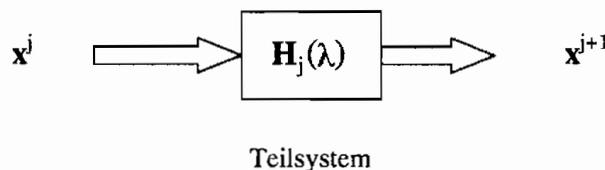


Abbildung 3.5: Linearfaktor als Teilsystem

Das Gleichungssystem

$$\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{u} \tag{3.150}$$

beschreibt das dynamische Verhalten einer aus den Teilübertragungsfunktionen (3.149) zusammengesetzten Struktur. Das erste Teilsystem lautet

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{X}_1\mathbf{D}_1^{-1}(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1}\mathbf{u} \tag{3.151}$$

mit den Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$  und den Ausgangsgrößen  $\mathbf{x}^1$ . Die weiteren Systeme ergeben sich zu

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2^{-1}(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{x}^1 \tag{3.152}$$

$$\mathbf{x}^3 = \mathbf{X}_3\mathbf{D}_3^{-1}(\lambda)\mathbf{X}_3^{-1}\mathbf{x}^2 \tag{3.153}$$

⋮

$$\mathbf{x}^\mu = \mathbf{X}_\mu\mathbf{D}_\mu^{-1}(\lambda)\mathbf{X}_\mu^{-1}\mathbf{x}^{\mu-1}. \tag{3.154}$$

Die Ausgangsgrößen eines Teilsystems  $j$  sind jeweils mit den Eingangsgrößen des folgenden  $j + 1$  identisch. Werden die einzelnen Systeme miteinander gekoppelt, so sind die Eingangsgrößen des ersten Teilsystems die Eingangsgrößen und die Ausgangsgrößen des letzten Teilsystems die Ausgangsgrößen des gekoppelten Systems (siehe Abbildung 3.6).

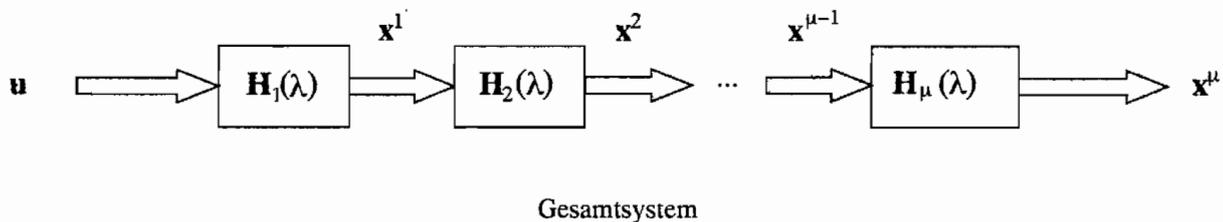


Abbildung 3.6: Kopplung von Linearfaktoren zu einem Gesamtsystem

Da ein Teilsystem keinen Einfluß auf das vorhergehende hat, werden diese auch als rückwirkungsfrei bezeichnet. Die Kopplung einzelner Teilelemente ergibt das Übertragungsverhalten

$$\mathbf{x}^\mu = \mathbf{X}_\mu\mathbf{D}_\mu^{-1}(\lambda)\mathbf{X}_\mu^{-1} \dots \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2^{-1}(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1^{-1}(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1}\mathbf{u}. \tag{3.155}$$

Der Ausdruck (3.155) enthält alle Eigenwerte und -formen des Gesamtsystems. Da die Länge der Eigenvektoren beliebig gewählt werden kann, ist zur vollständigen Beschreibung der Systemgleichungen noch eine Normierung des Gleichungssystems notwendig.

Für ein mechanisches System kann die Normierung durch die statische Beziehung

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}_s^{-1}\mathbf{x}^\mu \tag{3.156}$$

erfolgen.

Für  $\mu = \rho$  entspricht die Kopplung der einzelnen Teilsysteme einer vollständigen Faktorisierung der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$ .

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1}\mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1} \dots \mathbf{X}_\mu\mathbf{D}_\mu(\lambda)\mathbf{X}_\mu^{-1}\mathbf{H}_s\mathbf{x} = \mathbf{u}. \tag{3.157}$$

### Unvollständige Berücksichtigung der Linearfaktoren

Das Weglassen von Linearfaktoren in (3.157) führt zu einer Näherung der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  und kann mit dem Vernachlässigen der Eigenschaften einzelner Teilsysteme bei der Beschreibung des Gesamtsystems verglichen werden. Die Reihenfolge, in der die zur Approximation des Gesamtsystems benutzten Teilsysteme gekoppelt werden, ist dabei beliebig.

Wird eine Matrix aus  $\mu < \rho$  Linearfaktoren zusammengesetzt, lautet die in der Ordnung reduzierte Matrix

$$\tilde{\mathbf{F}}(\lambda) = \mathbf{F}_r(\lambda) \mathbf{X}_\mu \mathbf{D}_\mu(\lambda) \mathbf{X}_\mu^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda) \mathbf{X}_1^{-1}. \quad (3.158)$$

Zur Faktorisierung der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  müssen die zu berücksichtigenden modalen Parameter berechnet und eine geeignete Normierungsmatrix  $\mathbf{F}_r(\lambda)$  bestimmt werden. Enthält die reduzierte Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mu+1}(\lambda)$  die zu vernachlässigenden Eigenwerte und -formen, lassen sich mit dem konstanten Ansatz

$$\mathbf{F}_r = \tilde{\mathbf{F}}^{\mu+1}(\lambda) = \mathbf{F}^{\mu+1}(0) \quad (3.159)$$

die statischen Anteile der nicht berücksichtigten Linearfaktoren erfassen; die Systembeschreibung genügt der Forderung nach statischer Genauigkeit einer Struktur (vgl. Abschnitt 2.4).

Durch eine Erhöhung des Ansatzgrades der Matrix  $\mathbf{F}_r(\lambda)$  kann das Spektrum der reduzierten Polynommatrix  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  um entsprechend viele Eigenwerte erweitert und die Genauigkeit der Näherung in einem bestimmten (Frequenz-)Bereich verbessert werden. Je nach Wahl von  $\mathbf{F}_r(\lambda)$  können jedoch zusätzlich physikalisch nicht deutbare Eigenfrequenzen im Spektrum von  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  auftreten. Liegen diese innerhalb des interessierenden Spektrums, müssen sie von den eigentlichen Eigenwerten des Systems unterschieden werden.

### 3.6.3 Ermittlung der Linearfaktoren

Durch die unvollständige Berücksichtigung der Linearfaktoren einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  läßt sich der Grad der Matrix reduzieren. Die Approximation einer Polynommatrix mit einem Teil ihres Eigenwertspektrums setzt die Kenntnis der zur Näherung benutzten Eigenwerte und -vektoren voraus. Aus den modalen Parametern können dann die Linearfaktoren der Matrix berechnet werden. Die Normierung der Faktoren geschieht durch die Normierungsmatrix  $\mathbf{F}_r(\lambda)$ .

Bei Berücksichtigung von  $\mu < \rho$  Linearfaktoren ergibt sich die Näherung

$$\tilde{\mathbf{F}}(\lambda) = \mathbf{F}_r(\lambda) \mathbf{X}_\mu \mathbf{D}_\mu(\lambda) \mathbf{X}_\mu^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda) \mathbf{X}_1^{-1}. \quad (3.160)$$

Die Ermittlung der Linearfaktoren einer Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  kann erfolgen durch:

- Sukzessive Abspaltung der Eigenwerte aus der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$
- Rekursive Ermittlung der Linearfaktoren.

Das Vorgehen zur Bestimmung der Normierungsmatrix  $\mathbf{F}_r(\lambda)$  ist von der zur Berechnung der Linearfaktoren verwendeten Methode abhängig.

**Sukzessive Faktorisierung**

Bei einer sukzessiven Faktorisierung einer Polynommatrix mit dem Horner-Schema (3.107) ist es erforderlich, in jedem Reduktionsschritt  $\nu$  aus einer Matrix  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$  eine neue, um die abgespaltenen Eigenwerte verminderte, Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  zu berechnen. Neben den abzuspaltenden Eigenwerten und -vektoren müssen die Koeffizientenmatrizen der Polynommatrix bekannt sein.

Nach  $\mu$  Reduktionsschritten ergibt sich eine teilweise faktorisierte Matrix

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)\mathbf{X}_\mu\mathbf{D}_\mu(\lambda)\mathbf{X}_\mu^{-1} \dots \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1}. \tag{3.161}$$

Die Matrix  $\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)$  ist aus der Reduktion bekannt, so daß unmittelbar die Normierungsmatrix

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}^{\mu+1}(0) = \mathbf{A}_0^{\mu+1} \tag{3.162}$$

angegeben werden kann, welche den statischen Zustand des Systems genau wiedergibt.

Die Normierung der Linearfaktoren mit der Matrix  $\mathbf{A}_0^{\mu+1}$  setzt voraus, daß Eigenwerte bei Null in den Linearfaktoren erfaßt werden.

Eine Verbesserung der Genauigkeit von  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  kann durch die Berücksichtigung weiterer Glieder der reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)$  erreicht werden:

$$\mathbf{F}_r(\lambda) = \mathbf{A}_0^{\mu+1} + \mathbf{A}_1^{\mu+1}\lambda. \tag{3.163}$$

In dem Ansatz (3.163) ist eine singuläre Matrix  $\mathbf{A}_0^{\mu+1}$  zulässig, vorausgesetzt  $\mathbf{A}_1^{\mu+1}$  ist regulär.

**Rekursive Faktorisierung**

Bei einer rekursiven Bestimmung der Linearfaktoren müssen lediglich die zur Näherung benutzten Eigenwerte und -vektoren einer Polynommatrix bekannt sein. Die Vektoren eines Linearfaktors werden durch eine Transformation aus den bereits ermittelten Linearfaktoren nach der Rekursionsfolge (3.131) berechnet.

Die Koeffizientenmatrizen der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  müssen zur Ermittlung der Linearfaktoren nicht explizit vorliegen, es ist jedoch eine geeignete Normierung der Eigenvektoren notwendig. Zur vollständigen Bestimmung einer genäherten Matrix (3.160) muß daher eine Normierungsmatrix  $\mathbf{F}_r(\lambda)$  bestimmt werden.

Besitzt die Originalmatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  keine Nullstellen bei  $\lambda = 0$ , ist  $\mathbf{F}(0)$  regulär und es läßt sich der statische Zusammenhang

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}^{\mu+1}(0) = \mathbf{F}(0)\mathbf{X}_\mu\mathbf{D}_\mu^{-1}(0)\mathbf{X}_\mu^{-1} \dots \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2^{-1}(0)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1^{-1}(0)\mathbf{X}_1^{-1} \quad (3.164)$$

angeben.

Beschreibt die Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  ein System, das mindestens einen Eigenwert bei  $\lambda = 0$  besitzt, ist die Matrix  $\mathbf{F}(0)$  singulär, die Bestimmung von  $\mathbf{F}_r$  kann dann nicht mehr nach der Formel (3.164) erfolgen.

Durch Abspaltung der Eigenwerte bei Null aus der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  im ersten Reduktionsschritt kann eine reguläre Matrix  $\mathbf{F}^2(\lambda)$  erzeugt werden.

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{F}^2(\lambda)\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1} \quad (3.165)$$

Zur Normierung der genäherten Polynommatrix läßt sich der statische Zusammenhang

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}^2(0)\mathbf{X}_\mu\mathbf{D}_\mu^{-1}(0)\mathbf{X}_\mu^{-1} \dots \mathbf{X}_3\mathbf{D}_3^{-1}(0)\mathbf{X}_3^{-1}\mathbf{X}_2\mathbf{D}_2^{-1}(0)\mathbf{X}_2^{-1} \quad (3.166)$$

angeben (vgl. Anhang A.3).

Weitere Glieder der Koeffizientenmatrizen von  $\mathbf{F}_r(\lambda)$  lassen sich durch die im Anhang A.3 angegebenen Formeln bestimmen.

Das gezeigte Vorgehen setzt die Kenntnis sämtlicher Koeffizientenmatrizen von  $\mathbf{F}(\lambda)$  voraus. Eine günstigere Vorgehensweise stellt die Faktorisierung der singulären Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  mit Hilfe der inversen Eigenwerte dar, es ist dann eine Normierung der zur Näherung benutzten Linearfaktoren bei Kenntnis von zwei Koeffizientenmatrizen der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  möglich.

### Rekursive Faktorisierung mit den inversen Eigenwerten

Im Falle einer singulären Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  ist es günstig die Linearfaktoren der genäherten Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  statt mit einer konstanten Matrix  $\mathbf{F}_r$  mit einer linearen Polynommatrix

$$\mathbf{F}_r(\lambda) = \mathbf{F}_{r,0} + \mathbf{F}_{r,1}\lambda \quad (3.167)$$

zu normieren.

Es wird der folgende Näherungsansatz gemacht:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\lambda) = \mathbf{F}_r(\lambda)\mathbf{X}_{\mu-1}\mathbf{D}_{\mu-1}(\lambda)\mathbf{X}_{\mu-1}^{-1} \dots \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1}. \quad (3.168)$$

Zur Bestimmung der Matrix  $F_r(\lambda)$  müssen die ersten beiden Koeffizientenmatrizen der Ausgangsmatrix  $F(\lambda)$ , d.h.  $A_0$  und  $A_1$ , bekannt sein. Die Faktorisierung der Polynommatrix  $F(\lambda)$  erfolgt mit Hilfe der inversen Eigenwerte. Die Matrix  $F(\lambda)$  lautet mit dem inversen Parameter  $\zeta = \lambda^{-1}$

$$\hat{F}(\zeta) = A_\rho + \dots + A_1 \zeta^{\rho-1} + A_0 \zeta^\rho. \tag{3.169}$$

Werden aus der Matrix  $\hat{F}(\zeta)$   $\mu - 1$  Linearfaktoren mit den zur Näherung verwendeten Eigenwerten  $\zeta_j = \lambda_j^{-1}$  abgespalten, erhält man die Matrix

$$\hat{F}(\zeta) = (A_\rho^\mu + \dots + A_1^\mu \zeta^{\rho-\mu} + A_0^\mu \zeta^{\rho-\mu+1}) X_{\mu-1} D_{\mu-1}^{-1}(\lambda) X_{\mu-1}^{-1} \dots X_1 D_1^{-1}(\lambda) X_1^{-1}, \tag{3.170}$$

bzw. wieder mit dem Parameter  $\lambda$

$$F(\lambda) = (A_0^\mu + A_1^\mu \lambda + \dots + A_\rho^\mu \lambda^{\rho-\mu+1}) X_{\mu-1} D_{\mu-1}(\lambda) X_{\mu-1}^{-1} \dots X_1 D_1(\lambda) X_1^{-1}. \tag{3.171}$$

Die Näherung der reduzierten Matrix  $F^\mu(\lambda)$  erfolgt durch die ersten beiden Koeffizientenmatrizen  $A_0^\mu$  und  $A_1^\mu$ . Die Matrix  $A_0^\mu$  ist gegenüber der Ausgangsmatrix unverändert

$$A_0^\mu = A_0. \tag{3.172}$$

Zur Berechnung der Koeffizientenmatrix  $A_1^\mu$  aus  $\hat{F}(\zeta)$  nach dem Reduktionsschema (3.107) werden lediglich die Matrix  $A_0$  und die abgespaltenen Eigenwerte und -vektoren benötigt, nach  $\mu$  Schritten ergibt sich

$$A_1^\mu = A_1 + A_0 \sum_{\nu=1}^{\mu} X_\nu \Lambda_\nu^{-1} X_\nu^{-1}. \tag{3.173}$$

Damit erhält man eine Normierungsvorschrift

$$F_r(\lambda) = A_0 + \left( A_1 + A_0 \sum_{\nu=1}^{\mu} X_\nu \Lambda_\nu^{-1} X_\nu^{-1} \right) \lambda. \tag{3.174}$$

### Vergleich der Vorgehensweisen

Die sukzessive Bestimmung der zur Näherung einer Matrix  $F(\lambda)$  benutzten Linearfaktoren setzt die Kenntnis sämtlicher Koeffizientenmatrizen  $A_i$  der Polynommatrix voraus. Da in jedem Reduktionsschritt  $\nu$  die gesamte Matrix  $F(\lambda)$  vorliegt, lassen sich die abgespaltenen Linearfaktoren mit Hilfe der reduzierten Matrix  $F^{\mu+1}(\lambda)$  normieren. Für hohe Polynomgrade kann die Matrix  $F(\lambda)$  schlecht konditioniert sein, die Auswertung der Polynommatrix bei der sukzessiven Abspaltung der zur Näherung benutzten Eigenwerte führt zu Rundungsfehlern. Die Stabilität der sukzessiven Reduktion einer Matrix  $F(\lambda)$  ist von der Dichte und der Verteilung des Spektrums sowie von der Reihenfolge abhängig in der die Eigenwerte abgespalten werden.

Zur rekursiven Ermittlung der zur Näherung von  $\mathbf{F}(\lambda)$  verwendeten Linearfaktoren müssen lediglich die Eigenwerte und -vektoren des jeweiligen Linearfaktors bekannt sein. Zur Normierung der Linearfaktoren muß noch eine geeignete Matrix gefunden werden. Besitzt die Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  keine Eigenwerte bei Null, kann die Matrix  $\mathbf{F}(0)$  zur Normierung der Linearfaktoren verwendet werden. Erfolgt bei einer singulären Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  die Faktorisierung mit Hilfe der inversen Eigenwerte, müssen mindestens die ersten beiden Koeffizientenmatrizen von  $\mathbf{F}(\lambda)$  zur Normierung der genäherten Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  bekannt sein.

In Abbildung 3.7 ist der Ablauf bei der Näherung einer Polynommatrix mit Hilfe von sukzessiv abgespaltenen und rekursiv ermittelten Linearfaktoren schematisch dargestellt.

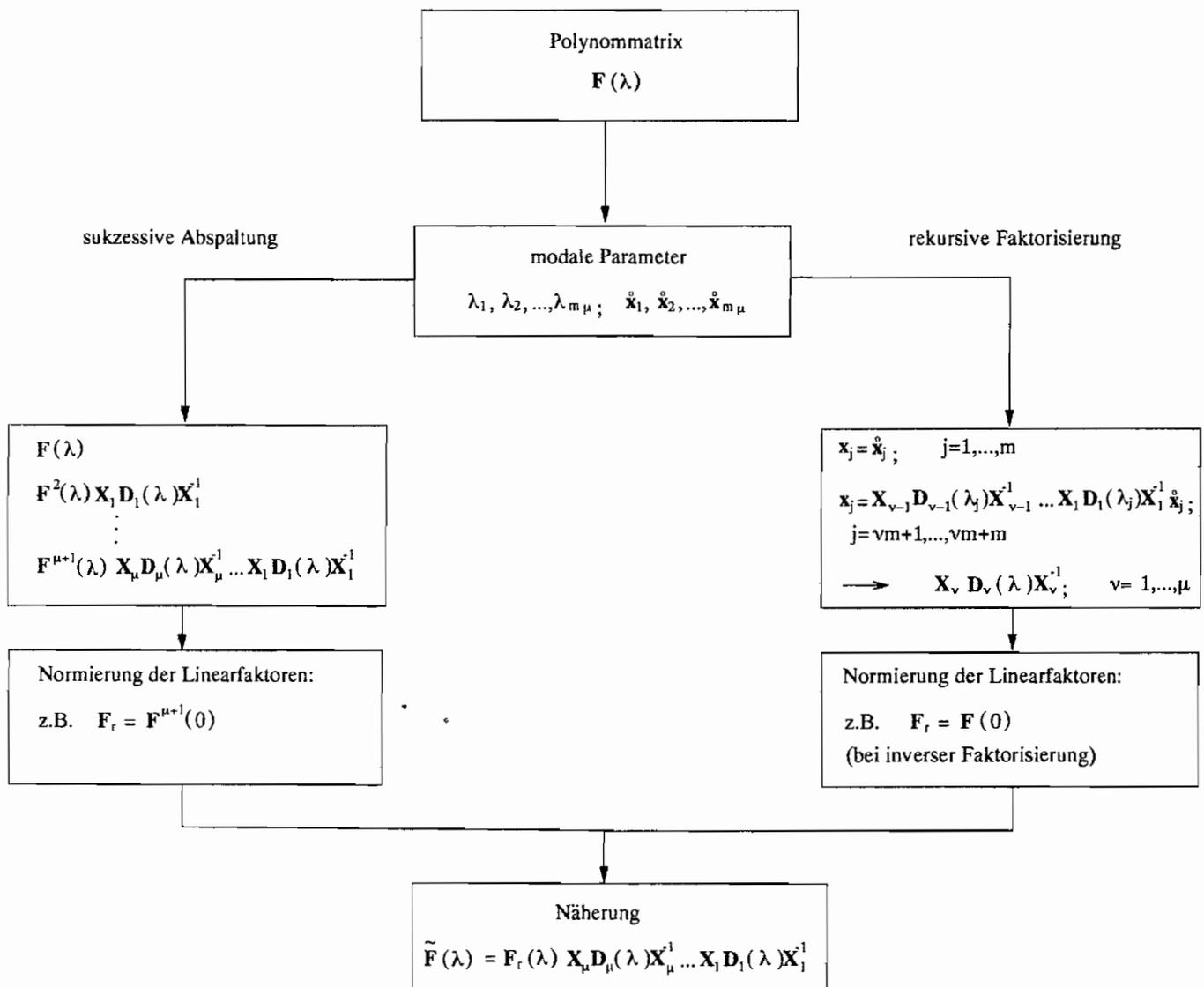


Abbildung 3.7: Näherung einer Polynommatrix mit Hilfe ihrer Linearfaktoren

### 3.6.4 Näherung einer Polynommatrix am Beispiel der dynamischen Steifigkeitsmatrix eines kondensierten Gleichungssystems

Anhand der Formulierung (3.4) eines exakt kondensierten Gleichungssystems

$$\frac{\mathbf{F}(\lambda)}{d_s(\lambda)} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \lambda + \mathbf{A}_2 \lambda^2 + \dots + \mathbf{A}_\rho \lambda^\rho}{b_0 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + \dots + b_{\rho-1} \lambda^{\rho-1}} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3.175)$$

soll die Tauglichkeit von Linearfaktoren zur Approximation einer Polynommatrix überprüft werden.

Zur Näherung der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  werden  $\mu < \rho$  Linearfaktoren mit den  $m\mu$  unteren Eigenwerten des Spektrums aus der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  abgespalten.

Nach  $\mu$  Reduktionsschritten lautet die Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda) \mathbf{X}_\mu \mathbf{D}_\mu(\lambda) \mathbf{X}_\mu^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda) \mathbf{X}_1^{-1} \quad (3.176)$$

mit einer reduzierten Matrix

$$\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda) = \mathbf{A}_0^{\mu+1} + \mathbf{A}_1^{\mu+1} \lambda + \dots + \mathbf{A}_{\rho-\mu}^{\mu+1} \lambda^{\rho-\mu}. \quad (3.177)$$

Die Matrizen

$$\mathbf{D}_\nu(\lambda) = \mathbf{A}_\nu - \mathbf{I} \lambda; \quad \nu = 1, \dots, \mu \quad (3.178)$$

enthalten  $\mu$  Eigenwerte der Struktur, sowie  $(\mu - m)$  dreifache Eigenwerte des Slave-Systems, in den Modalmatrizen  $\mathbf{X}_\nu$  sind die jeweils aus den Matrizen  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$  abgespaltenen Vektoren enthalten.

Die reduzierte Matrix  $\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)$  enthält die zu vernachlässigenden Eigenformen der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$ , hier die oberen Eigenschwingungen der Struktur. Die zur Beschreibung des betrachteten Frequenzbereichs wesentlichen Eigenformen sind in den Linearfaktoren  $\mathbf{X}_\nu \mathbf{D}_\nu(\lambda) \mathbf{X}_\nu^{-1}$  enthalten.

Es wird der folgende Ansatz gemacht:

$$\tilde{\mathbf{F}}(\lambda) = \tilde{\mathbf{F}}^{\mu+1}(\lambda) \mathbf{X}_\mu \mathbf{D}_\mu(\lambda) \mathbf{X}_\mu^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda) \mathbf{X}_1^{-1}. \quad (3.179)$$

Die Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mu+1}(\lambda)$  stellt eine Näherung der Matrix  $\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)$  dar und soll den Fehler kompensieren, der durch das Vernachlässigen der abgespaltenen Eigenwerte entsteht.

Die Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mu+1}(\lambda)$  kann von beliebigem Ansatzgrad sein, die Forderung nach statischer Genauigkeit der approximierten Gleichungen wird mit dem Ansatz

$$\tilde{\mathbf{F}}^{\mu+1} = \mathbf{F}^{\mu+1}(0) = \mathbf{A}_0^{\mu+1} \quad (3.180)$$

erfüllt.

Durch die Berücksichtigung einer weiteren Koeffizientenmatrix der reduzierten Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mu+1}(\lambda)$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{\mu+1}(\lambda) = \mathbf{A}_0^{\mu+1} + \mathbf{A}_1^{\mu+1}\lambda \quad (3.181)$$

erhöht sich die Abbildungsgenauigkeit der Näherung  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  im unteren Frequenzbereich (vgl. Tabellen 3.4 und 3.5), es können jedoch zusätzliche Eigenwerte im betrachteten Frequenzbereich auftreten, welche von den gesuchten Eigenwerten unterschieden werden müssen. Es ist zu beachten, daß sich bei einem Ansatz (3.181) der Polynomgrad der genäherten Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  um eins erhöht.

Ein in zehn finite Elemente unterteilter Balken ( $E = 1 \frac{N}{m^2}$ ,  $l = 1m$ ,  $A = 1m^2$ ,  $\rho_d = 1 \frac{kg}{m^3}$ ) wird auf die Randkoordinaten kondensiert. Die Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  im Zähler des kondensierten Systems

$$\frac{\mathbf{F}(\lambda)}{d_s(\lambda)} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3.182)$$

hat die Dimension  $m = 4$  und ist vom Grad  $\rho = 19$ .

Zur Näherung werden jeweils die unteren  $\mu m + m$  Eigenformen des freischwingenden Balkens und die unteren  $\mu m$  Slave-Eigenformen benutzt. Werden die ersten beiden Spalten und Zeilen aus der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  gestrichen, erfüllt die Systemmatrix die Randbedingungen des einseitig eingespannten Balkens.

Die Abspaltung der Eigenwerte geschieht nach der Reduktionsfolge A3 in Tabelle A.5 im Anhang. Die zur Näherung der Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  benutzten Eigenwerte sind in der Tabelle 3.3 angegeben.

Es ist anzumerken, daß im jeweils letzten Reduktionsschritt  $\nu = \mu$  vier Struktur-Eigenwerte abgespalten wurden, d.h. bei einem Ansatz  $\mu = 1$  werden die ersten Eigenwerte der Struktur  $\lambda_1$  bis  $\lambda_4$ , bei einem Ansatz  $\mu = 2$  die Struktur-Eigenwerte  $\lambda_1$  bis  $\lambda_5$  sowie der erste dreifache Eigenwert der Slave-Struktur  $\lambda_{s,1}$  berücksichtigt. Für  $\mu = 18$  werden sämtliche Struktur- und Slave-Eigenformen zur Berechnung benutzt, womit die ermittelten Eigenwerte denen der FEM-Lösung entsprechen.

Die genäherten Eigenwerte sind in den Tabellen 3.4 und 3.5 jeweils für den Ansatz (3.180) und (3.181) dargestellt. Es läßt sich erkennen, daß mit einer zunehmenden Anzahl in der Näherung berücksichtigter Linearfaktoren  $\nu$  die Abbildungsgenauigkeit zunimmt.

Bei einer Ermittlung der Eigenwerte mit den Näherungsansätzen (3.180) und (3.181) zeigt sich, daß jeweils die unteren Eigenfrequenzen gut approximiert werden. Für eine gleiche Anzahl verwendeter Eigenformen wird durch die zusätzliche Berücksichtigung der zweiten Koeffizientenmatrix  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mu+1}(\lambda) = \mathbf{A}_0^{\mu+1} + \mathbf{A}_1^{\mu+1}\lambda$  eine Steigerung der Genauigkeit erreicht (vgl. Tabellen 3.4 und 3.5), wobei sich der Polynomgrad der Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}$  um eins erhöht hat.

Vergleicht man nur die Ergebnisse für gleiche Polynomgrade der Matrizen  $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$  mit den unterschiedlichen Näherungsansätzen (z.B.  $\mu = 2$  Tabelle 3.4 und  $\mu = 1$  Tabelle 3.5), läßt

sich erkennen, daß insbesondere die unteren Eigenwerte durch den Ansatz (3.181) besser approximiert werden.

Die mit einem unvollständigen Ansatz berechneten Eigenwerte nähern den genauen Eigenwert ( $\nu = 18$ ) sowohl von oben als auch von unten an. Bei den Ansätzen, die Slave-Eigenformen zur Näherung der Struktur verwenden (vgl. Kapitel 2.3.2), findet durch das nicht Berücksichtigen der Schwingungsformen eine Versteifung der Struktur statt, dem System wird ein Teil seiner Beweglichkeit genommen, die Eigenwerte unterhalb der höchsten noch berücksichtigten Slave-Eigenfrequenz werden gegenüber dem vollständigen Ansatz zu hoch ermittelt. Mit der Berücksichtigung der genauen Eigenwerte der Struktur wird diese Versteifung wieder aufgehoben, das System wird wieder "weicher".

Struktur-Eigenwerte $\lambda_k$							
0.00	0.00	500.597	3805.42	14644.5	40135.8	90042.3	177108.1
317430.8	529547.6	817223.1	1441242.4				
Slave-Eigenwerte $\lambda_{s,k}$							
-	-	-	-	500.598	3805.52	14646.4	40154.9
90158.2	177626.0	319274.8	534936.8				

Tabelle 3.3: Zur Näherung der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  benutzte Eigenwerte

$\mu$	Eigenwerte $\lambda_i$									
1	12.887	802.73								
2	12.246	495.85	5936.15							
3	12.401	480.69	3853.61	21301.7						
4	12.345	488.04	3778.39	14743.1	55324.6					
5	12.370	484.18	3827.80	14563.7	40310.7	119154.6				
6	12.357	486.36	3796.03	14706.0	39985.8	90341.4	227119.7			
7	12.365	485.04	3816.84	14601.0	40278.1	89836.9	177670.8	396772.5		
8	12.360	485.87	3802.99	14676.1	40045.3	90326.7	177000.3	318615.3	642861.7	
9	12.363	485.23	3814.09	14612.1	40259.4	89822.5	177887.6	317648.7	532325.1	
18	12.362	485.55	3808.48	14645.1	40145.4	90100.2	177366.4	318348.1	532219.7	

Tabelle 3.4: Eigenwerte des einseitig eingespannten Balkens mit dem Ansatz  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mu+1}(\lambda) = \mathbf{A}_0^{\mu+1}$ , bei Berücksichtigung der ersten  $\mu m + m$  Struktur- und  $\mu m$  (dreifachen) Slave-Eigenformen (vollständiger Ansatz:  $\mu = 18$ )

$\mu$	Eigenwerte $\lambda_i$									
1	12.364	373.04								
2	12.362	486.28	3692.71							
3	12.362	485.52	3828.22	12254.4						
4	12.362	485.54	3807.40	14918.2	29138.3					
5	12.362	485.55	3808.45	14633.0	40154.9	57761.6				
6	12.362	485.54	3808.57	14645.4	40061.3	82702.2	241812.6			
7	12.362	485.55	3808.43	14645.8	40149.8	89597.3	183886.4	414773.1		
8	12.362	485.55	3808.51	14644.6	40147.7	90128.2	174130.0	321759.5	663363.9	
9	12.362	485.55	3808.46	14645.6	40141.5	90114.8	177467.6	337405.0	534696.4	
18	12.362	485.55	3808.48	14645.1	40145.4	90100.2	177366.4	318348.1	532219.7	

Tabelle 3.5: Eigenwerte des einseitig eingespannten Balkens mit dem Ansatz  $\tilde{\mathbf{F}}^{\mu+1}(\lambda) = \mathbf{A}_0^{\mu+1} + \mathbf{A}_1^{\mu+1}\lambda$ , bei Berücksichtigung der ersten  $\mu m + m$  Struktur- und  $\mu m$  (dreifachen) Slave-Eigenformen (vollständiger Ansatz:  $\mu = 18$ )

# Kapitel 4

## Anwendung der Faktore zerlegung auf das kondensierte Gleichungssystem

Es wird ein Verfahren zur Darstellung eines kondensierten Gleichungssystems mit einer minimalen Anzahl von Zustandsraumvariablen hergeleitet. Zur Berechnung der reduzierten Gleichungen werden lineare Polynommatrizen (Linearfaktoren) mit Hilfe von modalen Parametern rekursiv erzeugt und aufmultipliziert.

Die Kondensation erfolgt an Substrukturen, eine Aufwandsverringerung gelingt, ähnlich wie bei der Modalanalyse, durch das Weglassen bestimmter Eigenformen eines Teilschwingungssystems. Die Darstellung eines Teilsystems und die des Gesamtsystems finden ausschließlich in physikalischen Koordinaten statt.

Da sowohl die Eigenformen der Substruktur als auch die der Slave-Struktur eines Teilsystems zur Approximation des Gesamtsystemverhaltens benutzt werden, läßt sich das Verfahren im Rahmen der Substrukturtechnik den hybriden Methoden zuordnen.

Es wird wie folgt vorgegangen:

- Das bei der dynamischen Kondensation entstandene Gleichungssystem wird mit Hilfe einer gebrochenrationalen Polynommatrix dargestellt. Es werden das Eigenwertspektrum der Matrix sowie die Eigenschaften der Darstellungsform untersucht.
- Durch die Aufspaltung des Spektrums der gebrochenrationalen Polynommatrix läßt sich eine Formulierung des kondensierten Gleichungssystems mit Hilfe von Polynommatrizen minimaler Ordnung angeben. Die Systemdarstellung kann durch die sukzessive Reduktion einer Polynommatrix oder durch die rekursive Ermittlung von Linearfaktoren der Matrix erzeugt werden.
- Es werden Möglichkeiten zur Näherung der Polynommatrizen minimaler Ordnung mit

Hilfe ihrer Linearfaktoren aufgezeigt sowie geeignete Normierungsvorschriften angegeben.

- Durch die Beschreibung des dynamischen Verhaltens einer Struktur mit Hilfe von Polynommatrizen, welche durch die Ermittlung ihrer Linearfaktoren bestimmt werden, wird die Formulierung einer Kondensationsvorschrift möglich.
- Die Kopplung der kondensierten Teilsysteme zu einem Gesamtsystem erfolgt mittels unkondensierter finiter Elemente.
- Anhand einfacher Strukturen wird die Eignung des kondensierten Gleichungssystems zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens einer Struktur verifiziert.

## 4.1 Darstellung eines kondensierten Gleichungssystems mit Hilfe einer gebrochenrationalen Polynommatrix

### 4.1.1 Herleitung der gebrochenrationalen Steifigkeitsmatrix eines kondensierten Gleichungssystems

Es soll die im Kapitel 3.5 hergeleitete Faktorenerlegung einer Polynommatrix auf die dynamische Steifigkeitsmatrix der exakt kondensierten Bewegungsgleichungen (2.3) angewendet werden. Dazu muß die kondensierte Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{D}_k(\lambda)$  in Form einer (unecht)gebrochenrationalen Matrix dargestellt werden.

Die Anwendung der dynamischen Kondensation auf die Systemdarstellung einer schwingungsfähigen Struktur ergibt ein in der Dimension reduziertes Gleichungssystem

$$\mathbf{D}_k(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (4.1)$$

$\mathbf{x}$  ist der Vektor der Master-Koordinaten,  $\mathbf{f}$  der Vektor der an den Master-Freiheitsgraden angreifenden Kräfte und Momente.

Die exakte dynamische Kondensation führt auf eine Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{D}_k(\lambda) = \left[ \mathbf{D}_{mm}(\lambda) - \mathbf{D}_{ms}(\lambda)\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)\mathbf{D}_{sm}(\lambda) \right]. \quad (4.2)$$

Eine näherungsweise Berechnung der kondensierten Gleichungen (4.1) durch die unvollständige Berücksichtigung von Eigenformen der Slave-Struktur läßt sich mittels der Formulierung

$$\mathbf{D}_k(\lambda) = \left[ \mathbf{K}_G - \lambda\mathbf{M}_G + \lambda^2\mathbf{G}(\mathbf{\Lambda}_s - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{G}^T \right] \quad (4.3)$$

erreichen (vgl. Kapitel 2.3.2).

Die Elemente  $d_{ij}$  der Matrix  $\mathbf{D}_k(\lambda)$  sollen nun mit Hilfe der (unecht)gebrochenrationalen Funktionen

$$d_{ij} = \frac{\sum_{k=0}^{\rho} p_{ij,k} \lambda^k}{\sum_{l=0}^{\rho-1} b_l \lambda^l}, \quad i, j = 1, \dots, m \quad (4.4)$$

dargestellt werden. Dazu ist eine Inversion der dynamischen Steifigkeitsmatrix des Slave-Systems  $\mathbf{D}_{ss}(\lambda)$  notwendig.

Die inverse Matrix  $\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)$  kann mit Hilfe der modalen Parameter des Slave-Systems formuliert werden.

$$\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda) = (\mathbf{K}_{ss} - \lambda \mathbf{M}_{ss})^{-1} = \mathbf{X}_s (\mathbf{A}_s - \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}_s^T. \quad (4.5)$$

Mit Hilfe der adjungierten Matrix  $\mathbf{D}_{ss,adj}(\lambda)$  und der Determinante  $d_s(\lambda) = \det[\mathbf{D}_{ss}(\lambda)]$  lautet (4.5)

$$\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda) = \frac{\mathbf{X}_s (\mathbf{A}_s - \lambda \mathbf{I})_{adj} \mathbf{X}_s^T}{d_s(\lambda)} = \frac{\begin{pmatrix} d_{sa,1}(\lambda) & & & \mathbf{0} \\ & d_{sa,2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & d_{sa,s}(\lambda) \end{pmatrix}}{d_s(\lambda)}. \quad (4.6)$$

$\lambda_{s,1} < \lambda_{s,2} < \dots < \lambda_{s,s}$  sind die Eigenwerte des Slave-Systems und  $d_s(\lambda)$  ist das charakteristische Polynom des Slave-Systems. Die Elemente  $d_{sa,i}(\lambda)$  der diagonalbesetzten Matrix  $(\mathbf{A}_s - \lambda \mathbf{I})_{adj}$  setzen sich aus Linearfaktoren

$$\begin{aligned} d_{sa,1}(\lambda) &= (\lambda_{s,2} - \lambda)(\lambda_{s,3} - \lambda) \dots (\lambda_{s,s} - \lambda) \\ d_{sa,2}(\lambda) &= (\lambda_{s,1} - \lambda)(\lambda_{s,3} - \lambda) \dots (\lambda_{s,s} - \lambda) \\ &\vdots \\ d_{sa,s}(\lambda) &= (\lambda_{s,1} - \lambda)(\lambda_{s,2} - \lambda) \dots (\lambda_{s,s-1} - \lambda) \end{aligned}$$

mit  $s - 1$  Nullstellen  $\lambda_{s,i}$  zusammen.

Werden die Summenterme der dynamischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{D}_k(\lambda)$  auf einen gemeinsamen Nenner gebracht, ergibt sich der Ausdruck

$$\mathbf{D}_k(\lambda) = \frac{\mathbf{D}_{mm}(\lambda) d_s(\lambda) - \mathbf{D}_{ms}(\lambda) \mathbf{X}_s (\mathbf{A}_s - \lambda \mathbf{I})_{adj} \mathbf{X}_s^T \mathbf{D}_{sm}(\lambda)}{d_s(\lambda)} = \frac{\mathbf{F}(\lambda)}{d_s(\lambda)}. \quad (4.7)$$

Das kondensierte Gleichungssystem (4.1) kann nun in Form einer gebrochenrationalen Polynommatrix dargestellt werden.

$$\frac{\mathbf{F}(\lambda)}{d_s(\lambda)} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{A}_{F,0} + \mathbf{A}_{F,1} \lambda + \dots + \mathbf{A}_{F,\rho} \lambda^\rho}{b_0 + b_1 \lambda + \dots + b_{\rho-1} \lambda^{\rho-1}} \mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (4.8)$$

(Um Verwechslungen mit den Koeffizientenmatrizen der später verwendeten Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  zu vermeiden, werden die Koeffizientenmatrizen der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  im weiteren zusätzlich mit dem Index  $F$  versehen.)

Das charakteristische Polynom der Slave-Struktur  $d_s(\lambda)$  ist vom Grad  $\rho - 1 = s$ ; die Zählermatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  besitzt den Polynomgrad  $\rho$ , quadratische Koeffizientenmatrizen  $\mathbf{A}_{F,j}$  der Dimension  $m$  und die Ordnung  $m\rho$ .

### 4.1.2 Das Spektrum des kondensierten Gleichungssystems

Es wird das Spektrum der kondensierten Gleichungen betrachtet, die sich mit Hilfe der gebrochenrationalen Matrix (4.8) beschreiben lassen.

Das Gleichungssystem (4.8) besitzt im Nenner der linken Seite das charakteristische Polynom des Slave-Systems  $d_s(\lambda)$ . Bei einer exakten dynamischen Kondensation sind die  $s$  Eigenwerte der Slave-Struktur die Nullstellen des Polynoms

$$d_s(\lambda) = \prod_{j=1}^s (\lambda - \lambda_{s,j}). \quad (4.9)$$

Die Zählermatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  ist vom Polynomgrad  $\rho = s + 1$  und hat die Dimension  $m \times m$ , die Eigenwerte des Systems sind durch die Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  gegeben.

Die Lösung der Eigenwertaufgabe

$$\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

liefert für Vektoren  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  die  $n = m + s$  Struktur-Eigenwerte der unkondensierten Ausgangsgleichung. Aufgrund der Formulierung des kondensierten Systems als gebrochenrationale Polynommatrix sind die  $s$  Eigenwerte des Slave-Systems  $(m - 1)$ -fache zusätzliche Lösungen der Eigenwertaufgabe.

Das gesamte Spektrum der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  lautet

$$\det [\mathbf{F}(\lambda)] = p(\lambda) = p_0 + p_1\lambda + \dots + p_{m\rho}\lambda^{m\rho} = p_{m\rho} \prod_{i=1}^{m+s} (\lambda - \lambda_i) \prod_{j=1}^s (\lambda - \lambda_{s,j})^{m-1}. \quad (4.11)$$

Die Ordnung des nichtlinearen Eigenwertproblems der kondensierten Gleichungen (4.10) ist gegenüber der Ordnung  $n$  der ursprünglichen linearen Eigenwertaufgabe (2.4) auf  $n + (m - 1)s$  angewachsen.

Eine Verringerung des Polynomgrades von  $\mathbf{F}(\lambda)$  kann, ohne große Einschränkung der Genauigkeit, in einem interessierenden Frequenzbereich durch das Berücksichtigen von wenigen bestimmten Slave-Eigenformen bei der Kondensation erreicht werden (vgl. Kapitel 3.6). Werden zur Ermittlung der kondensierten Gleichungen  $\sigma < s$  Eigenformen der Slave-Struktur verwendet, sind die in  $\mathbf{F}(\lambda)$  enthaltenen Struktur-Eigenwerte Näherungen und ihre Anzahl

beträgt  $m + \sigma$ . Die Slave-Eigenwerte bleiben unverändert erhalten, lediglich ihre Anzahl hat sich verringert.

$$\tilde{d}_s(\lambda) = \prod_{j=1}^{\sigma} (\lambda - \lambda_{s,j}). \quad (4.12)$$

Das Spektrum der genäherten Matrix lautet

$$\det [\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)] = q(\lambda) = q_0 + q_1 \lambda + \dots + q_{m\delta} \lambda^{m\delta} = q_{m\delta} \prod_{i=1}^{m+\sigma} (\lambda - \tilde{\lambda}_i) \prod_{j=1}^{\sigma} (\lambda - \lambda_{s,j})^{m-1}, \quad (4.13)$$

wobei  $\delta = \sigma + 1$  der Polynomgrad der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  ist.

Die in der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  ( $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$ ) enthaltenen Eigenwerte sind sämtlich nichtdefektiv, d.h., der Rangabfall einer singulären Matrix  $\mathbf{F}(\lambda_i)$  ( $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda_i)$ ) bzw.  $\mathbf{F}(\lambda_{s,j})$  ( $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda_{s,j})$ ) entspricht der Vielfachheit eines Eigenwerts  $\lambda_i$  bzw.  $\lambda_{s,j}$ . Ist die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  des unkondensierten Ausgangssystems regulär, ist auch die Leitmatrix von  $\mathbf{F}(\lambda)$  ( $\tilde{\mathbf{F}}(\lambda)$ ) regulär.

### 4.1.3 Eigenschaften der gebrochenrationalen Formulierung

Durch die Formulierung des kondensierten Gleichungssystems (4.1) mit Hilfe der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  und der Determinante  $d_s(\lambda)$  ist eine Darstellung der Gleichungen im Zeitbereich und damit eine Realisierung im Zustandsraum möglich.

Die kondensierten Gleichungen in der gebrochenrationalen Darstellungsweise (4.8) lassen sich in Form einer Ein-Ausgangsgrößendarstellung angeben:

$$\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = d_s(\lambda)\mathbf{f} \quad (4.14)$$

$$[\mathbf{A}_{F,0} + \mathbf{A}_{F,1}\lambda + \dots + \mathbf{A}_{F,\rho}\lambda^\rho]\mathbf{x} = [b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{\rho-1}\lambda^{\rho-1}]\mathbf{f}. \quad (4.15)$$

Die Erregungen  $\mathbf{f}$  sind die Ein- und die Verschiebungen  $\mathbf{x}$  die Ausgangsgrößen des Systems.

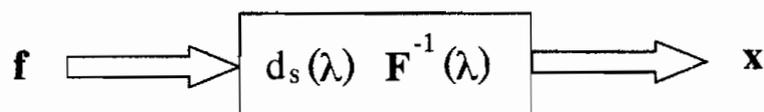


Abbildung 4.1: Ein- Ausgangsgrößendarstellung des kondensierten Gleichungssystems

Unter Anwendung der inversen Fourier-Transformation, mit  $\lambda = \omega^2$ , ergibt sich im Zeitbereich ein Differentialgleichungssystem  $\rho$ -ter Ordnung.

$$[\mathbf{A}_{F,0} + \mathbf{A}_{F,1}\lambda + \dots + \mathbf{A}_{F,\rho}\lambda^\rho] \mathbf{x} = [b_0 + b_1\lambda + \dots + b_{\rho-1}\lambda^{\rho-1}] \mathbf{f} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{A}_{F,0}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_{F,1}\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} + \dots + \mathbf{A}_{F,\rho}\frac{d^{2\rho}\mathbf{x}(t)}{dt^{2\rho}} = b_0\mathbf{f}(t) + b_1\frac{d^2\mathbf{f}(t)}{dt^2} + \dots + b_{\rho-1}\frac{d^{2(\rho-1)}\mathbf{f}(t)}{dt^{2(\rho-1)}}. \quad (4.17)$$

Die Ableitungen der rechten Seite in (4.17) entstehen, wenn versucht wird, ein lineares System mit weniger Zustandsvariablen auszudrücken als im Zustandsraum notwendig sind. Die höchste Ableitung der rechten Seite, d.h. die der Eingangsgrößen, ist von der Ordnung  $2(\rho - 1)$  und damit um die Ordnung zwei geringer als die höchste Ableitung auf der linken Seite, d.h. die der Ausgangsgrößen. Das ist darauf zurückzuführen, daß das ursprüngliche (nicht kondensierte) Differentialgleichungssystem von 2. Ordnung ist.

Wird unter der Ordnung des kondensierten Systems der Grad des Nennerpolynoms der Frequenzgangdarstellung

$$\mathbf{H}(\lambda) = d_s(\lambda)\mathbf{F}^{-1}(\lambda) = \frac{\mathbf{R}(\lambda)}{d(\lambda)} \quad (4.18)$$

verstanden, ist die Ordnung des Gleichungssystems (4.17) größer als die des unkondensierten Ausgangssystems.

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$d(\lambda) = \det[\mathbf{F}(\lambda)] = 0 \quad (4.19)$$

sind die Eigenwerte des kondensierten Systems.

Die Berechnung der Nullstellen der Determinante  $d(\lambda)$  liefert, wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, neben den Eigenfrequenzen der Struktur noch zusätzliche Lösungen. Aufgrund des gleichnamig gemachten Nenners in (4.7) werden der Systembeschreibung  $(m - 1)$ -fach die Eigenwerte des Slave-Systems hinzugefügt, die Ordnung des Differentialgleichungssystems (4.17) ist somit nicht minimal. Die unmittelbare Darstellung der Gleichungen (4.17) mit den Zustandsraummatrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  nach Kapitel 3.3.2 führt auf eine Realisierung mit einer Anzahl von Zustandsvariablen, die weitaus größer sein kann als die des Ausgangssystems.

Durch die Formulierung eines linearen Systems mit den Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  im Zustandsraum, können die Eigenschaften des Systems mit Hilfe der Zustandsraummethoden untersucht werden. Die Darstellung ist zudem günstig zur Simulation des Systemverhaltens mit dem Computer. Werden zur Berechnung der kondensierten Formulierung nur wenige Eigenformen der Slave-Struktur verwendet, kann eine erhebliche Reduktion der Systemordnung erreicht werden, der Beschreibungs- und -Rechenaufwand gegenüber dem Ausgangssystem wird entsprechend verringert. Voraussetzung für eine rationelle Darstellung des Systems im

Zustandsraum ist jedoch eine Realisierung mit einer minimalen Anzahl von Zustandsraumvariablen.

Eine minimale Realisierung des kondensierten Gleichungssystems läßt sich mit Hilfe einer Faktorisierung der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  und einer Umordnung des Spektrums der gebrochenrationalen Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)/d_s(\lambda)$  erreichen.

Neben einer minimalen Realisierung des kondensierten Gleichungssystems soll eine weitere Ordnungsreduktion durch die Vernachlässigung bestimmter Linearfaktoren der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  erfolgen.

Da  $\mathbf{F}(\lambda)$  eine einfache und reguläre Polynommatrix ist, kann eine Umordnung des Spektrums, sowie eine Näherung der Matrix durch die in Kapitel 3.5 hergeleiteten Sätze zur Faktorisierung einer Polynommatrix erreicht werden.

## 4.2 Berechnung eines kondensierten Gleichungssystems minimaler Ordnung

### 4.2.1 Herleitung der Systemmatrizen minimaler Ordnung

Aufgrund der Darstellung des kondensierten Gleichungssystems mit Hilfe einer gebrochenrationalen Matrix ist in einfacher Weise eine Formulierung der Gleichungen im Zeitbereich möglich. Die Formulierung des Gleichungssystems im linearen Zustandsraum führt jedoch auf Matrizen, die größer sind als die für das unkondensierte System.

Die gegenüber den unkondensierten Ausgangsgleichungen höhere Systemordnung entsteht durch die Inversion der dynamischen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{D}_{ss}(\lambda)$  des Slave-Systems. Das kondensierte Gleichungssystem läßt sich wie folgt angeben:

$$\frac{\mathbf{F}(\lambda)}{d_s(\lambda)} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{D}_{mm}(\lambda)d_s(\lambda) - \mathbf{D}_{ms}(\lambda)\mathbf{X}_s(\mathbf{\Lambda}_s - \lambda\mathbf{I})_{adj}\mathbf{X}_s^T\mathbf{D}_{sm}(\lambda)}{d_s(\lambda)} \mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (4.20)$$

Die Kondensation des linearen Ausgangssystems beruht auf der Inversion der frequenzabhängigen Matrix  $\mathbf{D}_{ss}(\lambda)$ .

$$\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda) = (\mathbf{K}_{ss} - \lambda\mathbf{M}_{ss})^{-1} = \mathbf{X}_s(\mathbf{\Lambda}_s - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}_s^T = \mathbf{X}_s \frac{(\mathbf{\Lambda}_s - \lambda\mathbf{I})_{adj}}{d_s(\lambda)} \mathbf{X}_s^T. \quad (4.21)$$

$\mathbf{D}_{ss}(\lambda)$  ist die dynamische Steifigkeitsmatrix der Slave-Struktur mit der Dimension  $s \times s$ . Das Spektrum der adjungierten Matrix  $(\mathbf{\Lambda}_s - \lambda\mathbf{I})_{adj}$  enthält  $(s - 1)$ -fach die  $s$  Eigenwerte des Slave-Systems.

Durch die Transformation

$$\mathbf{D}_{ms}(\lambda)\mathbf{D}_{ss}^{-1}(\lambda)\mathbf{D}_{sm}(\lambda) = \mathbf{D}_{ms}(\lambda)\mathbf{X}_s \frac{(\mathbf{\Lambda}_s - \lambda\mathbf{I})_{adj}}{d_s(\lambda)} \mathbf{X}_s^T\mathbf{D}_{sm}(\lambda) = \frac{\mathbf{G}(\lambda)}{d_s(\lambda)} \quad (4.22)$$

in (4.20) wird die Dimension der adjungierten Matrix auf die Anzahl  $m$  der Master-Freiheitsgrade verringert. Die Matrix  $\mathbf{G}(\lambda)$  ist vom Polynomgrad  $s + 1$ , die Anzahl der im Spektrum von  $\mathbf{G}(\lambda)$  vorhandenen Slave-Eigenwerte hat sich auf  $(m - 1)s$  reduziert.

Mit (4.22) lautet das kondensierte Gleichungssystem (4.20)

$$\frac{\mathbf{D}_{mm}(\lambda)d_s(\lambda) - \mathbf{G}(\lambda)}{d_s(\lambda)} \mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (4.23)$$

Die Matrix  $\mathbf{G}(\lambda)$  wird in die Matrizen  $\mathbf{G}_s(\lambda)$  mit dem Slave-Spektrum und  $\mathbf{G}_r^{\eta+1}(\lambda)$  mit einem restlichen Spektrum aufgeteilt.

$$\frac{\mathbf{D}_{mm}(\lambda)d_s(\lambda) - \mathbf{G}_s(\lambda)\mathbf{G}_r^{\eta+1}(\lambda)}{d_s(\lambda)} \mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (4.24)$$

Die Matrix  $\mathbf{G}_r^{\eta+1}(\lambda)$  ist eine um die  $(m-1)s$  Eigenwerte der Slave-Struktur reduzierte Matrix mit dem Polynomgrad  $s+1-\eta$ .  $\mathbf{G}_s(\lambda)$  setzt sich aus den Linearfaktoren der  $(m-1)$ -fachen Eigenwerte der Slave-Struktur zusammen.

$$\mathbf{G}_s(\lambda) = \mathbf{X}_{s,\eta} \mathbf{D}_{s,\eta}(\lambda) \mathbf{X}_{s,\eta}^{-1} \cdots \mathbf{X}_{s,2} \mathbf{D}_{s,2}(\lambda) \mathbf{X}_{s,2}^{-1} \mathbf{X}_{s,1} \mathbf{D}_{s,1}(\lambda) \mathbf{X}_{s,1}^{-1}. \quad (4.25)$$

Die Inversion der Matrix  $\mathbf{G}_s(\lambda)$  und die anschließende Multiplikation der Matrix mit der charakteristischen Determinante  $d_s(\lambda)$  führen, wie im folgenden Kapitel 4.2.2 noch ausführlich gezeigt wird, auf eine Polynommatrix  $\mathbf{B}(\lambda)$  in deren Spektrum die  $s$  Slave-Eigenwerte einfach enthalten sind.

$$\mathbf{B}(\lambda) = d_s(\lambda) \mathbf{G}_s^{-1}(\lambda). \quad (4.26)$$

Wird das kondensierte Gleichungssystem (4.23) von links mit  $\mathbf{B}(\lambda)$  multipliziert, ergibt sich der Ausdruck

$$\left[ \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{D}_{mm}(\lambda) - \mathbf{G}^{\eta+1}(\lambda) \right] \mathbf{x} = \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{f} \quad (4.27)$$

oder kurz

$$\mathbf{A}(\lambda) \mathbf{x} = \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{f}. \quad (4.28)$$

Das Spektrum der Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  besteht aus den Eigenwerten der Struktur, das der Matrix  $\mathbf{B}(\lambda)$  enthält die einfachen Eigenwerte des Slave-Systems.

$$\mathbf{A}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\gamma+1} \mathbf{A}_i \lambda^i; \quad \mathbf{B}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\gamma} \mathbf{B}_j \lambda^j. \quad (4.29)$$

Eine vollständige Aufteilung des Spektrums des kondensierten Gleichungssystems in der dargestellten Weise ist nur möglich, wenn die Anzahl der Slave-Eigenwerte ohne Rest durch die Matrizendimension teilbar ist.

$$\eta = \frac{(m-1)s}{m}; \quad \gamma = \frac{s}{m}; \quad \eta, \gamma \in \mathbb{N}. \quad (4.30)$$

Da später eine Näherung der Gleichungen mit nur wenigen Eigenformen erfolgt und unter der Voraussetzung geringer Matrizendimensionen, d.h. bei einer großen Verdichtung des linearen Ausgangssystems, stellt die Forderung (4.30) keine wesentliche Einschränkung dar.

Es ist anzumerken, daß auch bei Symmetrie der unkondensierten Ausgangsmatrizen  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{M}$  die Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  im allgemeinen nicht symmetrisch sind, die Links- und Rechtseigenvektoren für eine Eigenwertaufgabe  $\mathbf{A}(\lambda) \mathbf{x} = \mathbf{0}$  bzw. eine Aufgabe  $\mathbf{B}(\lambda) \mathbf{f} = \mathbf{0}$  sind nicht mehr identisch.

Berechnet man aus (4.28) die Frequenzgangmatrix

$$\mathbf{H}(\lambda) = \mathbf{A}^{-1}(\lambda)\mathbf{B}(\lambda) = \frac{\mathbf{R}(\lambda)}{d(\lambda)}, \quad (4.31)$$

sind sämtliche Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $d(\lambda)$  Eigenfrequenzen des Systems (siehe Abbildung 4.2).

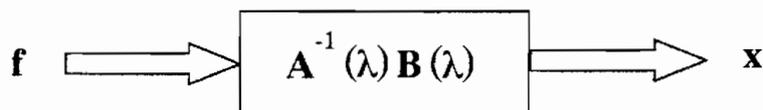


Abbildung 4.2: Ein- Ausgangsgrößendarstellung des kondensierten Gleichungssystems minimaler Ordnung

Die Darstellung mit den Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  entspricht im Zeitbereich einer Zustandsraumrealisierung mit einer minimalen Anzahl von Zustandsvariablen, die Formulierung (4.28) ist somit irreduzibel. Systeme dieser Art besitzen die Eigenschaft der Steuer- und Beobachtbarkeit (vgl. Kapitel 3.3.2).

Die Berechnung der Polynommatrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  eines kondensierten Gleichungssystems kann auf zwei Arten erfolgen:

- durch sukzessive Abspaltung der Slave-Eigenwerte aus der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  und anschließender Inversion der abgespaltenen Linearfaktoren oder
- durch die rekursive Ermittlung der Linearfaktoren der Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  aus den Eigenwerten und -vektoren der Matrizen

Beide Vorgehensweisen werden im folgenden dargestellt.

#### 4.2.2 Berechnung eines Gleichungssystems minimaler Ordnung durch sukzessive Abspaltung der Slave-Eigenwerte

Ein kondensiertes Gleichungssystem minimaler Ordnung läßt sich mit Hilfe der Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  darstellen. Die Matrizen werden im folgenden durch sukzessive Abspaltung der Slave-Eigenwerte aus der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  der gebrochenrationalen Formulierung (4.8) eines kondensierten Gleichungssystems berechnet.

Dazu werden aus der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  die Linearfaktoren  $\mathbf{Y}_{s,\nu}\mathbf{D}_{s,\nu}(\lambda)\mathbf{Y}_{s,\nu}^{-1}$ ;  $\nu = 1; \dots, \eta$ ,  $\eta = s(m-1)/m$  mit den modalen Parametern der Slave-Struktur von links abgespalten:

$$\frac{1}{d_s(\lambda)}\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{d_s(\lambda)}\mathbf{Y}_{s,1}\mathbf{D}_{s,1}(\lambda)\mathbf{Y}_{s,1}^{-1}\mathbf{Y}_{s,2}\mathbf{D}_{s,2}(\lambda)\mathbf{Y}_{s,2}^{-1}\dots\mathbf{Y}_{s,\eta}\mathbf{D}_{s,\eta}(\lambda)\mathbf{Y}_{s,\eta}^{-1}\mathbf{F}^{\eta+1}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (4.33)$$

In den Diagonalmatrizen  $\mathbf{D}_{s,\nu}(\lambda)$  werden die  $(m - 1)$ -fachen Slave-Eigenwerte  $\lambda_{s,j}$  zusammengefaßt.

$$\mathbf{D}_{s,\nu}(\lambda) = \mathbf{\Lambda}_{s,j} - \mathbf{I}\lambda; \quad \nu = 1, \dots, \eta \quad (4.34)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_{s,1} &= \text{diag}[\lambda_{s,1}, \lambda_{s,1}, \dots, \lambda_{s,1}, \lambda_{s,1}, \lambda_{s,2}] \\ \mathbf{\Lambda}_{s,2} &= \text{diag}[\lambda_{s,2}, \lambda_{s,2}, \dots, \lambda_{s,2}, \lambda_{s,3}, \lambda_{s,3}] \\ &\vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{s,\eta} &= \text{diag}[\lambda_{s,s-1}, \lambda_{s,s}, \dots, \lambda_{s,s}, \lambda_{s,s}, \lambda_{s,s}]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die Modalmatrizen  $\mathbf{Y}_{s,\nu}$  enthalten die Linkseigenvektoren der Eigenwertaufgabe

$$\mathbf{y}_j^T \mathbf{F}^\nu(\lambda_{s,j}) = \mathbf{0}^T, \quad (4.36)$$

die Vektoren  $\mathbf{y}_j^T$  werden entsprechend der Eigenwerte  $\lambda_{s,j}$  in den Modalmatrizen angeordnet.

Wird das Gleichungssystem (4.33) von links mit den Inversen der linearen Terme  $\mathbf{Y}_{s,\nu} \mathbf{D}_{s,\nu}(\lambda) \mathbf{Y}_{s,\nu}^{-1}$ , sowie mit dem charakteristischen Polynom der Slave-Struktur  $d_s(\lambda)$  multipliziert, ergibt sich mit der um die Slave-Eigenwerte reduzierten Matrix

$$\mathbf{F}^{\eta+1}(\lambda) = \mathbf{A}(\lambda) \quad (4.37)$$

das Gleichungssystem

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} = d_s(\lambda) \mathbf{Y}_{s,\eta} \mathbf{D}_{s,\eta}^{-1}(\lambda) \mathbf{Y}_{s,\eta}^{-1} \dots \mathbf{Y}_{s,2} \mathbf{D}_{s,2}^{-1}(\lambda) \mathbf{Y}_{s,2}^{-1} \mathbf{Y}_{s,1} \mathbf{D}_{s,1}^{-1}(\lambda) \mathbf{Y}_{s,1}^{-1} \mathbf{f}. \quad (4.38)$$

Das Spektrum der Polynommatrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  enthält die einfachen Eigenwerte der Struktur und ist somit von minimalem Grad. Der Polynomgrad der Matrix auf der rechten Seite des Gleichungssystems (4.38) ist hingegen nicht minimal, die Nullstellen in Nenner und Zähler lassen sich gegeneinander kürzen. Um eine teilerfremde rechte Seite, d.h. eine Matrix minimaler Ordnung  $\mathbf{B}(\lambda)$  zu erhalten, muß das Eigenwertspektrum in Linearfaktoren neu angeordnet werden.

Beispiel:

Für ein kondensiertes Gleichungssystem mit der Dimension  $m = 3$  lauten die ersten zwei invertierten Linearfaktoren in (4.38)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}_{s,2} \mathbf{D}_{s,2}^{-1}(\lambda) \mathbf{Y}_{s,2}^{-1} \mathbf{Y}_{s,1} \mathbf{D}_{s,1}^{-1}(\lambda) \mathbf{Y}_{s,1}^{-1} &= \mathbf{Y}_2 \begin{pmatrix} \lambda_{s,2} - \lambda & & \mathbf{0} \\ & \lambda_{s,3} - \lambda & \\ \mathbf{0} & & \lambda_{s,3} - \lambda \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{Y}_2^{-1} \\
 &\cdot \mathbf{Y}_1 \begin{pmatrix} \lambda_{s,1} - \lambda & & \mathbf{0} \\ & \lambda_{s,1} - \lambda & \\ \mathbf{0} & & \lambda_{s,2} - \lambda \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{Y}_1^{-1} \\
 &= \frac{1}{(\lambda_{s,1} - \lambda)(\lambda_{s,2} - \lambda)(\lambda_{s,2} - \lambda)(\lambda_{s,3} - \lambda)} \\
 &\cdot \mathbf{Y}_2 \begin{pmatrix} \lambda_{s,3} - \lambda & & \mathbf{0} \\ & \lambda_{s,2} - \lambda & \\ \mathbf{0} & & \lambda_{s,2} - \lambda \end{pmatrix} \mathbf{Y}_2^{-1} \\
 &\cdot \mathbf{Y}_1 \begin{pmatrix} \lambda_{s,2} - \lambda & & \mathbf{0} \\ & \lambda_{s,2} - \lambda & \\ \mathbf{0} & & \lambda_{s,1} - \lambda \end{pmatrix} \mathbf{Y}_1^{-1} \\
 &= \frac{\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \lambda + \mathbf{I} \lambda^2}{(\lambda_{s,1} - \lambda)(\lambda_{s,2} - \lambda)(\lambda_{s,2} - \lambda)(\lambda_{s,3} - \lambda)}. \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

Drei Linearfaktoren  $\lambda_{s,2} - \lambda$  im Zähler von (4.39) lassen sich bei einer Umordnung des Spektrums gegen den entsprechenden Faktor im Nenner kürzen, dazu werden drei Eigenwerte  $\lambda_2$  aus der Matrix  $\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \lambda + \mathbf{I} \lambda^2$  abgespalten:

$$\mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 \lambda + \mathbf{I} \lambda^2 = (\mathbf{C}_0^2 + \mathbf{I} \lambda) \mathbf{X} \begin{pmatrix} \lambda_{s,2} - \lambda & & \mathbf{0} \\ & \lambda_{s,2} - \lambda & \\ \mathbf{0} & & \lambda_{s,2} - \lambda \end{pmatrix} \mathbf{X}^{-1}. \quad (4.40)$$

Für eine diagonalbesetzte, reguläre Modalmatrix  $\mathbf{X}$  errechnet sich die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{C}_0^2$  nach dem Reduktionsschema (3.107) aus

$$\mathbf{C}_0^2 = \mathbf{C}_1 + \mathbf{I} \lambda_{s,2}. \quad (4.41)$$

Die abgespaltenen Linearfaktoren  $\lambda_{s,2} - \lambda$  werden jetzt gegen den entsprechenden Faktor im Nenner von (4.39) gekürzt, es ergeben sich die ersten beiden invertierten Linearfaktoren zu

$$\mathbf{Y}_{s,2} \mathbf{D}_{s,2}^{-1}(\lambda) \mathbf{Y}_{s,2}^{-1} \mathbf{Y}_{s,1} \mathbf{D}_{s,1}^{-1}(\lambda) \mathbf{Y}_{s,1}^{-1} = \frac{\mathbf{C}_0^2 + \mathbf{I}\lambda}{(\lambda_{s,1} - \lambda)(\lambda_{s,2} - \lambda)(\lambda_{s,3} - \lambda)}. \quad (4.42)$$

Werden auf die gezeigte Weise immer jeweils  $m - 1$  Linearfaktoren in den Gleichungen (4.38) zu einem linearen Term der Art  $(\mathbf{C}_0^2 + \mathbf{I}\lambda)_\nu$  zusammengefaßt, entsteht das Gleichungssystem

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} = d_s(\lambda) \frac{(\mathbf{C}_0^2 + \mathbf{I}\lambda)_\gamma \dots (\mathbf{C}_0^2 + \mathbf{I}\lambda)_2 (\mathbf{C}_0^2 + \mathbf{I}\lambda)_1}{(\lambda_{s,1} - \lambda)(\lambda_{s,2} - \lambda) \dots (\lambda_{s,s} - \lambda)} \mathbf{f} \quad (4.43)$$

$$= (\mathbf{C}_0^2 + \mathbf{I}\lambda)_\gamma \dots (\mathbf{C}_0^2 + \mathbf{I}\lambda)_2 (\mathbf{C}_0^2 + \mathbf{I}\lambda)_1 \mathbf{f} \quad (4.44)$$

oder kurz

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{f} \quad (4.45)$$

mit dem Polynomgrad  $\gamma = s/m$ .

Die Berechnung der Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  durch sukzessive Abspaltung der in  $\mathbf{F}(\lambda)$  mehrfachen Eigenwerte der Slave-Struktur ist aufwendig und kann aufgrund von Rundungsfehlern bei der Reduktion der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  ungenau sein. Neben der Abspaltung der  $(m - 1)$ -fachen Slave-Eigenwerte ist eine weitere stückweise Reduktion der inversen Linearfaktoren zur Bestimmung der Matrix  $\mathbf{B}(\lambda)$  notwendig. Die Abspaltung der nahe bei den Struktur-Eigenwerten liegenden mehrfachen Slave-Eigenwerte aus der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  bewirkt, aufgrund von Rundungsfehlern, eine Verschiebung des in der reduzierten Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  verbleibenden Eigenwertspektrums der Struktur (vgl. Kapitel 3.5.4). Es hat sich gezeigt, daß die Matrix  $\mathbf{B}(\lambda)$  bis zu Polynomgraden der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  von  $\rho = 15$  bei einer Dimension  $m = 4$  (acht finite Balkenelemente) mit ausreichender Genauigkeit zu bestimmen ist, die Struktur-Eigenwerte in der Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  können jedoch bereits stark fehlerbehaftet sein.

Eine Alternative zur sukzessiven Faktorisierung einer Polynommatrix ist die rekursive Ermittlung der Linearfaktoren.

### 4.2.3 Berechnung eines Gleichungssystems minimaler Ordnung durch rekursive Berechnung der Linearfaktoren

Die Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  werden durch die rekursive Berechnung ihrer Linearfaktoren ermittelt.

Die vollständige Faktorisierung des kondensierten Gleichungssystems minimaler Ordnung lautet

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{f} \quad (4.46)$$

mit

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}_{\gamma+1}\mathbf{X}_{\gamma+1}\mathbf{D}_{\gamma+1}(\lambda)\mathbf{X}_{\gamma+1}^{-1} \dots \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1}, \quad (4.47)$$

$$\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{B}_\gamma\mathbf{Z}_{s,\gamma}\mathbf{D}_{s,\gamma}(\lambda)\mathbf{Z}_{s,\gamma}^{-1} \dots \mathbf{Z}_{s,2}\mathbf{D}_{s,2}(\lambda)\mathbf{Z}_{s,2}^{-1}\mathbf{Z}_{s,1}\mathbf{D}_{s,1}(\lambda)\mathbf{Z}_{s,1}^{-1}. \quad (4.48)$$

Die Vektoren der Modalmatrizen  $\mathbf{X}_\nu$ ;  $\nu = 1, \dots, \gamma+1$  bzw.  $\mathbf{Z}_{s,\mu}$ ;  $\mu = 1, \dots, \gamma$  werden durch Transformation der Eigenvektoren der Originaleigenwertaufgaben

$$\mathbf{A}(\lambda_i)\overset{\circ}{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}; \quad i = 1, \dots, n \quad (4.49)$$

und

$$\mathbf{B}(\lambda_{s,j})\overset{\circ}{\mathbf{f}}_j = \mathbf{0}; \quad j = 1, \dots, s \quad (4.50)$$

bestimmt.

#### Berechnung der Matrix $\mathbf{A}(\lambda)$

Die Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  entsteht durch die Abspaltung der modalen Parameter der Struktur von rechts aus der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  der gebrochenrationalen Darstellung des kondensierten Gleichungssystems (4.8)

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{F}^{\gamma+2}(\lambda)\mathbf{X}_{\gamma+1}\mathbf{D}_{\gamma+1}(\lambda)\mathbf{X}_{\gamma+1}^{-1} \dots \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1} \quad (4.51)$$

$$= \mathbf{F}^{\gamma+2}(\lambda)\mathbf{A}(\lambda). \quad (4.52)$$

Die Eigenwertaufgabe  $\mathbf{A}(\lambda_i)\overset{\circ}{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}$  entspricht somit für die Eigenwerte der Struktur der Aufgabe

$$\mathbf{F}(\lambda_i)\overset{\circ}{\mathbf{x}}_i = \mathbf{0}, \quad (4.53)$$

d.h. die Linearfaktoren

$$\mathbf{X}_\nu\mathbf{D}_\nu(\lambda)\mathbf{X}_\nu^{-1}; \quad \nu = 1, \dots, \gamma+1 \quad (4.54)$$

lassen sich aus der kondensierten Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  berechnen.

## 4.2 Berechnung eines kondensierten Gleichungssystems minimaler Ordnung 93

Die Diagonalmatrizen  $\mathbf{D}_\nu(\lambda)$  werden mit jeweils  $m$  Struktur-Eigenwerten gebildet

$$\mathbf{D}_\nu(\lambda) = \mathbf{\Lambda}_\nu - \mathbf{I}\lambda \quad (4.55)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_1 &= \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m] \\ \mathbf{\Lambda}_2 &= \text{diag}[\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \dots, \lambda_{2m}] \\ &\vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{\gamma+1} &= \text{diag}[\lambda_{\gamma m+1}, \lambda_{\gamma m+2}, \dots, \lambda_n], \end{aligned} \quad (4.56)$$

die Modalmatrizen  $\mathbf{X}_\nu$  werden entsprechend aus den Vektoren  $\mathbf{x}_i$  zusammengesetzt und lassen sich aus den Eigenvektoren  $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_i$  der Originaleigenwertaufgabe (4.53) und bereits ermittelten Linearfaktoren berechnen.

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_{\nu-1} \mathbf{D}_{\nu-1}(\lambda_i) \mathbf{X}_{\nu-1}^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda_i) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda_i) \mathbf{X}_1^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{x}}_i; \nu = 2, \dots, \gamma + 1. \quad (4.57)$$

Die Matrix  $\mathbf{X}_1$  wird ohne Transformation direkt aus den Originaleigenvektoren  $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_1, \dots, \overset{\circ}{\mathbf{x}}_m$  gebildet.

Zur vollständigen Bestimmung der Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  ist eine Normierung der aus  $\mathbf{F}(\lambda)$  abgespaltenen Linearfaktoren notwendig, dazu muß die konstante Leitmatrix von  $\mathbf{A}(\lambda)$   $\mathbf{A}_{\gamma+1}$  ermittelt werden.

Bei einer vollständigen Faktorisierung der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  sind die Leitmatrizen von  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{F}(\lambda)$  identisch:

$$\mathbf{A}_{\gamma+1} = \mathbf{A}_{F,\rho}, \quad (4.58)$$

die Leitmatrix der reduzierten Polynommatrix  $\mathbf{F}^{\gamma+2}(\lambda)$  mit dem Slave-Spektrum ist dann eine Einheitsmatrix.

Die Matrix  $\mathbf{B}(\lambda)$  errechnet sich aus der Inversen der Matrix  $\mathbf{F}^{\gamma+2}(\lambda)$ , womit sich die Leitmatrix von  $\mathbf{B}(\lambda)$  zu  $\mathbf{B}_\gamma = \mathbf{I}$  ergibt.

### Berechnung der Matrix $\mathbf{B}(\lambda)$

Die Eigenwerte und -vektoren der Matrix  $\mathbf{B}(\lambda)$  ergeben sich als Lösungen der Eigenwertaufgabe

$$\mathbf{B}(\lambda_{s,j}) \overset{\circ}{\mathbf{f}}_j = \mathbf{0}, \quad (4.59)$$

d.h. durch das zu Null setzen der Auslenkungen der Master-Freiheitsgrade  $\mathbf{x}$  in (4.46).

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\det[\mathbf{B}(\lambda)] = 0$  sind die einfachen Eigenwerte  $\lambda_{s,j}$  der Slave-Struktur.

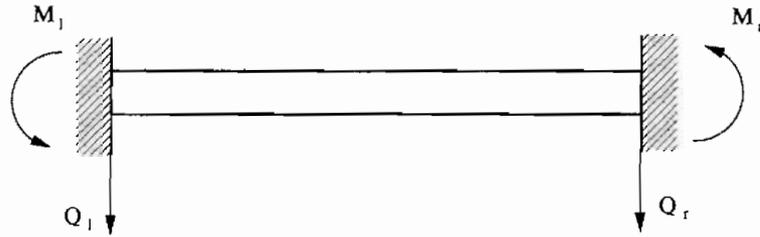


Abbildung 4.3: Lagerkräfte und -momente eines an den Master-Freiheitsgraden fest eingespannten Balken

Die Eigenvektoren  $\overset{\circ}{\mathbf{f}}_j$  entsprechen den Kräften und Momenten an den Einspannstellen der an den Master-Freiheitsgraden gefesselten freischwingenden Struktur (vgl. Abbildung 4.3).

Die Matrix  $\mathbf{B}(\lambda)$  ist zunächst unbekannt, die Eigenformen  $\overset{\circ}{\mathbf{f}}_j$  der Eigenwertaufgabe (4.59) lassen sich jedoch aus den Eigenvektoren  $\overset{\circ}{\mathbf{x}}_{s,j}$  des Eigenwertproblems für das Slave-System und dem unkondensierten Ausgangssystem ermitteln.

Die Eigenwertaufgabe für die Slave-Struktur lautet

$$(\mathbf{K}_{ss} - \mathbf{M}_{ss}\lambda_{s,j}) \overset{\circ}{\mathbf{x}}_{s,j} = \mathbf{0}. \quad (4.60)$$

Aus dem inhomogenen Teil der unkondensierten partitionierten Ausgangsmatrix (2.8) erhält man für verschwindende Master-Koordinaten  $\mathbf{x}_m$  (hier  $\mathbf{x}$ ) die Beziehung zwischen den Erregungen an den Master-Freiheitsgraden und den Verschiebungen der Slave-Koordinaten zu

$$(\mathbf{K}_{ms} - \mathbf{M}_{ms}\lambda_{s,j}) \overset{\circ}{\mathbf{x}}_{s,j} = \overset{\circ}{\mathbf{f}}_j. \quad (4.61)$$

Sind die modalen Parameter der Slave-Struktur bekannt, lassen sich hieraus die Vektoren der Eigenwertaufgabe  $\mathbf{B}(\lambda_{s,j}) \overset{\circ}{\mathbf{f}}_{s,j} = \mathbf{0}$  bestimmen.

Die in ihre Linearfaktoren zerlegte Matrix  $\mathbf{B}(\lambda)$  lautet

$$\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{B}_\gamma \mathbf{Z}_{s,\gamma} \mathbf{D}_{s,\gamma}(\lambda) \mathbf{Z}_{s,\gamma}^{-1} \cdots \mathbf{Z}_{s,2} \mathbf{D}_{s,2}(\lambda) \mathbf{Z}_{s,2}^{-1} \mathbf{Z}_{s,1} \mathbf{D}_{s,1}(\lambda) \mathbf{Z}_{s,1}^{-1}. \quad (4.62)$$

Die Faktoren

$$\mathbf{Z}_{s,\nu} \mathbf{D}_{s,\nu}(\lambda) \mathbf{Z}_{s,\nu}^{-1}; \quad \nu = 1, \dots, \gamma \quad (4.63)$$

werden wie folgt bestimmt:

Die Diagonalmatrizen

$$\mathbf{D}_{s,\nu}(\lambda) = \mathbf{\Lambda}_{s,\nu} - \mathbf{I}\lambda \quad (4.64)$$

setzen sich aus jeweils  $m$  Eigenwerten der Slave-Struktur zusammen.

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_{s,1} &= \text{diag}[\lambda_{s,1}, \lambda_{s,2}, \dots, \lambda_{s,m}] \\ \mathbf{\Lambda}_{s,2} &= \text{diag}[\lambda_{s,m+1}, \lambda_{s,m+2}, \dots, \lambda_{s,2m}] \\ &\vdots \\ \mathbf{\Lambda}_{s,\gamma+1} &= \text{diag}[\lambda_{s,(\gamma-1)m+1}, \lambda_{s,(\gamma-1)m+2}, \dots, \lambda_{s,s}], \end{aligned} \quad (4.65)$$

## 4.2 Berechnung eines kondensierten Gleichungssystems minimaler Ordnung 95

Die Modalmatrizen  $\mathbf{Z}_{s,\nu}$  werden entsprechend aus den Vektoren  $\mathbf{f}_j$  gebildet. Die Vektoren lassen sich aus den Eigenvektoren  $\overset{\circ}{\mathbf{f}}_j$  der Eigenwertaufgabe (4.59) und zuvor ermittelten Linearfaktoren berechnen.

$$\mathbf{f}_j = \mathbf{Z}_{s,\nu-1} \mathbf{D}_{s,\nu-1}(\lambda_{s,j}) \mathbf{Z}_{s,\nu-1}^{-1} \cdots \mathbf{Z}_{s,2} \mathbf{D}_{s,2}(\lambda_{s,j}) \mathbf{Z}_{s,2}^{-1} \mathbf{Z}_{s,1} \mathbf{D}_{s,1}(\lambda_{s,j}) \mathbf{Z}_{s,1}^{-1} \overset{\circ}{\mathbf{f}}_j . \quad (4.66)$$

Die Matrix des ersten Faktors  $\mathbf{Z}_{s,1}$  wird unmittelbar aus den Eigenvektoren  $\overset{\circ}{\mathbf{f}}_1, \dots, \overset{\circ}{\mathbf{f}}_m$  zusammengesetzt.

Für eine Normierung der Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  nach (4.58) erhält man die Leitmatrix von  $\mathbf{B}(\lambda)$  zu

$$\mathbf{B}_\gamma = \mathbf{I}. \quad (4.67)$$

### 4.3 Näherung der kondensierten Gleichungen mit Hilfe von Struktur- und Slave-Eigenformen

Eine Aufwandsverringerung bei der Berechnung der Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  kann erreicht werden, wenn nicht sämtliche Linearfaktoren der Matrizen berücksichtigt werden.

Das Weglassen von Eigenformen der Struktur ist vergleichbar mit dem Vorgehen bei der Systemreduktion mittels der Modalanalyse. Im Gegensatz zur bekannten modalen Reduktion werden hier jedoch nicht nur die Eigenformen der eigentlichen System-Struktur zur Näherung verwendet, sondern zusätzlich die der Slave-Struktur.

Das kondensierte Gleichungssystem läßt sich durch die gebrochenrationale Formulierung

$$\frac{\mathbf{F}(\lambda)}{d_s(\lambda)} \mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (4.68)$$

sowie in der Form

$$\mathbf{A}(\lambda) \mathbf{x} = \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{f}. \quad (4.69)$$

angeben.

Eine erste Aufwandsverringerung kann bereits bei der Berechnung des kondensierten Gleichungssystems (4.68) erfolgen. Werden bei der Ermittlung der Gleichungen (4.68) nur ein Teil der Slave-Eigenformen berücksichtigt, entstehen Näherungen, der Grad der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  und des Polynoms  $d_s(\lambda)$  verringern sich entsprechend. Die Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  können aus der so genäherten Formulierung entweder durch sukzessive Abspaltung der Slave-Eigenwerte (vgl. Abschnitt 4.2.2) oder durch die Ermittlung der Linearfaktoren der jeweiligen Matrix (vgl. Abschnitt 4.2.3) berechnet werden. Da das Systemverhalten mit Hilfe einiger weniger Slave-Eigenformen approximiert wird, sind die Struktur-Eigenwerte in  $\mathbf{A}(\lambda)$  Näherungen.

Eine weitere Möglichkeit zur Reduktion der Ordnung des kondensierten Gleichungssystems (4.68) bzw. (4.69), ergibt sich durch die in Kapitel 3.6 dargestellte Näherung einer Polynommatrix mit einem Teil ihres Eigenwertspektrums. Durch die unvollständige Faktorisierung einer Polynommatrix können Eigenwertgruppen aus dem Spektrum der Matrix entfernt werden. Die Reduktion kann sowohl bei den Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  als auch bei der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  erfolgen.

Eine Approximation der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  mit einem Teil ihrer Linearfaktoren kann durch sukzessive Abspaltung oder durch rekursive Berechnung der Faktoren geschehen. Aufgrund der mehrfachen Slave-Eigenwert im Spektrum von  $\mathbf{F}(\lambda)$  ist eine Faktorisierung der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  jedoch aufwendig, für eine kompakte Darstellung des kondensierten Gleichungssystems ist zudem die Ermittlung der Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  Voraussetzung.

### 4.3.1 Kriterien zur Reduktion

Das kondensierte Gleichungssystem soll durch eine bestimmte Anzahl von  $m_\mu < m_\rho$  Eigenformen beschrieben werden. Dazu muß zunächst geklärt werden, welche Eigenformen zu berücksichtigen sind und welche vernachlässigt werden können.

Das Weglassen der Eigenformen bei den hohen Frequenzen entspricht dem Vorgehen bei der Modalanalyse. Bei diesem Verfahren wird davon ausgegangen, daß sich die Schwingungsantwort eines Systems mit einigen ausgewählten dominanten Eigenformen beschreiben läßt.

Für die Dominanz eines Eigenwerts wird in der Regel die Entfernung von der imaginären Achse als Kriterium verwendet ([69]). Dabei wird berücksichtigt, daß ein weiter (links) von der imaginären Achse entfernter Eigenwert einen schneller abklingenden Anteil in einem Schwingungsvorgang hervorruft als ein näher gelegener.

Die Wirkung einer Eingangsgröße auf eine Ausgangsgröße bei einer bestimmten Eigenfrequenz läßt sich anhand der Partialbruchzerlegung des Frequenzgangs im Modalraum erkennen und wird von LITZ [69] durch ein sogenanntes Dominanzmaß berücksichtigt.

Weitere Verfahren benutzen zur Auswahl der zu berücksichtigenden Eigenformen normierte Eigenvektoren. In [78] werden verschiedene solcher Verfahren angegeben. Beim Modal Assurance Criterion (MAC) ([21]) werden Daten von bereits untersuchten ähnlichen Modellen zur Normierung der Eigenvektoren verwendet.

Wird eine Substruktur durch bestimmte Eigenformen genähert, sind die Eigenschaften des Gesamtsystems für die Wahl der Substruktur-Eigenformen entscheidend. Ist das Systemverhalten der Gesamtstruktur im unteren Frequenzbereich von Interesse, müssen die Eigenformen im unteren Spektrum der Substrukturen berücksichtigt werden.

### 4.3.2 Näherung der kondensierten Gleichungen minimaler Ordnung

Wie in Kapitel 4.2.3 dargestellt, lassen sich mit Hilfe der modalen Parameter der Struktur und des Slave-Systems die Linearfaktoren der Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  des kondensierten Gleichungssystems minimaler Ordnung

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{f} \quad (4.70)$$

berechnen.

Eine teilweise Faktorisierung der Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  mit  $\mu + 1 < \gamma + 1$  Linearfaktoren und  $\mathbf{B}(\lambda)$  mit  $\mu < \gamma$  Linearfaktoren führt auf eine Darstellung

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}^{\mu+2}(\lambda)\mathbf{X}_{\mu+1}\mathbf{D}_{\mu+1}(\lambda)\mathbf{X}_{\mu+1}^{-1} \dots \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1}, \quad (4.71)$$

$$\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{B}^{\mu+1}(\lambda)\mathbf{Z}_{s,\mu}\mathbf{D}_{s,\mu}(\lambda)\mathbf{Z}_{s,\mu}^{-1} \dots \mathbf{Z}_{s,2}\mathbf{D}_{s,2}(\lambda)\mathbf{Z}_{s,2}^{-1}\mathbf{Z}_{s,1}\mathbf{D}_{s,1}(\lambda)\mathbf{Z}_{s,1}^{-1}. \quad (4.72)$$

Die zur Beschreibung des Systemverhaltens in einem bestimmten Frequenzbereich benötigten Eigenschwingungen sind in den Linearfaktoren der Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  enthalten.

Das nicht Berücksichtigen einzelner Linearfaktoren entspricht für die Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  dem Vernachlässigen von Eigenwerten und -formen der Struktur (Eigenfrequenzen  $\lambda_i$  und Vektoren  $\mathbf{x}_i$ ) und für die Matrix  $\mathbf{B}(\lambda)$  dem Vernachlässigen der modalen Parameter des Slave-Systems (Eigenfrequenzen  $\lambda_{s,j}$  und Vektoren  $\mathbf{f}_j$ ).

Es läßt sich für die Polynommatrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  der folgende Näherungsansatz angeben:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\lambda)\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{B}}(\lambda)\mathbf{f} \quad (4.73)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}(\lambda) = \mathbf{A}_r(\lambda)\mathbf{X}_{\mu+1}\mathbf{D}_{\mu+1}(\lambda)\mathbf{X}_{\mu+1}^{-1} \dots \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1}, \quad (4.74)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\lambda) = \mathbf{B}_r(\lambda)\mathbf{Z}_{s,\mu}\mathbf{D}_{s,\mu}(\lambda)\mathbf{Z}_{s,\mu}^{-1} \dots \mathbf{Z}_{s,2}\mathbf{D}_{s,2}(\lambda)\mathbf{Z}_{s,2}^{-1}\mathbf{Z}_{s,1}\mathbf{D}_{s,1}(\lambda)\mathbf{Z}_{s,1}^{-1}. \quad (4.75)$$

Die Spektralmatrizen  $\mathbf{A}_\nu$  werden jeweils aus  $m$  Eigenwerten der Struktur und die Matrizen  $\mathbf{A}_{s,\nu}$  aus jeweils  $m$  Eigenwerten der Slave-Struktur zusammengesetzt, die entsprechenden Eigenvektoren eines Linearfaktors werden zu den Modalmatrizen  $\mathbf{X}_\nu$  und  $\mathbf{Z}_{s,\nu}$  ergänzt (vgl. 4.2.3).

$\mathbf{A}_r(\lambda)$  und  $\mathbf{B}_r(\lambda)$  sind noch zu bestimmende Matrizen, die den Fehler kompensieren sollen, der aufgrund der vernachlässigten Eigenschwingungen in den Matrizen  $\mathbf{A}^{\mu+2}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}^{\mu+1}(\lambda)$  entsteht. Mit Hilfe der Matrizen  $\mathbf{A}_r(\lambda)$  und  $\mathbf{B}_r(\lambda)$  werden die zur Näherung des Systems benutzten Linearfaktoren normiert. Die Matrizen sind im weiteren entweder konstant oder lineare Polynommatrizen und sollen das statische Systemverhalten genau wiedergeben.

### Normierung des approximierten Gleichungssystems

Wird verlangt, daß das Gleichungssystem (4.73) die statischen Verschiebungen genau wiedergibt, lassen sich die Normierungsmatrizen  $\mathbf{A}_r(\lambda)$  und  $\mathbf{B}_r(\lambda)$  durch einen Vergleich des exakt kondensierten Gleichungssystems in der Form

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{f} \quad (4.76)$$

mit der Darstellung (2.51)

$$\left[ \mathbf{K}_G + \mathbf{M}_G\lambda + \mathbf{G}^T (\mathbf{A}_s - \mathbf{I}\lambda)^{-1} \mathbf{G}\lambda^2 \right] \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (4.77)$$

ermitteln.

Die Matrizen  $\mathbf{K}_G$  und  $\mathbf{M}_G$  errechnen sich aus der statischen Kondensation nach Guyan (vgl. Kapitel 2.3.1); für  $\lambda = 0$  werden die statischen Verschiebungen in der Darstellung (4.77) genau wiedergegeben

$$\mathbf{K}_G\mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (4.78)$$

Wird die inverse Matrix der Slave-Eigenwerte  $(\Lambda_s - \mathbf{I}\lambda)^{-1}$  ausgerechnet und die Gleichungen (4.77) auf einen gemeinsamen Nenner gebracht, ergibt sich die Darstellung

$$\frac{1}{d_s(\lambda)} \left[ (\mathbf{K}_G + \mathbf{M}_G\lambda) d_s(\lambda) + \mathbf{G}^T (\Lambda_s - \mathbf{I}\lambda)_{adj} \mathbf{G} \lambda^2 \right] \mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (4.79)$$

Der Ausdruck  $(\mathbf{K}_G + \mathbf{M}_G\lambda) d_s(\lambda)$  wird bei den Slave-Eigenfrequenzen  $\lambda = \lambda_{s,j}$  zu Null. Wird die Matrix  $\mathbf{B}(\lambda)$  durch Abspaltung der Linkseigenvektoren für die Slave-Eigenwerte  $\lambda = \lambda_{s,j}$  aus der Zählermatrix in (4.79) berechnet, werden dazu lediglich die Matrix  $\mathbf{G}^T (\Lambda_s - \mathbf{I}\lambda)_{adj} \mathbf{G}$  und das Polynom  $d_s(\lambda)$  im Nenner von (4.79) benötigt.

Multipiziert man das Gleichungssystem (4.79) von links mit einer Matrix  $\mathbf{B}^*(\lambda)$  ergibt sich der Ausdruck

$$\left[ \mathbf{B}^*(\lambda) (\mathbf{K}_G + \mathbf{M}_G\lambda) + \mathbf{B}^*(\lambda) \frac{1}{d_s(\lambda)} (\lambda) \mathbf{G}^T (\Lambda_s - \mathbf{I}\lambda)_{adj} \mathbf{G} \lambda^2 \right] \mathbf{x} = \mathbf{B}^*(\lambda) \mathbf{f}. \quad (4.80)$$

Die Matrix  $\mathbf{B}^*(\lambda)$  besitzt das gleiche Eigenwertspektrum wie die Matrix  $\mathbf{B}(\lambda)$ , die einzelnen Koeffizientenmatrizen der beiden Polynommatrizen können sich jedoch voneinander unterscheiden.

$\mathbf{B}^*(\lambda)$  ist die inverse Polynommatrix für den Teil der gebrochenrationalen Matrix  $\frac{1}{d_s(\lambda)} \mathbf{G}^T (\Lambda_s - \mathbf{I}\lambda)_{adj} \mathbf{G}$  mit dem Spektrum der Slave-Eigenwerte, so daß die Gleichungen (4.80) ohne Nenner formuliert werden können:

$$\left[ \mathbf{B}^*(\lambda) (\mathbf{K}_G + \mathbf{M}_G\lambda) + \mathbf{C}(\lambda) \lambda^2 \right] \mathbf{x} = \mathbf{B}^*(\lambda) \mathbf{f} \quad (4.81)$$

bzw.

$$\mathbf{A}^*(\lambda) \mathbf{x} = \mathbf{B}^*(\lambda) \mathbf{f}. \quad (4.82)$$

Wird das Gleichungssystem (4.82) so normiert, daß die Leitmatrix von  $\mathbf{B}^*(\lambda)$  zur Einheitsmatrix wird, sind  $\mathbf{A}^*(\lambda)$  und  $\mathbf{B}^*(\lambda)$  mit  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  aus (4.28) identisch.

Die Gleichungen (4.82) sollen jetzt jedoch derart normiert werden, daß die erste Koeffizientenmatrix von  $\mathbf{B}^*(\lambda)$  eine Einheitsmatrix ist und somit die erste Koeffizientenmatrix von  $\mathbf{A}^*(\lambda)$  der Steifigkeitsmatrix bei der statischen Kondensation entspricht:

$$\mathbf{A}_0^* = \mathbf{K}_G; \quad \mathbf{B}_0^* = \mathbf{I}. \quad (4.83)$$

Werden die Matrizen  $\mathbf{A}^*(\lambda)$  und  $\mathbf{B}^*(\lambda)$  mit  $\mu < \gamma$  Linearfaktoren genähert

$$\tilde{\mathbf{A}}^*(\lambda) = \mathbf{X}_{\mu+1} \mathbf{D}_{\mu+1}(\lambda) \mathbf{X}_{\mu+1}^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda) \mathbf{X}_1^{-1} \quad (4.84)$$

und

$$\tilde{\mathbf{B}}^*(\lambda) = \mathbf{Z}_{s,\mu} \mathbf{D}_{s,\mu}(\lambda) \mathbf{Z}_{s,\mu}^{-1} \dots \mathbf{Z}_{s,2} \mathbf{D}_{s,2}(\lambda) \mathbf{Z}_{s,2}^{-1} \mathbf{Z}_{s,1} \mathbf{D}_{s,1}(\lambda) \mathbf{Z}_{s,1}^{-1} \quad (4.85)$$

ergeben sich durch einen Koeffizientenvergleich mit (4.80) die konstanten Normierungsmatrizen

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{K}_G \tilde{\mathbf{A}}^*(0)^{-1} \quad (4.86)$$

$$\mathbf{B}_r = \tilde{\mathbf{B}}^*(0)^{-1}. \quad (4.87)$$

Das mit den Linearfaktoren  $\mathbf{X}_\nu \mathbf{D}_\nu(\lambda) \mathbf{X}_\nu^{-1}$  und  $\mathbf{Z}_{s,\nu} \mathbf{D}_{s,\nu}(\lambda) \mathbf{Z}_{s,\nu}^{-1}$  und den Definitionen (4.86) und (4.87) genäherte Gleichungssystem (4.73) gibt den statischen Verschiebungszustand einer Struktur genau wieder. Für Systeme mit Eigenwerten bei Null ist die Matrix  $\mathbf{K}_G$  jedoch singulär, eine Normierung der Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}(\lambda)$  auf die gezeigte Weise ist dann nicht mehr möglich.

### Normierung der Linearfaktoren bei einer singulären Matrix $\mathbf{K}_G$

Im Fall einer singulären Matrix  $\mathbf{K}_G$  kann die Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}(\lambda)$  statt mit einer konstanten Matrix  $\mathbf{A}_r$  mit einer linearen Polynommatrix  $\mathbf{A}_r(\lambda) = \mathbf{A}_{r,0} + \mathbf{A}_{r,1}\lambda$  normiert werden. Dabei wird vorausgesetzt, daß sich eine reguläre Matrix  $\mathbf{A}_{r,1}$  finden läßt, was im folgenden dann der Fall ist, wenn die Massenmatrix  $\mathbf{M}_G$  aus der statischen Kondensation regulär ist.

Für die approximierte Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}(\lambda)$  wird der folgende Ansatz gemacht:

$$\tilde{\mathbf{A}}(\lambda) = (\mathbf{A}_{r,0} + \mathbf{A}_{r,1}\lambda) \tilde{\mathbf{A}}^*(\lambda). \quad (4.88)$$

Wird die Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}^*(\lambda)$  mit einem Teil ihrer Linearfaktoren genähert, läßt sich das kondensierte Gleichungssystem schreiben als

$$\left[ \tilde{\mathbf{B}}^*(\lambda) (\mathbf{K}_G + \mathbf{M}_G \lambda) + \mathbf{C}(\lambda) \lambda^2 \right] \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{B}}^*(\lambda) \mathbf{f}. \quad (4.89)$$

Die Matrix  $\mathbf{C}(\lambda)$  ist eine gebrochenrationale Polynommatrix, die das Spektrum der Slave-Struktur enthält, welches nicht in der Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}^*(\lambda)$  enthalten ist.

Die ersten beiden Koeffizientenmatrizen der linken Seite von (4.89) entsprechen denen einer ungenäherten Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$ . Für eine Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}_0^* = \mathbf{I}$  lauten die ersten beiden Koeffizientenmatrizen von  $\mathbf{A}(\lambda)$

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{K}_G; \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{M}_G + \tilde{\mathbf{B}}_1^* \mathbf{K}_G. \quad (4.90)$$

Mit dem inversen Parameter  $\zeta = 1/\lambda$  läßt sich die Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  wie folgt angeben:

$$\hat{\mathbf{A}}(\zeta) = \mathbf{A}_{\gamma+2} + \dots + \mathbf{A}_1 \lambda^{\gamma+1} + \mathbf{A}_0 \lambda^{\gamma+2}. \quad (4.91)$$

Werden aus  $\hat{\mathbf{A}}(\zeta)$   $\mu$  Linearfaktoren mit den zur Näherung benutzten Struktur-Eigenwerten  $\zeta_i = \lambda_i^{-1}$  abgespalten, ergibt sich nach  $\mu$  Schritten eine teilweise faktorisierte Matrix

$$\hat{\mathbf{A}}(\zeta) = \hat{\mathbf{A}}^{\mu+1}(\zeta) \hat{\hat{\mathbf{A}}}^*(\zeta) \quad (4.92)$$

$$= \left( \mathbf{A}_{\gamma+2-\mu}^{\mu+1} + \dots + \mathbf{A}_1 \zeta^{\gamma+1-\mu} + \mathbf{A}_0 \zeta^{\gamma+2-\mu} \right) \hat{\hat{\mathbf{A}}}^*(\zeta), \quad (4.93)$$

bzw. wieder mit dem Parameter  $\lambda$

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}^{\mu+1}(\lambda) \tilde{\mathbf{A}}^*(\lambda) \quad (4.94)$$

$$= \left( \mathbf{A}_0^{\mu+1} + \mathbf{A}_1^{\mu+1} \lambda + \dots + \mathbf{A}_{\gamma+2-\mu}^{\mu+1} \lambda^{\gamma+2-\mu} \right) \mathbf{A}^*(\lambda). \quad (4.95)$$

Die Matrizen  $\mathbf{A}_0^{\mu+1}$  und  $\mathbf{A}_1^{\mu+1}$  entsprechen den ersten beiden Koeffizientenmatrizen einer um die zur Näherung benutzten Struktur-Eigenwerte verminderten Matrix  $\mathbf{A}^{\mu+1}(\lambda)$ . Die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}_0^{\mu+1}$  ist gegenüber der Ausgangsmatrix  $\mathbf{A}_0$  unverändert

$$\mathbf{A}_0^{\mu+1} = \mathbf{A}_0 = \mathbf{K}_G, \quad (4.96)$$

die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}_1^{\mu+1}$  ergibt sich bei einer sukzessiven Reduktion der Matrix  $\hat{\mathbf{A}}(\zeta)$  nach dem Horner-Schema (3.107) zu

$$\mathbf{A}_1^{\mu+1} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \mathbf{X}_\nu \mathbf{\Lambda}_\nu^{-1} \mathbf{X}_\nu^{-1}. \quad (4.97)$$

Mit  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{K}_G$  und  $\mathbf{A}_1 = \mathbf{M}_G + \tilde{\mathbf{B}}_1^*$  aus (4.90) läßt sich schreiben

$$\mathbf{A}_1^{\mu+1} = \mathbf{M}_G + \tilde{\mathbf{B}}_1^* \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_G \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \mathbf{X}_\nu \mathbf{\Lambda}_\nu^{-1} \mathbf{X}_\nu^{-1}. \quad (4.98)$$

Die vollständige Normierungsvorschrift läßt sich jetzt wie folgt angeben:

$$\mathbf{A}_{r,0} + \mathbf{A}_{r,1} \lambda = \left[ \mathbf{A}_0^{\mu+1} + \mathbf{A}_1^{\mu+1} \lambda \right] \tilde{\mathbf{A}}^*(0)^{-1} \quad (4.99)$$

$$= \left[ \mathbf{K}_G + \left( \mathbf{M}_G + \tilde{\mathbf{B}}_1^* \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_G \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \mathbf{X}_\nu \mathbf{\Lambda}_\nu^{-1} \mathbf{X}_\nu^{-1} \right) \lambda \right] \tilde{\mathbf{A}}^*(0)^{-1} \quad (4.100)$$

und

$$\mathbf{B}_r = \tilde{\mathbf{B}}^*(0)^{-1}. \quad (4.101)$$

Sind die zur Näherung benutzten modalen Parameter der Struktur und des Slave-Systems bekannt, ist mit den Matrizen (4.100) und (4.101) eine geeignete Normierung der Matrizen  $\tilde{\mathbf{A}}(\lambda)$  und  $\tilde{\mathbf{B}}(\lambda)$ , möglich. Zur Berechnung der Normierungsmatrizen (4.100) und (4.101) müssen die Matrizen  $\mathbf{K}_G$  und  $\mathbf{M}_G$  aus der statischen Kondensation bekannt sein. Die Matrizen  $\mathbf{K}_G$  und  $\mathbf{M}_G$  entsprechen dabei der Steifigkeits- und Massenmatrix einer Struktur, die alleine durch Knoten an den Master-Freiheitsgraden diskretisiert wird.

## 4.4 Kondensation mit Hilfe von Linearfaktoren

Die Darstellung des linearen Schwingungsverhaltens einer Struktur mit Hilfe der FEM führt auf ein Gleichungssystem

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) \mathbf{x}_n = \mathbf{f}_n, \quad (4.102)$$

wobei  $n$  die Anzahl der Systemfreiheitsgrade ist.

Ein schwingungsfähiges lineares System läßt sich allgemein durch die Ein- Ausgangsgrößen- darstellung

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{f} \quad (4.103)$$

beschreiben.

Werden zur Darstellung der Systemeigenschaften einige wenige Freiheitsgrade, sogenannte Master-Freiheitsgrade benutzt, hat das Gleichungssystem (4.103) die Dimension  $m = n - s$ , wobei  $s$  die Anzahl der gegenüber den ursprünglichen Gleichungen (4.102) nicht abgebildeten Slave-Koordinaten ist.

Die Polynommatrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  lassen sich in lineare Faktoren zerlegen. Die Linearfaktoren werden aus Eigenwerten und -vektoren des Schwingungssystems bestimmt, wobei die Eigenwertaufgabe  $\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  die modalen Parameter der freibeweglichen Struktur liefert und die Aufgabe  $\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{f} = \mathbf{0}$  die Eigenwerte und -vektoren der an den Master-Koordinaten gelagerten Struktur als Lösung hat. Eine Freiheitsgradreduktion gegenüber dem Ausgangssystem (4.102) findet statt, wenn die Linearfaktoren alleine aus den Vektorkomponenten der Master-Freiheitsgrade bestimmt werden, die Berechnung der einzelnen Faktoren erfolgt dann rekursiv.

Eine vollständige Berücksichtigung der modalen Parameter führt auf Matrizen

$$\mathbf{A}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\mu+1} \mathbf{A}_i \lambda_i^i, \quad (4.104)$$

$$= \mathbf{A}_r \mathbf{X}_{\mu+1} \mathbf{D}_{\mu+1}(\lambda) \mathbf{X}_{\mu+1}^{-1} \cdots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda) \mathbf{X}_1^{-1} \quad (4.105)$$

$$\mathbf{B}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\mu} \mathbf{B}_j \lambda_j^j \quad (4.106)$$

$$= \mathbf{B}_r \mathbf{Z}_{s,\mu} \mathbf{D}_{s,\mu}(\lambda) \mathbf{Z}_{s,\mu}^{-1} \cdots \mathbf{Z}_{s,2} \mathbf{D}_{s,2}(\lambda) \mathbf{Z}_{s,2}^{-1} \mathbf{Z}_{s,1} \mathbf{D}_{s,1}(\lambda) \mathbf{Z}_{s,1}^{-1} \quad (4.107)$$

mit  $\mu + 1 = n/m$  bzw.  $\mu = n/s$ .

Werden jeweils  $\mu + 1 < n/m$  Eigenformen der Struktur und  $\mu < n/s$  Schwingungsformen des Slave-Systems berücksichtigt, findet eine Näherung des kondensierten Gleichungssystems (4.103) statt.

Durch die Linearfaktoren  $\mathbf{X}_\nu \mathbf{D}_\nu(\lambda) \mathbf{X}_\nu^{-1}$  und  $\mathbf{Z}_{s,\nu} \mathbf{D}_{s,\nu}(\lambda) \mathbf{Z}_{s,\nu}^{-1}$  der Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  werden die Schwingungsformen, d.h. das dynamische Verhalten der Struktur, erfaßt. Werden

einzelne, durch ein Element (4.103) dargestellte, Strukturen zu einem größeren System zusammengefügt, beschreibt (4.103) das Systemverhalten einer Substruktur. Damit die Übergangsbedingungen an den Koppelstellen zweier Substrukturen erfüllt werden können, ist es erforderlich, daß die entsprechenden (Rand-)Freiheitsgrade der Teilelemente zu Master-Freiheitsgraden gewählt wurden. Eine Mindestanzahl an Master-Freiheitsgraden, sowie deren Ort ist somit festgelegt. Soll das Schwingungsverhalten im unteren Frequenzbereich des Gesamtsystems betrachtet werden, sind die betragsniedrigen Struktur- und Slave-Eigenwerte bei der Ermittlung der Substrukturen zu berücksichtigen.

Neben den Schwingungsformen muß die genaue Statik der Teilsysteme erfaßt werden, dies kann durch eine Normierung der Linearfaktoren mit Hilfe der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_G$  und der Massenmatrix  $\mathbf{M}_G$  erfolgen. Die Matrizen  $\mathbf{K}_G$  und  $\mathbf{M}_G$  entstehen bei der Approximation des Strukturverhaltens mit den Ansatzfunktionen eines einzigen finiten Elementes und ergeben sich bei der statischen Kondensation des Gleichungssystems (4.102).

Besitzt das Schwingungssystem keine Eigenfrequenzen bei Null lautet die Normierungsvorschrift

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{K}_G \tilde{\mathbf{A}}^*(0)^{-1}, \quad (4.108)$$

$$\mathbf{B}_r = \tilde{\mathbf{B}}^*(0)^{-1} \quad (4.109)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{A}}^*(0) = \mathbf{X}_{\mu+1} \mathbf{D}_{\mu+1}(0) \mathbf{X}_{\mu+1}^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(0) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(0) \mathbf{X}_1^{-1} \quad (4.110)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}^*(0)^{-1} = \mathbf{Z}_{s,1} \mathbf{D}_{s,1}^{-1}(0) \mathbf{Z}_{s,1}^{-1} \mathbf{Z}_{s,2} \mathbf{D}_{s,2}^{-1}(0) \mathbf{Z}_{s,2}^{-1} \dots \mathbf{Z}_{s,\mu} \mathbf{D}_{s,\mu}^{-1}(0) \mathbf{Z}_{s,\mu}^{-1}. \quad (4.111)$$

Bei nicht gelagerten Substrukturen treten Starrkörperbewegungen auf, zur Normierung der Linearfaktoren werden sowohl die in diesem Falle singuläre Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_G$  als auch die Massenmatrix  $\mathbf{M}_G$  verwendet. Der Ansatz für die Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  lautet dann

$$\mathbf{A}(\lambda) = \mathbf{A}_r(\lambda) \mathbf{X}_\mu \mathbf{D}_\mu(\lambda) \mathbf{X}_\mu^{-1} \dots \mathbf{X}_2 \mathbf{D}_2(\lambda) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 \mathbf{D}_1(\lambda) \mathbf{X}_1^{-1} \quad (4.112)$$

mit

$$\mathbf{A}_r(\lambda) = \mathbf{A}_{r,0} + \mathbf{A}_{r,1} \lambda \quad (4.113)$$

$$= \left[ \mathbf{K}_G + \left( \mathbf{M}_G + \tilde{\mathbf{B}}_1^* \mathbf{K}_G + \mathbf{K}_G \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \mathbf{X}_\nu \mathbf{A}_\nu \mathbf{X}_\nu^{-1} \right) \lambda \right] \tilde{\mathbf{A}}^*(0)^{-1}. \quad (4.114)$$

Ein Vorteil der hier dargestellten Kondensation besteht darin, daß für den Aufbau der Systemmatrizen  $\tilde{\mathbf{A}}(\lambda)$  und  $\tilde{\mathbf{B}}(\lambda)$  lediglich ein Teil der modalen Parameter der Substruktur und der Slave-Struktur, sowie eine geeignete Normierungsmatrix, bekannt sein müssen. Die modalen Parameter können dabei rechnerisch mit Hilfe eines FE-Modells, aber auch experimentell ermittelt werden.

Die rechnerische Ermittlung der Eigenwerte und -vektoren der Matrix  $\tilde{\mathbf{A}}(\lambda)$  kann durch die Lösung der Eigenwertaufgabe  $(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \mathbf{x}_{n,i} = \mathbf{0}$  des Systems mit  $n$  Freiheitsgraden oder

durch Lösung der kondensierten Gleichungen  $\mathbf{D}_k(\lambda_i)\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$  erfolgen. Bei großen Systemordnungen ist die Ermittlung der Eigenwerte aufwendig, durch die Anwendung der Substrukturtechnik wird der Aufwand jedoch reduziert.

Zur Berechnung der Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}(\lambda)$  müssen die Slave-Eigenwerte  $\lambda_{s,j}$  und die entsprechenden Eigenvektoren  $\overset{\circ}{\mathbf{f}}_j$  bekannt sein. Werden in dem partitionierten Ausgangssystem (2.3) die Auslenkungen an den Master-Freiheitsgraden zu Null gesetzt, lassen sich die Vektoren  $\overset{\circ}{\mathbf{f}}_j$  aus der Beziehung

$$(\mathbf{K}_{ms} - \mathbf{M}_{ms}\lambda_{s,j}) \mathbf{x}_{s,j} = \overset{\circ}{\mathbf{f}}_j \quad (4.115)$$

bestimmen. Gleichung (4.115) gibt den Einfluß der Slave-Struktur auf die kondensierte Struktur wieder. Zur Berechnung der Matrix  $\mathbf{B}(\lambda)$  ist somit die Lösung des Eigenwertproblems  $(\mathbf{K}_{ms} - \mathbf{M}_{ms}\lambda_{s,j}) \mathbf{x}_{s,j} = \mathbf{0}$  des Slave-Systems notwendig. Der Aufwand zur Bestimmung der modalen Parameter der Slave-Struktur wird wiederum durch die Verwendung der Substrukturtechnik reduziert.

Die modalen Parameter der Substruktur und des entsprechenden Slave-Systems lassen sich prinzipiell auch aus experimentellen Daten bestimmen. Es müssen die Eigenwerte und -formen der freischwingenden Substruktur ermittelt werden, wobei lediglich die Vektorkomponenten der Masterfreiheitsgrade zu bestimmen sind. Neben den Eigenfrequenzen der Slave-Struktur, sind die Kräfte und Momente an den fest eingespannten Master-Freiheitsgraden der freischwingenden Substruktur zu bestimmen. Es ist anzumerken, daß die Realisierung einer an den Master-Koordinaten fest eingespannten Struktur in der Praxis nur annähernd möglich ist ([24]). Eine Verifizierung der Tauglichkeit der hier gezeigten Vorgehensweise für experimentelle Daten ist daher noch nachzuweisen.

Die Kondensation eines Gleichungssystems mit Hilfe von Linearfaktoren ist in Abbildung 4.4 schematisch dargestellt.

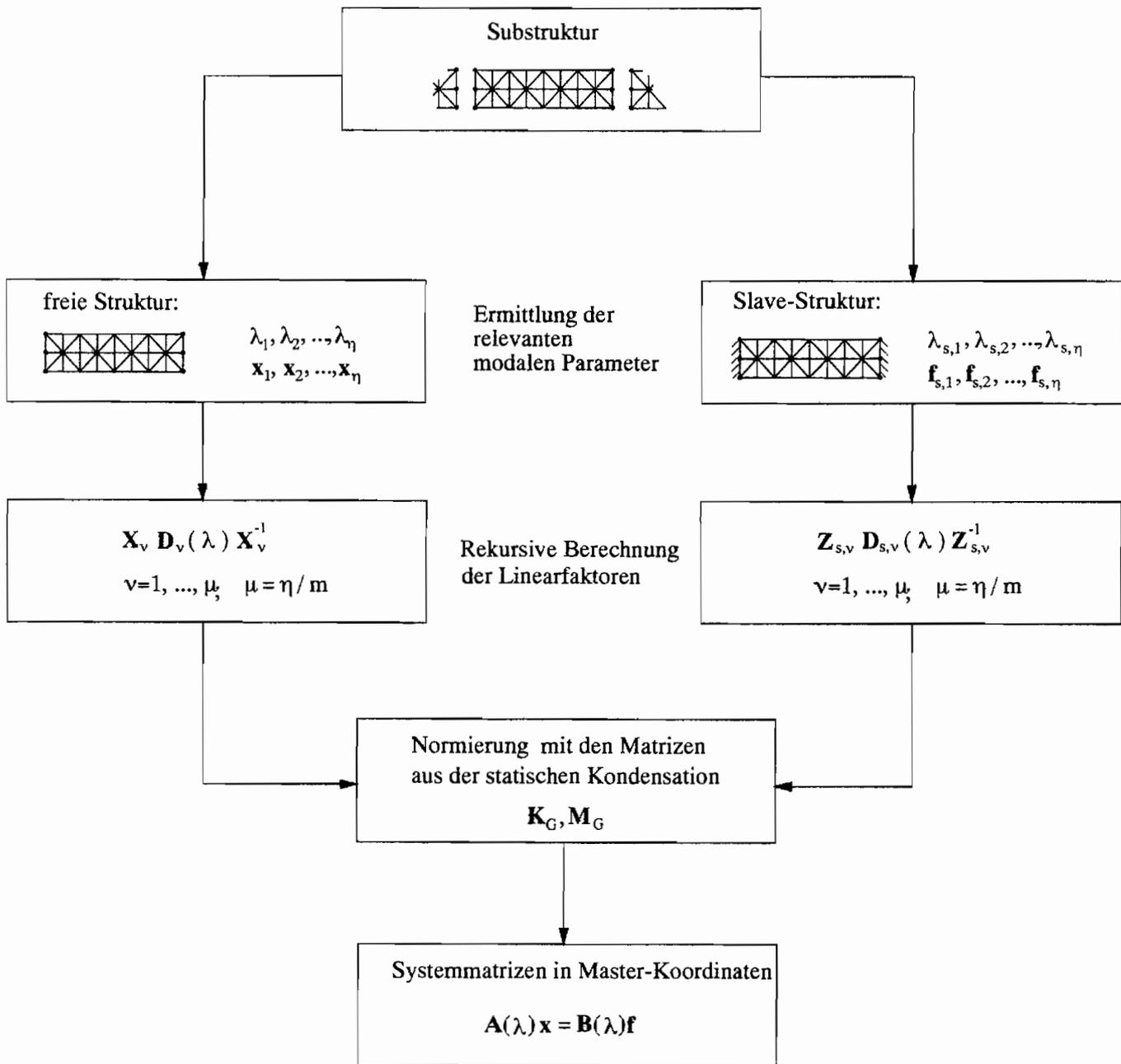


Abbildung 4.4: Kondensation einer Substruktur mit Hilfe von Linearfaktoren

#### 4.4.1 Kopplung von Teilsystemen

Es werden Möglichkeiten zur Kopplung von Systemen angegeben, die durch die allgemeine Ein-Ausgangsgrößendarstellung

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{f} \quad (4.116)$$

beschrieben werden, wobei  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  Polynommatrizen vom Grad  $\mu + 1$  und  $\mu$  mit der Dimension  $m \times m$  sind

$$\mathbf{A}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\mu+1} \mathbf{A}_i \lambda_i^i, \quad (4.117)$$

$$\mathbf{B}(\lambda) = \sum_{j=0}^{\mu} \mathbf{B}_j \lambda_j^j. \quad (4.118)$$

Werden in den Vektoren der Teilstrukturen die Koppelfreiheitsgrade mit dem Index  $k$  gekennzeichnet, läßt sich bei der Kopplung zweier Teilstrukturen  $\alpha$  und  $\beta$  an den Schnittstellen die Übergangsbedingung

$$\mathbf{x}_k^\alpha = \mathbf{x}_k^\beta \quad (4.119)$$

angeben. Weiterhin muß an den Koppelknoten das Kräftegleichgewicht

$$\mathbf{f}_k^\alpha + \mathbf{f}_k^\beta = \mathbf{f}_k \quad (4.120)$$

erfüllt werden, wobei  $\mathbf{f}_k$  von außen an das System angreifende Kräfte darstellen.

Die kondensierte Systembeschreibung in der Form (4.116) unterscheidet sich durch die Kopplung der Komponenten des Erregungsvektors von der ursprünglichen, unkondensierten Darstellung des Systems, mit  $n$  Freiheitsgraden. Das Kräftegleichgewicht kann jetzt nicht mehr einfach durch das Addieren der jeweiligen Kräfte an den Kopplungskoordinaten erfüllt werden, da dazu ein Auflösen des Gleichungssystems nach dem Erregungsvektor notwendig ist.

Prinzipiell lassen sich zwei Methoden zur Kopplung von Elementen angeben, welche durch die allgemeine Ein- Ausgangsgrößendarstellung (4.116) beschrieben werden:

- Kopplung für einen festen Parameter  $\lambda = \lambda_i$
- Analytische Kopplung.

Bei der Kopplung für einen festen Parameter wird eine Teilstruktur (4.116) durch konstante Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda_i)$  und  $\mathbf{B}(\lambda_i)$  bei der Frequenz  $\lambda = \lambda_i$  beschrieben. Die Gesamtstruktur liegt nur für diesen Punkt vor, die Eigenwerte des Gesamtsystems werden mit Verfahren zur iterativen Nullstellensuche ermittelt. Zur Erfüllung der Kopplungsbedingungen an den Schnittstellen, wird die Matrix  $\mathbf{B}(\lambda_i)$  invertiert. Liegen die Eigenwerte der Gesamtstruktur in der Nähe der Slave-Eigenwerte einer Teilstruktur, kann  $\mathbf{B}(\lambda_i)$  schlecht konditioniert sein

und eine Invertierung von  $\mathbf{B}(\lambda_i)$  zu ungenauen Ergebnissen führen. Entsprechen die Masterfreiheitsgrade den Randfreiheitsgraden der Teilstruktur, ist  $\mathbf{B}(\lambda_i)$  von geringer Dimension, es müssen nur Matrizen geringer Größe invertiert werden.

Bei der analytischen Kopplung erfolgt das Zusammensetzen und die Beschreibung der Teilsysteme in Form von Polynommatrizen im Bildbereich bzw. als Differentialgleichungssysteme im Zeitbereich. Die Beschreibung des Gesamtsystems erfolgt ebenfalls in Form von Polynommatrizen bzw. als Differentialgleichungssystem, zur weiteren numerischen Behandlung des Gleichungssystems stehen dann zahlreiche Verfahren zur Verfügung.

Im folgenden wird eine analytische Kopplung von Teilsystemen (4.116) realisiert. Damit dies ohne eine Inversion der Polynommatrix  $\mathbf{B}(\lambda)$  gelingt, werden die einzelnen Teilstrukturen nicht direkt, sondern mit Hilfe von Elementen verbunden, deren rechte Seite entkoppelt ist (siehe Abbildung 4.5). Das ist z.B. bei finiten Feder-Masse-Elementen der Fall, welche durch die Gleichungen  $(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M})\mathbf{x} = \mathbf{f}$  dargestellt werden.

Es ist anzumerken, daß die Kopplung von Teilsystemen, die durch die Gleichungen (4.116) dargestellt werden, grundsätzlich durch das Verfahren von Kron möglich ist. Die einzelnen Elementmatrizen werden dabei zu einer sogenannten Kron-Matrix zusammengesetzt. Die Größe dieser Matrix ergibt sich aus der Summe der einzelnen Matrizendimensionen der Teilsysteme. Es lassen sich hiermit jedoch nur die Eigenwerte der gekoppelten Struktur ermitteln, welche durch die Lösung einer nichtlinearen Eigenwertaufgabe berechnet werden. Für Strukturen, die durch lineare Polynommatrizen dargestellt werden, wird das Verfahren in [96] beschrieben.

### Kopplung der Teilstrukturen mit Hilfe von Koppellementen

Zur Herleitung der Kopplungsbeziehungen werden die Gleichungen der Teilsysteme wie folgt partitioniert:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^q(\lambda) & \mathbf{A}_{12}^q(\lambda) \\ \mathbf{A}_{21}^q(\lambda) & \mathbf{A}_{22}^q(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^q \\ \mathbf{x}_2^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11}^q(\lambda) & \mathbf{B}_{12}^q(\lambda) \\ \mathbf{B}_{21}^q(\lambda) & \mathbf{B}_{22}^q(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^q \\ \mathbf{f}_2^q \end{pmatrix}; \quad q = \alpha, \beta. \quad (4.121)$$

Ein Koppellement wird durch die Gleichungen

$$\left[ \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix} \lambda \right] \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2^\alpha \\ \mathbf{x}_1^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11}(\lambda) & \mathbf{D}_{12}(\lambda) \\ \mathbf{D}_{21}(\lambda) & \mathbf{D}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_2^\alpha \\ \mathbf{x}_1^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_k^\alpha \\ \mathbf{f}_k^\beta \end{pmatrix}. \quad (4.122)$$

beschrieben. (Die Frequenzabhängigkeit der Matrizen  $\mathbf{A}_{ij}(\lambda)$ ,  $\mathbf{B}_{ij}(\lambda)$  und  $\mathbf{D}_{ij}(\lambda)$  wird im folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht extra gekennzeichnet.)

Die Kompatibilitätsbedingungen zwischen den einzelnen Elementen werden durch identische Koordinaten von Teilstruktur und Kopplungselement an den Elementgrenzen erfüllt. Das

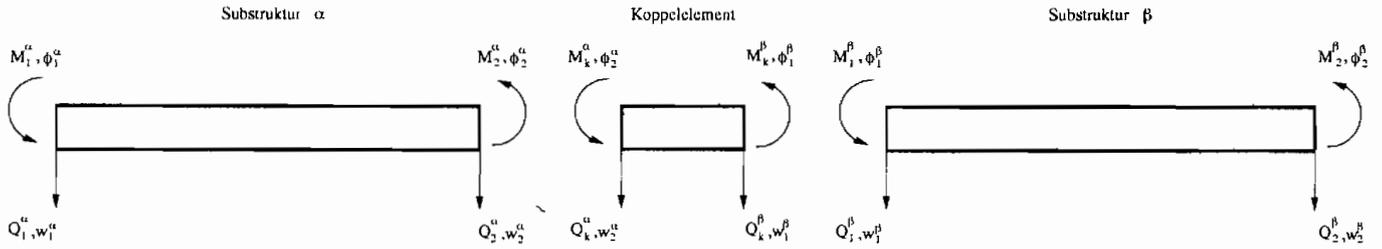


Abbildung 4.5: Kopplung zweier Balken-Substrukturen mit einem Koppellement

Kräftegleichgewicht an den Koppelknoten liefert

$$\mathbf{f}_{k1} = \mathbf{f}_2^\alpha + \mathbf{f}_k^\alpha \quad (4.123)$$

$$\mathbf{f}_{k2} = \mathbf{f}_1^\beta + \mathbf{f}_k^\beta \quad (4.124)$$

bzw. nach den unbekanntenen Erregungen der Teilsysteme  $\mathbf{f}_2^\alpha$  und  $\mathbf{f}_1^\beta$  aufgelöst

$$\mathbf{f}_2^\alpha = \mathbf{f}_{k1} - \mathbf{f}_k^\alpha = \mathbf{f}_{k1} - \mathbf{D}_{11}\mathbf{x}_2^\alpha - \mathbf{D}_{12}\mathbf{x}_2^\alpha \quad (4.125)$$

$$\mathbf{f}_1^\beta = \mathbf{f}_{k2} - \mathbf{f}_k^\beta = \mathbf{f}_{k2} - \mathbf{D}_{11}\mathbf{x}_1^\beta - \mathbf{D}_{12}\mathbf{x}_1^\beta. \quad (4.126)$$

Mit den Beziehungen (4.125) und (4.126) können die Erregungen  $\mathbf{f}_2^\alpha$  und  $\mathbf{f}_1^\beta$  aus den Gleichungen (4.121) eliminiert werden:

$$\mathbf{A}_{11}^\alpha \mathbf{x}_1^\alpha + \mathbf{A}_{12}^\alpha \mathbf{x}_2^\alpha = \mathbf{B}_{11}^\alpha \mathbf{f}_{k1} + \mathbf{B}_{12}^\alpha \mathbf{f}_{k1} - \mathbf{B}_{12}^\alpha \mathbf{D}_{11} \mathbf{x}_2^\alpha + \mathbf{B}_{12}^\alpha \mathbf{D}_{12} \mathbf{x}_1^\beta \quad (4.127)$$

$$\mathbf{A}_{21}^\alpha \mathbf{x}_1^\alpha + \mathbf{A}_{22}^\alpha \mathbf{x}_2^\alpha = \mathbf{B}_{21}^\alpha \mathbf{f}_{k1} + \mathbf{B}_{22}^\alpha \mathbf{f}_{k1} - \mathbf{B}_{22}^\alpha \mathbf{D}_{11} \mathbf{x}_2^\alpha + \mathbf{B}_{22}^\alpha \mathbf{D}_{12} \mathbf{x}_1^\beta \quad (4.128)$$

$$\mathbf{A}_{11}^\beta \mathbf{x}_1^\beta + \mathbf{A}_{12}^\beta \mathbf{x}_2^\beta = \mathbf{B}_{11}^\beta \mathbf{f}_{k2} + \mathbf{B}_{12}^\beta \mathbf{f}_{k2} - \mathbf{B}_{11}^\beta \mathbf{D}_{21} \mathbf{x}_2^\alpha - \mathbf{B}_{11}^\beta \mathbf{D}_{22} \mathbf{x}_1^\beta \quad (4.129)$$

$$\mathbf{A}_{21}^\beta \mathbf{x}_1^\beta + \mathbf{A}_{22}^\beta \mathbf{x}_2^\beta = \mathbf{B}_{21}^\beta \mathbf{f}_{k2} + \mathbf{B}_{22}^\beta \mathbf{f}_{k2} - \mathbf{B}_{21}^\beta \mathbf{D}_{21} \mathbf{x}_2^\alpha - \mathbf{B}_{21}^\beta \mathbf{D}_{22} \mathbf{x}_1^\beta. \quad (4.130)$$

Es ergibt sich das gekoppelte System

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^\alpha & \mathbf{A}_{12}^\alpha + \mathbf{B}_{12}^\alpha \mathbf{D}_{11} & \mathbf{B}_{12}^\alpha \mathbf{D}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21}^\alpha & \mathbf{A}_{22}^\alpha + \mathbf{B}_{22}^\alpha \mathbf{D}_{11} & \mathbf{B}_{22}^\alpha \mathbf{D}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{11}^\beta \mathbf{D}_{21} & \mathbf{A}_{11}^\beta + \mathbf{B}_{11}^\beta \mathbf{D}_{22} & \mathbf{A}_{12}^\beta \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{21}^\beta \mathbf{D}_{21} & \mathbf{A}_{21}^\beta + \mathbf{B}_{21}^\beta \mathbf{D}_{22} & \mathbf{A}_{22}^\beta \end{pmatrix} \mathbf{x}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11}^\alpha & \mathbf{B}_{12}^\alpha & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{21}^\alpha & \mathbf{B}_{22}^\alpha & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{11}^\beta & \mathbf{B}_{12}^\beta \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{21}^\beta & \mathbf{B}_{22}^\beta \end{pmatrix} \mathbf{f}^{\alpha\beta} \quad (4.131)$$

oder kurz

$$\mathbf{A}^{\alpha\beta}(\lambda) \mathbf{x}^{\alpha\beta} = \mathbf{B}^{\alpha\beta}(\lambda) \mathbf{f}^{\alpha\beta} \quad (4.132)$$

mit den Vektoren

$$\mathbf{x}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^\alpha \\ \mathbf{x}_2^\alpha \\ \mathbf{x}_1^\beta \\ \mathbf{x}_2^\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^\alpha \\ \mathbf{f}_{k1} \\ \mathbf{f}_{k2} \\ \mathbf{f}_2^\beta \end{pmatrix}. \quad (4.133)$$

Die Matrizen  $\mathbf{A}^{\alpha\beta}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}^{\alpha\beta}(\lambda)$  sind nicht symmetrische Polynommatrizen der Dimension  $m^\alpha + m^\beta$ .  $\mathbf{A}^{\alpha\beta}(\lambda)$  hat den Polynomgrad  $\max(\mu^\alpha, \mu^\beta)$  und  $\mathbf{B}^{\alpha\beta}(\lambda)$  entsprechend den um eins verringerten Grad  $\max(\mu^\alpha - 1, \mu^\beta - 1)$ .

Die Lösung des nichtlinearen Eigenwertproblems

$$\mathbf{A}^{\alpha\beta}(\lambda)\mathbf{x}^{\alpha\beta} = \mathbf{0} \quad (4.134)$$

liefert die Eigenwerte und -vektoren des Gesamtsystems. Die modalen Parameter der gekoppelten Struktur können durch die im Kapitel 3.4 angegebenen Verfahren zur Lösung des Eigenwertproblems für nichtlineare Polynommatrizen ermittelt werden.

Durch die Verwendung von Kopplungselementen deren rechte Seite entkoppelt ist, lassen sich ebenfalls Lagerungen der gekoppelten Struktur realisieren.

Zur Vermeidung eines Aufsummierens von betragsmäßig zu unterschiedlichen Matrizenelementen, ist es günstig Koppellemente zu verwenden, die ähnliche Materialeigenschaften und Abmessungen wie die finiten Elemente der Substrukturen aufweisen.

#### 4.4.2 Anwendungsbeispiele

Anhand von einfachen Beispielen wird die Eignung der in den vorherigen Abschnitten aufgezeigten Näherungsansätze zur Beschreibung der dynamischen Eigenschaften einer Struktur überprüft.

Aus Balken und Stäben bestehende Gebilde werden zunächst in einzelne Substrukturen zerlegt und anschließend auf ihre Randfreiheitsgrade kondensiert. Zur Berechnung der Teilsysteme werden unterschiedlich viele Eigenformen der freibeweglichen und der an den Rändern fest eingespannten Substruktur verwendet. Die Gesamtstruktur wird aus den so genähereten Elementen aufgebaut und die Eigenwerte und -formen mit denen der genauen Systemdarstellung, d.h. der FEM-Lösung verglichen.

#### Substrukturen

Die einzelnen Substrukturen werden aus jeweils elf finiten Balken- bzw. Stabelementen zusammengesetzt und auf die Randkoordinaten kondensiert.

Eine aus Balken- oder Stabelementen bestehende Teilstruktur wird durch die Gleichungen

$$\mathbf{A}^q(\lambda)\mathbf{x}^q = \mathbf{B}^q(\lambda)\mathbf{f}^q \quad (4.135)$$

mit den Polynommatrizen

$$\mathbf{A}^q(\lambda) = \sum_{i=0}^{\mu+1} \mathbf{A}_i^q \lambda^i, \quad (4.136)$$

$$\mathbf{B}^q(\lambda) = \sum_{j=0}^{\mu} \mathbf{B}_j^q \lambda^j \quad (4.137)$$

dargestellt.

Die Freiheitsgradanzahl eines unkondensierten Stabelements beträgt  $n_s = 12$ , die eines Balkenelements  $n_b = 24$ . Die Matrizen  $\mathbf{A}^q(\lambda)$  und  $\mathbf{B}^q(\lambda)$  haben für einen Stab die Dimension  $m_s = 2$  und für einen Balken die Dimension  $m_b = 4$ . Bei der vollständigen Berücksichtigung der Linearfaktoren der Matrizen ergibt sich der Polynomgrad  $\mu + 1 = n_s/m_s = n_b/m_b = 7$ .

Die Substrukturen sind zunächst nicht gelagert und können Starrkörperbewegungen ausführen. Die Matrix  $\mathbf{B}^q(\lambda)$  wird so normiert, daß  $\mathbf{B}_0^q = \mathbf{I}$  ist, die Normierung der Linearfaktoren der Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  erfolgt durch die Matrix  $\mathbf{A}_r^q(\lambda) = \mathbf{A}_{r,0}^q + \mathbf{A}_{r,1}^q \lambda$ . Dazu müssen sowohl die (singuläre) Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_G$  als auch die Massenmatrix  $\mathbf{M}_G$  bestimmt werden. Die Matrizen  $\mathbf{K}_G$  und  $\mathbf{M}_G$  errechnen sich aus der statischen Kondensation nach Guyan. Bei Balken und Stäben entsprechen  $\mathbf{K}_G$  und  $\mathbf{M}_G$  der Darstellung der Teilstruktur mit einem finiten Balken- bzw. Stabelement.

Durch die Verwendung gleicher Substrukturen, muß die Berechnung der Matrizen  $\mathbf{A}^q(\lambda)$  und  $\mathbf{B}^q(\lambda)$  nur einmal erfolgen, wodurch der Rechen- und Speicheraufwand gering gehalten wird.

Die Teilstrukturen haben jeweils die Kennwerte:

$$\begin{aligned} l &= 1m \\ E &= 2.1 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2} \\ \rho_d &= 7850 \frac{kg}{m^3} \\ A &= 0.0001m^2 \\ I &= 8.33 \cdot 10^{-10}m^4 \end{aligned}$$

### Koppelemente

Zur Kopplung der Teilstrukturen werden unkondensierte finite Elemente des Stabes bzw. des Balkens benutzt. Die Freiheitsgradanzahl eines Koppelements entspricht der Anzahl der Masterkoordinaten einer kondensierten Substruktur.

$$(\mathbf{K}_k + \mathbf{M}_k \lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_k^q \\ \mathbf{x}_k^{q+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_k^q \\ \mathbf{f}_k^{q+1} \end{pmatrix}. \quad (4.138)$$

Die Materialkenngrößen und der Querschnitt der Koppelemente sind identisch mit denen einer Substruktur. Die Länge eines Koppelements beträgt  $l_k = 0.1m$ . Durch die Wahl ähnlicher Elementlängen für die finiten Elemente einer Substruktur und für ein Koppelement, wird das fehlerträchtige Aufsummieren betragsmäßig stark unterschiedlicher Matrizenelemente vermieden.

Die Lagerung der Gesamtstruktur wird durch Koppellelemente realisiert, eine Berechnung zusätzlicher Substrukturen wird somit vermieden.

### Berechnung der modalen Parameter einer Teilstruktur

Zur Erzeugung der Matrizen  $\mathbf{A}^q(\lambda)$  und  $\mathbf{B}^q(\lambda)$  einer Substruktur müssen die modalen Parameter der freien Teilstruktur und der entsprechenden Slave-Struktur bekannt sein. Bei der Ermittlung der Eigenwerte und -vektoren der Eigenwertaufgaben

$$(\mathbf{K}^q - \mathbf{M}^q \lambda) \mathbf{x}_n^q = \mathbf{0} \quad (4.139)$$

und

$$(\mathbf{K}_{ss}^q - \mathbf{M}_{ss}^q \lambda) \mathbf{x}_s^q = \mathbf{0} \quad (4.140)$$

einer Substruktur kommt hier der QZ-Algorithmus zum Einsatz.

Für größere Strukturen (einige hundert Freiheitsgrade) sind z.B. die Subspace-Iteration oder das Lanczos-Verfahren geeignete Methoden zur Berechnung der ersten, zur Systembeschreibung benutzten, unteren Eigenwerte und -vektoren einer Substruktur.

Eine Substruktur ist in den folgenden Beispielen entweder aus Balkenelementen oder aus Balken- und Stabelementen zusammengesetzt. In der Tabelle 4.1 sind die Struktur- und Slave-Eigenwerte der einzelnen Elemente angegeben.

Die Eigenwerte und -formen werden jeweils blockweise zu Linearfaktoren ergänzt. Dabei besteht der  $\nu$ -te Block für einen Balken aus jeweils vier Eigenwerten und -formen und der für ein Stabelement aus je zwei modalen Parametern.

Die Eigenwerte bei Null, d.h. die Starrkörperverschiebungen, werden durch die Normierungsmatrix  $\mathbf{K}_G$  erfasst und müssen daher nicht in den Linearfaktoren berücksichtigt werden. Aufgrund der Normierung mit der Matrix  $\mathbf{A}_r^q(\lambda) = \mathbf{A}_{r,0}^q + \mathbf{A}_{r,1}^q \lambda$  werden, neben den Starrkörperbewegungen, noch höherfrequente Eigenformen abgebildet. Bei der Berücksichtigung der ersten fünf Blöcke  $\nu = 1$  bis  $\nu = 5$  sind das die Schwingungsformen des Blockes bei  $\nu = 6$ , womit der Ansatz mit  $\nu = 5$  Linearfaktoren vollständig ist.

Die Eigenwerte einer Substruktur, sowie die Aufteilung der Eigenwerte auf die  $\nu$  Linearfaktoren sind in Tabelle 4.1 angegeben.

### Berechnung der modalen Parameter des Gesamtsystems

Zur Berechnung der modalen Parameter einer aus den Elementen (4.135) und (4.138) zusammengesetzten Struktur ist die Lösung der Eigenwertaufgabe

$$\mathbf{A}(\lambda) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (4.141)$$

notwendig.

## 112 Anwendung der Faktorenerlegung auf das kondensierte Gleichungssystem

Block-Nr. $\nu$	Struktur-Eigenfrequenzen $f_j$ in [Hz]		Slave-Eigenfrequenzen $f_{s,j}$ in [Hz]	
	Balken	Stab	Balken	Stab
0	0.0	-	-	-
	0.0	0.0	-	-
1	53.16724	3669.735	53.1672	3669.735
	146.5792	7414.387	146.5803	7414.387
	287.4883	-	287.4993	-
	475.7294	-	475.7934	-
2	712.0177	11309.790	712.2775	11309.790
	997.5107	15431.431	998.3419	15431.431
	1333.844	-	1336.078	-
	1722.656	-	1727.881	-
3	2162.731	19847.260	2173.402	19847.260
	2625.443	24597.168	2640.738	24597.168
	3419.661	-	3452.874	-
	4043.691	-	4112.219	-
4	4805.357	29645.746	4918.296	29645.746
	5688.936	34791.676	5862.673	34791.676
	6708.709	-	6961.906	-
	7884.347	-	8232.907	-
5	9231.302	39540.380	9676.280	39540.380
	10741.585	43045.484	11243.331	43045.484
	12338.098	-	12778.961	-
	13771.449	-	13972.316	-
6	17208.499	44360.175	-	-
	17225.168	-	-	-

Tabelle 4.1: Aufteilung der Eigenfrequenzen von Balken und Stab einer Substruktur (mit  $\lambda = \omega^2$  und  $f = \omega/(2\pi)$ )

Zur Lösung der Eigenwertaufgabe (4.141) können die in Kapitel 3.4 angegebenen Algorithmen für Polynommatrizen verwendet werden.

Als ein sicheres Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren einer Polynommatrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  hat sich die Rayleigh-Quotienten-Iteration erwiesen. Das Verfahren konvergiert quadratisch für Näherungswerte nahe bei den zu ermittelnden Eigenwerten. Von dem Startvektor wird lediglich verlangt, daß dieser nicht orthogonal zu dem Eigenvektor des gesuchten Eigenwerts ist.

Die Berechnung geeigneter Startwerte für die Rayleigh-Quotienten-Iteration erfolgt mit Hilfe des Sekanten-Verfahrens. Die Iteration mit dem Sekanten-Verfahren lieferte nach 3 bis 5 Sekantenschritten ausreichend genau Näherungswerte, als Starvektor für die Rayleigh-Iteration wurde der Einsvektor  $\mathbf{w}_0 = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$  benutzt.

Der Polynomgrad der Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  kann je nach Näherung soweit reduziert sein (Polynomgrade kleiner zehn), daß es wieder günstig sein kann Verfahren zur Lösung der linearisierten Eigenwertaufgabe zu verwenden. Dabei wurde hier der QZ-Algorithmus ([115], [100]) aus der NAG-Programmbibliothek eingesetzt. Der Algorithmus gehört zu den sogenannten globalen Eigenwertlösern, das bedeutet es werden sämtliche im Spektrum enthaltenen Eigenwerte und -vektoren simultan ermittelt. Aufgrund schlecht konditionierter Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  lassen sich für höhere Polynomgrade nur grobe Eigenwertnäherungen berechnen, man erhält jedoch eine gute Übersicht über das gesamte Spektrum. Die mit dem QZ-Algorithmus ermittelten Eigenwerte stellen im allgemeinen geeignete Startwerte für die Rayleigh-Quotienten-Iteration dar.

## Biegebalken

Ein einseitig eingespannter Balken wird aus drei Substrukturen zusammengesetzt. Die einzelnen Teilsysteme werden durch Koppelemente verbunden, wobei ein zusätzliches Element zur Erfüllung der Randbedingungen an der Einspannstelle benötigt wird. Auf diese Weise wird die Ermittlung der modalen Parameter einer einseitig gelagerten Substruktur vermieden.

Die Gesamtstruktur ist in Abbildung 4.6 dargestellt, wobei lediglich die Orte der Master-Freiheitsgrade eingezeichnet wurden. Die Anzahl der Freiheitsgrade einer Substruktur wurde von  $n_q = 24$  auf  $m_q = 4$  reduziert, die am Rand fest eingespannte Gesamtstruktur läßt sich durch Matrizen der Dimension  $12 \times 12$  beschreiben. Der Polynomgrad der ungenäherten Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  beträgt  $\mu = 6$  und der der Matrix  $\mathbf{B}(\lambda)$   $\mu = 5$ . Eine FE-Modellierung des Gesamtsystems führt, unter Berücksichtigung der Koppelemente, auf Matrizen der Größe  $72 \times 72$ .

Die Eigenwerte und -formen des zusammengesetzten Systems werden für einen Frequenzbereich von 0-300 Hz ermittelt. Die genaue Lösung, unter Berücksichtigung von  $\nu = 5$  Linearfaktoren der Matrix  $\mathbf{A}^q(\lambda)$ , zeigt, daß insgesamt 12 Eigenwerte im untersuchten Bereich liegen. Die Eigenfrequenzen und die Fehler für verschiedene Näherungen sind in der Tabelle

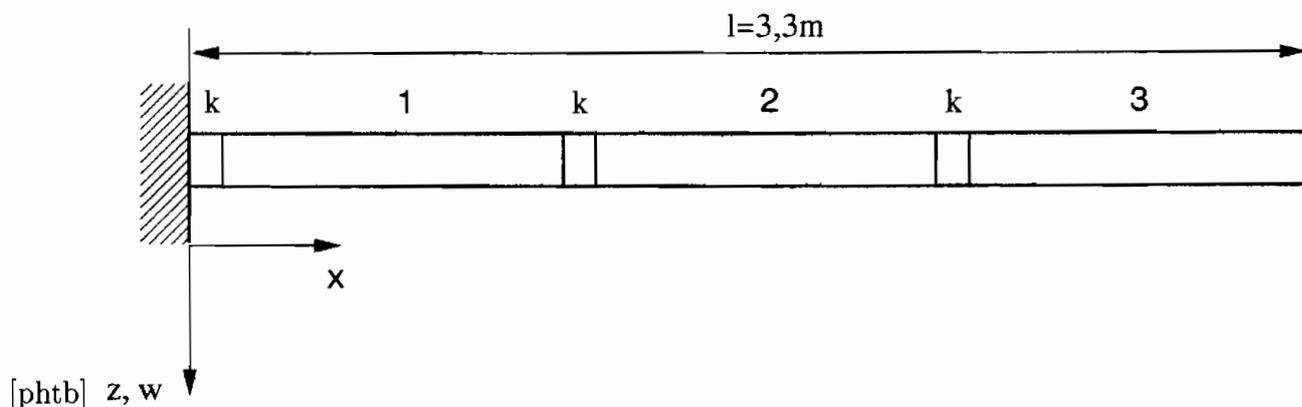


Abbildung 4.6: Aus drei Substrukturen (1, 2, 3) und Koppellementen (k) zusammengesetzter Balken

4.2 aufgeführt.

Für die statische Kondensation ( $\nu = 0$ ) und einem Ansatz mit den ersten vier Slave-Eigenformen ( $\nu = 1$ ) wurden zusätzlich zu den Eigenwerten die Eigenformen der Gesamtstruktur ermittelt. Die Verschiebungen  $w(x)$  sind in den Abbildungen 4.7 und 4.8 bzw. 4.9 für die Master- und Slave-Freiheitsgrade dargestellt. Zur Rückrechnung auf die Slave-Komponenten der Vektoren wurde die exakte Beziehung zwischen den Master- und Slave-Koordinaten (2.69) verwendet.

Bei der Kondensation für  $\nu = 0$  wird der Einfluß der Slave-Struktur auf das Gesamtsystem alleine durch die statischen Verschiebungen erfaßt. Die ersten drei Eigenformen können mit dem Verfahren gut approximiert werden, die Überlagerung der Schwingungsformen der Slave-Struktur wirkt sich nur wenig aus. Entsprechend ist der Eigenfrequenzfehler unter 1%. Die vierte Eigenform weist jedoch bereits eine deutliche Abweichung gegenüber dem sinusförmigen Schwingungsverlauf eines kontinuierlichen Bernoulli-Balkens auf. Ab der fünften Eigenfrequenz ist der Fehler so groß (18.5 %), daß eine brauchbare Abbildung des Schwingungsverhaltens nicht mehr möglich ist.

Für eine Näherung unter der Verwendung von vier Slave- und Struktur-Eigenformen ( $\nu = 1$ ) bleibt der Fehler bis zur 9. Eigenfrequenz unter 1%. Die Eigenformen geben das Schwingungsverhalten entsprechend gut wieder. Ab der 10. Eigenfrequenz ist ein deutlicher Anstieg des Fehlers zu bemerken, dieser bleibt jedoch bis zur 14. Eigenfrequenz unter 2% (vgl. Abbildung 4.10). Die 10. Eigenfrequenz ( $f_{g,10} = 194.428\text{ Hz}$ ) liegt in der Nähe der halben maximal berücksichtigten Slave- und Struktur-Eigenfrequenzen  $f_{s,4} = 475.793\text{ Hz}$  bzw.  $f_6 = 475.728\text{ Hz}$ . Die 15. Eigenfrequenz ( $f_{g,15} = 453.570\text{ Hz}$ ) liegt knapp unterhalb dieser Frequenzen und ist, bei einem Fehler von 3.2175%, die letzte noch ausreichend genau approximierete Eigenfrequenz, alle weiteren wurden mit einem Fehler größer 20% ermittelt.

Bei der Verwendung eines Ansatzes  $\nu = 2$  ist ebenfalls ein deutliches Ansteigen des Eigenfrequenzfehlers in der Nähe der halben maximalen Eigenfrequenzen der Struktur ( $f_{10} = 1722.656$  Hz) und des Slave-Systems ( $f_{s,8} = 1727.8813$  Hz) festzustellen. Bis zur Eigenfrequenz  $f_{21} = 910.810$  Hz bleibt der Fehler unter 1%.

Die Frequenzfehler für die Ansätze  $\nu = 1$ ,  $\nu = 2$  und  $\nu = 3$  sind in Abbildung 4.10 dargestellt. Es wurden die Bereiche gekennzeichnet, die unterhalb der maximalen bzw. halben maximalen Slave-Eigenfrequenz  $f_{s,max}$  eines Blockes  $\nu$  liegen. Es läßt sich erkennen, daß die Teilstruktur-Eigenfrequenzen Grenzen für Bereiche verschiedener Genauigkeit angeben. Somit ist eine vorherige Abschätzung des Gültigkeitsbereichs der Näherung möglich. Es ist anzumerken, daß hier aufgrund der Nähe der Slave-Eigenfrequenzen zu den Eigenfrequenzen der ungefesselten Substruktur eine Abschätzung des Gültigkeitsbereichs ebenso mit letzterem möglich ist.

Durch die Verwendung von exakten Eigenformen der ungefesselten Teilstruktur zur Näherung des Gesamtsystemverhaltens ist zu beobachten, daß die genäherten Eigenfrequenzen ober- und unterhalb der exakten Frequenzen liegen können (vgl. Kapitel 2.3.2).

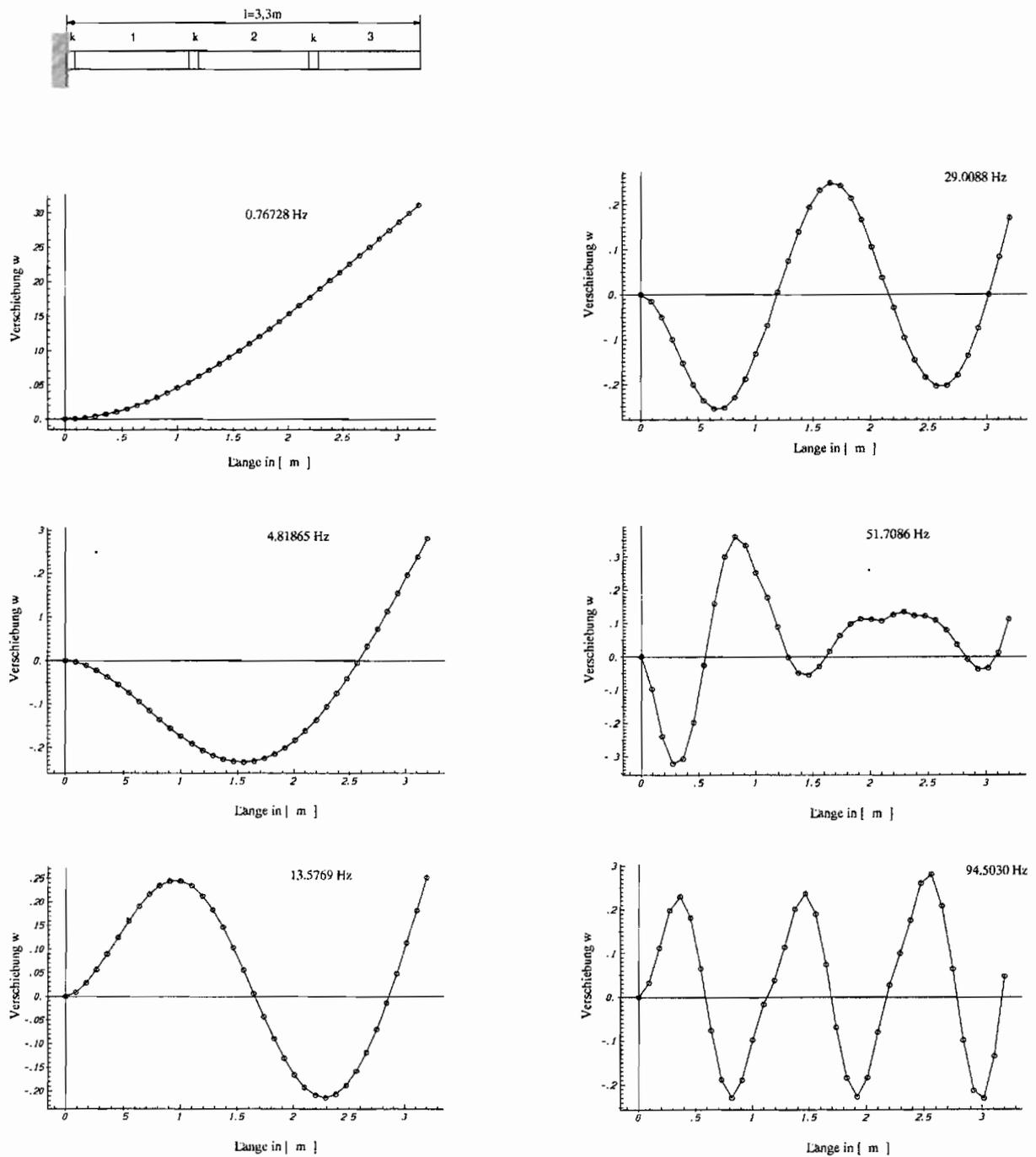


Abbildung 4.7: Eigenformen (Verschiebung  $w$ ) des einseitig eingespannten Biegebalken bei einer statischen Kondensation ( $\nu = 0$ )

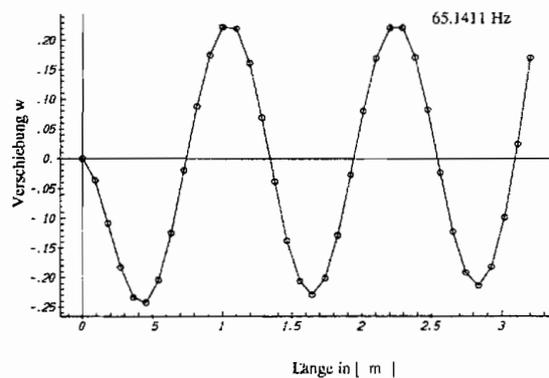
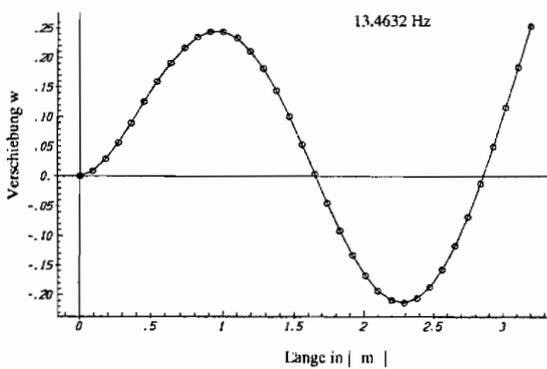
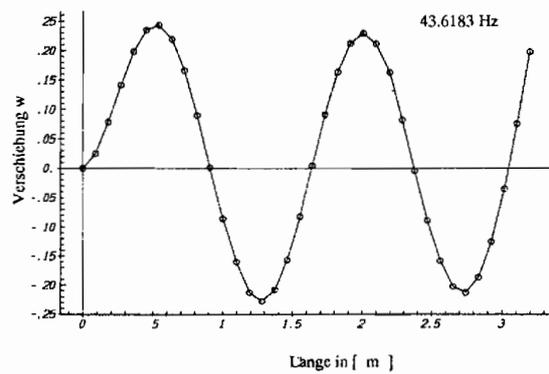
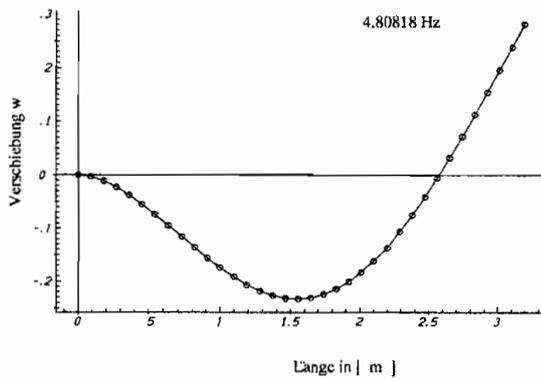
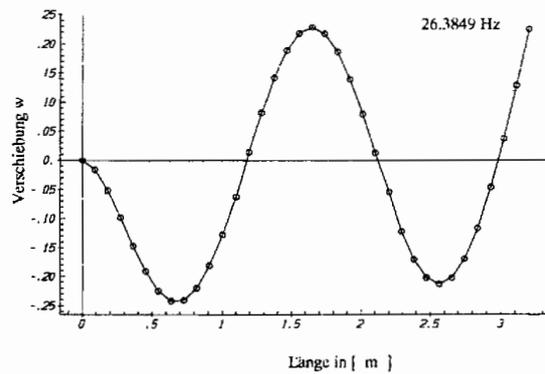
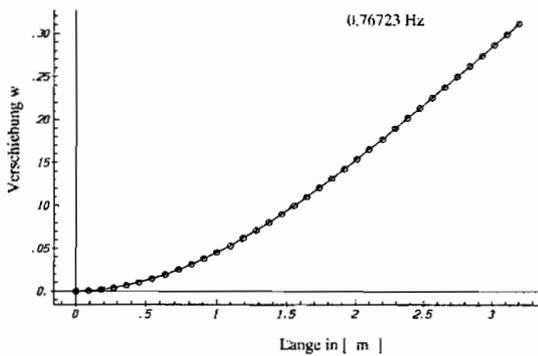
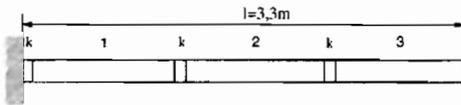


Abbildung 4.8: 1. bis 6. Eigenform (Verschiebung  $w$ ) des einseitig eingespannten Biegebalken bei Näherung der Substruktur mit einem Linearfaktor ( $\nu = 1$ )

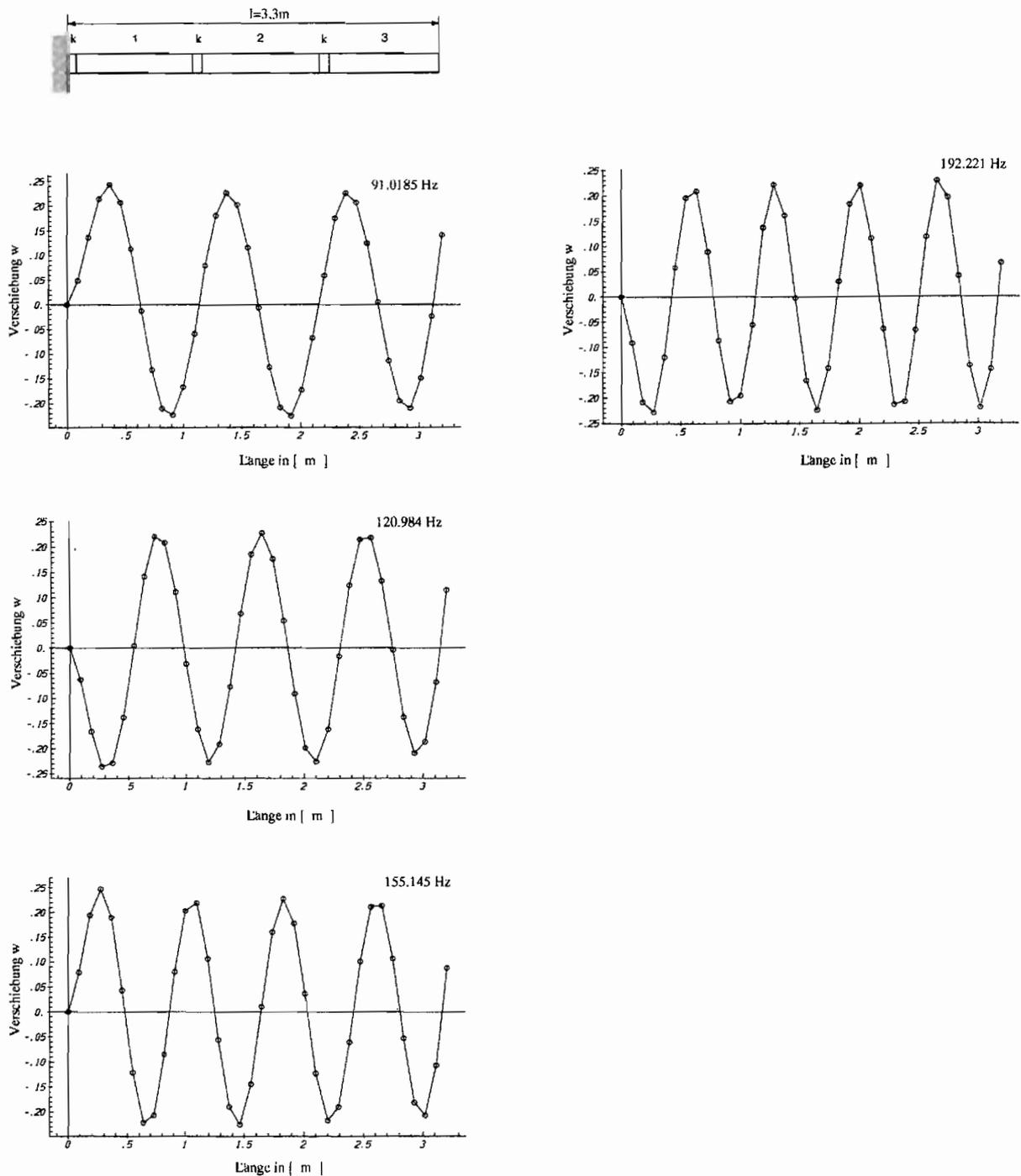


Abbildung 4.9: 7. bis 10. Eigenform (Verschiebung  $w$ ) des einseitig eingespannten Biegebalken bei Näherung der Substruktur mit einem Linearfaktor ( $\nu = 1$ )

$\nu$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0.76728 (0.0066)	4.81865 (0.2181)	13.5769 (0.8463)	29.0088 (9.9556)	51.7086 (18.5646)	94.5030 (45.0535)	121.908 (33.9674)	242.460 (100.119)				
1	0.76723 (0.000)	4.80818 (0.0002)	13.4632 (0.0014)	26.3849 (0.0100)	43.6183 (0.1393)	65.1411 (0.0144)	91.0185 (0.0233)	120.984 (0.1431)	155.145 (0.3135)	192.221 (1.1350)	234.595 (1.2448)	282.619 (0.8409)
2	0.76723 (0.0000)	4.80816 (0.0000)	13.4630 (0.0000)	26.3823 (0.0001)	43.6123 (0.0002)	65.1502 (0.0003)	90.9983 (0.0000)	121.153 (0.0037)	155.621 (0.0078)	194.364 (0.0333)	237.462 (0.0378)	284.956 (0.0209)
3	0.76723 (0.0000)	4.80816 (0.0000)	13.4630 (0.0000)	26.3822 (0.0000)	43.6122 (0.0000)	65.1504 (0.0000)	90.9980 (0.0002)	121.158 (0.0002)	155.635 (0.0010)	194.436 (0.0041)	237.568 (0.0064)	285.033 (0.0062)
4	0.76723 (0.0000)	4.80816 (0.0000)	13.4630 (0.0000)	26.3822 (0.0000)	43.6122 (0.0000)	65.1504 (0.0000)	90.9982 (0.0000)	121.158 (0.0001)	155.634 (0.0004)	194.430 (0.0013)	237.557 (0.0019)	285.020 (0.0015)
5	0.76723	4.8081	13.4630	26.3822	43.6122	65.1504	90.9982	121.158	155.634	194.428	237.552	285.015
$\nu$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	335.354 (0.4347)	400.136 (1.8157)	468.164 (3.2175)	637.013 (22.84)	745.060 (26.700)	845.004 (27.643)						
2	336.805 (0.0049)	393.455 (0.1152)	454.828 (0.2773)	521.889 (0.6458)	592.759 (0.8160)	667.182 (0.8053)	742.384 (0.2828)	816.590 (0.8100)	911.064 (0.0631)	988.288 (1.4928)	1105.562 (0.8806)	1149.237 (4.3798)
3	336.856 (0.0103)	392.979 (0.0058)	453.389 (0.0398)	518.125 (0.0800)	587.111 (0.1446)	660.536 (0.1988)	739.199 (0.1474)	823.215 (0.0053)	915.035 (0.4638)	1006.550 (0.3274)	1112.221 (1.090)	1215.090 (0.011)
4	336.824 (0.0006)	392.973 (0.0073)	453.442 (0.0282)	518.413 (0.0244)	587.644 (0.0539)	661.432 (0.0634)	740.085 (0.0277)	824.124 (0.1050)	915.977 (0.5672)	1003.063 (0.0277)	1106.372 (0.5591)	1209.498 (0.6341)
5	336.821	393.002	453.570	518.540	587.961	661.852	740.290	823.259	910.810	1003.265	1100.220	1201.877

Tabelle 4.2: Eigenfrequenzen des einseitig eingespannten Balkens (3 Substrukturen, 3 Koppellemente) unter Verwendung von  $\nu$  Linearfaktoren

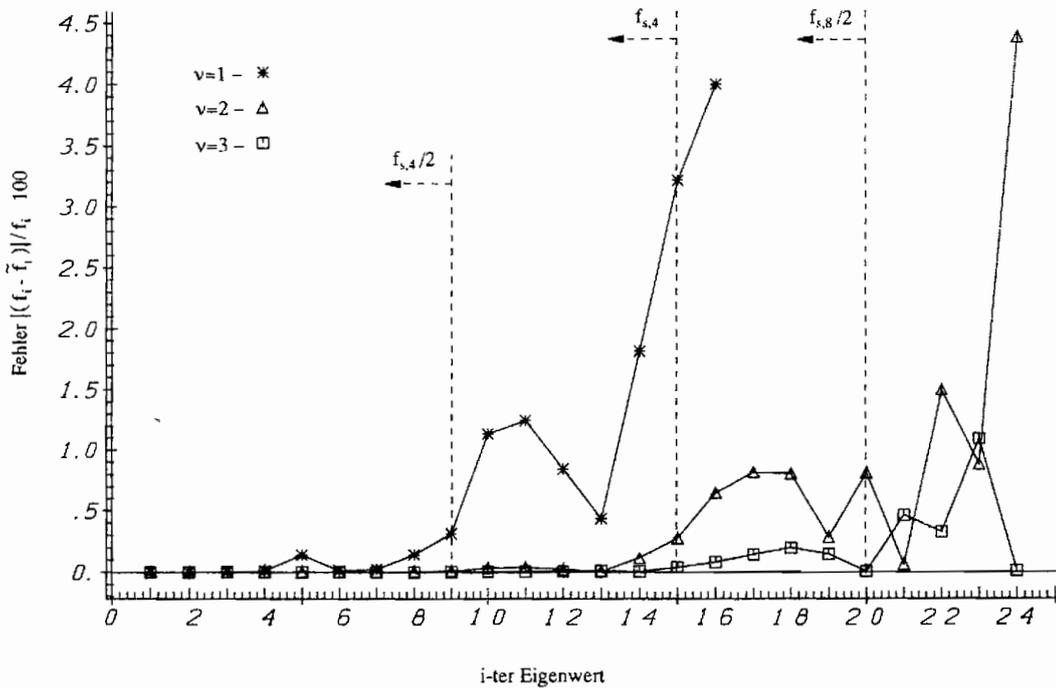


Abbildung 4.10: Eigenfrequenzfehler bei der Analyse eines einseitig eingespannten Balkens bei verschiedenen Näherungen mit  $\nu = 1, \dots, 3$  Linearfaktoren

### Rahmen

Mit Hilfe der kondensierten Gleichungen

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{f} \tag{4.142}$$

wird das Schwingungsverhalten eines an seinen Enden fest gelagerten Rahmens untersucht (vgl. Abbildung 4.11).

Der Rahmen wird aus drei gleichen Substrukturen zusammengesetzt. Eine Substruktur wird dabei durch je elf finite Balken- und Stabelemente beschrieben. Da die Schwingungsformen von Balken und Stab entkoppelt sind, müssen die Modalmatrizen der Linearfaktoren jeweils aus vier Balken- und zwei Stab-Eigenformen aufgebaut werden. Die Aufteilung der zur Näherung benutzten modalen Parameter der Struktur und des Slave-Systems ist in Tabelle 4.1 angegeben.

Die kondensierten Matrizen haben die Dimension  $6 \times 6$  und der Polynomgrad der Matrix  $\mathbf{A}^q(\lambda)$  einer Substruktur ist bei Verwendung aller Eigenformen  $\mu = 6$ . Die Kopplung der einzelnen Teilstrukturen geschieht wiederum mit Hilfe der Koppellemente (4.138). Zwei weitere Koppellemente werden zur Lagerung des Rahmens benötigt. Damit wird die Gesamtstruktur mit 18 Freiheitsgraden beschrieben. Werden sämtliche Eigenformen einer Teilstruktur berücksichtigt, hat die Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  der Gesamtstruktur den Polynomgrad  $\mu = 6$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  den Grad  $\mu = 5$ .

Es werden insgesamt 13 Koeffizientenmatrizen der Dimension  $18 \times 18$  (4212 Matrizenle-

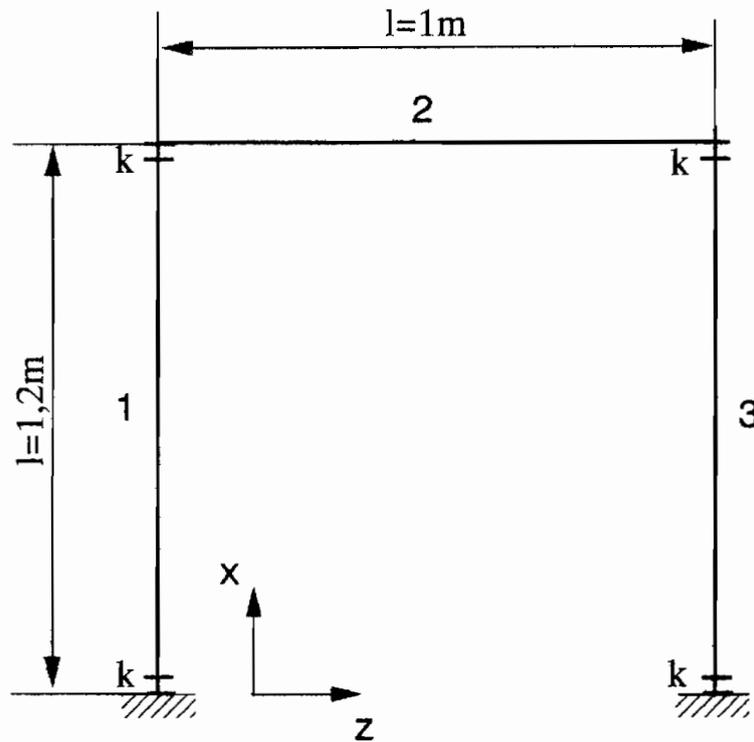


Abbildung 4.11: Aus drei Substrukturen (1, 2, 3) und vier Koppellementen (k) zusammengesetzter Rahmen

mente) zur Beschreibung der Rahmenstruktur benötigt. Die FE-Modellierung der Gesamtstruktur führt bei gleicher Diskretisierung auf je eine Massen- und Steifigkeitsmatrix der Dimension  $108 \times 108$  (223328 Matrizenelemente).

Zur Schwingungsanalyse des an seinen Enden gelagerten Rahmens wurden die Eigenfrequenzen zwischen 0 und 1300 Hz bestimmt (siehe Tabelle 4.3). Mit einem vollständigen Ansatz von Teilstruktur-Eigenformen ( $\nu = 5$ ) ergab sich die höchste Eigenfrequenz zu  $f_{24} = 1270.570$  Hz.

Wird die Kondensation mit einem statischen Verschiebungsansatzes ( $\nu = 0$ ) (Guyan-Kondensation) durchgeführt, lässt sich lediglich die erste Eigenfrequenz gut abbilden. Bis zur fünften Eigenfrequenz ergaben sich Fehler zwischen 8% ( $f_{9,5}$ ) und 20% ( $f_{9,4}$ ). Für die höheren Frequenzen ergaben sich Fehler von 63% und 90%.

Durch die Verwendung der ersten vier Slave- und Struktureigenformen ( $\nu = 1$ ) wird eine deutliche Verbesserung der Genauigkeit erreicht. Die ersten sieben Eigenfrequenzen werden mit sehr guter Genauigkeit approximiert. Ein deutlicher Anstieg des Eigenfrequenzfehlers zeigt sich ab der 8. Eigenfrequenz ( $f_8 = 179.13$  Hz). Bis zur 13. Eigenfrequenz ( $f_8 = 386.70$  Hz) bleibt der Fehler unter 2% (siehe Abbildung 4.12). Dies ist zugleich die letzte Frequenz unterhalb der höchsten noch berücksichtigten Teilsystem-Eigenfrequenzen der Struktur und des Slave-Systems, sämtliche höheren Eigenfrequenzen werden nur ungenau wiedergegeben.

Bei einem Ansatz  $\nu = 1$  ist die Polynommatrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  vom Grad  $\mu = 2$ . Zur Bestimmung der

## 122 Anwendung der Faktorenerlegung auf das kondensierte Gleichungssystem

Eigenwerte und -formen der Rahmenstruktur ist ein kubisches Eigenwertproblem zu lösen. Die Linearisierung der Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  führt auf eine expandierte Matrix der Dimension  $36 \times 36$ . Wird ein globaler Eigenwertlöser wie der QZ-Algorithmus zum Einsatz gebracht, hat sich die Größe der in der Rechnung benutzten Matrizen auf 33% der unkondensierten Matrizen reduziert. Sollen nur die ersten zehn Schwingungsformen der Struktur untersucht werden, läßt sich durch Anwendung der genäherten kondensierten Formulierung eine deutliche Aufwandsverringerng erreichen.

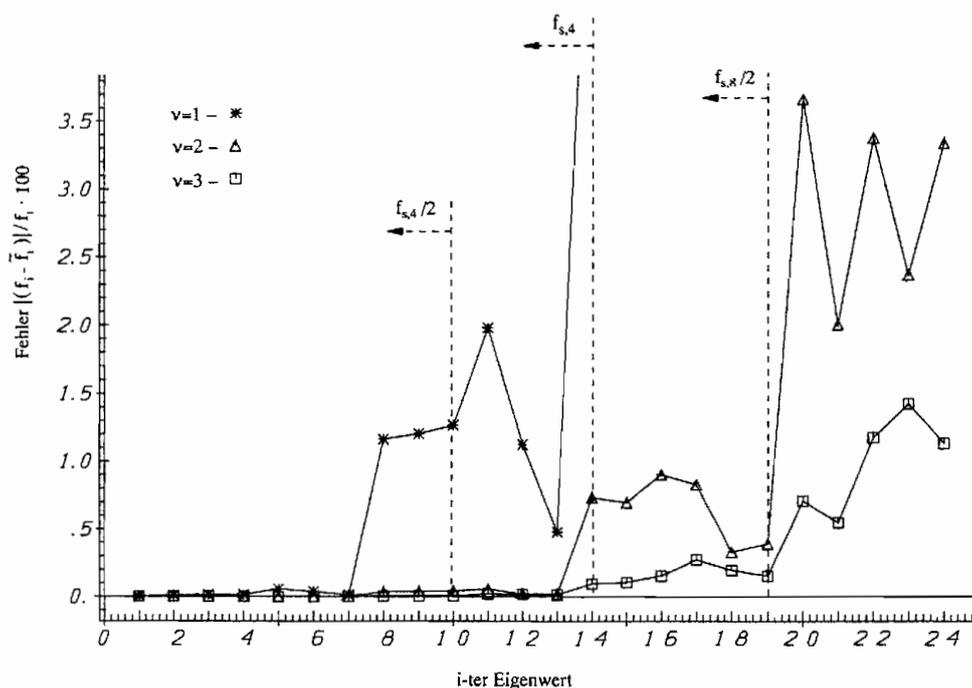


Abbildung 4.12: Eigenfrequenzfehler bei der Analyse des an den Enden eingespannten Rahmens bei verschiedenen Näherungen mit  $\nu = 1, \dots, 3$  Linearfaktoren

Bei einem Ansatz  $\nu = 2$  mit je acht Eigenformen der Struktur und des Slave-Systems läßt sich erkennen, daß der Fehler oberhalb des halben noch zur Näherung verwendeten Slave-Eigenwerts einer Balkensubstruktur ( $f_{max}/2 = 860$  Hz) auf über 2% ansteigt, wohingegen bis zur 19. Eigenfrequenz ( $f_{19} = 808.62$  Hz) der Eigenfrequenzfehler unter 1% liegt.

Werden die ersten 12 Eigenschwingungsformen der Substruktur und des entsprechenden Slave-Systems im Näherungsansatz verwendet, lassen sich alle 24 Eigenfrequenzen des Gesamtsystems mit ausreichender Genauigkeit approximieren. Bei einem Polynomgrad der Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  von  $\mu = 4$  ergibt das linearisierte Gleichungssystem Matrizen der Dimension  $72 \times 72$ . Eine Aufwandsverringerng wird daher nur bei einer iterativen Lösung der Eigenwertaufgabe für die Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  erreicht.

In Abbildung 4.12 werden die absoluten relativen Fehler für die Ansätze  $\nu = 1$  bis  $\nu = 3$  gegenübergestellt. Es sind deutlich die Bereiche zu erkennen, in denen der Eigenfrequenzfehler für die einzelnen Näherungsansätze stark zunimmt (8., 14. und 20. Eigenfrequenz).

Wie beim Biegebalken liegt auch bei einem einseitig eingespannten Rahmen die Grenze des

---

Gültigkeitsbereiches der Näherung (Eigenfrequenzfehler unter 2%) bei der halben maximalen noch berücksichtigten Slave- bzw. (Sub-)Struktur-Eigenfrequenz.

$\nu$	Eigenfrequenzen $f_i$ in [Hz] (Fehler $ f_i - \bar{f}_i /f_i$ in [%])											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	7.03263 (0.2252)	26.3698 (10.612)	48.2347 (10.798)	68.0351 (19.817)	107.655 (8.0205)	162.487 (63.03)	232.625 (89.42)					
1	7.0168 (0.0002)	23.84211 (0.0099)	38.1764 (0.0147)	43.5400 (0.0146)	84.8972 (0.0558)	99.6994 (0.0377)	122.8216 (0.0119)	177.0547 (1.1632)	205.189 (1.2023)	230.959 (1.2665)	301.697 (1.9799)	340.246 (1.1242)
2	7.01682 (0.0000)	23.8397 (0.0001)	38.1709 (0.0002)	43.5338 (0.0002)	84.8505 (0.0007)	99.6621 (0.0003)	122.8067 (0.0001)	179.0787 (0.0343)	207.609 (0.0368)	233.823 (0.0420)	307.617 (0.0566)	344.048 (0.01946)
3	7.01682 (0.0000)	23.8397 (0.0000)	38.1708 (0.0000)	43.5337 (0.0000)	84.8496 (0.0002)	99.6614 (0.0002)	122.806 (0.0002)	179.145 (0.0038)	207.696 (0.0049)	233.935 (0.0057)	307.850 (0.0191)	344.167 (0.0150)
4	7.01682 (0.0000)	23.8397 (0.0000)	38.1708 (0.0000)	43.5337 (0.0000)	84.8498 (0.0000)	99.6617 (0.0000)	122.8069 (0.0000)	179.1412 (0.0014)	207.6898 (0.0018)	233.9273 (0.0021)	307.8064 (0.0048)	344.127 (0.0034)
5	7.01682	23.8397	38.1708	43.5337	84.8498	99.6617	122.806	179.138	207.686	233.922	307.791	344.115
$\nu$	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	386.702 (0.4771)	557.795 (5.9836)	734.320 (26.946)	791.503 (19.216)	874.965 (18.076)	1327.557 (64.174)						
2	388.630 (0.0192)	473.482 (0.7321)	529.974 (0.6975)	583.668 (0.9022)	669.413 (0.8267)	743.468 (0.3310)	805.468 (0.3903)	862.772 (3.6629)	976.374 (1.9997)	1042.396 (3.3757)	1156.587 (2.3663)	1228.198 (3.3348)
3	388.605 (0.0126)	469.594 (0.0948)	525.740 (0.1069)	577.553 (0.1550)	662.103 (0.2742)	739.550 (0.1976)	807.365 (0.1557)	901.922 (0.7085)	1001.760 (0.5483)	1091.494 (1.1753)	1173.030 (1.4233)	1284.938 (1.1308)
4	388.566 (0.0026)	469.811 (0.0487)	526.008 (0.0558)	577.969 (0.0829)	663.319 (0.0911)	740.524 (0.0662)	808.2545 (0.0458)	900.4556 (0.5447)	1001.5998 (0.5322)	1090.339 (1.0683)	1163.594 (0.6074)	1279.861 (0.7312)
5	388.556	470.0407	526.303	578.449	663.923	741.015	808.625	895.577	996.297	1078.814	1156.568	1270.570

Tabelle 4.3: Eigenfrequenzen des beidseitig gelagerten Rahmens (3 Substrukturen, 4 Koppellemente) unter Verwendung von  $\nu$  Linearfaktoren

### Diskussion der Rechenergebnisse

Anhand eines Biegebalkens und eines Rahmens wird die Tauglichkeit des vorgestellten Kondensationsverfahrens zur Berechnung der Eigenwerte und -vektoren der Strukturen nachgewiesen. Die Berechnung der Eigenwerte und -vektoren erfolgt dabei durch Lösung der Eigenwertaufgabe  $\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  der jeweiligen Gesamtstruktur. Die Matrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  wird dabei analytisch durch die Kopplung einzelner Substrukturen mittels Koppellementen ermittelt. Die mit Hilfe weniger Substruktur-Eigenformen berechneten Eigenfrequenzen der Gesamtstruktur weisen in einem bestimmten Frequenzbereich eine hohe Genauigkeit auf. Ein deutlicher Anstieg des Frequenzfehlers bei einer unvollständigen Berücksichtigung der Substruktur-Eigenformen läßt sich oberhalb der halben maximal berücksichtigten Substruktur-Eigenfrequenz feststellen. Der Fehler bleibt für Eigenfrequenzen des Gesamtsystems unterhalb dieser Grenzfrequenz unter 2%.

Die bei der Eigenwertanalyse erzielte Genauigkeit ist mit der bei den Verfahren von PETERSMANN (2.51) oder LEUNG (2.60) (vgl. Kapitel 2.3.2) vergleichbar. Auch hier werden zur Approximation der Struktureigenschaften die Eigenformen der Slave-Struktur verwendet. Für die Eigenfrequenzen der Gesamtstruktur bleibt dabei erfahrungsgemäß der Frequenzfehler bis zu der oben erwähnten Grenzfrequenz ebenfalls unter 2% ([24]). Zusätzlich zu den Eigenformen der Slave-Struktur einer Substruktur werden bei dem hier vorgestellten Verfahren die Eigenformen der freien Substruktur als Ansatzvektoren für die Näherung verwendet. Aufgrund der Lage der Master-Freiheitsgrade (hier die Koppelknoten der Substrukturen), liegen die Eigenfrequenzen der Slave-Struktur und der freien Struktur dicht zusammen (vgl. Tabelle 4.1). Aus diesem Grund lieferten Vergleichsrechnungen mit dem hier dargestellten Verfahren und dem nach PETERSMANN (2.51) sehr ähnliche Ergebnisse. Ein unmittelbarer Vergleich der beiden Verfahren ist jedoch nicht sinnvoll, da das Kondensationsverfahren nach PETERSMANN ausschließlich zur Eigenwertanalyse eingesetzt wird. Die hier gezeigte Methode führt jedoch auf ein allgemein verwendbares Gleichungssystem, das heißt das kondensierte Gleichungssystem kann aufgrund der Darstellung mittels Polynommatrizen sowohl zur Eigenwertanalyse als auch zur Zeitsimulation und zur Systemregelung verwendet werden. Dadurch, daß die Eigenwerte und -vektoren der freien Substruktur ermittelt werden müssen, entsteht gegenüber dem Verfahren von PETERSMANN ein zusätzlicher Rechenaufwand. Dieser Mehraufwand läßt sich jedoch durch die Verwendung der Substrukturtechnik und durch die allgemeinere Darstellungsform eines kondensierten Gleichungssystems rechtfertigen.

# Kapitel 5

## Zusammenfassung

Das Verfahren der Kondensation (Verdichtung) wird zur Freiheitsgradreduktion von linearen Differentialgleichungssystemen eingesetzt. Die Gleichungssysteme können z.B. bei der Beschreibung des Schwingungsverhaltens einer mechanischen Struktur mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. Im Rahmen der Substrukturtechnik wird das Schwingungssystem in Teilstrukturen aufgeteilt. Die Kondensation erfolgt dann an den Teilstrukturen. Das dimensionsreduzierte Gleichungssystem wird dabei im Frequenzbereich mit Hilfe von Polynommatrizen und im Zeitbereich mit Hilfe linearer Differentialgleichungen ausgedrückt. Die Polynommatrizen werden mit den Eigenwerten und -formen der Substrukturen approximiert.

Es sind zunächst aus der Literatur bekannte Kondensationsverfahren vorgestellt worden. Bei dem Verfahren der dynamischen Kondensation erfolgt die Dimensionsverringerung des Gleichungssystems einer Substruktur durch eine frequenzabhängige Transformation. Findet hierbei kein Informationsverlust statt, ist die kondensierte Formulierung gegenüber der Ausgangsformulierung unverändert genau. Es entsteht jedoch ein Gleichungssystem mit einer zu invertierenden frequenzabhängigen Matrix. Die Darstellung des reduzierten Gleichungssystems verbleibt daher im Frequenzbereich, eine analytische Kopplung der Teilstrukturen und damit eine parametrische Darstellung der Gesamtstruktur finden nicht statt. Zur Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren der Gesamtstruktur ist ein nichtlineares Eigenwertproblem iterativ zu lösen. Da die iterative Lösung mit der exakten dynamischen Kondensation einen hohen Rechen- und Speicheraufwand erfordert, wurden zahlreiche Näherungsverfahren entwickelt. Durch die Vernachlässigung von Trägheitskräften bei der Kondensation (z.B. statische Kondensation) lassen sich lineare oder kubische Eigenwertaufgaben erzeugen. Der dabei entstehende Fehler für die Eigenwerte schränkt jedoch den Gültigkeitsbereich der kondensierten Formulierung stark ein. Durch die Beschreibung eines kondensierten Gleichungssystems mit Hilfe der Eigenformen der Substruktur ist eine Aufwandsverringerung möglich. Wird lediglich ein Teil der Substruktur-Eigenformen berücksichtigt, ergeben sich in einem bestimmten Frequenzbereich Näherungen hoher Genauigkeit. Der Eigenfrequenzfehler für die Gesamtstruktur liegt in diesem Frequenzbereich unter 2%.

Ziel dieser Arbeit ist eine Darstellung des kondensierten Gleichungssystems mit Hilfe von

Polynommatrizen sowie eine frequenzbewertete Näherung der Formulierung. Die Eigenwertaufgabe für Polynommatrizen, Verfahren zur Lösung der Eigenwertaufgabe sowie die Linearisierung der Matrizen werden aufgezeigt. Über die Darstellung einer Polynommatrix höheren Polynomrades als das Produkt linearer Polynommatrizen ist eine Spektralzerlegung der Matrix möglich. Die linearen Polynommatrizen, sogenannte Linearfaktoren, lassen sich dabei aus den Eigenwerten und -vektoren der nichtlinearen Polynommatrix rekursiv berechnen. Es wird gezeigt wie durch Vernachlässigen von einzelnen Linearfaktoren eine Polynommatrix approximiert werden kann. Auf diese Weise erhält man eine Näherung der Polynommatrix für einen interessierenden Bereich des Eigenwertspektrums. Zur vollständigen Bestimmung der genäherten Polynommatrix ist noch eine Normierung der Linearfaktoren notwendig. Es werden Möglichkeiten zur Bestimmung von Normierungsmatrizen für den Fall aufgezeigt, daß die Polynommatrix statisch (d.h. bei  $\lambda = 0$ ) genau sein soll.

Es wird die Darstellung des kondensierten Gleichungssystems mit Hilfe von zwei Polynommatrizen realisiert. Es wird jeweils eine Polynommatrix für die Darstellung der Ausgangsgrößen (Verschiebungen) und Eingangsgrößen (Kräfte) einer Struktur benötigt. Die Systemdarstellung erfolgt dabei mit einer minimalen Anzahl von Zustandsvariablen, d.h. die Formulierung ist im Zustandsraum von minimaler Ordnung. Die Polynommatrizen werden aus den Eigenwerten und -formen einer Substruktur ermittelt. Diese modalen Parameter werden dabei zunächst blockweise zu regulären linearen Polynommatrizen, den Linearfaktoren, ergänzt. Die Multiplikation der einzelnen Linearfaktoren ergibt dann die Polynommatrix mit dem gesamten Eigenwertspektrum. Es werden dazu die Eigenwerte der Substruktur benötigt. Desweiteren müssen die Eigenwerte der sogenannten Slave-Struktur ermittelt werden. Die Slave-Struktur ist die an den im kondensierten Gleichungssystem verbleibenden Freiheitsgraden gefesselte Substruktur. Die zu den Eigenwerten passenden Eigenformen werden jeweils mit den zur kondensierten Systembeschreibung verwendeten Freiheitsgraden, den sogenannten Master-Freiheitsgraden, zusammengesetzt. Die Eigenformen bestehen zum einen aus den Verschiebungen der Substruktur an diesen Master-Koordinaten (Polynommatrix der Ausgangsgrößen) und zum anderen aus den bei einer Behinderung der Verschiebungen an den Master-Koordinaten auftretenden Lagerkräften (Polynommatrix der Eingangsgrößen). Zur Normierung der Polynommatrizen müssen noch die Steifigkeitsmatrix sowie bei Strukturen mit Starrkörperformen die Massenmatrix aus der statischen (GUYAN-)Kondensation des Gleichungssystems bekannt sein.

Da oftmals nur ein Teil des Frequenzbereichs des Gesamtsystems für die Systemanalyse von Interesse ist, läßt sich eine Aufwandsverringerung bei der hier gezeigten Kondensation durch das Berücksichtigen nur weniger Eigenwerte und -formen der Substrukturen erreichen.

Die analytische Kopplung einzelner Substrukturen wird mit Hilfe von (unkondensierten) finiten Elementen realisiert. Mit diesen Koppellementen lassen sich ebenfalls Randbedingungen erfüllen.

Anhand einfacher Beispiele (einseitig fest eingespannter Balken und beidseitig fest eingespannter Rahmen) wird die Tauglichkeit der dargestellten Kondensationsvorschrift zur Beschreibung linearer dynamischer Systeme aufgezeigt. Es konnte dabei festgestellt werden, daß

eine a priori Beurteilung des Gültigkeitsbereichs einer approximierten Systemdarstellung mit Hilfe der im Näherungsansatz berücksichtigten Eigenfrequenzen und -formen möglich ist. Als ein Grenzwert für die Gültigkeit der Näherung erwies sich die halbe höchste im Ansatz berücksichtigte Eigenfrequenz einer Substruktur. Bis zu dieser Eigenfrequenz ergaben sich Frequenzfehler unter 2%. Oberhalb dieser Grenze ließ sich ein deutliches Ansteigen des Fehlers erkennen.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren stellt eine neue Herangehensweise bei der Kondensation linearer schwingungsfähiger Systeme dar. Für die Berechnung der auf wenige Freiheitsgrade kondensierten Gleichungen müssen die Eigenwerte und die entsprechenden Eigenvektoren der Substrukturen bekannt sein, sowie eine geeignete Normierungsmatrix ermittelt werden. Durch das Weglassen von Eigenformen ergeben sich Näherungslösungen mit einer hohen Genauigkeit. Im Gegensatz zu modalen Reduktionsverfahren (z.B. GRAIG UND BAMPTON (2.62)) findet die Systemdarstellung jedoch ausschließlich in physikalischen Koordinaten statt. Damit wird eine anschauliche Darstellung des kondensierten Gleichungssystems erreicht.

Bei Verwendung iterativer Verfahren zur Eigenwertlösung (z.B. Rayleigh-Quotienten-Iteration (3.86)) bleibt die aufgrund der Kondensation verringerte Matrizendimension erhalten. Der für die Rechnung benötigte Arbeitsspeicherbedarf ist dann entsprechend stark reduziert. Durch die Formulierung mittels Polynommatrizen ist das kondensierte Gleichungssystem analytisch einfach handhabbar. Damit unterscheidet sich das hier dargestellte Verfahren wesentlich von den herkömmlichen Kondensationsverfahren hoher Genauigkeit (z.B. PETERSMANN (2.51) oder LEUNG (2.60)). Die Darstellung des kondensierten Gleichungssystems mittels zweier Polynommatrizen entspricht einer Zustandsraumrealisierung mit einer minimalen Anzahl an Zustandsvariablen. Durch die Formulierung des dimensionsreduzierten Gleichungssystems mittels Polynommatrizen läßt sich dieses in einfacher Weise in den Zeitbereich transformieren. Die kondensierten Gleichungen sind damit zahlreichen numerischen Verfahren zugänglich.

### **Ausblick**

Die Polynommatrizen des kondensierten Gleichungssystems werden aus den modalen Parametern einer Substruktur berechnet. Die Ermittlung der Parameter erfolgt im Rahmen der Arbeit rechnerisch. Die zum Aufbau der Polynommatrizen benötigten Eigenwerte und -vektoren lassen sich jedoch ebenfalls experimentell bestimmen. Damit kann die vorliegende Arbeit als eine Grundlage sowohl zur Analyse als auch zur Identifikation dynamischer Systeme (Modalsynthese) dienen.

# Anhang A

## Ergänzungen zum Kapitel Polynommatrizen

### A.1 Berechnung einer regulären Polynommatrix

Es wird eine Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda) = \sum_{i=0}^p \mathbf{A}_i \lambda^i$  mit singulärer Leitmatrix  $\mathbf{A}_p$  in eine reguläre Matrix  $\hat{\mathbf{F}}(\lambda)$  transformiert, wobei vorausgesetzt wird, daß die Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  nicht singulär ist (d.h. keine Eigenwerte bei Null besitzt).

Die Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  wird dazu mit einer Matrix, deren Eigenwerte alle gleich Null sind, multipliziert.

Beispiel: Die Matrix

$$\mathbf{F}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^2 \quad (\text{A.1})$$

mit einer singulären Leitmatrix  $\mathbf{A}_2$  wird von rechts mit der singulären Matrix

$$\mathbf{G}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda \quad (\text{A.2})$$

multipliziert, es ergibt sich die reguläre Polynommatrix

$$\hat{\mathbf{F}}(\lambda) = \mathbf{F}(\lambda)\mathbf{G}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda^2 \quad (\text{A.3})$$

mit einem zusätzlichen Eigenwert bei Null ([103]).

## A.2 Inverse einer Polynommatrix

Die Lösung der Zustandsraumdifferentialgleichung (C.1) erfolgt im Frequenzbereich durch das Aufstellen der Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(\lambda)$ .

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}(\lambda)\mathbf{f}. \quad (\text{A.4})$$

Eine Realisierung der Systembeschreibung im Zustandsraum ergibt die gebrochenrationale Polynommatrix

$$\mathbf{H}(\lambda) = \mathbf{C}^T (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda)^{-1} \mathbf{B}. \quad (\text{A.5})$$

In der Strukturdynamik wird die Matrix  $\mathbf{H}(\lambda)$  auch als **dynamische Nachgiebigkeit** bezeichnet und entspricht der Inversen der dynamischen Steifigkeit  $\mathbf{D}(\lambda)$ . Die Polstellen der charakteristischen Determinante  $p(\lambda) = \det[\mathbf{H}(\lambda)]$  entsprechen den Eigenfrequenzen der Struktur.

Die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(\lambda)$  wird z.B. bei der Systemidentifikation als Ansatz für eine Black-Box-Identifikation linearer Mehrgrößensysteme im Frequenzbereich verwendet. Sie spielt ebenfalls eine entscheidende Rolle bei der Steuerung und Regelung dynamischer Systeme.

Die wesentliche Aufgabe bei der Berechnung von  $\mathbf{H}(\lambda)$  aus einer Systemdarstellung

$$\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (\text{A.6})$$

mit einer nichtlinearen Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  besteht in der Ermittlung der Inversen von  $\mathbf{F}(\lambda)$ .

Die Berechnung von  $\mathbf{F}^{-1}(\lambda)$  erfolgt zunächst für eine lineare Matrix  $\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A} - \mathbf{B}\lambda$ , anschließend wird hieraus der allgemeine Fall abgeleitet.

Da die analytische Inversion von Polynommatrizen einen hohen Rechenaufwand beansprucht, wird eine Möglichkeit zur Aufwandsverringerung angegeben.

### A.2.1 Berechnung der Inversen mittels Linearisierung

Eine einfache und reguläre Matrix  $\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A} - \mathbf{B}\lambda$  mit Eigenwerten  $\lambda_i$  kann bei Normierung der Rechts- und Linkseigenvektoren  $\mathbf{X}$  bzw.  $\mathbf{Y}$  nach

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{I}; \quad \mathbf{Y}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{\Lambda}$$

wie folgt dargestellt werden (vgl. Kapitel 3.3.3):

$$\mathbf{Y}^T (\mathbf{A} - \mathbf{B}\lambda) \mathbf{X} = \mathbf{\Lambda} - \mathbf{I}\lambda. \quad (\text{A.7})$$

Die  $n$  Eigenwerte von  $\mathbf{F}(\lambda)$  sind in der Matrix  $\mathbf{\Lambda}$  diagonal angeordnet. Zur Berechnung der Inversen der Matrix ist dann die Inversion einer Diagonalmatrix notwendig.

$$\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\lambda)^{-1}\mathbf{Y}^{-T} = (\mathbf{\Lambda} - \lambda\mathbf{I})^{-1}. \quad (\text{A.8})$$

Die Multiplikation des Ausdrucks (A.8) von links mit  $\mathbf{X}$  und von rechts mit  $\mathbf{Y}^T$  ergibt die inverse Matrix  $\mathbf{F}^{-1}(\lambda)$ .

$$\mathbf{F}^{-1}(\lambda) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\lambda)^{-1} = \mathbf{X}(\mathbf{\Lambda} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Y}^T. \quad (\text{A.9})$$

Wie in Kapitel 3.3 gezeigt, lässt sich die Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\rho} \mathbf{A}_i\lambda^i$  auf die lineare Form  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\lambda$  expandieren, es besteht die Möglichkeit auf diese Weise Matrizen von Polynomgraden  $\rho > 1$  zu invertieren. Dabei kann aus der Inversen der linearisierten Matrix direkt die inverse Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)^{-1}$  angegeben werden. Eine ausführliche Herleitung der folgenden Formeln wird z.B. von LANCASTER [59] aufgezeigt und wird hier nicht durchgeführt. Nach der Linearisierung besitzen die expandierten  $(m\rho \times m\rho)$ - Modalmatrizen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{L}$  die Form

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^{\rho-1} \\ \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}^{\rho-2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}\mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}\mathbf{\Lambda}^{\rho-1} \\ \mathbf{Y}\mathbf{\Lambda}^{\rho-2} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}\mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

mit den  $(m \times m\rho)$ -Matrizen der Rechts- und Linkseigenvektoren

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{m\rho}), \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{m\rho}) \quad (\text{A.11})$$

und der Spektralmatrix der  $m\rho$  Eigenwerte  $\mathbf{\Lambda}$ .

Vorausgesetzt  $\mathbf{F}(\lambda)$  ist eine einfache und reguläre Polynommatrix, können die Matrizen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{L}$  wie folgt definiert werden:

$$\mathbf{L}^T\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}; \quad \mathbf{L}^T\mathbf{B}\mathbf{R} = \mathbf{I}. \quad (\text{A.12})$$

Die Inverse von  $\mathbf{F}(\lambda)$  errechnet sich unmittelbar aus der Inversen der linearisierten Matrix zu

$$\mathbf{F}^{-1}(\lambda) = \mathbf{X}(\mathbf{\Lambda} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Y}^T. \quad (\text{A.13})$$

### Partialbruchzerlegung der inversen Matrix

Durch die Summenform

$$\mathbf{F}^{-1}(\lambda) = \mathbf{X}(\mathbf{\Lambda} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{Y}^T = \sum_{i=1}^{m\rho} \frac{\mathbf{D}_i}{\lambda - \lambda_i}, \quad (\text{A.14})$$



mit den Linearfaktoren der Struktur-Eigenwerte

$$d_i = \lambda_i - \lambda; \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (\text{A.20})$$

und den Faktoren der dreifachen Slave-Eigenwerte

$$d_{s,j} = \lambda_{s,j} - \lambda; \quad j = 1, 2. \quad (\text{A.21})$$

Werden in der Matrix  $\mathbf{G}(\lambda)$  alle Terme, die den Parameter  $\lambda$  beinhalten, zusammengefaßt, ergibt sich mit der ausformulierten Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda)^{-1}$  in (A.18) die Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\lambda) &= d_s(\lambda) (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda)^{-1} \\ &= \frac{d_s(\lambda)}{d(\lambda)} \begin{pmatrix} d_2 \dots d_6 d_s^3(\lambda) & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & d_1 \dots d_5 d_s^3(\lambda) & & & \\ & & & d(\lambda) d_{s,1}^2 d_{s,2}^3 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & d(\lambda) d_{s,1}^3 d_{s,2}^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{d(\lambda)} \begin{pmatrix} d_2 \dots d_6 d_s(\lambda) & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & d_1 \dots d_5 d_s(\lambda) & & & \\ & & & d(\lambda) d_{s,2} & & \\ \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & d(\lambda) d_{s,1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$d(\lambda)$  ist das charakteristische Polynom des Systems mit den einfachen Eigenwerten der Struktur als Nullstellen. Die Diagonalmatrix  $\mathbf{G}(\lambda)$  hat einen minimalen Polynomgrad und man erhält die Frequenzgangmatrix  $\mathbf{H}(\lambda)$  als echt gebrochenrationale Matrix

$$\mathbf{H}(\lambda) = \mathbf{X}\mathbf{G}(\lambda)\mathbf{Y}^T. \quad (\text{A.23})$$

Anmerkung zur Inversion einer kondensierten Polynommatrix:

Das oben gezeigte Vorgehen ist nur dann sinnvoll, wenn die kondensierten Gleichungen einer mit der FEM berechneten Struktur mit Hilfe von Näherungsansätzen ermittelt wurden. Liegen die exakten Ausgangsgleichungen in der partitionierten Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_{mm}(\lambda) & \mathbf{D}_{ms}(\lambda) \\ \mathbf{D}_{sm}(\lambda) & \mathbf{D}_{ss}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{x}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_m \\ \mathbf{X}_s \end{pmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_m^T & \mathbf{X}_s^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

vor, läßt sich für die dynamische Steifigkeit in den Master-Koordinaten unmittelbar der Ausdruck

$$\mathbf{H}(\lambda) = \mathbf{D}_{mm}^{-1}(\lambda) = \mathbf{X}_m (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}_m^T \quad (\text{A.25})$$

angeben.

### A.2.2 Berechnung der inversen Polynommatrix durch Faktorisierung

Die Berechnung der Inversen einer in ihre Linearfaktoren zerlegten Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  erfolgt durch Inversion der einzelnen Faktoren. Das Vorgehen wird am Beispiel der gebrochenrationalen Formulierung einer aus der dynamischen Kondensation entstandenen Polynommatrix dargestellt (vgl. 4.1.1).

Das in der Dimension reduzierte kondensierte Gleichungssystem mit der faktorisierten Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  lautet

$$\frac{\mathbf{F}(\lambda)}{d_s(\lambda)} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{A}_\rho \mathbf{X}_\rho (\mathbf{I}\lambda - \mathbf{\Lambda}_\rho) \mathbf{X}_\rho^{-1} \dots \mathbf{X}_2 (\mathbf{I}\lambda - \mathbf{\Lambda}_2) \mathbf{X}_2^{-1} \mathbf{X}_1 (\mathbf{I}\lambda - \mathbf{\Lambda}_1) \mathbf{X}_1^{-1}}{(\lambda - \lambda_{s,1})(\lambda - \lambda_{s,2}) \dots (\lambda - \lambda_{s,\rho-1})} \mathbf{x} = \mathbf{f}. \quad (\text{A.26})$$

Wird der Ausdruck von links mit den Inversen der Linearfaktoren multipliziert, ergibt sich die Frequenzgangdarstellung

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\lambda)^{-1} d_s(\lambda) \mathbf{f} \quad (\text{A.27})$$

$$= \mathbf{X}_1 (\mathbf{I}\lambda - \mathbf{\Lambda}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_2 (\mathbf{I}\lambda - \mathbf{\Lambda}_2)^{-1} \mathbf{X}_2^{-1} \dots \mathbf{X}_\rho (\mathbf{I}\lambda - \mathbf{\Lambda}_\rho)^{-1} \mathbf{X}_\rho^{-1} \mathbf{A}_\rho^{-1} \cdot (\lambda - \lambda_{s,1})(\lambda - \lambda_{s,2}) \dots (\lambda - \lambda_{s,\rho-1}) \mathbf{f}. \quad (\text{A.28})$$

Für Dimensionen  $m > 2$  ist die Ordnung des Frequenzgangs nicht minimal, d.h. die rechte Seite des Gleichungssystems (A.28) ist nicht teilerfremd. Das Spektrum der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  läßt sich in Linearfaktoren so anordnen, daß Faktoren aus Nenner und Zähler der rechten Seite in (A.28) gegeneinander gekürzt werden können. Dazu wird ein Slave-Eigenwert  $\lambda_{s,j}$  der Vielfachheit  $m - 1$  in einem Block abgespalten.

Die ersten  $\rho - 1$  Spektralmatrizen  $\mathbf{\Lambda}_\nu^{-1}$  enthalten einen mehrfachen Eigenwert des Slave-Systems und werden jeweils um einen Struktur-Eigenwert  $\lambda_j$  ergänzt.

$$\mathbf{\Lambda}_\nu^{-1} = \text{diag} \left[ \lambda_{s,j}^{-1}, \lambda_{s,j}^{-1}, \dots, \lambda_{s,j}^{-1}, \lambda_j^{-1} \right]. \quad (\text{A.29})$$

Die ersten  $\rho - 1$  Linearfaktoren im Zähler und Nenner von (A.28) lassen sich zu Ausdrücken der Form

$$\mathbf{E}_\nu(\lambda) = (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_\nu)(\lambda - \lambda_{s,j}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda - \lambda_{s,j}}{\lambda - \lambda_{s,j}} & & & \\ & \dots & & \\ & & \frac{\lambda - \lambda_{s,j}}{\lambda - \lambda_{s,j}} & \\ & & & \frac{\lambda - \lambda_{s,j}}{\lambda - \lambda_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{\lambda - \lambda_{s,j}}{\lambda - \lambda_j} \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

zusammenfassen.

Werden die Diagonalelemente in (A.30) mit einem gemeinsamen Nenner aufgeschrieben, erhält man  $\rho - 1$  Brüche

$$\mathbf{E}_\nu(\lambda) = \frac{\begin{pmatrix} \lambda - \lambda_j & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda - \lambda_j & \\ & & & \lambda - \lambda_{s,j} \end{pmatrix}}{\lambda - \lambda_{s,j}}. \quad (\text{A.31})$$

Die restlichen  $m$  Struktur-Eigenwerte  $\lambda_j$  lassen sich in einer weiteren Spektralmatrix  $\mathbf{A}_\rho$  zusammenfassen und ergeben nach der Inversion den Ausdruck

$$\mathbf{E}_\mu(\lambda) = \frac{\begin{pmatrix} e_1(\lambda) & & & \\ & e_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_m(\lambda) \end{pmatrix}}{(\lambda - \lambda_\rho)(\lambda - \lambda_{\rho+1}) \dots (\lambda - \lambda_{\rho+m-1})} \quad (\text{A.32})$$

mit

$$\begin{aligned} e_1(\lambda) &= (\lambda - \lambda_{\rho+1})(\lambda - \lambda_{\rho+2}) \dots (\lambda - \lambda_{\rho+m-1}) \\ e_2(\lambda) &= (\lambda - \lambda_\rho)(\lambda - \lambda_{\rho+2}) \dots (\lambda - \lambda_{\rho+m-1}) \\ &\vdots \\ e_m(\lambda) &= (\lambda - \lambda_\rho)(\lambda - \lambda_{\rho+1}) \dots (\lambda - \lambda_{\rho+m-2}). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Wird die rechte Seite in (A.28) mit Hilfe der Matrizen  $\mathbf{E}_\nu(\lambda)$  ausgedrückt, ergibt sich die echt gebrochenrationale Matrix

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}(\lambda)\mathbf{f} = \frac{\mathbf{G}(\lambda)}{d(\lambda)}\mathbf{f} = \mathbf{X}_1\mathbf{E}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1}\mathbf{X}_2\mathbf{E}_2(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1} \dots \mathbf{X}_\rho\mathbf{E}_\rho(\lambda)\mathbf{X}_\rho^{-1}\mathbf{A}_\rho^{-1}\mathbf{f}. \quad (\text{A.34})$$

Das Spektrum der Matrix  $\mathbf{G}(\lambda)$  enthält die Struktur-Eigenwerte der Vielfachheit  $m - 1$  und die einfachen Slave-Eigenwerte. Das Nennerpolynom  $d(\lambda)$  ist das charakteristische Polynom der Struktur mit den einfachen Struktur-Eigenwerten als Nullstellen.

Handelt es sich bei der dargestellten Struktur um ein System mit zwei oder mehr Eigenwerten bei Null, werden die ersten Koeffizientenmatrizen ( $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \dots$ ) der Polynommatrix  $\mathbf{G}(\lambda)$  vollständig zu Null. Da diese Zählernullstellen sich mit den Nullstellen des Nennerpolynoms  $d(\lambda)$  kürzen lassen, verringert sich der Polynomgrad von  $\mathbf{G}(\lambda)$  und  $d(\lambda)$  entsprechend; die Eigenwerte der Struktur sind immer einfache Nullstellen in  $d(\lambda)$ .

Es ist anzumerken, daß ein kondensiertes System

$$\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{f} \quad (\text{A.35})$$

bereits eine minimale Zustandsrealisierung darstellt, die Matrizen  $\mathbf{A}(\lambda)$  und  $\mathbf{B}(\lambda)$  sind von minimalem Grad (vgl. Kapitel 4.2). Die Inverse der Polynommatrix  $\mathbf{A}(\lambda)$  läßt sich durch die Inversion ihrer Linearfaktoren berechnen, und es ergibt sich unmittelbar die teilerfremde Frequenzgangmatrix

$$\mathbf{H}(\lambda) = \mathbf{A}^{-1}(\lambda)\mathbf{B}(\lambda). \quad (\text{A.36})$$

Durch die faktorisierte Darstellung einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  ist eine Inversion der Matrix ohne den Umweg über eine Linearisierung möglich. Die Berechnung der Inversen findet ausschließlich mit Matrizen der Dimension  $m$  statt, eine aufwendige Normierung von, aufgrund einer Linearisierung, großdimensionierten Modalmatrizen entfällt.

### A.3 Bestimmung von Koeffizientenmatrizen einer reduzierten Polynommatrix mit Hilfe von Linearfaktoren und der Ausgangsmatrix

Sind ein Teil der Eigenwerte und -vektoren sowie die Koeffizientenmatrizen einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  bekannt, lassen sich hieraus unmittelbar die Koeffizientenmatrizen einer um diese modalen Parameter reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)$  berechnen.

Die Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  lautet

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\lambda + \dots + \mathbf{A}_\rho\lambda^\rho. \quad (\text{A.37})$$

Werden  $\mu$  Linearfaktoren der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  abgespalten, ergibt sich eine teilweise faktorisierte Matrix

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)\mathbf{X}_\mu\mathbf{D}_\mu(\lambda)\mathbf{X}_\mu^{-1} \dots \mathbf{X}_2\mathbf{D}_2(\lambda)\mathbf{X}_2^{-1}\mathbf{X}_1\mathbf{D}_1(\lambda)\mathbf{X}_1^{-1} \quad (\text{A.38})$$

$$= \left(\mathbf{A}_0^{\mu+1} + \mathbf{A}_1^{\mu+1}\lambda + \dots + \mathbf{A}_{\rho-\mu}^{\mu+1}\lambda^{\rho-\mu}\right) (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1\lambda + \dots + \mathbf{B}_\mu\lambda^\mu). \quad (\text{A.39})$$

Die Koeffizientenmatrizen der Matrix  $\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)$  lassen sich mit Hilfe der aus  $\mathbf{F}(\lambda)$  abgespaltenen Linearfaktoren und den Koeffizientenmatrizen von  $\mathbf{F}(\lambda)$  berechnen.

Aus den Gleichungen (A.37) und (A.39) ergeben sich durch Koeffizientenvergleich die Beziehungen

$$\mathbf{A}_0^{\mu+1}\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0 \quad (\text{A.40})$$

$$\mathbf{A}_1^{\mu+1}\mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_0^{\mu+1}\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 \quad (\text{A.41})$$

$$\mathbf{A}_2^{\mu+1}\mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_1^{\mu+1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_0^{\mu+1}\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 \quad (\text{A.42})$$

⋮

Die Koeffizientenmatrizen der Matrix  $\mathbf{F}^{\mu+1}(\lambda)$  lassen sich dann wie folgt angeben:

$$\mathbf{A}_0^{\mu+1} = \mathbf{A}_0(\mathbf{B}_0)^{-1} \tag{A.43}$$

$$\mathbf{A}_1^{\mu+1} = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_0^{\mu+1}\mathbf{B}_1)(\mathbf{B}_0)^{-1} \tag{A.44}$$

$$\mathbf{A}_2^{\mu+1} = (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_0\mathbf{B}_2)(\mathbf{B}_0)^{-1} \tag{A.45}$$

⋮

## A.4 Ergänzungen zur numerischen Stabilität bei der sukzessiven Faktorisierung einer Polynommatrix

Der Einfluß der Eliminationsfolge der Eigenwerte auf die Stabilität der sukzessiven Reduktion einer Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  soll an den kondensierten Gleichungen eines freischwingenden Biegebalkens überprüft werden.

Ein Biegebalken wird in zehn finite Elemente (22 Freiheitsgrade) unterteilt und auf die Randkoordinaten kondensiert. Der Balken hat die Kenngrößen  $E = 1 \frac{N}{m^2}$ ,  $l = 1m$ ,  $A = 1m^2$ ,  $\rho_d = 1 \frac{kg}{m^3}$ . Es ergibt sich damit im Zähler des kondensierten Gleichungssystems  $\mathbf{F}(\lambda)/d_s(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{f}$  die Polynommatrix

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\lambda + \dots + \mathbf{A}_\rho\lambda^\rho \tag{A.46}$$

mit einem Polynomgrad  $\rho = 19$  und der Dimension  $m = 4$ . Das Eigenwertproblem  $\mathbf{F}(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  hat die Ordnung  $m\rho = 76$ , das Spektrum von  $\mathbf{F}(\lambda)$  setzt sich aus 22 Struktureigenwerten  $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{22}$ , sowie 18 dreifachen Slave-Eigenwerten  $\lambda_{s,1}^3 < \lambda_{s,2}^3 < \dots < \lambda_{s,18}^3$  zusammen (vgl. Kapitel 4.1.2).

Die Beurteilung der Stabilität einer sukzessiven Reduktion kann durch einen Vergleich der Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda)$  mit denen der Originalmatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  erfolgen. Nimmt die Abweichung der Eigenwerte mit der Anzahl der Reduktionsschritte zu und wird dabei eine bestimmte Genauigkeit unterschritten, ist der Algorithmus instabil. Wurden die abzuspaltenden Eigenwerte aus der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  berechnet, kann ein Vergleich der Singulärwerte der Matrizen  $\mathbf{F}(\lambda_j)$  und  $\mathbf{F}^{\nu+1}(\lambda_j)$  beim Eigenwert  $\lambda_j$  als ein geeignetes Kriterium zur Beurteilung der Genauigkeit der Reduktion dienen. Im unteren Frequenzbereich liegen Struktur- und Slave-Eigenwerte in  $\mathbf{F}(\lambda)$  dicht beieinander. Je höher der Polynomgrad von  $\mathbf{F}(\lambda)$ , d.h. je größer die Anzahl der Modell-Freiheitsgrade ist, desto näher rücken die Eigenwerte des Slave-Systems und die der Struktur zusammen. Die Eigenwerte des Slave-Systems haben in  $\mathbf{F}(\lambda)$  die Vielfachheit  $m - 1$ . Diese mehrfachen Nullstellen sind sehr sensitiv gegenüber geringen Veränderungen in den Koeffizientenmatrizen der Polynommatrix ([109]). Rücken nun die Struktur-Eigenwerte immer dichter an die mehrfachen Slave-Eigenwerte, erhöht dies die Empfindlichkeit beider Nullstellen.

Im folgenden sind in Tabellenform verschiedene Reduktionsfolgen aufgeführt. Je Reduktionsschritt wird das Spektrum mit den abzuspaltenden Eigenwerten  $\lambda_j$  sowie in Klammern der

$(m - v_j + 1)$ -te Singulärwert von  $\mathbf{F}^\nu(\lambda_j)$  angegeben, wobei  $v_j$  die Vielfachheit des Eigenwerts darstellt. Die Singulärwerte wurden jeweils auf den größten Singulärwert normiert. Es ist zu beachten, daß zur Reduktion jeweils die Eigenwerte der Originalmatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  verwendet wurden. Verschiebt sich die Lage des aktuellen Eigenwerts  $\lambda_j$  in  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$  gegenüber der in  $\mathbf{F}(\lambda)$ , so werden die  $v_j$  kleinsten Singulärwerte der Matrix  $\mathbf{F}^\nu(\lambda_j)$  entsprechend größer. Als Abbruchkriterium dient der  $(m - v_j + 1)$ -te Singulärwert  $sv_j$  der zu reduzierenden Matrix  $\mathbf{F}^\nu(\lambda_j)$ . Der Algorithmus wird bei Singulärwerten  $sv_j > 1.0 \cdot 10^{-9}$  abgebrochen. In Tabelle A.2 sind die Slave- und in Tabelle A.1 die Struktur-Eigenwerte von  $\mathbf{F}(\lambda)$  zusammengefaßt.

j	$\lambda_j$	$sv[\mathbf{F}(\lambda_j)]$
1, 2	0.00	(8.1164E-12), 1.9326E-12
3	500.597	1.2595E-15
4	3805.42	4.2060E-16
5	14644.50	7.1000E-17
6	40135.89	8.1479E-17
7	90042.37	8.5293E-17
8	177108.18	1.2886E-18
9	317430.83	3.0109E-16
10	529547.60	2.5945E-16
11	817223.12	7.5009E-16
12	1441242.41	1.2082E-15
13	2086227.83	1.1043E-15
14	3042284.28	9.1646E-16
15	4395539.87	1.3539E-15
16	6295645.08	2.2768E-15
17	8946198.00	2.9777E-15
18	12574434.19	1.5701E-15
19	17268665.05	5.4922E-16
20	22407860.50	4.6343E-17
21	35786125.58	1.6556E-18
22	35919109.15	2.9443E-18

Tabelle A.1: Kleinste Singulärwerte  $sv_4$  ( $sv_3$ ) der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda_j)$  bei den Struktur-Eigenwerten  $\lambda_j$

Beim Vergleich der Reduktionsfolgen ist festzustellen, daß es günstiger ist, mehrfache Eigenwerte gemeinsam in einem Schritt abzuspalten (siehe A1 und A3) und nicht die Reihenfolge alleine von der Größe des Betrags abhängig zu machen (A2). Dies ist damit zu erklären, daß die mehrfachen Eigenwerte am empfindlichsten auf Fehler in den Koeffizientenmatrizen reagieren. Es hat sich weiterhin als günstig erwiesen, mehrfache Eigenwerte vor einem benachbarten einfachen Eigenwert zu faktorisieren, wie dies in der Reduktionsfolge A3 geschah. Weitere mögliche Reduktionsfolgen ergaben schlechtere Ergebnisse und werden darum hier nicht aufgeführt.

j	$\lambda_{s,j}$	$sv[\mathbf{F}(\lambda_{s,j})]$
1	500.598	3.8308E-14, 9.5849E-16, 1.1862E-16
2	3805.52	2.1046E-14, 1.6107E-16, 1.8930E-17
3	14646.49	2.8882E-14, 3.4707E-16, 1.3278E-16
4	40154.97	8.2638E-15, 2.7578E-16, 4.4708E-17
5	90158.29	1.5721E-14, 2.1150E-16, 6.7975E-17
6	177626.04	4.3045E-14, 2.6449E-16, 1.3962E-16
7	319274.82	1.8995E-13, 2.3627E-16, 4.2994E-17
8	534936.84	4.3200E-13, 9.5010E-16, 1.0414E-16
9	827801.92	4.5883E-13, 1.1737E-15, 6.4896E-16
10	1473746.54	2.2911E-13, 2.1684E-15, 1.8682E-15
11	2169431.32	7.5865E-13, 3.2388E-15, 2.2121E-15
12	3214033.61	6.8947E-12, 2.6023E-15, 1.6420E-15
13	4722658.81	9.6623E-12, 5.9850E-15, 9.6048E-16
14	6876868.20	9.9065E-12, 9.1773E-15, 8.4481E-16
15	9898247.40	1.0198E-11, 8.3766E-15, 8.0153E-16
16	13948271.58	6.7369E-12, 7.2497E-15, 7.7039E-16
17	18805691.18	5.9650E-12, 4.8729E-15, 2.0940E-15
18	23282337.75	1.0052E-12, 1.0214E-14, 2.4418E-15

Tabelle A.2: Kleinste Singulärwerte  $sv_2$ ,  $sv_3$ ,  $sv_4$  der Matrix  $\mathbf{F}(\lambda_{s,j})$  bei den Slave-Eigenwerten  $\lambda_{s,j}$

Red.-schritt $\nu$	Spektrum $\Lambda_\nu$ ( $j$ -ter Singulärwert)	Nullstellen $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$ ( $sv[\mathbf{F}^\nu(\lambda_j)]$ )			
1	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ( $sv_3, sv_3, sv_4, sv_4$ )	0.0 (8.1164E-12)	0.0 (1.9326E-12)	500.597 (1.2595E-15)	3805.42 (4.2060E-16)
2	$\lambda_5, \lambda_{s,1}, \lambda_{s,1}, \lambda_{s,1}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	14644.50 (7.6992E-17)	500.598 (2.4125E-09)	500.598 (2.4125E-09)	500.598 (2.4125E-09)
3	$\lambda_5, \lambda_{s,2}, \lambda_{s,2}, \lambda_{s,2}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	40135.8 (1.3810E-15)	3805.52 (7.7403E-10)	3805.52 (7.7403E-10)	3805.52 (7.7403E-10)
4	$\lambda_6, \lambda_{s,3}, \lambda_{s,3}, \lambda_{s,3}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	90042.3 (1.2427E-15)	14646.4 (7.3131E-11)	14646.4 (7.3131E-11)	14646.4 (7.3131E-11)
5	$\lambda_7, \lambda_{s,4}, \lambda_{s,4}, \lambda_{s,4}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	177108.1 (1.1962E-15)	40154.9 (3.1318E-10)	40154.9 (3.1318E-10)	40154.9 (3.1318E-10)
6	$\lambda_8, \lambda_{s,5}, \lambda_{s,5}, \lambda_{s,5}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	317430.8 (2.3465E-15)	90158.2 (4.6742E-10)	90158.2 (4.6742E-10)	90158.2 (4.6742E-10)
7	$\lambda_9, \lambda_{s,6}, \lambda_{s,6}, \lambda_{s,6}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	529547.6 (1.3629E-15)	177626.0 (1.1064E-08)	177626.0 (1.1064E-08)	177626.0 (1.1064E-08)

Tabelle A.3: Reduktionsfolge A1

Red.- schritt $\nu$	Spektrum $\Lambda_\nu$ ( $j$ -ter Singulärwert)	Nullstellen $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$ ( $sv[\mathbf{F}_{red}^\nu(\lambda_j)]$ )			
		1	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_{s,1}$ ( $sv_3, sv_3, sv_4, sv_2$ )	0.0 (8.0062E-12)	0.0 (8.0062E-12)
2	$\lambda_{s,1}, \lambda_{s,1}, \lambda_4, \lambda_{s,2}$ ( $sv_3, sv_3, sv_4, sv_2$ )	500.598 (1.3423E-14)	500.598 (1.3074E-13)	3805.4 (4.4828E-10)	3805.5 (4.4828E-10)
3	$\lambda_{s,2}, \lambda_{s,2}, \lambda_5, \lambda_{s,3}$ ( $sv_3, sv_3, sv_4, sv_2$ )	3805.5 (4.0234E-15)	3805.5 (3.1306E-11)	14644.5 (1.9029E-10)	14646.4 (1.9029E-10)
4	$\lambda_{s,3}, \lambda_{s,3}, \lambda_6, \lambda_{s,4}$ ( $sv_3, sv_3, sv_4, sv_2$ )	14646.4 (5.8438E-12)	14646.4 (4.7058E-10)	40135.8 (9.7073E-08)	40154.9 (9.7073E-08)

Tabelle A.4: Reduktionsfolge A2

### Sukzessive Faktorisierung einer Polynommatrix mit den inversen Eigenwerten

Bei der Reduktion der Matrix  $\hat{\mathbf{F}}(\zeta)$  mit dem inversen Parameter  $\zeta = \lambda^{-1}$  (vgl. 3.138) ist zu beachten, daß die Leitmatrix  $\mathbf{A}_0$  singulär ist, wenn  $\mathbf{F}(\lambda)$  Eigenwerte bei Null besitzt (z.B. ungesessertes System). Das bedeutet, es existieren für  $\hat{\mathbf{F}}(\zeta)$  Eigenwerte bei  $\zeta_j \rightarrow \infty$ . Es ist daher notwendig, die Eigenwerte von  $\mathbf{F}(\lambda)$  bei Null aus dem Spektrum zu entfernen, um somit eine reguläre Matrix  $\mathbf{A}_0^2$  zu erzeugen. Geschieht dies beispielsweise im ersten Reduktionsschritt, ist die Leitmatrix  $\mathbf{A}_0^2$  der reduzierten Matrix

$$\hat{\mathbf{F}}^2(\zeta) = \mathbf{A}_{\rho-1}^2 + \dots + \mathbf{A}_1^2 \zeta^{\rho-2} + \mathbf{A}_0^2 \zeta^{\rho-1} \quad (\text{A.47})$$

regulär und  $\hat{\mathbf{F}}^2(\zeta)$  kann vollständig faktorisiert werden.

$$\hat{\mathbf{F}}^2(\zeta) = \mathbf{A}_0^2 \mathbf{X}_{\rho-1} (\Lambda_{\rho-1}^{-1} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{X}_{\rho-1}^{-1} \dots \mathbf{X}_3 (\Lambda_3^{-1} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{X}_3^{-1} \mathbf{X}_2 (\Lambda_2^{-1} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{X}_2^{-1}. \quad (\text{A.48})$$

Die Reduktion wird nun für die Matrix (A.46) durchgeführt. In den Tabellen A.6 und A.7 sind die Eigenwerte und die jeweiligen  $(m - v_j + 1)$ -ten Singulärwerte bei den einzelnen Reduktionsschritten für die verschiedenen Reduktionsfolgen aufgeführt. Die Folgen B1 und B2 in den Tabellen A.6 und A.7 entsprechen für den Parameter  $\zeta$  der Folge A3 für den Parameter  $\lambda$  und haben sich für die numerische Behandlung als am besten geeignet erwiesen. In der Reduktionsfolge B1 werden die Nullstellen bei  $\lambda = 0$  im ersten Reduktionsschritt abgespalten, in der Folge B2 erfolgt dies im letzten Zerlegungsschritt. Die berechneten Singulärwerte in den Tabellen A.6 und A.7 zeigen, daß die Zerlegung nun wesentlich stabiler ist. Es ist zu beobachten, daß die Singulärwerte für die mehrfachen Nullstellen nach einigen Reduktionsschritten zwar größer werden, dann jedoch nicht weiter anwachsen. Entfernt man die niedrigsten Struktur-Eigenwerte bereits im ersten Reduktionsschritt (Reduktionsfolge B1), so zeigt sich, daß dies Einfluß auf die Genauigkeit der betrags hohen Eigenwerte  $\zeta_j$  von  $\hat{\mathbf{F}}^\nu(\zeta)$  bzw. auf die betrags niedrigen Eigenwerte  $\lambda_j$  von  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$  hat. Die mehrfachen Slave-Eigenwerte in der Nähe der abgespaltenen Struktur-Eigenwerte sind nicht mehr genau; die  $(m - v_j + 1)$ -ten Singulärwerte für diese Eigenwerte werden gegenüber den vorhergehenden Reduktionsschritten wieder größer (Reduktionsschritte 18 und 19). Geschieht die Abspaltung der Nullstellen  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  erst im letzten Reduktionsschritt (Reduktionsfolge B2), so werden ab irgendeinem Reduktionsschritt (hier Schritt 8) die Singulärwerte

Red.-schritt $\nu$	Spektrum $\Lambda_\nu$ ( $j$ -ter Singulärwert)	Nullstellen $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$ ( $sv[\mathbf{F}^\nu(\lambda_j)]$ )			
1	$\lambda_1, \lambda_{s,1}, \lambda_{s,1}, \lambda_{s,1}$ ( $sv_3, sv_2, sv_2, sv_2$ )	0.0 (8.1164E-12)	500.598 (3.8308E-14)	500.598 (3.8308E-14)	500.598 (3.8308E-14)
2	$\lambda_2, \lambda_{s,2}, \lambda_{s,2}, \lambda_{s,2}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	0.0 (2.3753E-13)	3805.5 (1.2389E-13)	3805.5 (1.2389E-13)	3805.5 (1.2389E-13)
3	$\lambda_3, \lambda_{s,3}, \lambda_{s,3}, \lambda_{s,3}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	500.597 (1.0822E-14)	14646.4 (1.1256E-13)	14646.4 (1.1256E-13)	14646.4 (1.1256E-13)
4	$\lambda_4, \lambda_{s,4}, \lambda_{s,4}, \lambda_{s,4}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	3805.4 (7.5164E-15)	40154.9 (4.7333E-14)	40154.9 (4.7333E-14)	40154.9 (4.7333E-14)
5	$\lambda_5, \lambda_{s,5}, \lambda_{s,5}, \lambda_{s,5}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	14644.5 (1.3600E-15)	90158.2 (1.2726E-13)	90158.2 (1.2726E-13)	90158.2 (1.2726E-13)
6	$\lambda_6, \lambda_{s,6}, \lambda_{s,6}, \lambda_{s,6}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	40135.8 (1.6672E-15)	177626.0 (1.0598E-13)	177626.0 (1.0598E-13)	177626.0 (1.0598E-13)
7	$\lambda_7, \lambda_{s,7}, \lambda_{s,7}, \lambda_{s,7}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	90042.3 (4.6489E-16)	177626.0 (1.6667E-13)	177626.0 (1.6667E-13)	177626.0 (1.6667E-13)
8	$\lambda_8, \lambda_{s,8}, \lambda_{s,8}, \lambda_{s,8}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	177108.1 (6.7085E-16)	534936.8 (2.5641E-13)	534936.8 (2.5641E-13)	534936.8 (2.5641E-13)
9	$\lambda_9, \lambda_{s,9}, \lambda_{s,9}, \lambda_{s,9}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	317430.8 (1.8068E-16)	827801.9 (6.5400E-13)	827801.9 (6.5400E-13)	827801.9 (6.5400E-13)
10	$\lambda_{10}, \lambda_{s,10}, \lambda_{s,10}, \lambda_{s,10}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	529547.6 (1.7129E-16)	1473746.5 (1.2517E-12)	1473746.5 (1.2517E-12)	1473746.5 (1.2517E-12)
11	$\lambda_{11}, \lambda_{s,11}, \lambda_{s,11}, \lambda_{s,11}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	817223.1 (3.7584E-17)	12169431.3 (1.5558E-11)	12169431.3 (1.5558E-11)	12169431.3 (1.5558E-11)
12	$\lambda_{12}, \lambda_{s,12}, \lambda_{s,12}, \lambda_{s,12}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	1441242.4 (2.9419E-16)	3214033.6 (2.9318E-11)	3214033.6 (2.9318E-11)	3214033.6 (2.9318E-11)
13	$\lambda_{13}, \lambda_{s,13}, \lambda_{s,13}, \lambda_{s,13}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	2086227.8 (4.2383E-16)	4722658.8 (7.0712E-12)	4722658.8 (7.0712E-12)	4722658.8 (7.0712E-12)
14	$\lambda_{14}, \lambda_{s,14}, \lambda_{s,14}, \lambda_{s,14}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	3042284.2 (5.3960E-16)	6876868.2 (4.2493E-11)	6876868.2 (4.2493E-11)	6876868.2 (4.2493E-11)
15	$\lambda_{15}, \lambda_{s,15}, \lambda_{s,15}, \lambda_{s,15}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	4395539.8 (5.3791E-16)	9898247.4 (2.0487E-11)	9898247.4 (2.0487E-11)	9898247.4 (2.0487E-11)
16	$\lambda_{16}, \lambda_{s,16}, \lambda_{s,16}, \lambda_{s,16}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	6295645.0 (1.5582E-16)	13948271.5 (1.9091E-11)	13948271.5 (1.9091E-11)	13948271.5 (1.9091E-11)
17	$\lambda_{18}, \lambda_{s,18}, \lambda_{s,18}, \lambda_{s,18}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	8946198.0 (3.2574E-16)	18805691.1 (7.8993E-11)	18805691.1 (7.8993E-11)	18805691.1 (7.8993E-11)
18	$\lambda_{18}, \lambda_{s,18}, \lambda_{s,18}, \lambda_{s,18}$ ( $sv_4, sv_2, sv_2, sv_2$ )	12574434.1 (1.6803E-16)	23282337.7 (6.2793E-11)	23282337.7 (6.2793E-11)	23282337.7 (6.2793E-11)
19	$\lambda_{19}, \lambda_{20}, \lambda_{21}, \lambda_{22}$ ( $sv_4, sv_4, sv_4, sv_4$ )	17268665.0 (1.5198E-16)	22407860.5 (4.8238E-17)	35786125.5 (3.1260E-15)	35919109.1 (6.1379E-16)

Tabelle A.5: Reduktionsfolge A3

wieder kleiner. Die Lage der mehrfachen Slave-Eigenwerte  $\lambda_{18}^{-1}$  bleibt in der reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{18}(\zeta)$  unverändert gegenüber der Ausgangsmatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$ , da die Struktur-Eigenwerte in der Nähe dieser Slave-Eigenwerte noch nicht abgespalten wurden. Die vier niedrigsten Struktur-Eigenwerte  $\lambda_1$  bis  $\lambda_4$  in der reduzierten Matrix  $\mathbf{F}^{19}(\lambda)$  bleiben ebenfalls exakt erhalten (Reduktionsschritt 19) und können somit im letzten Schritt aus  $\mathbf{F}^{19}(\lambda)$  abgespalten werden.

### Zusammenfassung der Ergebnisse

Eine stabile Reduktion der Polynommatrix  $\mathbf{F}(\lambda)$  ist im wesentlichen abhängig von der Verteilung der Eigenwerte im Spektrum und damit von der Reduktionsfolge. Die mehrfachen Eigenwerte der Slave-Struktur sind sehr empfindlich gegenüber Störungen, d.h. Fehlern in den Koeffizientenmatrizen. Dies gilt insbesondere für die beragsniedrigen Nullstellen von  $\mathbf{F}(\lambda)$ , da dort die Slave- und Struktur-Eigenwerte besonders dicht zusammenliegen. Wird in der Reduktionsfolge zuerst ein Struktur-Eigenwert, der in der Nähe eines Slave-Eigenwerts liegt abgespalten, so wird die Lage des mehrfachen Slave-Eigenwerts dadurch beeinflusst. Aus dem mehrfachen Slave-Eigenwert werden  $m - 1$  einzelne Eigenwerte oder es entstehen konjugiert komplexe Eigenwerte. Aus diesem Grund sollte die Abspaltung mehrfacher Eigenwerte in einem Reduktionsschritt geschehen. Nahe zusammenliegende Struktur- und Slave-Eigenwerte sollten ebenfalls in einer Spektralmatrix zusammengefaßt werden. Ist dies nicht möglich, so ist es günstiger, erst den mehrfachen Slave-Eigenwert abzuspalten. Wird die gesamte Reduktion mit den Matrizen  $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$  durchgeführt, liefert die Reduktionsfolge A3 die besten Ergebnisse. Die mehrfachen Eigenwerte entfernen sich im Beispiel (A.46) (Polynomgrad von  $\rho = 19$  und Dimension  $m = 4$ ) jedoch mit jedem Reduktionsschritt weiter von ihrer ursprünglichen Lage. Die Reduktion ist somit eigentlich instabil, die geforderte Genauigkeit konnte jedoch eingehalten werden. Eine stabile Reduktion konnte bei Polynommatrizen mit Polynomgraden bis  $\rho = 13$  (sieben finite Balkenelemente, Dimension  $m = 4$ ) erreicht werden. Die Lage der mehrfachen Eigenwerte blieb dann während der gesamten Reduktion nahezu unverändert. Mit Hilfe der inversen Formulierung konnten die bei einer dynamischen Kondensation anfallenden Polynommatrizen bis zu einem Polynomgrad  $\rho = 64$  (25 finite Balkenelemente, Dimension  $m = 4$ ) stabil faktorisiert werden.

Red.-schritt $\nu$	Spektrum $\Lambda_\nu$ ( $j$ -ter Singulärwert)	Nullstellen $\mathbf{F}(\lambda)$ ( $sv[\mathbf{F}(\lambda_j)]$ )			
1	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ( $sv_3, sv_3, sv_4, sv_4$ )	0.0 (8.1164E-12)	0.0 (8.1164E-12)	500.597 (1.2595E-15)	3805.4 (4.2060E-15)
	Spektrum $\Lambda_\nu^{-1}$ ( $j$ -ter Singulärwert)	Nullstellen $\hat{\mathbf{F}}^\nu(\zeta)$ ( $sv[\hat{\mathbf{F}}^\nu(\zeta_j)]$ )			
2	$\lambda_{s,18}^{-1}, \lambda_{s,18}^{-1}, \lambda_{s,18}^{-1}, \lambda_{22}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	23282337.7 <sup>-1</sup> (4.2921E-12)	23282337.7 <sup>-1</sup> (4.2921E-12)	23282337.7 <sup>-1</sup> (4.2921E-12)	35919109.1 <sup>-1</sup> (4.3124E-17)
3	$\lambda_{s,17}^{-1}, \lambda_{s,17}^{-1}, \lambda_{s,17}^{-1}, \lambda_{21}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	18805691.1 <sup>-1</sup> (2.2592E-11)	18805691.1 <sup>-1</sup> (2.2592E-11)	18805691.1 <sup>-1</sup> (2.2592E-11)	35786125.5 <sup>-1</sup> (7.7263E-18)
4	$\lambda_{s,16}^{-1}, \lambda_{s,16}^{-1}, \lambda_{s,16}^{-1}, \lambda_{20}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	13948271.5 <sup>-1</sup> (9.1137E-12)	13948271.5 <sup>-1</sup> (9.1137E-12)	13948271.5 <sup>-1</sup> (9.1137E-12)	22407860.5 <sup>-1</sup> (7.0324E-17)
5	$\lambda_{s,15}^{-1}, \lambda_{s,15}^{-1}, \lambda_{s,15}^{-1}, \lambda_{19}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	9898247.4 <sup>-1</sup> (2.1286E-11)	9898247.4 <sup>-1</sup> (2.1286E-11)	9898247.4 <sup>-1</sup> (2.1286E-11)	17268665.0 <sup>-1</sup> (1.4906E-16)
6	$\lambda_{s,14}^{-1}, \lambda_{s,14}^{-1}, \lambda_{s,14}^{-1}, \lambda_{18}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	6876868.2 <sup>-1</sup> (2.0174E-11)	6876868.2 <sup>-1</sup> (2.0174E-11)	6876868.2 <sup>-1</sup> (2.0174E-11)	12574434.1 <sup>-1</sup> (1.0603E-16)
7	$\lambda_{s,13}^{-1}, \lambda_{s,13}^{-1}, \lambda_{s,13}^{-1}, \lambda_{17}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	4722658.8 <sup>-1</sup> (2.1359E-11)	4722658.8 <sup>-1</sup> (2.1359E-11)	4722658.8 <sup>-1</sup> (2.1359E-11)	8946198.0 <sup>-1</sup> (3.2617E-16)
8	$\lambda_{s,12}^{-1}, \lambda_{s,12}^{-1}, \lambda_{s,12}^{-1}, \lambda_{16}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	3214033.6 <sup>-1</sup> (5.2083E-11)	3214033.6 <sup>-1</sup> (5.2083E-11)	3214033.6 <sup>-1</sup> (5.2083E-11)	6295645.0 <sup>-1</sup> (1.9007E-16)
9	$\lambda_{s,11}^{-1}, \lambda_{s,11}^{-1}, \lambda_{s,11}^{-1}, \lambda_{15}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	2169431.3 <sup>-1</sup> (1.0854E-11)	2169431.3 <sup>-1</sup> (1.0854E-11)	2169431.3 <sup>-1</sup> (1.0854E-11)	4395539.8 <sup>-1</sup> (3.6712E-17)
10	$\lambda_{s,10}^{-1}, \lambda_{s,10}^{-1}, \lambda_{s,10}^{-1}, \lambda_{14}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	1473746.5 <sup>-1</sup> (3.3014E-11)	1473746.5 <sup>-1</sup> (3.3014E-11)	1473746.5 <sup>-1</sup> (3.3014E-11)	3042284.2 <sup>-1</sup> (5.1113E-17)
11	$\lambda_{s,9}^{-1}, \lambda_{s,9}^{-1}, \lambda_{s,9}^{-1}, \lambda_{13}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	827801.9 <sup>-1</sup> (1.2686E-11)	827801.9 <sup>-1</sup> (1.2686E-11)	827801.9 <sup>-1</sup> (1.2686E-11)	2086227.8 <sup>-1</sup> (2.2936E-16)
12	$\lambda_{s,8}^{-1}, \lambda_{s,8}^{-1}, \lambda_{s,8}^{-1}, \lambda_{12}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	534936.8 <sup>-1</sup> (2.0952E-11)	534936.8 <sup>-1</sup> (2.0952E-11)	534936.8 <sup>-1</sup> (2.0952E-11)	1441242.4 <sup>-1</sup> (7.2087E-17)
13	$\lambda_{s,7}^{-1}, \lambda_{s,7}^{-1}, \lambda_{s,7}^{-1}, \lambda_{11}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	319274.8 <sup>-1</sup> (1.9838E-12)	319274.8 <sup>-1</sup> (1.9838E-12)	319274.8 <sup>-1</sup> (1.9838E-12)	817223.1 <sup>-1</sup> (4.0472E-16)
14	$\lambda_{s,6}^{-1}, \lambda_{s,6}^{-1}, \lambda_{s,6}^{-1}, \lambda_{10}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	177626.0 <sup>-1</sup> (3.6845E-12)	177626.0 <sup>-1</sup> (3.6845E-12)	177626.0 <sup>-1</sup> (3.6845E-12)	529547.6 <sup>-1</sup> (7.1670E-17)
15	$\lambda_{s,5}^{-1}, \lambda_{s,5}^{-1}, \lambda_{s,5}^{-1}, \lambda_9^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	90158.2 <sup>-1</sup> (1.4996E-13)	90158.2 <sup>-1</sup> (1.4996E-13)	90158.2 <sup>-1</sup> (1.4996E-13)	317430.8 <sup>-1</sup> (1.5871E-16)
16	$\lambda_{s,4}^{-1}, \lambda_{s,4}^{-1}, \lambda_{s,4}^{-1}, \lambda_8^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	40154.9 <sup>-1</sup> (1.9990E-13)	40154.9 <sup>-1</sup> (1.9990E-13)	40154.9 <sup>-1</sup> (1.9990E-13)	177108.1 <sup>-1</sup> (1.0158E-17)
17	$\lambda_{s,3}^{-1}, \lambda_{s,3}^{-1}, \lambda_{s,3}^{-1}, \lambda_7^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	14646.4 <sup>-1</sup> (1.9948E-14)	14646.4 <sup>-1</sup> (1.9948E-14)	14646.4 <sup>-1</sup> (1.9948E-14)	90042.3 <sup>-1</sup> (8.2876E-18)
18	$\lambda_{s,2}^{-1}, \lambda_{s,2}^{-1}, \lambda_{s,2}^{-1}, \lambda_6^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	3805.5 <sup>-1</sup> (1.7958E-10)	3805.5 <sup>-1</sup> (1.7958E-10)	3805.5 <sup>-1</sup> (1.7958E-10)	40135.8 <sup>-1</sup> (1.8629E-16)
19	$\lambda_{s,1}^{-1}, \lambda_{s,1}^{-1}, \lambda_{s,1}^{-1}, \lambda_5^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	500.598 <sup>-1</sup> (3.1438E-09)	500.598 <sup>-1</sup> (3.1438E-09)	500.598 <sup>-1</sup> (3.1438E-09)	14644.5 <sup>-1</sup> (6.8166E-16)

Tabelle A.6: Reduktionsfolge B1; Reduktion mit inversen Eigenwerten  $\zeta = \frac{1}{\lambda}$ .

Red.- schritt $\nu$	Spektrum $\Lambda_\nu^{-1}$ ( $j$ -ter Singulärwert)	Nullstellen $\hat{\mathbf{F}}^\nu(\zeta)$ ( $sv[\hat{\mathbf{F}}^\nu(\zeta_j)]$ )			
1	$\lambda_{s,18}^{-1}, \lambda_{s,18}^{-1}, \lambda_{s,18}^{-1}, \lambda_{22}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	23282337.7 <sup>-1</sup> (5.8056E-13)	23282337.7 <sup>-1</sup> (5.8056E-13)	23282337.7 <sup>-1</sup> (5.8056E-13)	35919109.1 <sup>-1</sup> (1.3919E-18)
2	$\lambda_{s,17}^{-1}, \lambda_{s,17}^{-1}, \lambda_{s,17}^{-1}, \lambda_{21}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	18805691.1 <sup>-1</sup> (3.6433E-12)	18805691.1 <sup>-1</sup> (3.6433E-12)	18805691.1 <sup>-1</sup> (3.6433E-12)	35786125.5 <sup>-1</sup> (3.3871E-18)
3	$\lambda_{s,16}^{-1}, \lambda_{s,16}^{-1}, \lambda_{s,16}^{-1}, \lambda_{20}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	13948271.5 <sup>-1</sup> (1.2198E-11)	13948271.5 <sup>-1</sup> (1.2198E-11)	13948271.5 <sup>-1</sup> (1.2198E-11)	22407860.5 <sup>-1</sup> (4.6684E-18)
4	$\lambda_{s,15}^{-1}, \lambda_{s,15}^{-1}, \lambda_{s,15}^{-1}, \lambda_{19}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	9898247.4 <sup>-1</sup> (9.5549E-12)	9898247.4 <sup>-1</sup> (9.5549E-12)	9898247.4 <sup>-1</sup> (9.5549E-12)	17268665.0 <sup>-1</sup> (7.1897E-18)
5	$\lambda_{s,14}^{-1}, \lambda_{s,14}^{-1}, \lambda_{s,14}^{-1}, \lambda_{18}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	6876868.2 <sup>-1</sup> (2.4687E-11)	6876868.2 <sup>-1</sup> (2.4687E-11)	6876868.2 <sup>-1</sup> (2.4687E-11)	12574434.1 <sup>-1</sup> 3.2600E-18
6	$\lambda_{s,13}^{-1}, \lambda_{s,13}^{-1}, \lambda_{s,13}^{-1}, \lambda_{17}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	4722658.8 <sup>-1</sup> (8.4639E-12)	4722658.8 <sup>-1</sup> (8.4639E-12)	4722658.8 <sup>-1</sup> (8.4639E-12)	8946198.0 <sup>-1</sup> (4.6421E-17)
7	$\lambda_{s,12}^{-1}, \lambda_{s,12}^{-1}, \lambda_{s,12}^{-1}, \lambda_{16}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	3214033.6 <sup>-1</sup> (1.2633E-11)	3214033.6 <sup>-1</sup> (1.2633E-11)	3214033.6 <sup>-1</sup> (1.2633E-11)	6295645.0 <sup>-1</sup> (8.5424E-17)
8	$\lambda_{s,11}^{-1}, \lambda_{s,11}^{-1}, \lambda_{s,11}^{-1}, \lambda_{15}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	2169431.3 <sup>-1</sup> (2.4289E-12)	2169431.3 <sup>-1</sup> (2.4289E-12)	2169431.3 <sup>-1</sup> (2.4289E-12)	4395539.8 <sup>-1</sup> (2.9882E-17)
9	$\lambda_{s,10}^{-1}, \lambda_{s,10}^{-1}, \lambda_{s,10}^{-1}, \lambda_{14}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	1473746.5 <sup>-1</sup> (3.4077E-12)	1473746.5 <sup>-1</sup> (3.4077E-12)	1473746.5 <sup>-1</sup> (3.4077E-12)	3042284.2 <sup>-1</sup> (7.9123E-17)
10	$\lambda_{s,9}^{-1}, \lambda_{s,9}^{-1}, \lambda_{s,9}^{-1}, \lambda_{13}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	827801.9 <sup>-1</sup> (3.8866E-12)	827801.9 <sup>-1</sup> (3.8866E-1)	827801.9 <sup>-1</sup> (3.8866E-1)	2086227.8 <sup>-1</sup> (1.7662E-18)
11	$\lambda_{s,8}^{-1}, \lambda_{s,8}^{-1}, \lambda_{s,8}^{-1}, \lambda_{12}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	534936.8 <sup>-1</sup> (3.7256E-12)	534936.8 <sup>-1</sup> (3.7256E-12)	534936.8 <sup>-1</sup> (3.7256E-12)	1441242.4 <sup>-1</sup> (4.0056E-17)
12	$\lambda_{s,7}^{-1}, \lambda_{s,7}^{-1}, \lambda_{s,7}^{-1}, \lambda_{11}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	319274.8 <sup>-1</sup> (1.7454E-12)	319274.8 <sup>-1</sup> (1.7454E-12)	319274.8 <sup>-1</sup> (1.7454E-12)	817223.1 <sup>-1</sup> (3.0590E-17)
13	$\lambda_{s,6}^{-1}, \lambda_{s,6}^{-1}, \lambda_{s,6}^{-1}, \lambda_{10}^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	177626.0 <sup>-1</sup> (1.3274E-13)	177626.0 <sup>-1</sup> (1.3274E-13)	177626.0 <sup>-1</sup> (1.3274E-13)	529547.6 <sup>-1</sup> (4.6924E-17)
14	$\lambda_{s,5}^{-1}, \lambda_{s,5}^{-1}, \lambda_{s,5}^{-1}, \lambda_9^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	90158.2 <sup>-1</sup> (1.7612E-13)	90158.2 <sup>-1</sup> (1.7612E-13)	90158.2 <sup>-1</sup> (1.7612E-13)	317430.8 <sup>-1</sup> (1.4737E-17)
15	$\lambda_{s,4}^{-1}, \lambda_{s,4}^{-1}, \lambda_{s,4}^{-1}, \lambda_8^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	40154.9 <sup>-1</sup> (3.5809E-14)	40154.9 <sup>-1</sup> (3.5809E-14)	40154.9 <sup>-1</sup> (3.5809E-14)	177108.1 <sup>-1</sup> (1.0133E-17)
16	$\lambda_{s,3}^{-1}, \lambda_{s,3}^{-1}, \lambda_{s,3}^{-1}, \lambda_7^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	14646.4 <sup>-1</sup> (1.3888E-14)	14646.4 <sup>-1</sup> (1.3888E-14)	14646.4 <sup>-1</sup> (1.3888E-14)	90042.3 <sup>-1</sup> (1.1788E-18)
17	$\lambda_{s,2}^{-1}, \lambda_{s,2}^{-1}, \lambda_{s,2}^{-1}, \lambda_6^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	3805.5 <sup>-1</sup> (4.9053E-14)	3805.5 <sup>-1</sup> (4.9053E-14)	3805.5 <sup>-1</sup> (4.9053E-14)	40135.8 <sup>-1</sup> (9.5587E-17)
18	$\lambda_{s,1}^{-1}, \lambda_{s,1}^{-1}, \lambda_{s,1}^{-1}, \lambda_5^{-1}$ ( $sv_2, sv_2, sv_2, sv_4$ )	500.598 <sup>-1</sup> (4.35234E-14)	500.598 <sup>-1</sup> (4.35234E-14)	500.598 <sup>-1</sup> (4.35234E-14)	14644.5 <sup>-1</sup> (1.6480E-16)
	Spektrum $\Lambda_\nu$ ( $j$ -ter Singulärwert)	Nullstellen $\mathbf{F}^\nu(\lambda)$ ( $sv[\mathbf{F}^\nu(\lambda_j)]$ )			
19	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ( $sv_3, sv_3, sv_4, sv_4$ )	0.0 (8.0046E-12)	0.0 (8.0046E-12)	500.597 (1.9652E-14)	3805.4 (9.7588E-16)

Tabelle A.7: Reduktionsfolge B2: Reduktion mit inversen Eigenwerten  $\zeta = \frac{1}{\lambda}$ .

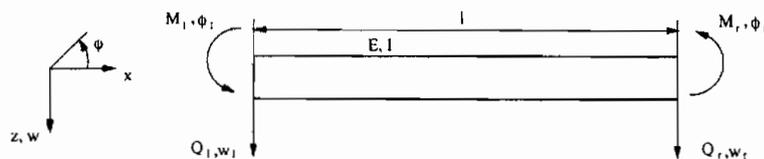
# Anhang B

## Elementmatrizen

- E = Elastizitätsmodul
- I = Flächenträgheitsmoment
- l = Elementlänge
- m = Masse
- $\rho_d$  = Dichte
- A = Querschnittsfläche.

### Balken

Steifigkeitsmatrix **K** und konsistente Massenmatrix **M** eines Balkenelements:

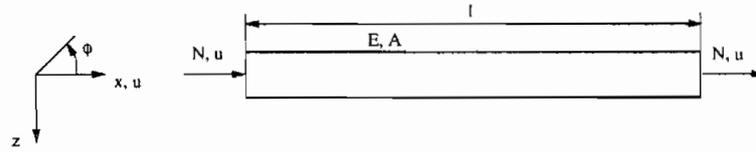


$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \phi_l & w_l & \phi_r & w_r \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} M_l & Q_l & M_r & Q_r \end{pmatrix}^T, \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{K} = \frac{E I}{l^3} \begin{pmatrix} 4 l^2 & -6 l & 2 l^2 & 6 l \\ -6 l & 12 & -6 l & -12 \\ 2 l^2 & -6 l & 4 l^2 & 6 l \\ 6 l & -12 & 6 l & 12 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{\rho_d A l}{420} \begin{pmatrix} 4 l^2 & -22 l & -3 l^2 & -13 l \\ -22 l & 156 & 13 l & 54 \\ -3 l^2 & 13 l & 4 l & 22 l \\ -13 l & 54 & 22 l & 156 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

## Stab

Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und konsistente Massenmatrix  $\mathbf{M}$  eines Stabelements B:



$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u_l & u_r \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} N_l & N_r \end{pmatrix}^T, \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{K} = \frac{E A}{l} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{\rho_d A l}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

# Anhang C

## Zustandsraumdarstellungen

Im folgenden werden in Ergänzung zur Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{y}(t), \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{y}(t) \quad (\text{C.2})$$

aus Kapitel 3.3.2 (Beobachtungsnormalform 1) drei weitere Darstellungsformen aufgezeigt. Die Matrix  $\mathbf{A}$  hat dabei jeweils die Dimension  $n \times n$ . Die Matrix  $\mathbf{B}$  hat die Größe  $n \times m$  und die Matrix  $\mathbf{C}$  die Dimension  $m \times n$ .  $\mathbf{D}$  ist eine quadratische Matrix der Dimension  $m$ .

### Steuerungsnormalform 1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & \dots & -\mathbf{A}_{n-2} & -\mathbf{A}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \left( \mathbf{B}_0 \ \mathbf{B}_1 \ \dots \ \mathbf{B}_{n-1} \right), \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.3})$$

## Steuerungsnormalform 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\mathbf{A}_{n-1} \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\mathbf{A}_{n-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\mathbf{A}_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\mathbf{A}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{C} = \left( \mathbf{B}_0 \quad \mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_{n-2} \quad \mathbf{B}_{n-1} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \dots & \mathbf{A}_{n-2} & \mathbf{A}_{n-1} \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & \mathbf{A}_{n-3} & \mathbf{A}_{n-2} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{A}_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} \quad (\text{C.4})$$

## Beobachtungsnormalform 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_0 & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\mathbf{A}_1 & 0 & \mathbf{I} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -\mathbf{A}_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{n-2} \\ \mathbf{B}_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \left( \mathbf{I} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \right), \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.5})$$

# Literaturverzeichnis

- [1] Allemang, R. J.; Brown, D. L.: A Unified Matrix Polynomial Approach to Modal Identification. *Journal of Sound and Vibration*, 211(3), 301-322, 1998
- [2] Allen, J. J.: A component mode synthesis method using Lanczos vectors. *Proc. 6th IMAC*, Kissimmee, Florida (USA), (1988), 507-513.
- [3] Aoki, M.: *State Space Modelling of Time Series*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1987.
- [4] Barth, J.; Jaschek, H.: Ermittlung wesentlicher Zustandsgrößen bei der modalen Ordnungsreduktion. *Automatisierungstechnik* at, 33.Jahrgang, Heft 7, 1985.
- [5] Bathe, K. J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall, NY. 1982
- [6] Benfield W.A.; Hruda, R. F.: *Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution*. *AIAA J.* 9, 1255-1261, 1971
- [7] Bronstein; Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main, 1977.
- [8] Chang, C. J.; Craig, R. R.: On the Use of Attachment Modes in Substructure Coupling for Dynamic Anlysis. *AIAA J. Paper* 77-405, 1977
- [9] Collatz, L.: *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1945
- [10] Courant, R., Hilbert, P.: *Methods of Mathematical Physics*. Interscience, Vol. 1, New York, 1966
- [11] Cournier, A.: On three Modal Synthesis Variants. *Journal of Sound and Vibration*. 90, 527-540, 1983
- [12] Craig, R. R.: *Methods of Component Mode Synthesis*. *Shock Vibration Digest* 9, 3-10, 1977
- [13] Craig, R. R.: Component mode synthesis for model order reduction of nonclassically damped systems. *Journal Guidance Control and Dynamics* 12(4), 577-584, 1989

- [14] Craig, R. R., Bampton, M. C. C.: Coupling of Structures for Dynamic Analysis. AIAA J., 6, 1313-1319, 1968
- [15] Craig, R. R.; Hale, A.: Block-Krylov component synthesis method for structural mode reduction. Journal Guidance Control and Dynamics 11(6), 562-570, 1988
- [16] Craig, R. R.; Kim, H. M.: Some applications of Lanczos vectors in structural dynamics. Proc. of the 6th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, Fl, Feb 1-4, Vol. 1, 501-506, 1988
- [17] Craig, R. R.; Kim, H. M.; Su, T.: Some applications of Lanczos vectors in structural mechanics. Proc. 6th IMAC, Kissimmee, Florida (USA), 501-506, 1988
- [18] Craig, R. R.; Su, T-J.: A Review of Model Reduction Methods for Structural Design. The Dynamics of Flexible Structures in Space, Proc. 1st Int. Conf., Cranfield/UK, 121-134, 1990
- [19] Dubigeon, S.; Peseux, B.: Dynamic Condensation: The 'Free Mode' Method. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 3521-3543, 1994
- [20] Engeln-Müllges, G.; Reutter, F.: Numerik-Algorithmen mit Fortran 77-Programmen. 7., Auflage, B.I. Wissenschaftsverlag, 1993
- [21] Ewins, D. J.: Modal testing: theory and practice. Research Studies Press, Taunton, Somerset, 1994
- [22] Falk, S.: Das Reduktionsverfahren für Polynommatrizen. ZAMM 74, 1, 3-15, 1994
- [23] Feldmann, D.: Repititorium der Ingenieurmathematik Teil 2. Binomi Verlag 1993
- [24] Findeisen, B.: Eigenschwingungsanalyse von diskreten Strukturen mit Methoden der Freiheitsgradreduktion. Diss. TU Chemnitz, 1991
- [25] Fossard, A. J.: Multivariable System Control. North-Holland Publishing Company, 1979
- [26] Flippen, L. D. Jr.: A Theory of Condensation Model Reduction. Computers Math. Applic. Vol. 27, No. 2, 9-40, 1994
- [27] Gantmacher, F.R.: Matrizenrechnung. I. Allgemeine Theorie. Hochschulbuecher für Mathematik. Bd. 36. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1958
- [28] Gantmacher, F.R.: Matrizenrechnung. Teil II. Spezielle Fragen und Anwendungen. 3. Aufl. Hochschulbuecher für Mathematik. Band 37. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. VIII, 1971
- [29] Garvey, S. D.; Penny, J. E. T.; Gilbert, A. J.: The Reduction of Computation Effort in Kron's Methods for Eigenvalue and Response Analysis of Large Structures. Computers and Structures. Vol. 34, No. 4, 593-602, 1990

- [30] Gasch, R.; Knothe, K.: Strukturdynamik, Band 2 Kontinua und ihre Diskretisierung. Springer-Verlag, 1989
- [31] Gladwell, G. M.: Branch mode analysis of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration* 1, 41-59, 1064
- [32] Gohberg, I.: Topics in Interpolation Theory of Rational Matrix-valued Functions. *Operator Theory: Advances and Applications* Vol. 33, Birkhäuser, 1988
- [33] Gohberg, I.; Lancaster, P.; Rodman, L.: Matrix polynomials. *Computer Science and Applied Mathematics*. New York etc.: Academic Press, a Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XIV, 1982
- [34] Goldman, R. L.: Vibration Analysis by Dynamic Partioning. *AIAA J.* 7, 1152-1154
- [35] Golub, H.; Van Loan, C. F.: *Matrix Computations*. North Oxford Academic 1986.
- [36] Guyan, R. J.: Reduction of Stiffness and Mass Matrices. *AIAA J.* , 3, 380-, 1965
- [37] Hale, A. L.: Substructure Synthesis and its iterative Improvment for Large Non-Conservative Vibrator Systems. *AIAA J.* 22, 265-272
- [38] Hale, A. L., Bergman, L. A.: The Dynamic Synthesis of General Non-Conservative Structures from Seperatly Identified Substrucuture Models. *J. Sound Vibration* 98, 431-446
- [39] Hale, A. L., Meirovitsch, L.: On the Substructure Synthesis Method. *AIAA J.* 19, 940-947, 1981
- [40] Hartmann, I.: *Lineare Systeme*. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1976.
- [41] Haselman, T. K.: Modal Coupling in Lightly Damped Structures. *AIAA J.* 14, 1627-1628
- [42] Haselman, T. K.: Damping Synthesis from Substructure Test. *AIAA J.* 14, 1409- 1418
- [43] Henshell, R.; Ong, J.: Automatic Masters for Eigenvalue Economisation. *Earthquake Eng. and. Struct. Dynam.*, 3, 375-383, 1975
- [44] Herting, D. N.: Development of an Automated Mullet-Stage Modal Synthesis Systems for NASTRAN. 6th NASTRAN usre's colloquium, NASA CP 2018, 1977
- [45] Hitziger, T.; Mackens, W.; Voss, H.: A Condensation-Projection Method for the Generalized Eigenvalue Problem. *High Performance Computing* 1, 239-282, Elsevier Applied Science, London 1995
- [46] Hou, S. N.: Review of Modal Synthesis Techniques and a new Appraoch. *S hock Vib. Bul.* 40(4) 25-39, 1969

- [47] Hurty, W. C.: Dynamic Analysis by Dynamic Partitioning. AIAA J. 7, 1152-1154, 1969
- [48] Irons, B.: Eigenvalue Economizer in Vibration Problems, J. Roy. Aero. Soc. 67, S.526-, 1963
- [49] Jennings, A.: Mass Condensation and Simultaneous Iteration for Vibration Problems, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.6, S.543-552, 1973
- [50] Karpel, M.; Newman, M.: Accelerated convergence for vibration modes using the substructure coupling method and fictitious coupling masses. Israel J. Techn. 13, 55-62, 1975
- [51] Khazanov, V.B.; Kublanovskaya, V.N.: Spectral problems for matrix pencils. Methods and algorithms. I. Sov. J. Numer. Anal. Math. Model. 3, No.5, 337-371, 1988
- [52] Khazanov, V.B.; Kublanovskaya, V.N.: Spectral problems for matrix pencils. Methods and algorithms. II. (English) Sov. J. Numer. Anal. Math. Model. 3, No.6, 467-485, 1988
- [53] Khazanov, V.B.; Kublanovskaya, V.N.: Spectral problems for matrix pencils. Methods and algorithms. III. (English) Sov. J. Numer. Anal. Math. Model. 4, No.1, 19-51, 1989
- [54] Kailath, T.: Linear Systems. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1980
- [55] Kim, H. M.; Craig, R. R.: Application of Unsymmetric Block Lanczos Vectors in System Identification. International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis 4, Vol. 7, 226-242, 1992
- [56] Kisilewicz, J.: Inverse Polynomial Matrix Approximation. Appl. Math. and Comp. Sci., vol. 3, No. 4, 721-730, 1993
- [57] Klosterman, A. L.; Lemon, J. R.: Dynamic design analysis via building block approach. Shock and Vibration Bulletin 1, 42, 1972
- [58] Kolousek, V.: Dynamics in Engineering Structures. Butterworth & Co. LTD., London, 1973
- [59] Lancaster, P.: Lambda-matrices and vibrating systems. International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics. 94. Oxford etc.: Pergamon Press. XIII, 1966
- [60] Lancaster, P.: A fundamental theorem on lambda-matrices with applications. I: Ordinary differential equations with constant coefficients. Linear Algebra Appl. 18, 189-211, 1977
- [61] Lancaster, P.: A fundamental theorem on lambda-matrices with applications. II: Difference equations with constant coefficients. Linear Algebra Appl. 18, 213-222, 1977
- [62] Lanzerath, H.: Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementmethode. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr.103, 1996

- [63] Lenzen, A.: Untersuchungen von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung-Erfassung von Strukturveränderungen. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr.94, 1994
- [64] Leung, A. Y. T.: Multilevel Dynamic Substructures. *Int. Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, 181-191, 1989
- [65] Leung, A. Y. T.: An Algorithm for Matrix Polynomial Eigenproblems. *Journal of Sound and Vibration*, 158(2), 363-368, 1992
- [66] Leung, A. Y. T.: *Dynamic Stiffness and Structures*. Springer-Verlag, 1993
- [67] Levy, R.: Guyan Reduction Solutions Recycled for Improved Accuracy. *NASTRAN: User's Experience*, NASA TM X-2378, 210-220, 1971
- [68] Li, L.; Stuehler, L.: Modalsynthese - viskoelastische Kopplung von nichtproportional gedämpften Strukturen. *Ing.-Archiv* 59, 412-421, 1989
- [69] Litz, L.: Ordnungsreduktion linearer Zustandsraummodelle durch Beibehaltung der dominanten Eigenbewegungen. *Regelungstechnik*, Heft 3, 1979
- [70] Mackens, W.; Voss, H.: Non Nodal Condensation of Eigenvalue Problems. Arbeitsbereich Mathematik, TU Hamburg-Harburg, URL: <http://www.tu-harburg.de/mat>
- [71] MacNeal, R. H.: A hybrid Method of Component Mode Synthesis. *J. of Computers*, 1, 4 581-601, 1971
- [72] Meyer, A.: *Modern Algorithms for Large Sparse Eigenvalue Problems*. Band 34, Akademie-Verlag Berlin, 1987
- [73] Natke, H. G.: *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse. Identifikation schwingungsfähiger elastomechanischer Systeme*. 3. überarb. Aufl. Grundlagen der Ingenieurwissenschaften. Wiesbaden: Friedr. Vieweg Sohn. xxxviii, 1992
- [74] Natke, H.G.: Angenäherte Fehlerermittlung für Modalsynthese-Ergebnisse innerhalb der Systemanalyse und Systemidentifikation. *Z. Angew. Math. Mech.* 61, 41-53, 1981
- [75] Natke, H.G.: Minimaländerungen an Teilsystemen aufgrund von dynamischen Anforderungen. *Ing.-Arch.* 57, 197-208. 1987
- [76] Nelson, F. C.: A Review of Substructure Analysis of Vibrating Systems. *Shock and Vibration Digest*, 11, 1979
- [77] Noor, A. K.: Recent Advances and Applications of Reduction Methods. *Appl. Mech. Rev.* vol. 47, No. 5, 1994
- [78] Pandit, S. M.: *Modal and Spectrum Analysis: Data Dependent Systems in State Space*. John Wiley, Sons, 1991

- [79] Parlett, B. N.: A look-ahead Lanczos algorithm for large unsymmetric eigenproblems. Proc. Sixth In. Conf. in Computing Methods in Appl. Science and Engineering. INRIA, Versailles. France, North Holland Press, 1985.
- [80] Peters, G.; Wilkinson, J.H.: Inverse Iteration, Ill-Coditioned Equations and Newton's Method. SIAM Review, Vol. 21, No. 3, July 1979
- [81] Petersmann, N.: Substrukturtechnik und Kondensation bei der Schwingungsanalyse. Fotschr.-Ber. VDI-Z., Reihe 11, Nr.76, 1986
- [82] Prakash, B. G.; Prabhu, M. S. S.: Reduction Techniques in Dynamic Substructures for Large Problems. Computer & Structures, Vol. 22, No. 4, 539-552, 1986
- [83] Press, H. T.; Teukolsky, S. A.; Vetterling, W. T.; Flannery, B. P.: Numerical Recipes in Fortran. Second Edition, Cambridge Univerity Press, 1992
- [84] Rao, S. S., Pan, T. S.: Modeling, Control, and Design of Flexible Structures: A Survey. Appl. Mech. Rev. Vol. 43, No. 5, 1990
- [85] Reinschke, K. J.: Multivariable Control-A Graph-theoretic Approach. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1988
- [86] Röhrle, H.: Reduktion von Freiheitsgraden bei Strukturdynamikaufgaben. Fortschr.-Ber. VDI-Z.,Reihe 1, Nr. 72, 1980
- [87] Rosenbrock, H. H.: State-Space and Multivariable Theory. Thomas Nelson and Sons Ltd., 1970
- [88] Rothe, K.; Voss, H.: Improving Condensation Methods for Eigenvalue Problems via Rayleigh Functional. Comput. Meth. Appl, Mech. Engin. 111, 169-183, 1994
- [89] Rothe, K.; Voss, H.: Improved Dynamic Substructurin on Distributed Memory MIMID-Computers. C.A. Brebbia and H. Powers, Application of Supercomputers in Engineering, 339-352, Elsevier Applied Science, London, 1993
- [90] Ruge, P: Schwingungsberechnung zusammengesetzter Systeme durch modale Synthese. Ingenieur-Archiv 52, 177-182, 1982
- [91] Saad, Y.: Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems. Manchester University Press, Manchester, 1992
- [92] Saad, Y.: Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems. Math. Comput. 37, 105-126, 1981
- [93] Saad, Y.: Iterative Methods for Sparse Linear Systems. PWS Publishing Company, Boston, 1996
- [94] Schmidt, K. J.: Eigenschwingungsanalyse gekoppelter elastischer Strukturen. Fortschrittberichte VDI, Reihe 11, Nr.39, (1981)

- [95] Schwarz, H. R.: Numerische Mathematik. B. G. Teubner Stuttgart, 1993
- [96] Sehmi, N. S.: Large Order Structural Eigenanalysis Techniques: Algorithms for finite Elements Systems. Chichester: Ellis Horwood, 1989
- [97] Shah, V. ; Raymund, M.: Analytical Selection of Masters for the Reduced Eigenvalue Problem. Int. Journ. Num. Methods in Engineering, 18, 89-98, 1982
- [98] Simpson: The Kron Methodology and practical algorithm for eigenvalue, sensitivity and response analysis of large scale structural Systems. Aeronaut J. 84, 417-433
- [99] Singh, M. P.; Suarez, L. E.: Dynamic Condensation with Synthesis of Substructure Eigenproperties. Journal of Sound and Vibration, 159(1), 139-155, 1992
- [100] Spelluci; Törnig: Eigenwertberechnung in den Ingenieurwissenschaften. B. G. Teubner Stuttgart, 1985.
- [101] Sotiropoulos, G. H.: Comment on the substructure synthesis methods. J. Sound and Vibration 98, 150-153, 1984
- [102] Stahl, H.: Ordnungsreduktion linearer Systeme, Modellvereinfachung nichtlinearer Systeme und Reglerentwurf durch Gütevektroptimierung. Automatisierungstechnik at, 35. Jahrgang, Heft 3, 1987
- [103] Triebisch, F.: Eigenwertalgorithmen für symmetrische  $\lambda$ -Matrizen. Diss. TU Chemnitz-Zwickau, 1995
- [104] Unbehauen, R.: Systemtheorie; Grundlagen für Ingenieure. R. Oldenbourg Verlag München, Wien, 1990
- [105] Voss, H.: An Error Bound for Eigenvalue Analysis by Nodal Condensation. Numerical Treatment of Eigenvalue Problems, Vol. 3, Int. Series on Num. Math. 69, Birkhäuser Verlag, Stuttgart, 205-214, 1983
- [106] Waller, H.; Schmidt, R.: Schwingungslehre für Ingenieure. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1989
- [107] Waller, H.; Krings, W.: Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1975
- [108] Wend, H. D.: Strukturelle Analyse linearer Regelungssysteme. R. Oldenbourg Verlag München, Wien, 1993
- [109] Wilkinson, J. H.: Rundungsfehler. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York. 1969
- [110] Wilkinson, J. H.; Reinsch, C.: Handbook for Automatic Computation Vol. II: Linear Algebra. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1971

- 
- [111] Wilson, T. L.: A NASTRAN DMAP Alter for the Coupling of Modal and Physical Coordinates Substructures. 6th NASTRAN usre's colloquium, NASA CP 2018, 1977
- [112] Yoo, W. S.; Haug, E. J.: Dynamic of Articulated Structures Part I. Theory, J. Structural Mechanics 14, 105-126, 1986
- [113] Zehn, M.: Dynamische FEM-Strukturanalyse mit Substrukturtechnik. Technische Mechanik 9, Heft 4, 1988
- [114] Zurmühl, R.; Falk, S.: Matrizen und ihre Anwendungen. 1. Grundlagen. Für Ingenieure, Physiker und Angewandte Mathematiker. 6., vollst. neubearb. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer-Verlag. xiii, 1992
- [115] Zurmühl, R.; Falk, S.: Matrizen and ihre Anwendungen für Angewandte Mathematiker, Physiker und Ingenieure. 5., ueberarb. und erw. Aufl. Teil 2: Numerische Methoden. Berlin etc.: Springer-Verlag. XV, 1986

### Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen (Dezember 1976)
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts (Juni 1978)
- Nr. 3 Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten  
Stoffverhalten (Januar 1976)
- Nr. 4 Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen  
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen (Januar 1976)
- Nr. 5 Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter  
Profilmittellinie (Februar 1976)
- Nr. 6 Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen  
Formänderungen (Januar 1977)
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung  
orthotroper Platten (März 1977)
- Nr. 8 Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen (April 1977)
- Nr. 9 Berend Fischer:  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchungen eines dickwandigen Zylinders bei  
endlichen Verzerrungen (April 1977)
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells (Mai 1977)
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung (Juni 1977)
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter  
elastoplastischer Wellen (Juli 1977)
- Nr. 13 Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity (März 1978)
- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse (Juli  
1978)
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung  
von Spannungsrestriktionen (August 1979)
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen  
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen (Juli 1979)

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates (Dezember 1979)
- Nr. 18 Uwe Kohlberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates (Juli 1979)
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken (Januar 1980)
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods (März 1980)
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity (Juni 1980)
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung (Dezember 1980)
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode (Februar 1981)
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen (Februar 1981)
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems (März 1981)
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells (Juni 1981)
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast (September 1981)
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem (September 1981)
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszylinder unter Innendruck und Axialkraft (November 1981)
- Nr. 30 F.-J. Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem (Dezember 1981)
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory (Juni 1982)
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen (Juli 1982)

- Nr. 33      Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität (Dezember 1982)
- Nr. 34      Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells (Dezember 1982)
- Nr. 35      Bernd Kaempf:  
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente (März 1983)
- Nr. 36      Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten (Juli 1983)
- Nr. 37      Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse (August 1983)
- Nr. 38      Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen (November 1983)
- Nr. 39      Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen (Dezember 1983)
- Nr. 40      Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode (Dezember 1983)
- Nr. 41      Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden (Februar 1984)
- Nr. 42      Diemar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme (Februar 1984)
- Nr. 43      Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz (Dezember 1984)
- Nr. 44      Jan Kubik:  
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent (April 1985)
- Nr. 45      Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme (Juni 1985)
- Nr. 46      J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems (Juli 1985)
- Nr. 47      Franz Karl Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren (August 1985)
- Nr. 48      J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY (Oktober 1985)

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung  
(Dezember 1985)
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern (Februar 1987)
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am  
Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte (März 1987)
- Nr. 52 W. Tampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity (Juli 1987)
- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie (Dezember 1987)
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien  
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich (Januar 1988)
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells (März 1988)
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Finite strain theory of rods (April 1988)
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit  
Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells (Mai 1988)
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken (Juni 1988)
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last (Juli  
1988)
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und  
Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen (August 1988)
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes (Juli  
1988)
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory (Dezember  
1988)
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988 (Januar 1989)
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics (Juli 1989)
- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten (Juni 1989)

- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder (Juni 1989)
- Nr. 67 Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode (November 1989)
- Nr. 68 Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme (November 1989)
- Nr. 69 Berthold Schieck:  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien (November 1989)
- Nr. 70 Frank Szepan:  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung (Dezember 1989)
- Nr. 71 Christian Scholz:  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen (Dezember 1989)
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory (Dezember 1989)
- Nr. 73 Werner Fornefeld:  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells (Januar 1990)
- Nr. 74 J. Sączuk/H. Stumpf:  
On statical shakedown theorems for non-linear problems (April 1990)
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua (April 1991)
- Nr. 76 Ulfert Rott:  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen (April 1991)
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:  
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1991)
- Nr. 78 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991 (Dezember 1991)
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:  
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau (Mai 1992)
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:  
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie (Juli 1992)

- Nr. 83 J. Pohé:  
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis (Februar 1993)
- Nr. 84 U. Kikillus:  
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15 (Mai 1993)
- Nr. 85 T. Guo:  
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material (Juni 1993)
- Nr. 86 Achim Menne:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern (Januar 1994)
- Nr. 87 Uwe Folchert:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen (Januar 1994)
- Nr. 88 Jörg Körber:  
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle (April 1994)
- Nr. 89 Peer Schieße:  
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung (April 1994)
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:  
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1994)
- Nr. 91 Christoph Beerens:  
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik (Juli 1994)
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:  
Finite elastoplasticity with microstructure (November 1994)
- Nr. 93 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994 (Dezember 1994)
- Nr. 94 Armin Lenzen:  
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen (Dezember 1994)
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:  
Mechanics of Irregular Shell Structures (Dezember 1994)
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells (Dezember 1994)
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:  
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller (Februar 1995)
- Nr. 98 Ralf Podleschny:  
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse (April 1995)
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:  
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl (Juli 1995)
- Nr. 100 Marc Mittelbach:  
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell (Dezember 1995)

- Nr. 101 Ulrich Hoppe:  
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie  
(Mai 1996)
- Nr. 102 Marcus Otto:  
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen  
(Juni 1996)
- Nr. 103 Horst Lanzerath:  
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode  
(Juli 1996)
- Nr. 104 Andreas Wichtmann  
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der  
Reckalterung (August 1996)
- Nr. 105 Bjarne Fosså  
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stoffen (Oktober 1996)
- Nr. 106 Khanh Cha Le:  
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur  
(Dezember 1996)
- Nr. 107 Holger Behrens:  
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allge-  
meinen diskreten Modellansätzen (Januar 1997)
- Nr. 108 Johannes Moosheimer:  
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden (Juli 1997)
- Nr. 109 Dirk Klaus Anding:  
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze  
(Oktober 1997)
- Nr. 110 Stephan Weng:  
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen  
(Dezember 1997)
- Nr. 111 Michael Straßberger:  
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit  
Hilfe piezo-keramischer Aktoren (Dezember 1997)
- Nr. 112 Hans-Jörg Becker:  
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines  
monokristallinen Stoffgesetzes (Dezember 1997)
- Nr. 113 Thomas Nerzak:  
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen  
Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen (Dezember 1997)
- Nr. 114 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen (März 1998)
- Nr. 115 Jan Steinhausen:  
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle  
hydrodynamischer Kupplungen (August 1998)
- Nr. 116 Thomas Pandorf:  
Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung bei  
schlagbelasteten Biegeproben (August 1998)

- Nr. 117      Claus Oberste-Brandenburg:  
Ein Materialmodell zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität (Juni 1999)
- Nr. 118      Michael Märtens:  
Regelung mechanischer Strukturen mit Hilfe piezokeramischer Stapelaktoren (Dezember 1999)
- Nr. 119      Dirk Kamarys:  
Detektion von Systemveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse (Dezember 1999)
- Nr. 120      Wolfgang Hiese  
Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten (Januar 2000)
- Nr. 121      Peter Jaschke  
Mathematische Modellierung des Betriebsverhaltens hydrodynamischer Kupplungen mit hybriden Modellansätzen (Februar 2000)
- Nr. 122      Stefan Müller  
Zum Einsatz von semi-aktiven Aktoren zur optimalen Schwingungsreduktion in Tragwerken (Februar 2000)
- Nr. 123      Dirk Eichel  
Zur Kondensation strukturdynamischer Aufgaben mit Hilfe von Polynommatrizen (Juni 2000)



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 123**