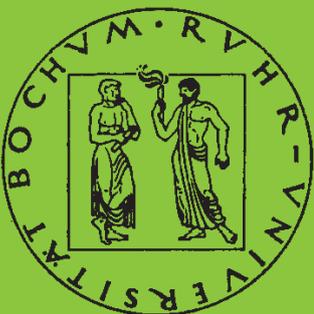


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Christoph Beerens

**Zur Modellierung nichtlinearer
Dämpfungsphänomene in
der Strukturmechanik**

Heft Nr. 91



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungs- phänomene in der Strukturmechanik

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
der
Fakultät für Maschinenbau
der Ruhr-Universität Bochum

Christoph Beerens
Recklinghausen

Bochum 1994

Dissertation eingereicht am: 30. März 1994
Tag der mündlichen Prüfung: 8. Juli 1994
Erster Referent: Prof. Dr.-Ing. H. Waller
Zweiter Referent: Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand zwischen 1989 und 1994 im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe numerische Methoden und Simulationstechnik am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz besonders bei allen bedanken, die mir in dieser Zeit geholfen haben, insbesondere:

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller für die Betreuung und Unterstützung meiner Arbeit. Durch zahlreiche fachliche Anregungen und intensive Diskussionen hat er diese Arbeit begleitet.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns für die freundliche Bereitschaft zur Übernahme der mit dem Korreferat verbundenen Lasten.

Den Herren M. Epping, H.-J. Michel, H. Lanzerath und T. Pagel für die Hilfe bei der Erstellung der Meßtechnik und der Durchführung der Versuche.

Meinen Eltern für die Förderung meines Ausbildungsweges und meiner Frau für Unterstützung, Verständnis und Geduld während der Arbeit.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung im Sonderforschungsbereich 151 „Tragwerksdynamik“ an der Ruhr-Universität Bochum, Teilprojekt B5: „Identifikation und Modellierung des Schwingungsverhaltens von Tragwerken unter besonderer Berücksichtigung der Dämpfung“.

Bochum, im März 1994

Christoph Beerens

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Zur Dämpfungsmodellierung in der Strukturdynamik	4
2.1	Übersicht	4
2.2	Dämpfungsmodelle für diskrete Systeme	6
2.2.1	Ein-Freiheitsgrad-Systeme, Dämpfungsmaße	6
2.2.2	Diskrete linear-viskose Schwinger mit vielen Freiheitsgraden	11
2.2.3	Rayleigh-Dämpfung	12
2.2.4	Diagonalansatz	12
2.2.5	Definition einer viskosen Dämpfungsmatrix	13
2.2.6	Dämpfung und Modaltransformation	13
2.2.7	Strukturdämpfung, Hysteresedämpfung	15
2.3	Kontinuierliche linear-viskose Systeme	18
3	Phänomenologische Dämpfungsmodelle	19
3.1	1-parametrisches Modell, Coulombdämpfung	20
3.2	2-parametrische Modelle	21
3.2.1	Kelvin-Voigt-Modell	22
3.2.2	Maxwell-Modell	27
3.2.3	Prandtl-Modell	33
3.2.4	Coulomb-Modell	36
3.3	3- und 4-parametrische Dämpfungsmodelle	39
3.3.1	Poynting-Thomson-Modell, 'standard linear solid'	39
3.3.2	Drei-Parameter-Modell mit Reibung	45
3.3.3	Vier-Parameter-Modell	48
3.3.4	Dieterle-Modell	50
3.4	n-parametrische Dämpfungsmodelle	53
3.4.1	Biot-Modell	53

3.4.2	Kelvin-Kette	58
3.4.3	Iwan- und Masing-Modell	61
3.5	Tabellarische Übersicht der vorgestellten Modelle	65
4	Das Masingelement	66
4.1	Analytische Lösung	66
4.2	Numerische Realisierung des Masingelementes	71
4.2.1	Algorithmus	71
4.3	Charakteristik des Masingelementes	74
5	Anwendung des Masingelementes in der FEM	82
5.1	Bisherige Ansätze	83
5.2	Zugstab-Element	84
5.3	Bernoulli-Balken-Element	84
5.3.1	Modellierung der Dämpfung von Stahlbetonbalken	86
5.4	Plattenelement	87
5.5	Masingelement mit FEM-Objektcode	88
6	Zur nichtlinearen Identifikation	89
6.1	Allgemeines zur Identifikation	89
6.1.1	Optimierung	91
6.2	Beschreibung des vorliegenden Problems	94
6.3	Das Complex-Verfahren	96
6.3.1	Erforderliche Vorgaben für das jeweilige Optimierungsproblem	97
6.3.2	Für die Aufgabenstellung dieser Arbeit erforderliche Modifikationen des Complex-Verfahrens	98
7	Anwendungsbeispiele des Masingelementes	99
7.1	Optimierung der Parameter eines Einmassenschwingers	99
7.2	Modelle realer Strukturen für die Optimierung	103
7.2.1	Simulations- und Optimierungsmodell für den Laborbalken	105
7.2.2	Ergebnisse der Optimierung beim Laborbalken	107
7.2.3	Simulations- und Optimierungsmodell für den Stahlbetonmast	113
7.2.4	Optimierungsergebnisse am Stahlbetonmast	118
7.3	Ergebnisüberblick	125
7.3.1	Wertung	126
8	Resümee und Ausblick	127

Anhang	128
A Meßwerterfassung und -verarbeitung	129
A.1 Meßwertaufnehmer	129
A.1.1 Beschleunigungsaufnehmer	129
A.1.2 Kraftaufnehmer	132
A.1.3 Wegaufnehmer	133
A.2 Analoge Verstärker und Filter	133
A.3 Digitale Signalverarbeitung	134
Literaturverzeichnis	136

Zusammenfassung

Die Behandlung von Dämpfungsphänomenen in der Strukturmechanik mit klassischen Verfahren wird vorgestellt. Daraufhin wird ein Überblick über phänomenologische Modelle für lineare und nichtlineare Dämpfung gegeben. Diese Modelle bestehen aus Kopplungen einfacher Grundelemente: Federn, viskose Dämpfer und Reibelemente. Damit werden jeweils spezifische Eigenschaften erzeugt, so daß sich mit Hilfe dieser Modelle Dämpfungsphänomene aller Art modellieren lassen. Anhand von harmonischen Erregungen und Sweeps werden typische Eigenschaften der einzelnen Modelle aufgezeigt. Soweit die Modelle linear sind, werden analytische Lösungen angegeben. Die meisten dieser Modelle sind als Einzelkräfte in diskretisierte Systeme einführbar, mit den wenigen Grundelementen kann eine Vielzahl von Dämpfungsphänomenen auf einfache Art und Weise modelliert werden.

Besonderer Schwerpunkt ist die phänomenologisch besonders naheliegende Modellierung der Dämpfung von Stahlbeton durch das Masingelement. Erstmals wird eine analytische Lösung für die Berechnung des Masingelementes vorgestellt, wobei über die Gedächtnisfunktion eine Integration der Masingkraft berechnet wird. Es wird gezeigt, daß das Masingmodell über die mittlere Elementkrümmung in FEM-Systeme phänomenologisch sinnvoll eingekoppelt werden kann. Mit Hilfe dieser Lösung für das Masingmodell läßt sich zum Beispiel der Bauschinger-Effekt auf einfache Art und Weise modellieren.

Im Anschluß daran wird ein Optimierer nach einem modifizierten Complex-Verfahren erläutert, der es erlaubt, die Parameter des Masingmodells für Schwingungsmessungen an Stahlbetonstrukturen anzupassen.

Als Anwendungen der analytischen Lösung für das Masingmodell und den Optimierer werden Parameteranpassungen an einem 1-Massen-Schwinger, einem Stahlbetonbalken und einem Stahlbetonmast gezeigt. Die Anpassungen der beiden letzteren beruhen auf Schwingungsmessungen. Die für diese Messungen eingesetzte Meßtechnik wird im Anhang beschrieben, unter anderem selbst entwickelte und gebaute Beschleunigungsaufnehmer, die auch bei sehr tiefen Frequenzen (unter 1 Hz) noch gute Messungen erlauben.

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit wurde im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 151 „Tragwerksdynamik“ an der Ruhr-Universität Bochum im Teilprojekt B5: „Identifikation und Modellierung des Schwingungsverhaltens von Tragwerken unter besonderer Berücksichtigung der Dämpfung“ von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert.

Die Dämpfung ist für die Auslegung von Tragwerken gegen dynamische Beanspruchungsspitzen von großer Bedeutung. Wird die Dämpfung bei der Berechnung von Tragwerken vernachlässigt, kann das zu unwirtschaftlicher Bemessung führen. Auf der anderen Seite müssen Dämpfungsmodelle allerdings auch eine hohe Zuverlässigkeit bieten. Um diese zu vergrößern, sollten in diesem Projekt die Modellierungen und Identifikationsmethoden für die Dämpfung insbesondere beim Stahlbeton verbessert werden.

Die klassische Strukturmechanik ging von der Dämpfung als separatem Bestandteil der Systemgleichungen aus und versuchte dieses Phänomen mit einer Art „Dämpfungsmodul“ zu begreifen. Schon relativ frühzeitig waren allerdings Phänomene meßbar, bei denen die ersten viskosen Dämpfungsansätze nicht mehr ausreichten. Man versuchte deshalb, Effekte wie stick-slip-Verhalten und Rattern bei dynamischen Vorgängen mit Reibmodellen zu erfassen. Infolge geringer Kenntnisse über die inneren Ursachen vieler Dämpfungsphänomene wurde eine Reihe von solchen Modellen entwickelt, die lediglich die Charakteristika der Dämpfung wiedergeben sollten. Diese sogenannten phänomenologischen Modelle haben den Vorteil, die mathematische Beschreibung der jeweiligen Phänomene auf relativ einfache Art und Weise zu ermöglichen. In der Strukturmechanik wird auch mit diesen Modellen die Dämpfung als separate Größe modelliert, als eine Erweiterung der Idee des Dämpfungsmoduls. So ermöglicht es die Arbeit mit phänomenologischen Modellen für Dämpfung, auf fertige Module zur Erfassung der anderen Systemeigenschaften wie Steifigkeit und Massenträgheit zurückzugreifen. Dazu im Gegensatz stehen die ganzheitlichen Materialgesetze und Werkstoffmodelle, die alle Eigenschaften des Werkstoffes erfassen sollen, auch die Dämpfung unter Beachtung der wirklichen Dämpfungsursachen.

Nach einer kurzen Einführung in die Methoden und Problematiken der klassischen Strukturmechanik soll hier eine Übersicht über eine Reihe von diesen Modellen gegeben werden, mit denen vielfältigste Dämpfungsphänomene modellierbar sind. Bisher waren diese in der Literatur verstreut und nicht umfassend im Überblick dargestellt.

Zur speziellen Aufgabe dieses SFB-Projektes und dieser Arbeit gehört es, die Modellierung der Dämpfung von Stahlbeton zu verbessern. Erste Ansätze für diese Aufgabenstellung stammen von Dieterle [17], Lenk [45] und Flesch [20]. Dieterle zum Beispiel versuchte mit der Einführung eines Reibelementes parallel zu einem Kelvin-Voigt-Modell die Amplitudenabhängigkeit der Dämpfung von Stahlbeton zu erfassen. Von Renker [63] wurden im ersten Zeitabschnitt des Teilprojektes Masingmodelle zur Modellierung des Dämpfungsverhaltens von Stahlbeton herangezogen. Das erschien nach den Vorarbeiten und Untersuchungen aus der Literatur phänomenologisch sinnvoll. Das Masingelement wurde dazu in modalen Koordinaten eingesetzt, für jeden Mode waren zwei Parameter der nichtlinearen Dämpfung zu ermitteln. Das Masingelement war aus n Prandtl-Strängen mit linear verteilten Haftkräften und konstanter Federsteifigkeit aufgebaut, deren Bewertung über eine diskrete Exponentialverteilung vorgenommen wurde. Die Identifikation dieser Parameter wurde mit Hilfe eines modalen Beobachters durchgeführt.

Dieser in modalen Koordinaten vielversprechende Ansatz wird in dieser Arbeit fortgeführt und erweitert. Durch den Übergang von modalen auf physikalische Koordinaten wird erreicht, daß die Ungültigkeit der Modaltransformation für nichtlineare Systeme und die schlechte Interpretierbarkeit der in modalen Koordinaten gewonnenen nichtlinearen Systemparameter wegfallen. Damit wird zugleich der Einsatz des Masingmodells als Modul in konventionellen FEM-Systemen ermöglicht. Das Masingmodell selbst wird mit einer neuen analytischen Lösung kontinuierlich gemacht und mit unendlich vielen Teilsträngen bei nur zwei Parametern handhabbar. Die problematische Behandlung der ansonsten dabei auftretenden Schaltfunktionen entfällt. Der mehr regelungstechnisch orientierte Beobachter mit seinen zeitlich variierten Parametern wird durch eine abgestimmte Optimierung ersetzt, die während der gesamten Simulation konstante Parameter erlaubt.

Der Einsatz des so gewonnenen neue Modells wird anhand von Meßdaten aus Labor- und Feldversuchen demonstriert, mit deren Hilfe Parameter der Strukturmodelle identifiziert werden. Im Anhang wird die zur Erfassung geeigneter Daten erforderliche und eigens entwickelte und gebaute Meßtechnik vorgestellt.

Kapitel 2

Zur Dämpfungsmodellierung in der Strukturodynamik

2.1 Übersicht

Reale mechanische Systeme sind wegen des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik nicht-konservativ. Diese Aussage ist nicht beweisbar, da sie auf dem Axiom des 2. Hauptsatzes beruht, der besagt, daß jede Veränderung von Materie, Energie oder Information unter Zunahme der Entropie abläuft. Sie ist jedoch eine notwendige Hypothese zur Erfassung der Realität. Ihre Ungültigkeit würde die Existenz eines perpetuum mobile erlauben.

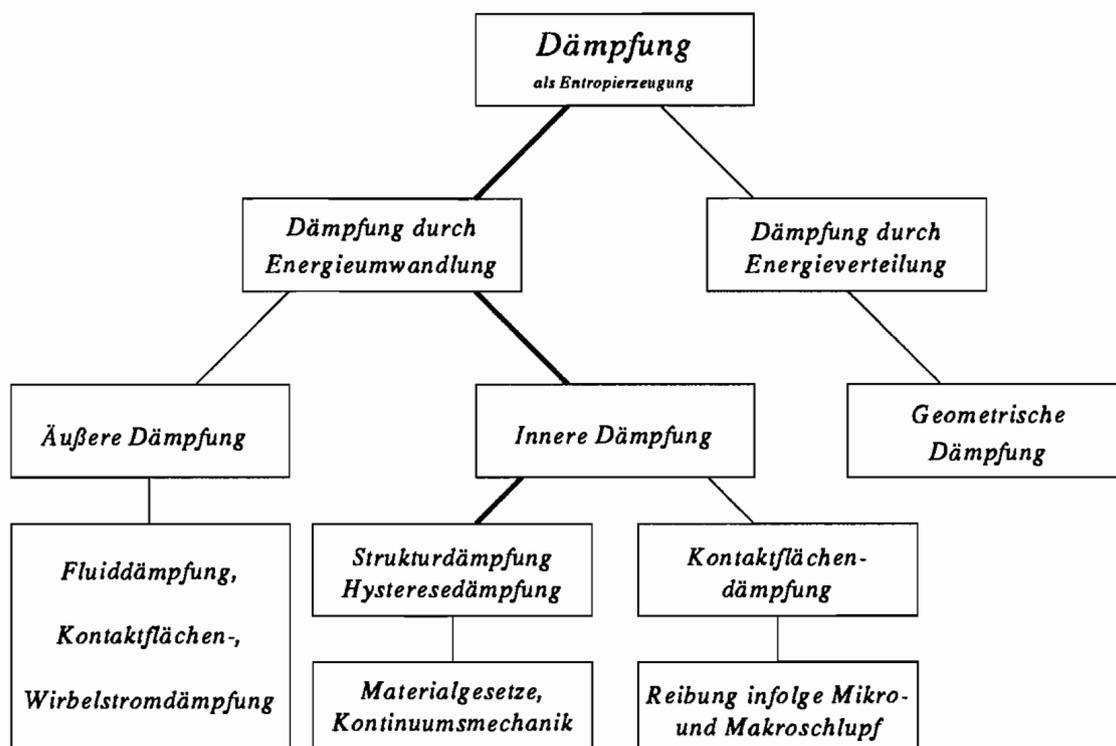


Abbildung 2.1: Klassifizierung der Dämpfung

In der Mechanik wird der Vorgang der Entropieerzeugung bei mechanischen Prozessen, also die Umwandlung von Exergie (beliebig umwandelbarer Energie) in Anergie (nur beschränkt oder gar nicht mehr umwandelbare Energie) als Dämpfung oder Dissipation bezeichnet. Er kann auf verschiedene Arten ablaufen (Bild 2.1), wobei hier zwei erwähnt werden sollen und der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der ersten Art liegt:

- Umwandlung mechanischer in thermische Energie
- Umwandlung konzentrierter in verteilte Energie (geometrische Dämpfung)

Im ersten Fall können die Ursachen der Dämpfung noch nach inneren und äußeren Ursachen unterschieden werden. Bei der Modellierung eines realen Systems muß die Lage der Systemgrenzen definiert werden, um zwischen äußeren und inneren Kräften und Strukturen unterscheiden zu können. Je nach Problemstellung kann dann ein und dasselbe Phänomen als innere oder äußere Einflußgröße definiert sein.

Eindeutig innere Ursache der Dämpfung ist nur die Strukturdämpfung, die aus der Dissipation bei der Verformung des homogenen Werkstoffes resultiert, da sie eine rein mikroskopische Ursache der Dämpfung ist. Unter homogenem Werkstoff ist hier ein Werkstoff zu verstehen, dessen Gefüge sich nicht räumlich ändert, z.B. also ein Einkristall oder Glas. Außerdem wird man meist auch andere mikroskopische Phänomene wie Korngrenzenreibung, Relaxationsvorgänge an Fehlstellen usw. als innere Ursachen bezeichnen. Die Beschreibung der Strukturdämpfung kann entweder auf der Basis kontinuumsmechanischer Werkstoffmodelle in Form von mathematischen Werkstoffgesetzen für das Kontinuum oder durch phänomenologische Modelle erfolgen. Letzterer Weg wurde in dieser Arbeit beschritten. In beiden Fällen geht man von einem theoretisch homogenen Werkstoff aus, der im Mittel die ungleichverteilten Eigenschaften des realen Werkstoffes erfüllen soll. Die Lokalisierung der einzelnen Dämpfungsursachen ist für die meisten Fragestellungen nicht erforderlich, eine Separation ihrer Einflußstärke nur beschränkt realisierbar, indem geeignete Werkstoffe mit z.B. stark ausgeprägten Einzeleffekten oder Systeme gewählt werden, bei denen aufgrund ihrer Struktur einzelne Dämpfungsursachen besonders stark hervortreten. Für die vorliegende Arbeit wurde deshalb mit dem Werkstoff Stahlbeton gearbeitet, der eine relativ hohe amplitudenabhängige Dämpfung aufweist. Die Lokalisierung der amplitudenabhängigen Dämpfung an den Reibstellen zwischen Bewehrung und Zementmatrix oder zwischen Körnern wurde zugunsten eines kontinuierlichen Ansatzes fallengelassen, der wesentlich praxisnäher ist, da die Kenntnisse über die innere Struktur nur sehr gering sind und ohnehin die Modellierung bei besserem Kenntnisstand zu aufwendig wäre.

Innere Kontaktflächendämpfung ist diejenige Dämpfung, die aufgrund der gegebenen Systemgrenzen im System auftritt und deshalb mit globalen Ansätzen in der allgemeinen Systemdämpfung erfaßt werden kann. Hierzu zählt insbesondere die Reibung infolge von Mikro- und Makroschlupf, aber auch gas-pumping.

Äußere Dämpfung tritt an den Systemgrenzen infolge von Relativbewegungen und Verformungen auf. Dies kann Dämpfung durch ein umgebendes Fluid, angrenzende Festkörper mit Reibung oder Magnetfelder mit Wirbelstrombildung sein.

Die generell andere Form der Dämpfung ist die geometrische Dämpfung, bei der vorhandene konzentrierte Energie durch Abstrahlung derart zerstreut wird, daß der Vorgang in Bezug auf einen begrenzten Kontrollraum als Dissipation wirkt. Die Energie wird dabei nicht durch Umwandlung sondern durch Verteilung von Exergie in Anergie überführt.

Für eine einfache Handhabung mechanischer Problemstellungen kann oft auf konservative Systeme zurückgegriffen werden, die mathematisch einfach zu handhaben sind. Voraussetzung ist dazu, daß die Dämpfung des konkreten Systems so gering ist, daß man sie vernachlässigen kann, oder daß nur kurze Zeitabschnitte untersucht werden, in denen keine nennenswerte Dissipation auftreten kann. Bei dynamischen Systemen, die Resonanzstellen aufweisen, kann aber so nicht mehr vorgegangen werden, da sonst beim Auftreten von Resonanz rein rechnerisch immer eine Resonanzkatastrophe eintreten würde. In diesem Fall wird man versuchen, mit einer linearen Dämpfung den Aufwand für die Berechnung gering zu halten. Das gelingt aber nur bei geringen Dämpfungen und kleinen Verschiebungen, die linear in der Regel gut zu modellieren sind, und bei viskoser, von sich aus weitgehend linearer Dämpfung zum Beispiel durch Fluide.

Metallische und Verbundwerkstoffe sowie verschiedene Arten von mechanischen Systemen verlangen hingegen eine weitergehende Modellierung mit nichtlinearen Ansätzen, da hier die Dämpfung nicht mehr wie im linearen Fall frequenzabhängig ist, sondern auch weitgehend frequenzunabhängig sein kann. Die dissipierte Energie hängt im linearen Fall vom Quadrat der Amplitude ab, bei nichtlinearen Dämpfungen kann die Abhängigkeit bis zur 6. Potenz der Amplitude ansteigen [57].

Da Trägheitskräfte und elastische Kräfte durch eindeutige mechanische Zusammenhänge definiert sind und im Gegensatz dazu die Dämpfung keine eindeutig beschreibbare Eigenschaft einer Struktur darstellt, ist es wesentlich schwieriger, hier Modelle zu finden und Parameter festzulegen. Es ist nach wie vor keine abschließende Erfassung der schon in einfachen Strukturen auftretenden Dämpfungsphänomene in Sicht, ja man kann davon ausgehen, daß wegen der zu vermutenden Nichtlinearitäten hier immer wieder neue Probleme auftreten werden.

2.2 Dämpfungsmodelle für diskrete Systeme

2.2.1 Ein-Freiheitsgrad-Systeme, Dämpfungsmaße

Viele Betrachtungen der Schwingungslehre orientieren sich an den Grundlagen der linearen Schwingungen, die analytisch leicht zu erfassen sind. Das einfachste Beispiel der linearen Schwingungslehre bietet das Ein-Freiheitsgrad-System, anhand dessen sich exemplarisch die Definitionen der verschiedenen Dämpfungsmaße zeigen lassen. Dazu werden in diesem Abschnitt Systeme mit Massen untersucht, um die gängigen Bezeichnungen der Schwingungslehre einführen zu können. Die Bewegungsgleichung eines linearen Ein-Freiheitsgrad-Systems lautet:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = F. \quad (2.1)$$

Der Dämpfungsterm $d\dot{x}$ ist hier eine nur von der (Verformungs-) Geschwindigkeit abhängige Kraft, eine viskose Dämpfung. Diese tritt auf bei Bewegungen in Gasen und Flüssigkeiten, allerdings nur bei relativ kleinen Geschwindigkeiten. Technisch werden solche viskosen Dämpfer relativ gut durch KFZ-Stoßdämpfer und ähnliche Flüssigkeitsdämpfer realisiert. Ihre wesentliche Kenngröße ist die Dämpfungskonstante d .

Der Zeitverlauf der Lösung der obigen DGL für eine freie Schwingung ($F(t > 0) = 0$) eines Ein-Massen-Schwingers ist für $d < d_{krit}$ in Bild 2.2 dargestellt (für $d > d_{krit}$ ergeben sich aperiodisch abklingende Zeitverläufe), die Lösung lautet mathematisch ausformuliert:

$$x(t) = e^{-\omega_0 D t} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0 + \omega_0 D x_0}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (2.2)$$

mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2}, \quad D = \frac{d}{d_{krit}}, \quad d_{krit} = 2\sqrt{k m} \quad (2.3)$$

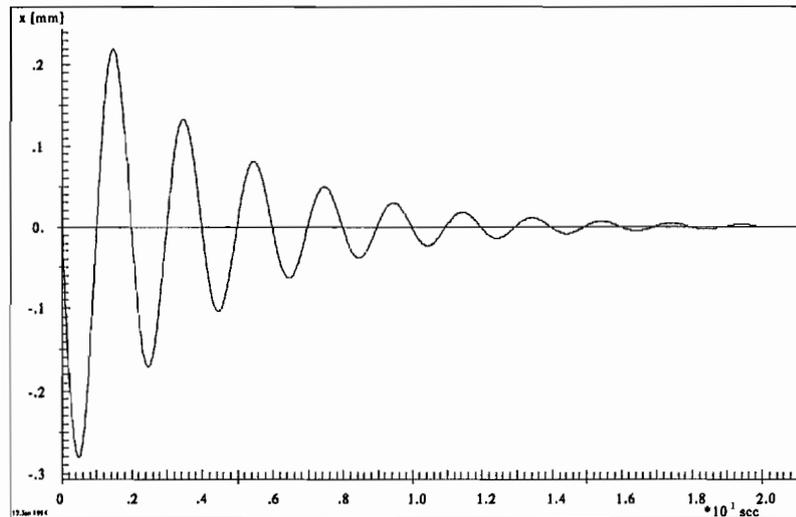


Abbildung 2.2: Gedämpfte lineare Schwingung

Die Einhüllende der Schwingung (Bild 2.2) ist eine Exponentialfunktion, ein erstes Dämpfungsmaß ist deren Abklingkonstante:

$$\delta = \omega_0 D. \quad (2.4)$$

Bildet man das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Amplituden

$$\frac{x_i}{x_{i+1}} = e^{\frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}} \quad (2.5)$$

und logarithmiert diese Größe, dann ergibt sich das sogenannte logarithmische Dämpfungsmaß:

$$\vartheta = \ln\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right) = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}. \quad (2.6)$$

Das dimensionslose (Lehrsche) Dämpfungsmaß

$$D = \frac{d}{d_{krit}} \quad (2.7)$$

ist das gebräuchlichste, da hier mit einem Blick zu erkennen ist, ob das System unterkritisch, kritisch oder überkritisch gedämpft ist, also ob überhaupt noch eine Schwingung vorliegt und wie schnell diese abklingt.

Es ist ebenfalls möglich, das Verhältnis der Amplituden von Schwingungsantwort und Erregung bei unterschiedlichen Frequenzen darzustellen, als Vergrößerungsfunktion (Bild 2.3).

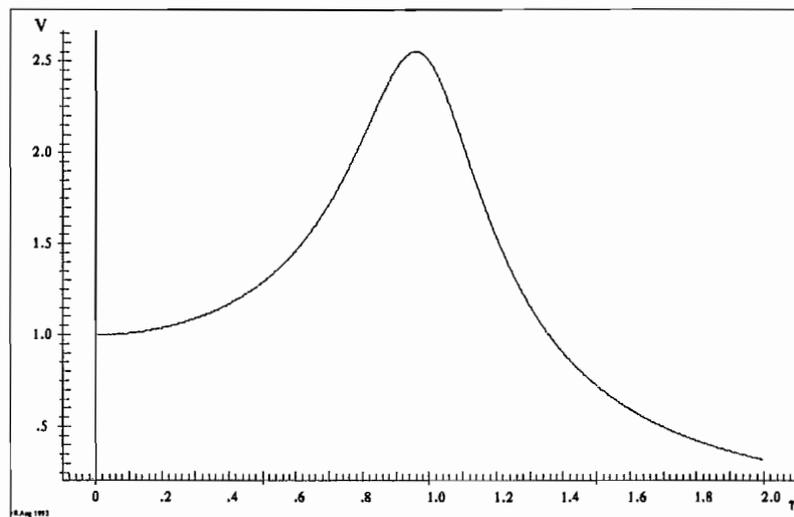


Abbildung 2.3: Typische Vergrößerungsfunktion eines gedämpften Einmassenschwingers

Die Vergrößerungsfunktion wird über der Frequenz aufgetragen, dabei ist diese Abszisse oft normiert auf das Frequenzverhältnis $\eta = \omega/\omega_e$, mit der ersten Eigenfrequenz ω_e . Auf der Ordinate wird die Kraftamplitude dargestellt, normiert als Vergrößerungsfunktion $V(\omega) = \hat{F}/F_{statisch}$, mit der Kraftamplitude \hat{F} als Systemantwort auf eine Wegerregung $u(t) = \hat{u} \sin \omega t$ und der Kraftamplitude $F_{statisch}$ für $\omega = 0$, also die statische Kraft. Durch diese Normierung beider Achsen lassen sich insbesondere lineare Systeme gut miteinander vergleichen.

Die Antwortamplitude wird im Frequenzbereich der Fourier-Transformation durch die Bildung des Betrages der im allgemeinen komplexen Transformierten der Systemantwort berechnet. Die Systemantwort kann in der komplexen Ebene auch als Ortskurve aufgetragen werden und dann zusätzlich die Phase zwischen Antwort und Erregung anzeigen.

Aus der Vergrößerungsfunktion läßt sich das dimensionslose Dämpfungsmaß auf folgende Weise ermitteln: Man sucht die Stellen $V = V_{max}/\sqrt{2}$ auf, liest Δf ab und erhält nach Bild 2.4:

$$D = \frac{\Delta f}{2f_e} \quad (2.8)$$

Andere Verfahren zur Ermittlung einer linearen Dämpfung sind:

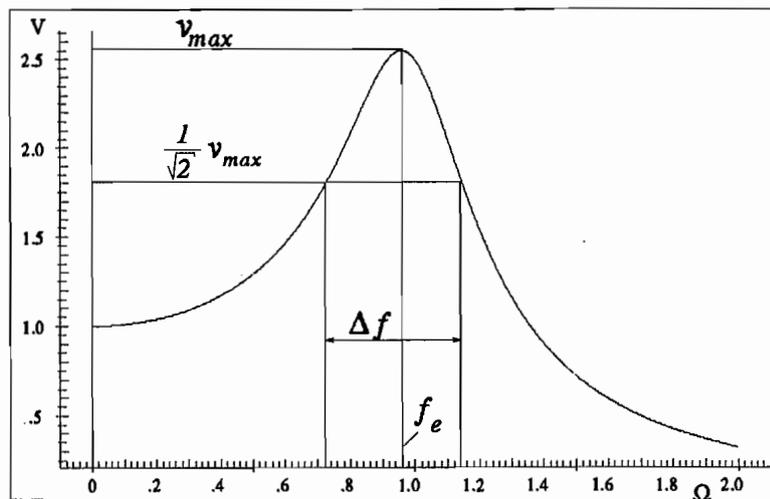


Abbildung 2.4: Bestimmung der Dämpfung aus der Vergrößerungsfunktion

- Messung der Amplitudenabnahme über der Zeit beim Ausschwingversuch
- Messung der Energiebilanz beim harmonischen Dauerschwingversuch
- Messungen mit thermischen Methoden ebenfalls beim harmonischen Dauerschwingversuch
- über die Amplitudenabnahme bei der Wellenausbreitung
- Messung der Hysterese und Bestimmung des Energieverlustes aus der Hysterese-
senfläche

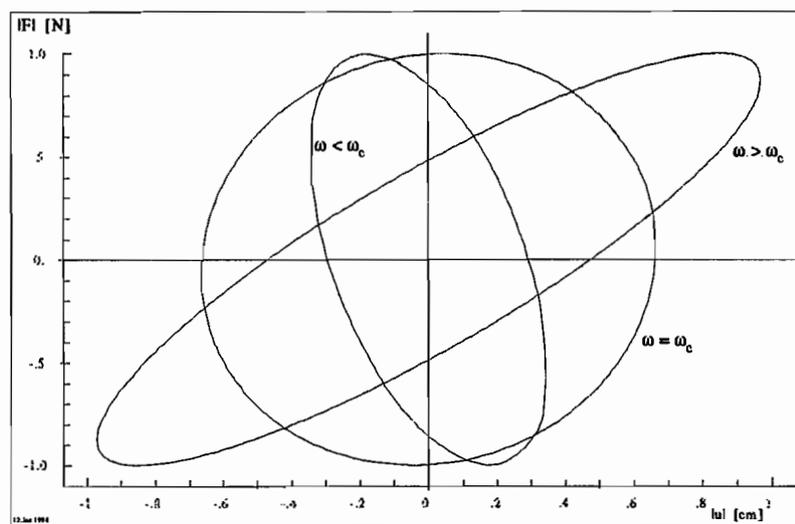


Abbildung 2.5: Hysteresen bei viskoser Dämpfung

Außerdem kann die Erregungskraft über der Verschiebung dargestellt werden. Man geht wieder von einem harmonischen Verlauf der Erregungskraft aus und trägt die Erregungskraft über der Auslenkung auf. Für viskose Dämpfung ergeben sich Ellipsen (Bild

2.5), deren Flächeninhalt und Neigung von der Frequenz abhängig ist. Der Flächeninhalt ist ein Maß für die pro Periode dissipierte Energie, also auch ein relatives Maß für die Dämpfung. Hysteresen treten bei allen dissipativen Vorgängen auf, in der Mechanik ebenso wie z.B. in der Elektrotechnik bei der magnetischen Hysterese. Die Form der Hysterese liefert Aussagen über die Linearität eines Systems, nur bei linearen Systemen ist die Hysterese eine reine Ellipse, nichtlineare Systeme haben Hysteresen mit Ecken. Die Dissipationsenergie wird häufig benutzt, um zu einem nichtlinearen System ein energetisch äquivalentes lineares System zu erstellen. Diese Vorgehensweise wird „äquivalente Linearisierung“ genannt.

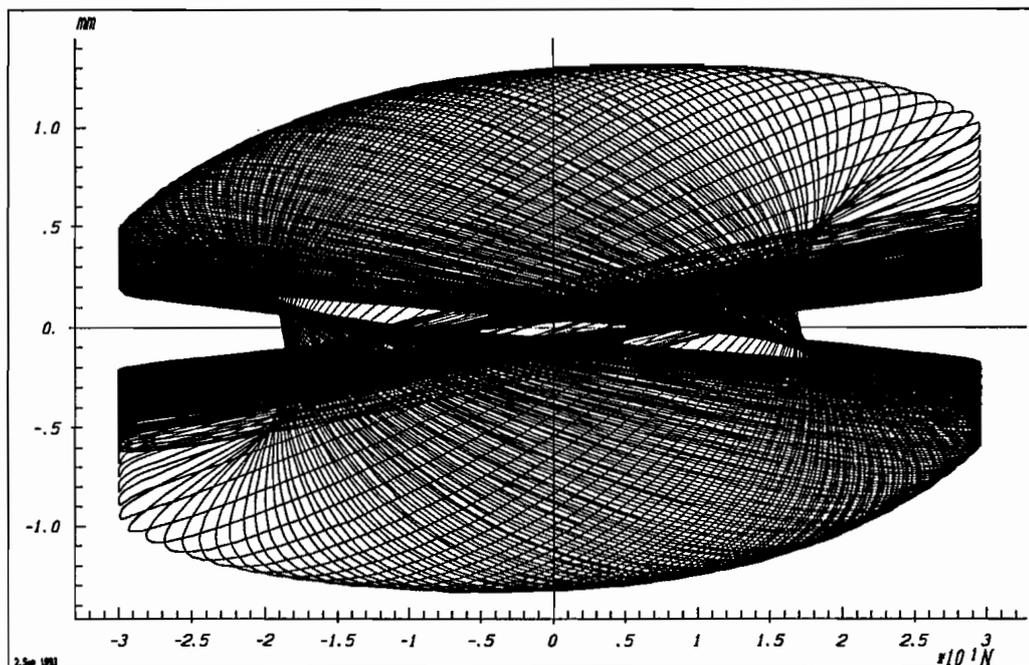


Abbildung 2.6: Gemessener Hysteresenverlauf bei Sweep 8-23 Hz

Besondere Beachtung bei linearen Systemen verdient die Tatsache, daß die Hauptachse der Ellipse sich durch Phasenverschiebung drehen kann. Eine einfache energetisch äquivalente Linearisierung kann also nur den Systemzustand bei Erregung mit einer einzigen konstanten Amplitude und einer einzigen konstanten Frequenz wiedergeben. Die Übertragbarkeit der Ergebnisse auf andere Frequenzen und Amplituden ist so nicht möglich.

Besonders deutlich wird das, wenn an einem realen System, hier ein Stahlbetonbalken, ein Sweep über die erste Eigenfrequenz gemessen und als eine Folge von Kraft-Weg-Hysteresen aufgetragen wird, Bild 2.6. Für diese Messung wurde in ca. 60 Sekunden die Frequenz der Erregungskraft bei konstanter Amplitude des Erregungsstroms für den eingesetzten Shaker von 8 Hz auf 23 Hz linear hochgefahren, die erste Eigenfrequenz des Systems lag bei 14 Hz. Die seitliche Abplattung der Hysteresen kommt zustande durch die relativ niedrige Erregungskraft des Shakers, die zu einer Begrenzung der Amplituden bei Durchfahren der ersten Eigenfrequenz des Systems erforderlich war. Daher bleibt die Systemantwort weitgehend linear, was auch an den Ellipsen zu erkennen ist, die keine bei Nichtlinearitäten zu erwartenden ausgeprägten Spitzen oder Asymmetrien aufweisen. Gut zu erkennen ist die Aufweitung der Hysteresen um die erste Eigenfrequenz des Sy-

stems, deren grosse Hauptachse gleich der Ordinate ist (Phase $\phi = \pi/2$). Die unter- und überkritischen Hysteresen sind relativ flache Ellipsen und haben eine Phase von $\phi = 0$ für $\omega < \omega_1$ bzw. $\phi = \pi$ für $\omega > \omega_1$.

Die einzelnen Bestandteile des Bildes kann man als Ellipsen ansehen, wie sie bei monofrequenter Erregung entstehen würden (siehe auch Bild 2.5), die hier aber im Uhrzeigersinn ineinander übergehen infolge der ansteigenden Erregungsfrequenz. Deutlich wird dabei vor allem eines: Es gibt keinesfalls die eine Ellipse, an die sich hier eine äquivalente Linearisierung anlehnen kann, weder von der Neigung bzw. Phasenlage noch vom Flächeninhalt her, außer im Sonderfall bei harmonischer Erregung mit konstanter Frequenz.

2.2.2 Diskrete linear-viskose Schwinger mit vielen Freiheitsgraden

Diskrete lineare Schwinger oder in finiten Elementen diskretisierte Tragwerke werden durch die Matrizendifferentialgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (2.9)$$

beschrieben. Es läßt sich zeigen, daß diskrete lineare Schwinger nur in bestimmten Figuren, den sogenannten Eigenformen, und mit bestimmten Frequenzen, den Eigenfrequenzen, schwingen. Diese Tatsache nutzt man bei der Modalanalyse aus. Konventionell geht man von der Gleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

aus, betrachtet also die Dämpfung und Erregung zunächst nicht. Mit dem Ansatz

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 \sin \omega t \quad (2.11)$$

ergibt sich das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

das nur für die Eigenfrequenzen ω_e nicht-triviale Lösungen, die Eigenformen \mathbf{x}_e , besitzt. Das obige Eigenwertproblem ist numerisch besonders gut lösbar, da die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{K} symmetrisch sind. Die Eigenformen normiert man

$$\phi_j = c_j \phi_{ej}, \quad (2.13)$$

so daß gilt

$$\phi_j^T \mathbf{M} \phi_j = „1“ \quad (2.14)$$

und sammelt sie in der Modalmatrix Φ . Wegen der Orthogonalität der Eigenformen gelten folgende Beziehungen

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}(\omega_e^2) \quad (2.15)$$

Durch die Einführung sogenannter modaler Koordinaten

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{q} \quad (2.16)$$

gelingt es, die Differentialgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

in Ein-Freiheitsgrad-Systeme zu entkoppeln

$$\mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\Phi\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

$$\Phi^T \mathbf{M}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T \mathbf{K}\Phi\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} + \text{diag}(\omega_c^2)\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

Damit ist aus einem gekoppelten System mit vielen Freiheitsgraden ein entkoppeltes System von Ein-Massen-Schwingern geworden. Alle Ergebnisse für Ein-Freiheitsgrad-Systeme sind als Denkmodelle nun auch für diskrete Schwinger mit vielen Freiheitsgraden anwendbar. Das macht die modale Analyse zu einem für die Praxis sehr wichtigen, da mit relativ wenig Aufwand zu beherrschenden Werkzeug der Schwingungslehre.

Probleme ergeben sich mit der Dämpfung, die zunächst ohne genauere Angaben mit $\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}$ eingeführt wurde.

2.2.3 Rayleigh-Dämpfung

Um diese Probleme zu vermeiden, wird oft aus rein mathematischen Gründen die sogenannte Bequemlichkeitshypothese oder Rayleigh-Dämpfung

$$\mathbf{D} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M} \quad (2.21)$$

mit α und β als Parametern eingesetzt. Damit wird die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} diagonalisierbar zur modalen Dämpfungsmatrix Δ . Jeder Schwingungsform ist bei dieser sogenannten modalen Dämpfung ein Dämpfungsparameter zugeordnet. Da nur 2 Parameter α und β zur Anpassung des Modells an das reale Dämpfungsverhalten zur Verfügung stehen, ist diese Vorgehensweise nur bei kleinen Dämpfungen sinnvoll, die Näherung entsprechend schlecht. Eine Verbesserung wird erreicht, wenn die Diagonalelemente der Matrix Δ direkt vorgeschrieben werden, was einer modalen Dämpfungsidentifikation entspricht.

2.2.4 Diagonalansatz

Zur Verbesserung des Lösungsverhaltens wird oft auch der heuristische Ansatz

$$\Delta = \text{diag}[\Phi^t \mathbf{D} \Phi] \quad (2.22)$$

gewählt. Dieses Verfahren kann gerechtfertigt sein, wenn die Elemente auf der Hauptdiagonalen von Δ dominant gegenüber den restlichen Elementen sind, da dann der Fehler relativ klein wird. Bei relativ großen Elementen in diesen Teilen der modalen Dämpfungsmatrix ist die Genauigkeit nicht mehr gesichert.

2.2.5 Definition einer viskosen Dämpfungsmatrix

Während bisher die Dämpfung vor allem für diskrete Systeme betrachtet wurde, ergibt sich häufig das Problem, kontinuierliche Systeme mit Hilfe einer Diskretisierung für die Berechnung aufbereiten zu müssen. Die Erstellung der Matrizen für Steifigkeiten und Massenanteile des resultierenden partiellen Differentialgleichungssystems geschieht dazu mit Hilfe von element- oder bereichsweisen Ansatzfunktionen, über die die Gesetzmäßigkeiten des kontinuierlichen Systems im Mittel erfüllt werden. Mit einem viskosen Dämpfungsansatz kann analog eine Dämpfungsmatrix erstellt werden.

Wird dazu ein Massenelement mit der Masse dm betrachtet, so ist im Falle konstant räumlich verteilter viskoser Dämpfung die differentielle Dämpfungskraft

$$\mathbf{p}_d(x_1, x_2, x_3) = \mu \dot{\mathbf{u}}(x_1, x_2, x_3) \quad (2.23)$$

als Kraftvektor an diesem Element nur von der Verschiebungsgeschwindigkeit abhängig. Um nun die Behandlung der Dämpfung in der Strukturmechanik zu ermöglichen, wird diese differentielle Dämpfungskraft aufintegriert zu einer Elementdämpfungsmatrix. Dabei muß eine Annahme getroffen werden über die Geschwindigkeitsverteilung im Element, ausgehend von den Knotengrößen, diese Ansatz- oder Formfunktionen sind hier enthalten in der Matrix \mathbf{H} :

$$\mathbf{D}_{el} = \mu \int_{V_{el}} \mathbf{H}^t \mathbf{H} dV \quad (2.24)$$

Die Dämpfungsmatrix für die gesamte Struktur erhält man aus den m Elementmatrizen \mathbf{D}_{el} , indem diese mit Hilfe der Booleschen Matrizen \mathbf{a}_i entsprechend der gewählten Diskretisierung aufsummiert werden:

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i^t \mathbf{D}_{el} \mathbf{a}_i \quad (2.25)$$

Dämpfungskräfte an diskreten Stellen können matriziell ebenso wie Elementdämpfungsmatrizen in der Systemdämpfungsmatrix eingebaut werden, was analog für die im nächsten Kapitel eingeführten phänomenologischen Modelle gilt.

Die Erstellung der Dämpfungsmatrix in dieser Weise führt wegen der eigenen, nicht mit Steifigkeits- oder Massenträgheitsansätzen korrelierten Ansatzfunktionen dazu, daß keine allgemeingültigen Beziehungen zwischen M , K und D angegeben werden können.

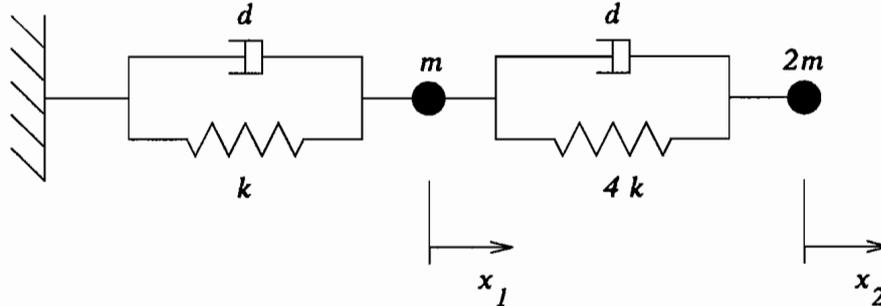
2.2.6 Dämpfung und Modaltransformation

Mit Einführung modaler Koordinaten wird \mathbf{D} per Modaltransformation in die modale Dämpfungsmatrix Δ überführt

$$\Delta = \Phi^T \mathbf{D} \Phi, \quad (2.26)$$

dabei braucht Δ nun keineswegs mehr eine Diagonalmatrix zu sein, da die Erstellung der viskosen Dämpfungsmatrix, wie im letzten Abschnitt gezeigt, in keiner Weise mit der Erstellung der Steifigkeits- und Massenmatrizen korreliert ist. Eine Entkopplung

der einzelnen Zeilen des modalen Differentialgleichungssystems ergibt sich dann nicht mehr in jedem Fall, sondern die Schwingungsformen des ungedämpften Systems sind im Allgemeinen über die Dämpfung gekoppelt. Nur für den Sonderfall der Gültigkeit von Gl. 2.21 ist die modale Dämpfungsmatrix eine Diagonalmatrix. Schon an einem sehr einfachen Beispiel kann dagegen nichtmodale Dämpfung gezeigt werden [3]:



Die Parameter des Modells sollen sein:

$$d = 0.2m\omega_0$$

$$k = m\omega_0^2$$

Die damit entstehende Systemgleichung lautet:

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} + 0.2m\omega_0 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + m\omega_0^2 \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (2.27)$$

Die Überprüfung, ob \mathbf{D} eine Linearkombination von \mathbf{M} und \mathbf{K} ist, also ob modale Dämpfung vorliegt, ergibt:

$$d_{12} = \alpha m_{12} + \beta k_{12}$$

$$-1 = \alpha \cdot 0 + \beta (-4)$$

$$\beta = -0.25$$

$$d_{11} = \alpha m_{11} + \beta k_{11}$$

$$2 = \alpha \cdot 1 - 0.25 \cdot 5$$

$$\alpha = 3.25$$

$$d_{22} = \alpha m_{22} + \beta k_{22}$$

$$1 \neq 3.25 \cdot 2 - 0.25 \cdot 4 = 5.5$$

Damit ist \mathbf{D} nicht diagonalisierbar, das System ist nichtproportional gedämpft. Die Dämpfungsmatrix lautet in modalen Koordinaten:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 11.93 & -24.00 \\ -24.00 & 268.06 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Die Elemente der Hauptdiagonalen sind nicht prinzipiell größer als die anderen Elemente von Δ . Somit führt die Lösung des Gleichungssystems auf komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren. Diese besitzen jeweils auch konjugiert komplexe Lösungspaare und sind erheblich aufwendiger zu berechnen als im Falle modaler Dämpfung.

2.2.7 Strukturdämpfung, Hysteresedämpfung

Strukturdämpfung als annähernd frequenzunabhängige Dämpfung kann nicht mehr mit viskosen Modellen behandelt werden, hier wird die Dämpfungskraft oft besser als

$$\mathbf{F}_D = -\frac{1}{\Omega} \mathbf{C}_S \dot{\mathbf{u}} \quad (2.29)$$

modelliert. Diese Näherung gilt allerdings nur für stationär harmonische Schwingungen! Ansonsten würde mit der Frequenz Ω eine neue Variable in der Differentialgleichung erscheinen. Durch diesen Ansatz wird die dissipierte Energie pro Periode unabhängig von der Umfahrgeschwindigkeit der Hysterese. Somit erhält man folgende Matrizendifferentialgleichung:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \frac{1}{\Omega} \mathbf{C}_S \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{a} \sin(\Omega t) \quad (2.30)$$

Diese reelle Gleichung ist äquivalent mit der folgenden komplexen Gleichung, wiederum unter der Voraussetzung stationär harmonischer Schwingungen, bei denen $\dot{\mathbf{x}} = j\Omega\mathbf{x}$ gilt:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + [\mathbf{K} + j\mathbf{C}_S]\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}e^{j\Omega t} \quad (2.31)$$

Bei linear-elastischen Werkstoffen gilt Proportionalität von \mathbf{C}_S mit der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} :

$$\mathbf{C}_S = g \mathbf{K}, \quad \text{mit } g \leq 0.05$$

Damit kann Gl. 2.30 in folgende Form überführt werden, in der die entstehende komplexe Steifigkeitsmatrix $[1 + jg]\mathbf{K}$ als „komplexe Steifigkeit“ bezeichnet wird:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + [1 + jg]\mathbf{K}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}e^{j\Omega t} \quad (2.32)$$

Voraussetzung für die Anwendung der Strukturdämpfung bzw. komplexen Steifigkeit sind stationär harmonische Schwingungen, deshalb ist Stationarität notwendige Bedingung für die Anwendung dieses Modells. Nichtharmonische Schwingungsformen können allenfalls aus der Superposition der einzelnen harmonischen Lösungen für die Glieder einer Reihenentwicklung berechnet werden, ein vor allem bei großen Systemen sehr aufwendiges Verfahren. Nichtstationäre Schwingungsformen sind generell nicht mit diesem Ansatz zu behandeln.

In der Praxis werden allerdings doch relativ häufig nichtstationäre Probleme mit komplexer Dämpfung berechnet, indem im Bildbereich der Fourier-Transformation die Lösung berechnet und dann wieder in den Zeitbereich transformiert wird. Dabei treten nicht-kausale Systemantworten auf, d.h. das System antwortet auf eine Erregung, bevor diese begonnen hat. Hierzu im folgenden Unterabschnitt drei Beispiele.

Nichtkausales Verhalten

Am Beispiel des Einmassenschwingers soll das nichtkausale Verhalten deutlich gemacht werden:

$$m\ddot{x} + (1 + jg)cx = f(t) \quad (2.33)$$

Im Bildbereich der Fourier-Transformation gilt dann:

$$X(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{c(1 + jg) - \Omega^2 m} \quad (2.34)$$

Dirac-Impuls zum Zeitpunkt $t=0$: Gewichtsfunktion

Bei Impulserregung mit δ -Impuls zum Zeitpunkt $t=0$ ist die zu lösende inverse Fourier-Transformation folgende Gleichung:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\Omega t}}{c(1 + jg) - \Omega^2 m} d\Omega \quad (2.35)$$

Deren analytische Lösung lautet mit dem klassischen Ansatz für die Gewichtsfunktion oder mit Hilfe von [72] ($\omega_0^2 = c/m$):

$$x(t) = -\sqrt{\frac{1}{4mc(1 + jg)}} e^{-\sqrt{1+jg} \omega_0 t} \quad (2.36)$$

Diese Funktion über der Zeit aufgetragen ergibt folgenden Verlauf (Realteil durchgezogen, Imaginärteil gestrichelt):

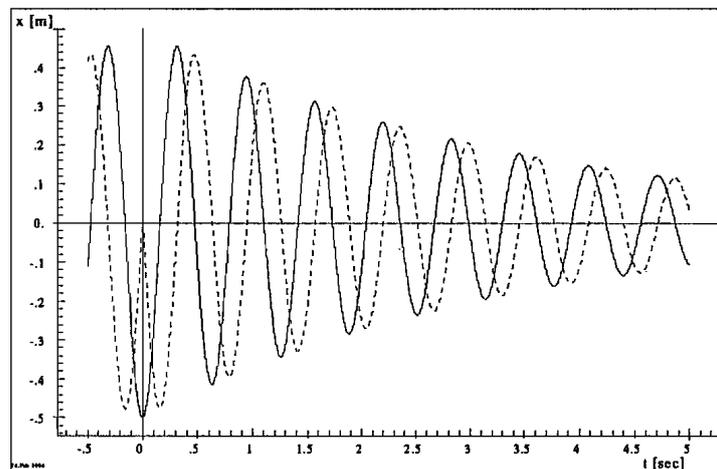


Abbildung 2.7: Nichtkausale Impulsantwort bei komplexer Steifigkeit

Die Funktion $x(t)$ hat deutliche Anteile im Real- und Imaginärteil für Zeiten $t < 0$ sec, das System antwortet nichtkausal wegen der komplexen Steifigkeit. Es handelt sich bei der Belastung mit dem Dirac-Impuls allerdings auch um den Extremfall der nichtharmonischen Erregung, bei der dann auch der größte Fehler zu erwarten ist. Im folgenden soll an einem Beispiel gezeigt werden, daß auch bei weniger extremen Erregungsfunktionen Nichtkausalität auftritt.

Dreiecksimpuls zum Zeitpunkt $t=0$:

Für diesen Dreiecksimpuls soll gelten: $f(t) = \hat{u}t$ für $0 \leq t \leq 1$ und $f(t) = 0$ sonst.

Die zu lösende inverse Fourier-Transformation lautet jetzt:

$$x(t) = \frac{\hat{u}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos\Omega + \Omega \sin\Omega - 1) + j(\Omega \cos\Omega - \sin\Omega)}{\Omega^2(c(1 - jg) - m\Omega^2)} e^{j\Omega t} d\Omega \quad (2.37)$$

Diese Zeitantwort, gewonnen mit Hilfe von [72], ist nicht mehr sinnvoll darstellbar (ca. 50 ausgefüllte Zeilen FORTRAN), es soll darum hier nur der Zeitverlauf von $x(t)$ angegeben werden: Bild 2.8.

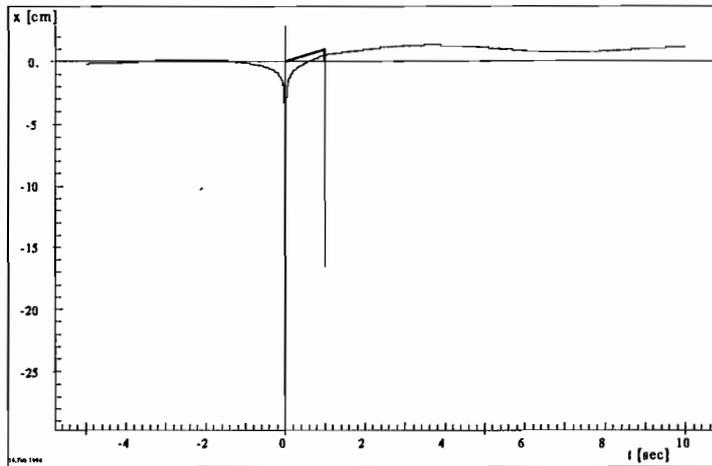


Abbildung 2.8: Nichtkausale Dreiecksimpulsantwort bei komplexer Steifigkeit

Hier ist wiederum deutlich zu sehen, daß das System wegen der komplexen Steifigkeit nichtkausal antwortet.

Rechtecksimpuls zum Zeitpunkt $t=0$:

Für diesen Rechtecksimpuls soll gelten: $f(t) = \hat{u}$ für $0 \leq t \leq 1$ und $f(t) = 0$ sonst.

Die zu lösende inverse Fourier-Transformation lautet jetzt:

$$x(t) = \frac{\hat{u}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\Omega + j(\cos\Omega - 1)}{\Omega(c(1 - jg) - m\Omega^2)} e^{j\Omega t} d\Omega \quad (2.38)$$

Wird dieses Integral analytisch mit Hilfe von [72] gelöst, so ergibt sich folgende Zeitbereichslösung für die Verschiebung:

$$x(t) = \frac{\hat{u}}{2(1 - jg)} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1 - jg)} (1 - t)\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}(1 - jg)} t - 2\right) \right) \quad (2.39)$$

Über der Zeit dargestellt wird diese Funktion in Bild 2.9.

Wie auch in den beiden anderen Fällen liegt hier eine Nichtkausalität vor. Die Ähnlichkeit an den beiden Sprungstellen der Erregung mit der Dreieckerregung ist deutlich zu sehen.

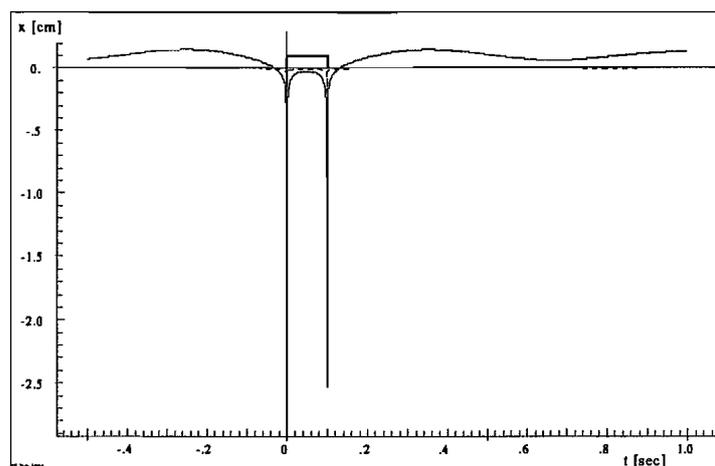


Abbildung 2.9: Nichtkausale Rechtecksimpulsantwort bei komplexer Steifigkeit

2.3 Kontinuierliche linear-viskose Systeme

Die bisher behandelten Dämpfungsansätze werden alle auf diskretisierte Systeme angewandt, wie sie in der Praxis häufig eingesetzt werden. Für kontinuierliche Systeme, die sich im Gegensatz zu den diskretisierten Systemen durch eine unendlich große Anzahl von Freiheitsgraden auszeichnen, ist theoretisch noch eine Lösung der DGL denkbar, die ohne jeden Umweg über eine Diskretisierung auskommt. In diesem Rahmen könnte dann ein direkter Dämpfungsansatz eingesetzt werden. Allerdings ist die spezielle Lösung solcher Gleichungen oft nicht zugänglich, wenn komplexe Geometrien es unmöglich machen, geeignete Lösungsansätze zu finden, die mit den Randbedingungen verträglich sind. Wenn die Randbedingungen aber in geeigneter Form in Lösungsansätzen erfüllt werden können, so treten oft Gleichungen auf, die nicht mehr in geschlossener Form lösbar sind.

Alle diese Differentialgleichungen lassen sich aber auf ein Differentialgleichungssystem 1.Ordnung zurückführen, so daß sie numerisch lösbar sind, wenn auch nur iterativ. Oft ergibt sich auch die Möglichkeit der Lösung im Bildbereich einer Integraltransformation, wo andere, mitunter einfachere Rechenregeln gelten.

Problematisch an kontinuierlichen linearen Systemen ist, daß die Lösungen eines jeden Problems individuell erstellt werden müssen, was sich nur bei häufigem Auftreten bestimmter Gleichungen lohnt. Komplexe Strukturen aber, wie sie in der Technik üblich sind, z.B. Gitterkräne und Gerüste, aber auch Rotoren oder Bauwerke, erfordern variable Rechenverfahren, die mit wenig Aufwand Näherungslösungen erzeugen. So kommt man schnell dazu, FEM- oder BEM-Verfahren einzusetzen, bei denen die entsprechende DGL über Ansatzfunktionen elementweise im Mittel erfüllt wird, anstatt global und exakt. Resultat nach einer solchen Diskretisierung sind denn auch nur noch die Knotengrößen, der Charakter des Kontinuums ist verloren gegangen.

Kapitel 3

Phänomenologische Dämpfungsmodelle

In diesem Kapitel werden nun Modelle aus einfachen Elementen vorgestellt, mit denen Dämpfungsphänomene von Steifigkeiten und Massenträgheiten getrennt erfaßt werden sollen. Grundsteifigkeiten der Systeme können hier vorerst als einfache Federn enthalten sein, sie müssen später von anderer Software übernommen werden, um die Modellierung richtig zu skalieren.

Für die vorgestellten Dämpfungsmodelle werden Analogien zur Plastizitätslehre nur dann vorgestellt, wenn keine viskosen Anteile vorhanden sind. Nur dann kann eine von der Verzerrungsgeschwindigkeit unabhängige statische Spannungs-Dehnungs-Beziehung angegeben werden. Grundsätzlich werden nur Kräfte und Verschiebungen betrachtet, über $\sigma = F/A$ und $\epsilon = u/l$ können die Modelle mit ihren jeweiligen Gleichungen auch in Dehnungen und Verschiebungen betrachtet werden. Da es hier um eine Einführung von Modellen geht, die in diskretisierte Systeme integrierbar sein sollen, ist die Formulierung in Kräften und Verschiebungen sinnvoller.

Außerdem sind die im weiteren vorgestellten Modelle masselos, damit sie leicht als Kraft-Verschiebungsbeziehungen in Form äußerer Kräfte in solche diskretisierten Systeme (z.B. vorhandene FEM-Systeme) eingebaut werden können, bei denen die Massenträgheitskräfte in aller Regel bereits auf anderen Wegen implementiert sind. Sind die Modelle linear, dann werden die allgemeinen Lösungen angegeben, ansonsten nur die Lösungen mit Zeitintegration. Daß die Modelle masselos sind, führt auch dazu, daß aus der linearen Schwingungslehre bekannte Dämpfungsmaße wie die kritische Dämpfung oder das Lehr'sche Dämpfungsmaß hier nicht anwendbar sind, um Aussagen über das Dämpfungsverhalten derselben zu machen.

Für die gezeigten Ergebnisse wird eine Simulation eingesetzt, bei der eine Erregung konstanter Amplitude oder Frequenz mit einer numerischen Integration ausgewertet wird, bei den linearen Modellen parallel zur analytischen Berechnung. Die Simulationen hierbei zeigen besonders gut die bei einigen Modellen vorhandenen numerischen Probleme auf. Folgende Darstellungsarten für diese Simulationsergebnisse und analytischen Kennfunktionen kommen hier zur Anwendung:

- Die **Hysterese** ist die über der Verschiebung aufgetragene Kraft der einzelnen Modelle, womit die Gesamtkraft des jeweiligen Modells gemeint ist und nicht nur die Kraft in den Dämpfungselementen.
- Der **Betrag der FFT** ist der bei harmonischer Schwingung im Sweep gebildete Betrag aus Imaginär- und Realteil der Schwingung im Frequenzbereich oder analytisch mit der allgemeinen Lösung linearer Systeme die **Schwingungsamplitude**, abhängig von der Frequenz.
- Die **Sprungantwort** ist die Antwort eines Systems auf eine Sprungfunktion, je nach Modell wird ein Kraft- oder ein Verschiebungssprung eingesetzt.

Zu den Erregungsarten ist zu sagen, daß reine Kraft- und reine Wegerregungen eingesetzt werden, bei denen entweder Amplitude oder Frequenz verändert werden können, außerdem Kraftsprungerregungen. Das Verhalten der Modelle bei den verschiedenen Erregungsarten ist jeweils signifikant verschieden, wie noch gezeigt wird. Einige Modelle können nur mit bestimmten Erregungsarten erregt werden – dazu im nächsten Abschnitt mehr. Es werden rein viskose und reibgedämpfte Modelle mit unterschiedlichen Parameteranzahlen vorgestellt, hin zu immer aufwendigeren Modellen.

3.1 1-parametriges Modell, Coulombdämpfung

Als erstes Modell soll eines mit nur einem Parameter vorgestellt werden, um weitere Modelle z.T. unter Einbeziehung dieses Modells vorstellen zu können. Bei diesem Modell handelt es sich um eine einfache Modellierung der Reibung. Reibung ist im allgemeinen Fall geschwindigkeitsabhängig, da zumindest ein Unterschied zwischen Haft- und Gleitreibung besteht, in der Realität sind die Verhältnisse noch etwas komplizierter, wie in Bild 3.1 schematisch angedeutet wird.

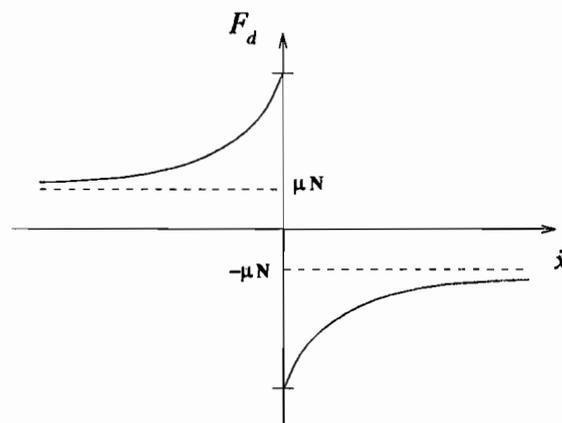
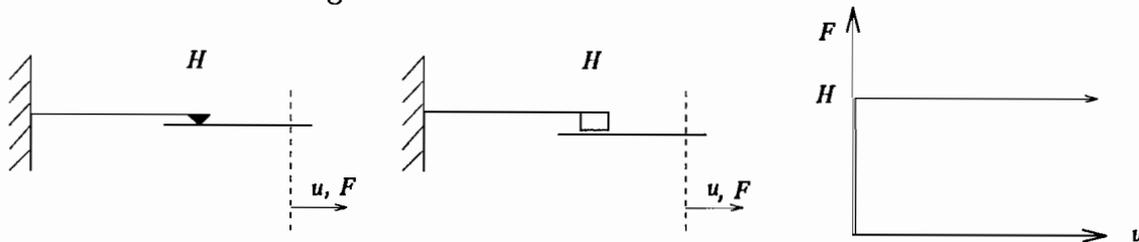


Abbildung 3.1: Geschwindigkeitsabhängiger Reibkraftverlauf

Die Behandlung der „exakten“ Reibkräfte wird meist, da mathematisch zu aufwendig, zugunsten einfacherer Modelle zurückgestellt. Die Reibungskräfte werden in den meisten Fällen idealisiert durch die sogenannte Coulombreibung, bei der die Reibkraft nur

die drei Werte $-\mu N$, 0 und μN mit μ , dem Reibbeiwert zwischen den beiden beteiligten Oberflächen, und N , der Normalkraft zwischen denselben, annehmen kann. Damit ist die Reibung nicht ganz realitätsgetreu absolut geschwindigkeitsunabhängig modelliert. Ist nun verteilte Reibung über eine Fläche gegeben, auf der ein Geschwindigkeitsfeld \dot{u} liegt, so muß die resultierende Reibkraft über der Fläche aufintegriert werden. Für die Berechnung diskretisierter Systeme entsteht infolge der geschwindigkeitsabhängigen Reibung eine aufwendig zu berechnende Integrodifferentialgleichung mit den Integralen für die auf die Knoten bezogene Reibung auf der rechten Seite des Differentialgleichungssystems. Dabei ist noch nicht einmal der Unterschied zwischen Haft- und Gleitreibung berücksichtigt. Die Modellierung der Reibungsdämpfung wird also auf jeden Fall mit dem Coulomb-Reibelement auskommen müssen, dessen mathematische und numerische Behandlung gerade noch lösbar erscheint.

Allgemein üblich ist die bildliche Darstellung eines Coulomb-Reibelementes in der im Bild links oder in der Mitte dargestellten Form.



Diese Idealisierungen bedeuten mathematisch folgendes:

$$\dot{u} < 0 \Rightarrow F = +H$$

$$\dot{u} = 0 \Rightarrow F = 0$$

$$\dot{u} > 0 \Rightarrow F = -H$$

Aufgrund dieser Signumfunktion bei der Idealisierung der Reibung ist bei den folgenden rein reibgedämpften Modellen keine Krafterregung sinnvoll, da für diese masselosen Modelle die Auslenkung bei Erreichen der Haftkraft sofort gegen unendlich streben würde. Das wird klar, wenn man die Umkehrfunktion der Signumfunktion bildet.

In Analogie zum Spannungs-Dehnungs-Diagramm der Plastizitätslehre kann das Coulomb-Reibungsmodell als Beschreibung eines starr-ideal-plastischen Werkstoffes angesehen werden (im Bild rechts).

3.2 2-parametrische Modelle

Die hier angegebenen 2-parametrischen Dämpfungsmodelle haben als ersten Parameter die lineare Federsteifigkeit und als zweiten Parameter einen Parameter für die jeweilige Dämpfung. Bei einigen dieser Modelle tritt das Phänomen auf, daß die Zustandsgrößen zu einem Zeitpunkt $t = t_1$ von vorherigen Zuständen zu Zeiten $t < t_1$ abhängig sind, was z.B. bei einer einfachen linearen Feder nicht der Fall ist. Diese Abhängigkeit wird durch die Speicherung von Energie im System verursacht, z.B. in Form von inneren Spannungen. In einem solchen Fall wird von einem Werkstoff oder Modell mit Gedächtnis gesprochen.

Alle Dämpfungsmodelle lassen sich klassifizieren nach der Art ihres Gedächtnisses: Es gibt solche mit nachlassendem Gedächtnis, bei denen der Einfluß vorhergehender Zustände um so geringer ist, je „älter“ diese sind. Andere Modelle haben ein perfektes Gedächtnis, bei dem das „Alter“ der vorhergehenden Zustände keine Rolle spielt, der Einfluß ist zeitunabhängig. Das kann gut in Analogie zu plastischen Verformungen gesehen werden, die ebenfalls nicht mit der Zeit abklingen, wenn die Last abnimmt.

3.2.1 Kelvin–Voigt–Modell

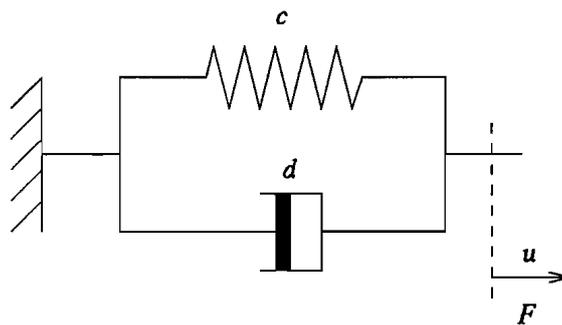


Abbildung 3.2: Kelvin–Voigt–Modell

Dieses einfachste mögliche Modell für viskoelastisches Verhalten wird durch eine Parallelschaltung eines linearen viskosen Dämpfers mit der Dämpfungskonstanten d und einer linearen masselosen Feder mit der Federkonstanten c gebildet, Bild 3.2.

Die Gleichung für dieses Modell lautet:

$$F = cu + d\dot{u}. \quad (3.1)$$

Krafterregung, monofrequent

Bei Erregung mit einer harmonischen Kraft ergibt sich die für linear-viskoelastische Werkstoffe und Modelle typische elliptische Hysterese im Kraft-Verschiebungs-Diagramm, Bild 3.3, die im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Diese Ellipse wird mit steigendem ω größer, da die Dämpfungskraft zunimmt. Der Flächeninhalt der Hysterese entspricht der Dissipationsenergie pro Schwingungszyklus, die quadratisch mit der Frequenz ansteigt. Im statischen Fall ergibt sich für die Auslenkung der Grenzwert F/c . Da die Auslenkung amplitud linear von F abhängig ist, ist das Kelvin–Voigt–Modell ebenfalls linear. Mit einer Änderung der Frequenz kippt die Ellipse im übrigen, wie in Bild 2.6 anhand eines ganzen Sweep gezeigt.

Die Kraft $F(t)$, mit der das Kelvin-Voigt-Modell erregt wird, soll wie folgt aussehen:

$$F(t) = \hat{F} \sin \omega t \quad (3.2)$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung des Kelvin-Voigt-Modells ergibt sich folgende Gleichung:

$$d\dot{u} + cu = F(t) = \hat{F} \sin \omega t \quad (3.3)$$

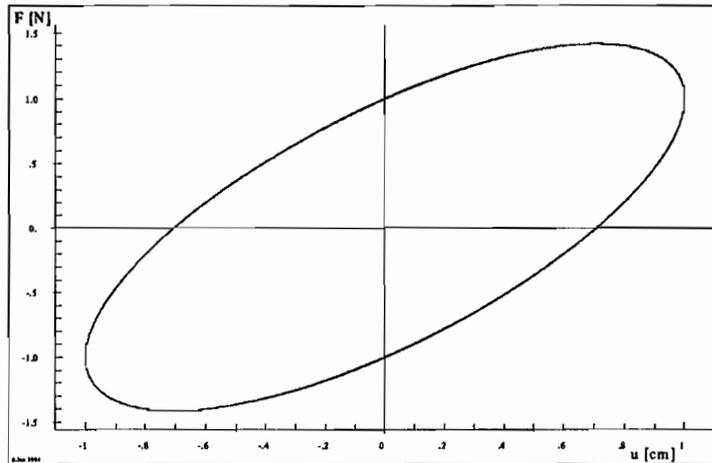


Abbildung 3.3: Kelvin-Voigt-Modell, Hysterese, $\omega = \text{const.}$, $\omega > \omega_e$, $\hat{u} = \text{const.}$

Der Lösungsansatz vom gleichen Typ wie der Störterm lautet:

$$u_p(t) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t, \quad (3.4)$$

womit gilt:

$$\dot{u}_p(t) = \alpha \omega \cos \omega t - \beta \omega \sin \omega t \quad (3.5)$$

Dieser Ansatz wird in die Differentialgleichung eingesetzt und die Lösung mit Koeffizientenvergleich bestimmt:

$$(c\beta + d\alpha\omega)\cos\omega t + (c\alpha - d\beta\omega)\sin\omega t = \hat{F}\sin\omega t \quad (3.6)$$

$$\alpha = \frac{\hat{F}c}{c^2 + d^2\omega^2}$$

$$\beta = \frac{-\hat{F}d\omega}{c^2 + d^2\omega^2}$$

Die Lösungsfunktion $u_p(t)$ lautet damit:

$$u_p(t) = \frac{\hat{F}}{c^2 + \omega^2 d^2} (c \sin \omega t - \omega d \cos \omega t) \quad (3.7)$$

Die Amplitude der Auslenkung lässt sich dann wie folgt bestimmen:

$$|u_p(t)| = \left| \frac{\hat{F}}{\sqrt{c^2 + \omega^2 d^2}} \right| \quad (3.8)$$

Krafterregung, Sweep

Diese Funktion, bei konstanter Amplitude über der Frequenz aufgetragen, ergibt Bild 3.4.

Der Grenzwert der Auslenkung für kleines ω wegen der dann verschwindenden Dämpfung ist \hat{F}/c . Für großes ω ist $|u_p(t)| = 0$ wegen der gegen ∞ strebenden Dämpfungskraft.

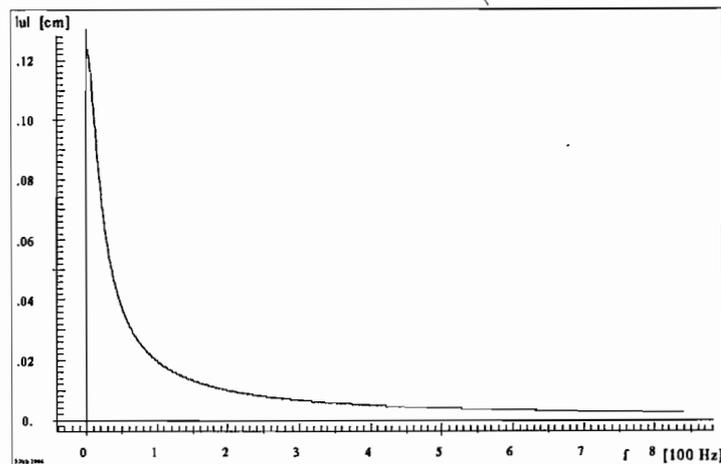


Abbildung 3.4: Krafterregung beim Kelvin-Voigt-Modell, $\hat{F} = \text{const.}$

Wegerregung, Sweep

Es wird eine Wegerregung $u(t)$ angenommen mit:

$$u(t) = \hat{u} \sin \omega t \quad \text{und} \quad \dot{u}(t) = \hat{u} \omega \cos \omega t \quad (3.9)$$

In die Differentialgleichung eingesetzt ergibt das:

$$d\hat{u}\omega \cos \omega t + c\hat{u} \sin \omega t = F(t) \quad (3.10)$$

Die gesuchte Kraftamplitude $|F(t)|$ kann dann mit

$$|F(t)| = |\hat{u} \sqrt{c^2 + \omega^2 d^2}| \quad (3.11)$$

ausgedrückt werden. Das bedeutet für hohe Frequenzen eine annähernd lineare Abhängigkeit der Kraftamplitude $|F(t)|$ von der Erregungsfrequenz ω , es ergibt sich für eine konstante Amplitude \hat{u} Bild 3.5 oben.

Damit kommt genau das Ansteigen der Kraft zum Ausdruck, wenn bei konstanter Amplitude die Frequenz erhöht wird, was experimentell nur in engen Grenzen versucht werden kann, da der Energiebedarf hierbei quadratisch ansteigt. Das Simulationsmodell liefert genau die gleiche Funktion, von einem kleinen Transformationsfehler abgesehen: Bild 3.5 unten.

Bei konstanter Frequenz über der Amplitude aufgetragen, ergibt sich eine einfache lineare Funktion, Bild 3.6.

Soll die Abhängigkeit der Dämpfung von Parametern wie Frequenz und Amplitude dargestellt werden, so kann die in einem Schwingungszyklus dissipierte Energie dazu als Maß herangezogen werden. Um die Darstellung dimensionslos zu machen und sinnvoll normieren zu können, sollte als Vergleichsgröße die elastische Energie des Systems dienen. Das Dämpfungsvermögen ξ einer Struktur kann dann angegeben werden als das Verhältnis

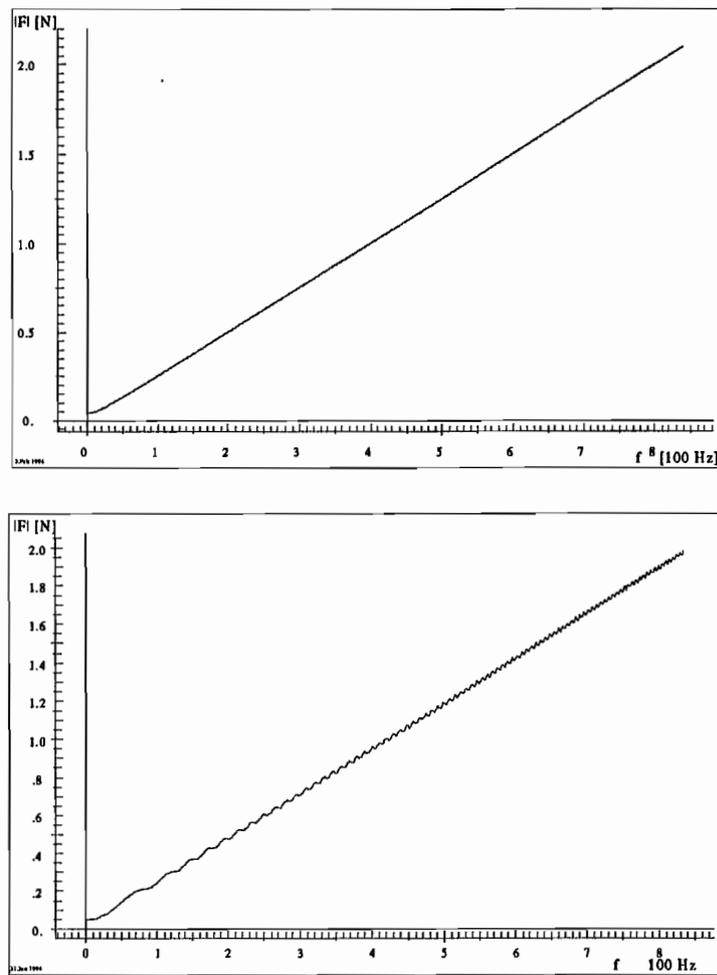


Abbildung 3.5: Wegerregung beim Kelvin-Voigt-Modell, Theorie (oben) und Simulation (unten), $\hat{u} = const.$

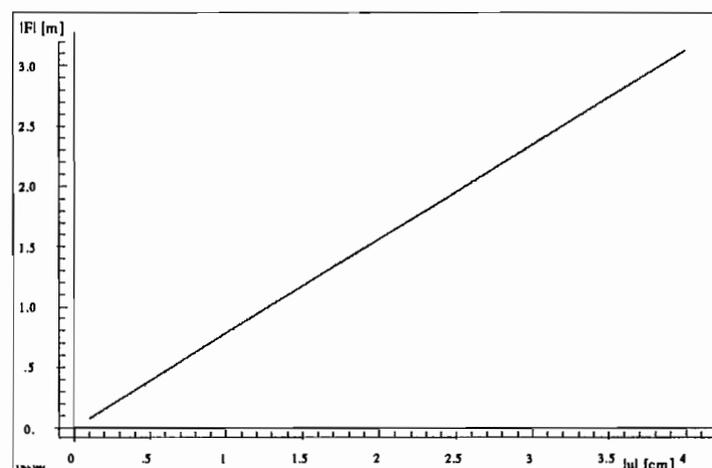


Abbildung 3.6: Wegerregung beim Kelvin-Voigt-Modell, $\omega = const.$

der Dissipationsenergie W_D pro Zyklus, was der Fläche der Hysterese entspricht, zur maximalen potentiellen Energie U des Systems, multipliziert mit 2π . Diese Definition wird hier für alle Modelle verwandt.

$$\xi = \frac{W_D}{2\pi U_{max}} \quad (3.12)$$

Für das Kelvin-Voigt-Modell gilt dann:

$$W_D = \int_0^{2\pi} F(t) du = \int_0^{2\pi} (d\dot{u}\omega\cos\omega t + c\dot{u}\sin\omega t)\dot{u}\omega\cos\omega t dt = \pi\dot{u}^2\omega d \quad (3.13)$$

$$U = \frac{1}{2}c\dot{u}^2 \quad (3.14)$$

Damit kann ξ angegeben werden:

$$\xi_{Kelvin} = \frac{d}{c} \omega \quad (3.15)$$

Diese Funktion, über der Frequenz aufgetragen, ergibt eine linear ansteigende Gerade, die unabhängig ist von der Amplitude einer Schwingung: Bild 3.7.

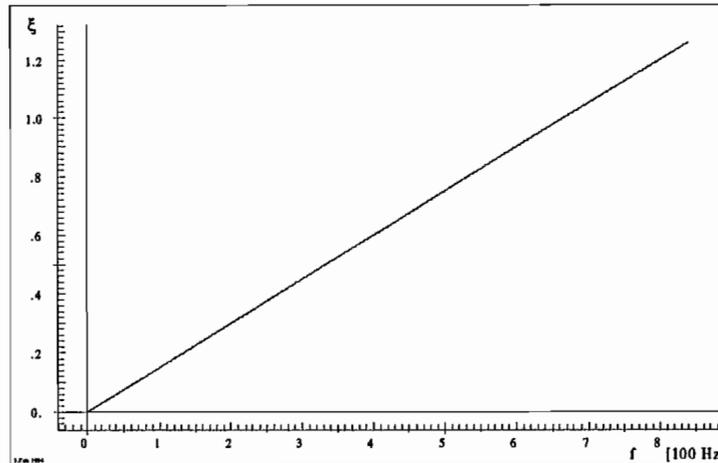


Abbildung 3.7: Wegerregung beim Kelvin-Voigt-Modell, Dämpfungsvermögen

Kraftsprung

Die Antwort des Modells auf einen Kraftsprung $F = F_0 \mathbf{1}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ sec

$$u(t) = \frac{F_0}{c}(1 - e^{-\lambda t}), \quad (3.16)$$

zeigt, daß dieses Modell keine Spontanverschiebung liefern kann, siehe auch Bild 3.8.

Nach einer Relaxation zum Zeitpunkt $t = t_1$, hier $t_1 = 2$ sec, ab der die Verschiebung konstant gehalten wird ($\dot{u} = 0$), stellt sich die konstante Kraft

$$F(t) = F_0(1 - e^{-\lambda t_1}) \quad (3.17)$$

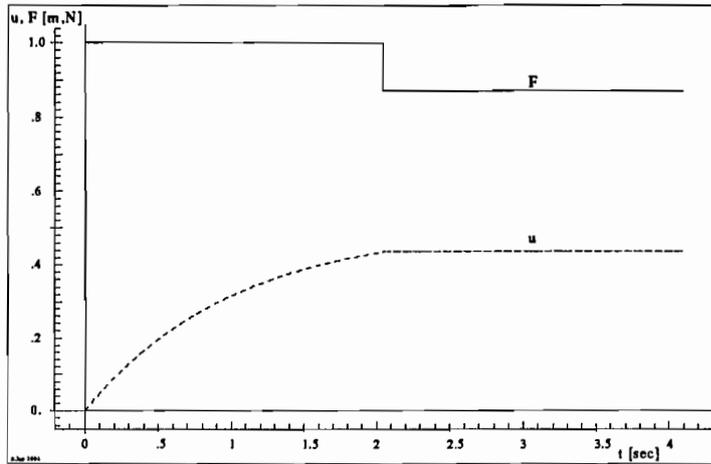


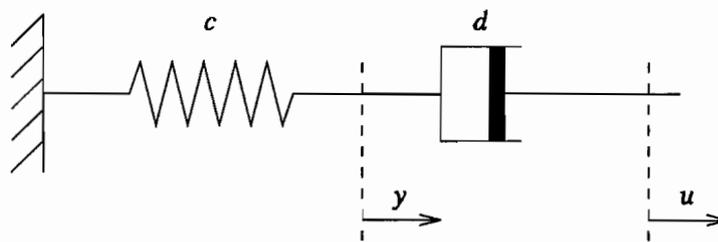
Abbildung 3.8: Kelvin-Voigt-Modell, Kraftsprungantwort

ein. Für $t \rightarrow \infty$ ist das Modell asymptotisch elastisch.

Beides zusammen, die sprungförmige Kraftsprungantwort und das Fehlen einer Spontanverschiebung, machen das Verhalten des Kelvin-Voigt-Modells ungeeignet zur Modellierung realer Werkstoffe. In der linearen Dynamik findet es trotzdem seine berechnete Anwendung, da es auf einfachste Art und Weise ermöglicht, endliche Amplituden als Antwort auf Anregung von Eigenfrequenzen zu erhalten. Eben der einfachen Handhabung wegen wird dieses Modell auch noch bei schwach nichtlinearen Problemen eingesetzt.

3.2.2 Maxwell-Modell

Das einfachste Modell für nachlassendes Gedächtnis ist das Maxwell-Modell, bei dem ein masseloses viskoses Dämpfungselement und eine masselose Feder in Reihe geschaltet sind.



Die Differentialgleichung dazu lautet:

$$dy + cy = du \quad , \quad (3.18)$$

deren Lösung für die innere Variable $y(t)$ ist eine Relaxationsfunktion

$$dy + cy = du \quad \bullet \text{---} \circ \quad (sd + c)Y(s) = sdU(s) \quad (3.19)$$

$$y(t) = \int_0^\infty \dot{u}(t - \tau)e^{-\frac{c}{d}\tau} d\tau \quad \bullet \text{---} \circ \quad Y(s) = \frac{s}{s + \frac{c}{d}} U(s) \quad (3.20)$$

Die Kraft des Maxwell-Elementes am rechten Ende lautet damit

$$F(t) = c y(t) = \int_0^{\infty} c \dot{u}(t - \tau) e^{-\frac{c}{d}\tau} d\tau \quad (3.21)$$

Eine aufgebrauchte Verschiebung hat wegen der Relaxationsfunktion $e^{-\frac{c}{d}\tau}$ somit eine zeitlich exponentiell abnehmende Nachwirkung. Im Extremfall für $d \gg c$ ist die Nachwirkzeit sehr lang, bei $d \ll c$ hingegen sehr kurz. Für jede beliebige bekannte Funktion $u(t)$ läßt sich so $F(t)$ berechnen, aber $u(t > t_1) = 0$ bedeutet wegen des Gedächtnisses nicht auch $F(t > t_1) = 0$.

Bei einer harmonischen Wegerregung $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t)$ ergibt sich nach Einsetzen der Erregungsfunktion in Gl. 3.21 folgende Gleichung für den Kraftverlauf des Maxwell-Elementes:

$$F(t) = \frac{\hat{u}\omega c}{\frac{c^2}{d^2} + \omega^2} \left(\omega \sin(\omega t) - \frac{c}{d} \cos(\omega t) \right) \quad (3.22)$$

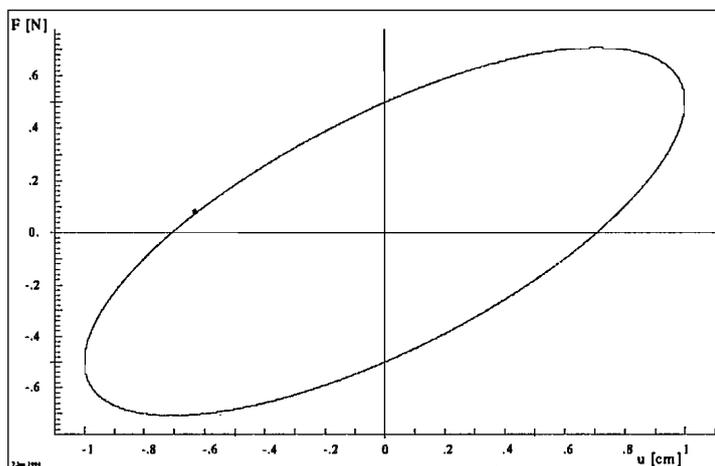


Abbildung 3.9: Maxwell-Modell, Hysterese

Als Hysterese, die Kraft über der Verschiebung aufgetragen, erhält man mit dieser Gleichung eine schrägliegende Ellipse, Bild 3.9, die typisch ist für linear-viskoelastische Modelle.

Krafterregung, Sweep

Es wird eine Krafterregung mit konstanter Amplitude und steigender Frequenz auf das Maxwell-Modell gegeben:

$$F(t) = \hat{F} \sin \omega t = -c y(t) = -d(\dot{u} - \dot{y}) \quad (3.23)$$

Die Krafterregung $F(t)$ wird umgerechnet in eine Verschiebung, hier die der inneren Variablen y :

$$y(t) = -\frac{F(t)}{c} = -\frac{\hat{F}}{c} \sin \omega t = \hat{y} \sin \omega t$$

$$\dot{y} = \hat{y}\omega\cos\omega t$$

Mit dieser Verschiebung $y(t)$ ist die Differentialgleichung wie folgt umzuschreiben:

$$\hat{y}d\omega\cos\omega t + \hat{y}c\sin\omega t = d\dot{u} \quad (3.24)$$

Der Lösungsansatz für die Differentialgleichung ist vom gleichen Typ wie die Erregungsfunktion:

$$u_p = \alpha\sin\omega t + \beta\cos\omega t \quad (3.25)$$

$$\dot{u}_p = \alpha\omega\cos\omega t - \beta\omega\sin\omega t \quad (3.26)$$

Die Differentialgleichung wird mit Koeffizientenvergleich gelöst:

$$\hat{y}d\omega\cos\omega t + \hat{y}c\sin\omega t = d\alpha\omega\cos\omega t - d\beta\omega\sin\omega t \quad (3.27)$$

$$\alpha = -\frac{\hat{F}}{c} \quad \beta = \frac{\hat{F}}{\omega d}$$

Die Lösungsfunktion für die gesuchte Verschiebung lautet:

$$u_p = -\frac{\hat{F}}{c}\sin\omega t + \frac{\hat{F}}{\omega d}\cos\omega t \quad (3.28)$$

Damit ist eine Berechnung der Amplitude von x in Abhängigkeit von ω möglich:

$$|u_p(t)| = \left| \hat{F} \sqrt{\frac{1}{\omega^2 d^2} + \frac{1}{c^2}} \right| \quad (3.29)$$

Diese Funktion, bei konstanter Amplitude über ω aufgetragen, ergibt Bild 3.10.

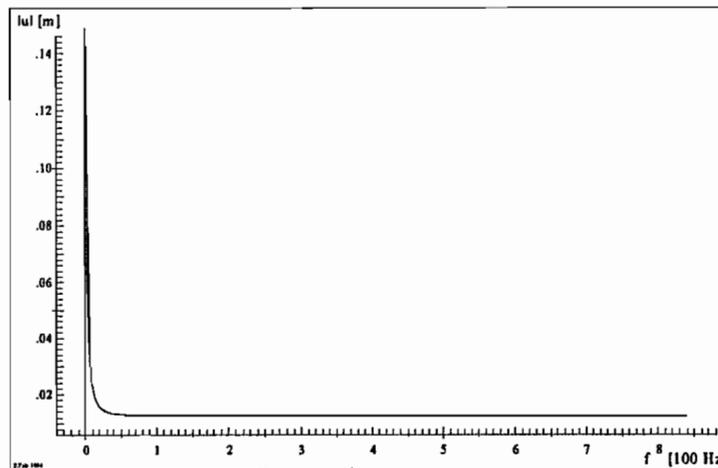


Abbildung 3.10: Kräfteerregung beim Maxwell-Modell, $\hat{F}=\text{const.}$

Der Amplitudenverlauf über der Kreisfrequenz ist somit hyperbelartig abnehmend bei wachsender Kraftamplitude. Sinnvoll ist im übrigen, daß der Grenzwert der Amplitude für ω gegen Null wegen der nicht mehr vorhandenen Steifigkeit bei ∞ liegt und der Grenzwert für ω gegen Unendlich bei $\frac{\hat{F}}{c}$, da dann das viskose Dämpfungselement unendlich steif wird und nur noch die Feder wirkt. Es gelten hier in etwa die gleichen Verhältnisse wie beim Kelvin-Voigt-Modell in Gl. 3.8 und Bild 3.4.

Wegerregung, Sweep

Für die Wegerregung ist der Verlauf von u bekannt:

$$\begin{aligned} u &= \hat{u} \sin \omega t \\ \dot{u} &= \hat{u} \omega \cos \omega t \end{aligned}$$

Der Lösungsansatz für die innere Variable y , die letztendlich die gesuchte Reaktionskraft F liefert, lautet:

$$\begin{aligned} y_p &= \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t \\ \dot{y}_p &= -\alpha \omega \sin \omega t + \beta \omega \cos \omega t \end{aligned}$$

Der Lösungsansatz wird in die Differentialgleichung 3.18 eingesetzt und die Konstanten mit Koeffizientenvergleich bestimmt:

$$(-\alpha \omega d + \beta c) \sin \omega t + (\beta \omega d + \alpha c) \cos \omega t = d \dot{u} \sin \omega t \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{cd \hat{u} \omega}{c^2 + \omega^2 d^2} \\ \beta &= \frac{\hat{u} \omega^2 d^2}{c^2 + \omega^2 d^2} \end{aligned}$$

Die Lösungsfunktion für die Kraft F_p lautet:

$$F_p = -c y_p = -\frac{\hat{u} \omega d}{c^2 + \omega^2 d^2} (\omega d \sin \omega t + c \cos \omega t) \quad (3.31)$$

Damit ist wiederum eine Berechnung der Amplitude der resultierenden Kraft möglich:

$$|F_p| = \left| \frac{\hat{u} \omega d}{\sqrt{c^2 + \omega^2 d^2}} \right| \quad (3.32)$$

Diese Funktion, über ω aufgetragen, ergibt Bild 3.11 oben. Die Simulation (Bild 3.11 unten) unterscheidet sich von der theoretischen Berechnung (Bild 3.11 oben) nur um die Fehler der FFT, vor allem der steile Anstieg bei kleinem ω ist in der Simulation nicht darstellbar.

Die selbe Funktion, bei konstanter Frequenz über der Amplitude aufgetragen, ergibt Bild 3.12.

Das Dämpfungsvermögen des Maxwell-Modells läßt sich mit W_D und U nach Gl. 3.12 berechnen:

$$\begin{aligned} W_D &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(t) du = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\hat{u} c \omega^2 d}{c^2 + \omega^2 d^2} (\hat{u} c \cos \omega t + \hat{u} \omega d \sin \omega t) \cos \omega t dt = \frac{\Pi \hat{u}^2 c^2 \omega d}{c^2 + \omega^2 d^2} \quad (3.33) \\ U &= \frac{1}{2} c |y_p - u|^2 = \frac{1}{2} c \left(\frac{\hat{u} \omega d}{c^2 + \omega^2 d^2} (c \cos \omega t + \omega d \sin \omega t) - \hat{u} \sin \omega t \right)^2 \end{aligned}$$

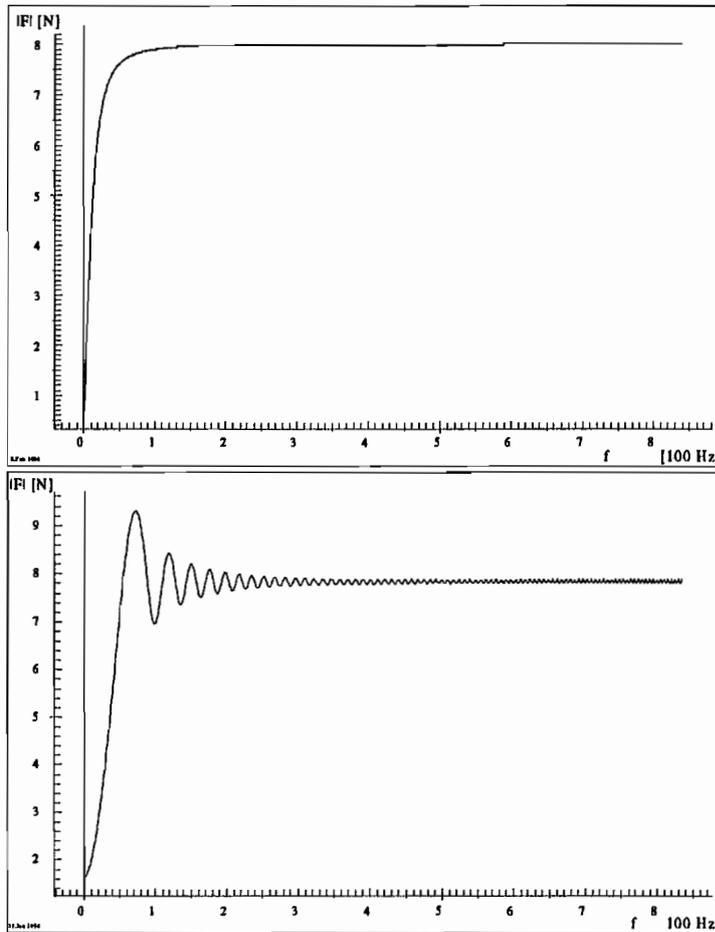


Abbildung 3.11: Wegerregung beim Maxwell-Modell, $\hat{u} = \text{const.}$

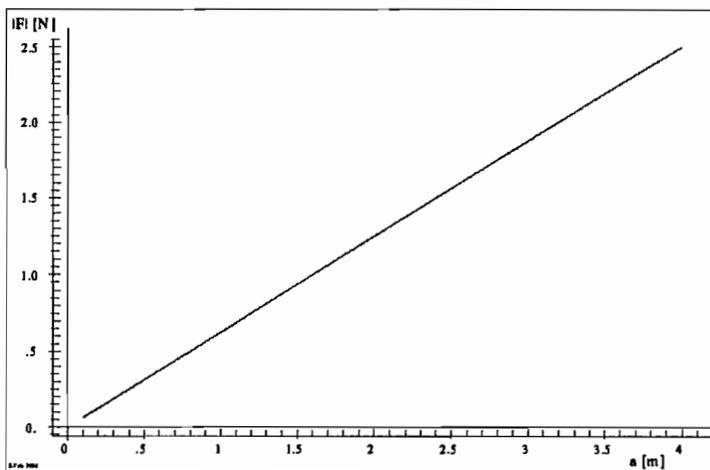


Abbildung 3.12: Wegerregung beim Maxwell-Modell, $\omega = \text{const.}$

$$U = \frac{1}{2}c \frac{\hat{u}^2 c^2}{c^2 + \omega^2 d^2} = \frac{\hat{u}^2 c^3}{2(c^2 + \omega^2 d^2)} \quad (3.34)$$

Damit ergibt sich das Dämpfungsvermögen, dargestellt in Bild 3.13:

$$\xi_{Maxwell} = \frac{d}{c} \omega \quad (3.35)$$

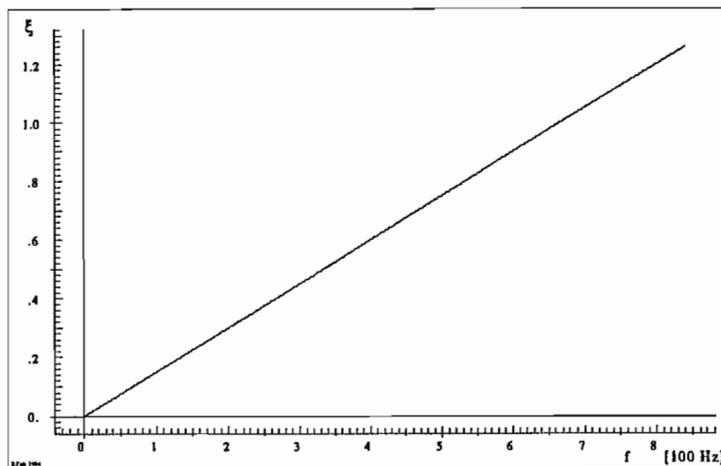


Abbildung 3.13: Wegerregung beim Maxwell-Modell, Dämpfungsvermögen, $\hat{u} = \text{const.}$

Kraftsprung

Auf eine Erregung mit einer Zeitfunktion $F(t < 0) = 0$, $F(0 < t < t_1) = 1$ und $F(t > t_1) = 0$ ergibt sich folgende Gleichungen mit ihren Laplace-Transformierten:

$$dy + cy = d\dot{u} \quad \bullet \text{---} \circ \quad (ds + c) Y(s) = ds U(s) \quad \text{und} \quad (3.36)$$

$$cy(t) = F(t) \quad \bullet \text{---} \circ \quad F(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s}) \quad (3.37)$$

Durch Einsetzen der transformierten Erregungsfunktion $F(s)$ in die ebenfalls transformierte DGL und Auflösen der Gleichung nach $U(s)$ kann nach Rücktransformation die Lösung $u(t)$ erhalten werden, mit der Einheitssprungfunktion $g(t)$:

$$u(t) = \frac{1}{c} + \frac{t}{d} - \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}(t-1) \right) g(t-1) \quad (3.38)$$

In Bild 3.14 sind $u(t)$ aus Gl. 3.38 und $F(t)$ als Verlauf von Kraft und Verschiebung über der Zeit wiedergegeben.

Es erfolgt im Gegensatz zum Kelvin-Voigt-Modell eine Spontanverschiebung.

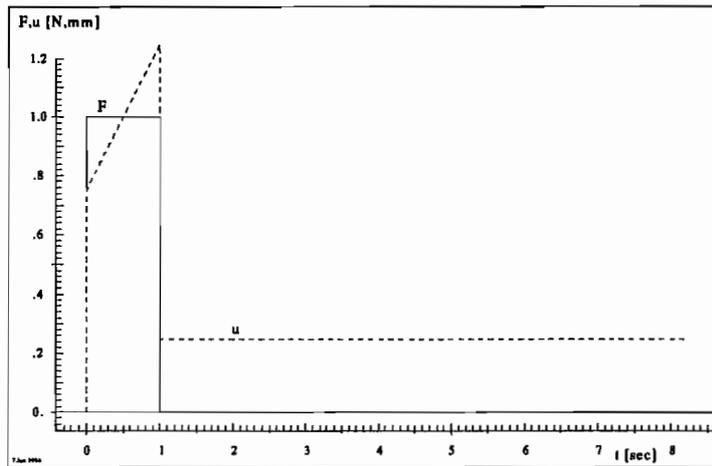
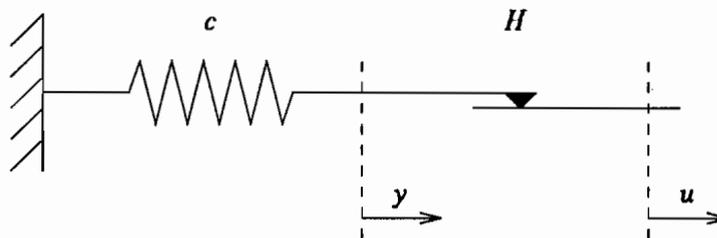


Abbildung 3.14: Maxwell-Modell, Kraftsprungantwort

3.2.3 Prandtl-Modell

Ein einfaches Modell für perfektes Gedächtnis bietet das Prandtl-Modell (auch Jenkin-Modell), bei dem eine masselose lineare Feder und ein masseloses Coulomb-Reibelement in Reihe geschaltet sind. Dabei ist F_p die Kraft am rechten Ende des Elementes und H die Haftkraft des Coulomb-Reibelementes.



Es gilt für Haften:

$$\dot{F}_p = c\dot{u} \quad (3.39)$$

mit

- $|F_p| < H$ oder
- $F_p = -H$ und $\dot{u} < 0$ oder
- $F_p = +H$ und $\dot{u} > 0$

oder für Gleiten:

$$\dot{F}_p = 0 \quad (3.40)$$

mit den zum Haften komplementären Bedingungen:

- $F_p = -H$ und $\dot{u} \geq 0$ oder
- $F_p = +H$ und $\dot{u} \leq 0$.

Die zusammenfassende Gleichung dazu lautet:

$$\dot{F}_p = \frac{1}{2}c\dot{u}[1 - \operatorname{sgn}(F_p^2 - H^2) - \operatorname{sgn}(F_p\dot{u})(1 + \operatorname{sgn}(F_p^2 - H^2))] \quad (3.41)$$

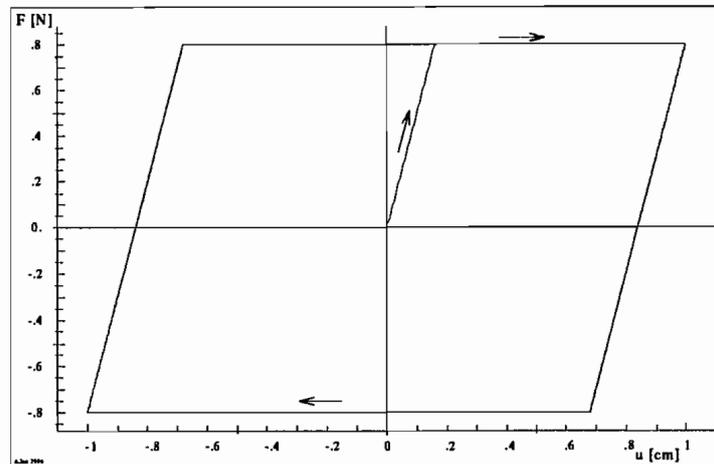


Abbildung 3.15: Prandtl-Modell bzw. elastisch-ideal-plastischer Werkstoff, Hysterese

Die Argumente der Signum-Funktionen bestimmen, ob Haften oder Gleiten vorliegt. Für $u = \text{const}$ bleibt die bestehende Kraft F_p erhalten, abhängig vom aktuellen Verformungszustand, aber nicht von der Zeit. Das perfekte Gedächtnis löscht sich nicht selbständig. Die Hysterese in Bild 3.15 zeigt die über der Verschiebung aufgetragene Reaktionskraft, deren Ecken deutlich das Vorliegen von trockener Reibung anzeigen. In Analogie zu Werkstoffgesetzen kann das Prandtl-Modell als eine Modellierung eines elastisch-ideal-plastischen Werkstoffes angesehen werden, Bild 3.15. Die Pfeile geben die Umlaufrichtung innerhalb der Hysterese an, im 1. Quadranten kann man die gewohnte Spannungs-Dehnungs-Beziehung des elastisch-ideal-plastischen Werkstoffes wiedererkennen.

Wegerregung, monofrequent

Der Betrag der FFT der stationären monofrequent wegerregten Schwingung zeigt hier, daß das System nicht mehr monofrequent antwortet, also nichtlinear ist, Bild 3.16. Das wird auch plausibel, wenn man sich die Hysterese ansieht, deren Form nicht von einer einzigen harmonischen Funktion, die nur Betrag und Phase als Parameter hat, wiedergegeben werden kann, denn die Hysterese ist als parametrische Darstellung des Zeitverlaufs von Kraft und Weg anzusehen.

Wegerregung, Sweep

Ein Prandtl-Modell, das mit einer Wegerregung konstanter Amplitude im Sweep angeregt wird, zeigt das deutlich frequenzunabhängige Verhalten des reinen Reibschwingers, wenn auch stark aufgeraut wegen der Schaltfunktion: Bild 3.17.

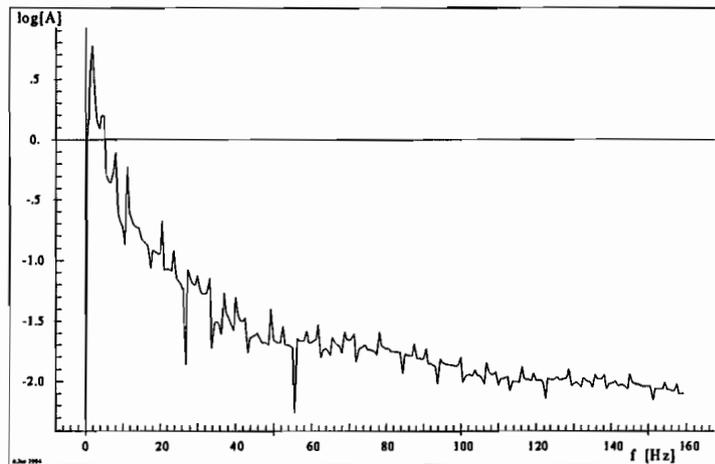


Abbildung 3.16: Betrag der FFT bei harmonischer Schwingung

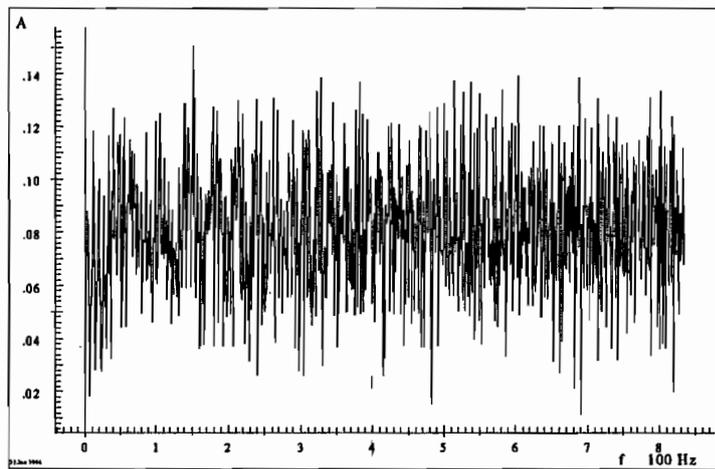


Abbildung 3.17: Prandtl-Modell, konstante Wegerregung mit Sweep

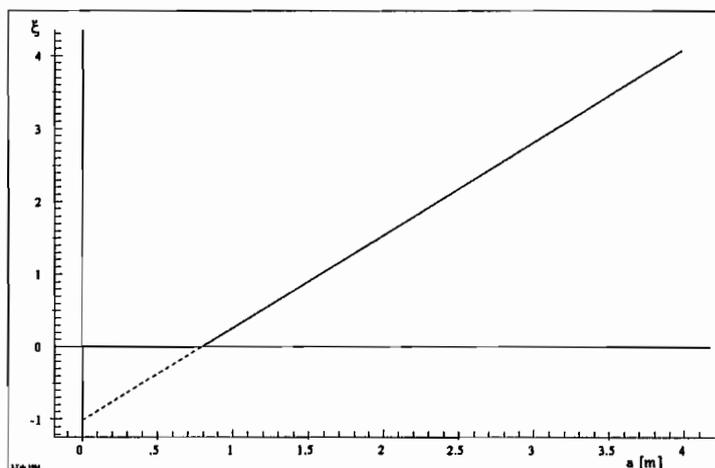


Abbildung 3.18: Prandtl-Modell, Dämpfungsvermögen

Das Dämpfungsvermögen des Prandtl-Modells, berechnet nach Gl. 3.12, erfordert die Berechnung von W_D und U , W_D kann direkt aus der Fläche der Hysterese abgelesen werden:

$$W_D = 4H\left(\hat{u} - \frac{H}{c}\right) \quad (3.42)$$

Die potentielle Energie U ergibt sich aus der maximalen elastischen Auslenkung:

$$U = \frac{H^2}{2c} \quad (3.43)$$

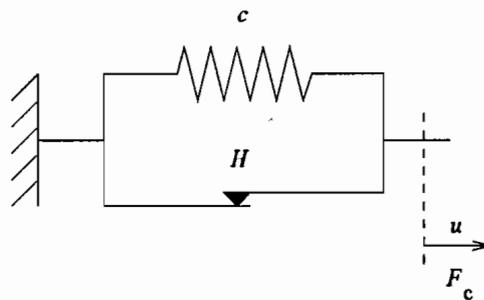
Damit kann das Dämpfungsvermögen formuliert und dargestellt werden (Bild 3.18):

$$\xi_{Prandtl} = \frac{4}{\pi H}(c\hat{u} - H) \quad (3.44)$$

Die Anteile unter $\xi = 0$ sind rein rechnerisch entstanden, da bis zum Erreichen der Haftkraft H keine Dissipation stattfindet, gültig ist damit nur der Teil des Diagramms mit $\xi > 0$, was $\hat{u} > \frac{H}{c}$ entspricht.

3.2.4 Coulomb-Modell

Ein weiteres einfaches Modell für perfektes Gedächtnis ist das Coulomb-Modell, bei dem eine lineare masselose Feder und ein masseloses Coulomb-Reibelement parallel geschaltet sind. Dabei sind F_r die vom Coulomb-Reibelement übertragene Kraft und H die Haftkraft des Coulomb-Reibelementes.



Es gilt für das haftende Coulomb-Reibelement (also ohne die parallelgeschaltete Feder)

$$\dot{F}_r = \dot{F} \quad (3.45)$$

in einem der 3 folgenden Fälle:

- $|F_r| < H$ oder
- $F_r = +H$ und $\dot{F} \leq 0$ oder
- $F_r = -H$ und $\dot{F} < 0$.

Ansonsten gilt

$$\dot{F}_r = 0 \quad (3.46)$$

für Gleiten mit folgenden zum Haften komplementären Bedingungen:

- $F_r = +H$ und $\dot{F} \geq 0$ oder
- $F_r = -H$ und $\dot{F} \leq 0$.

Zusammengefaßt zu einer Gleichung erhält man folgende Formel für das Coulomb-Reibelement:

$$\dot{F}_r = \frac{1}{2} \dot{F} [1 - \operatorname{sgn}(F_r^2 - H^2) - \operatorname{sgn}(\dot{F} F_r) (1 + \operatorname{sgn}(F_r^2 - H^2))] \quad (3.47)$$

Somit lautet die Gesamtkraft des Coulomb-Modells:

$$F_c = cu + F_r \quad (3.48)$$

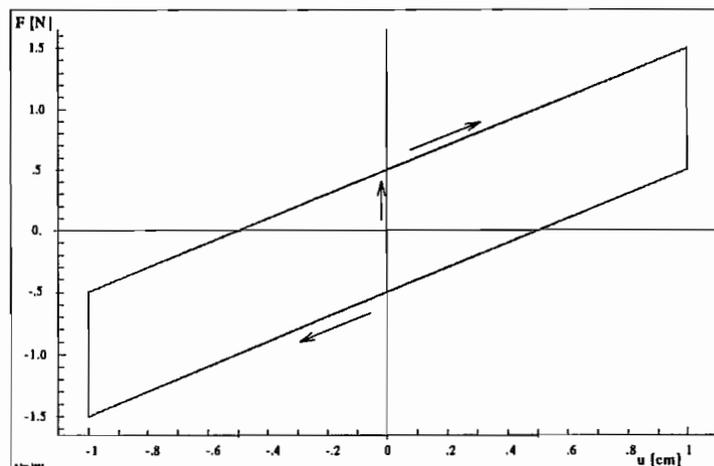


Abbildung 3.19: Coulomb-Modell oder starr-plastisch-verfestigender Werkstoff, Hysterese

Erneut kann eine Analogie zu Modellen aus der Plastizitätslehre angegeben werden, das Coulomb-Modell bildet einen starr-plastisch-verfestigenden Werkstoff ab. Die Hysterese der Systemantwort auf eine stationäre Erregung gibt dieses Verhalten im 1. Quadranten so wieder, wie man das vom Spannungs-Dehnungs-Diagramm für starr-plastisch-verfestigende Werkstoffe erwartet, Bild 3.19.

Die FFT derselben Systemantwort zeigt ein ausgeprägt nichtlineares Verhalten durch das diskret-breitbandige Antwortspektrum des Coulomb-Modells, erklärbar wiederum wie auch schon beim Prandtl-Modell durch die Form der Hysterese, Bild 3.20, die nicht mehr mit einer einzigen Frequenz generierbar ist.

Zu den bei Modellen mit Coulomb-Reibelementen auftretenden Signum-Funktionen läßt sich sagen, daß diese sich nur schlecht numerisch bearbeiten lassen, da sie als unstetige

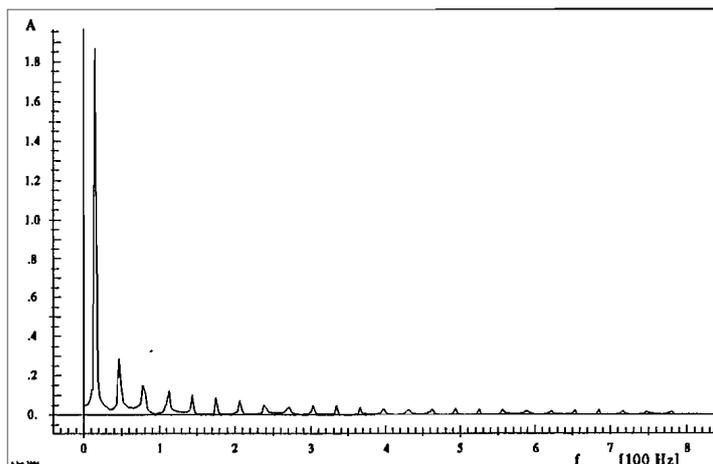


Abbildung 3.20: Starr-plastisch-verfestigender Werkstoff, Betrag der FFT bei harmonischer Erregungsfunktion

Funktionen die Simulation erschweren. Im Digitalrechner behilft man sich vielfach mit Schaltfunktionen oder approximiert die Signumfunktionen sogar durch Polynome mehr oder weniger hoher Ordnung [39, 40], wodurch der Verlauf der Funktionen geglättet wird.

Wegerregung, Sweep

Dieses problematische Verhalten zeigt sich wieder wie beim Prandtl-Modell am Betrag der FFT eines mit einer konstanten Wegerregung im Sweep erregten Coulomb-Modells: Bild 3.21.

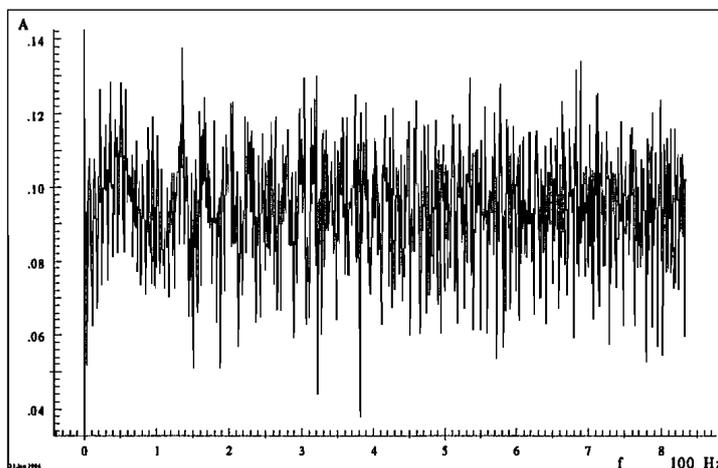


Abbildung 3.21: Coulomb-Modell, Wegerregung mit Sweep, $\hat{u} = \text{const.}$

Das Verhalten ist zwar offensichtlich frequenzunabhängig, aber doch sehr stark aufgeraut. Es können nun die maximale potentielle Energie U und die Dissipationsenergie pro Periode W_D , die gleich der Fläche der Hysterese ist, aus der Hysterese abgelesen und berechnet werden.

$$W_D = 4\hat{u}H \quad (3.49)$$

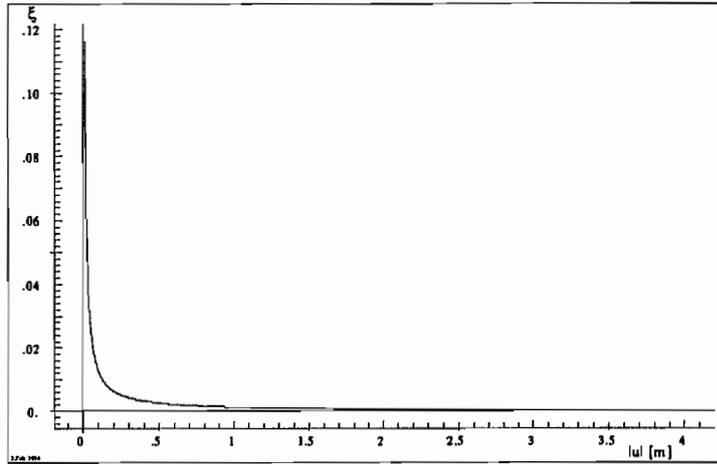


Abbildung 3.22: Coulomb-Modell, Dämpfungsvermögen

$$U = \frac{1}{2} c \hat{u}^2 \tag{3.50}$$

Damit ist ξ nach Formel 3.12 bestimmbar und darstellbar (Bild 3.22):

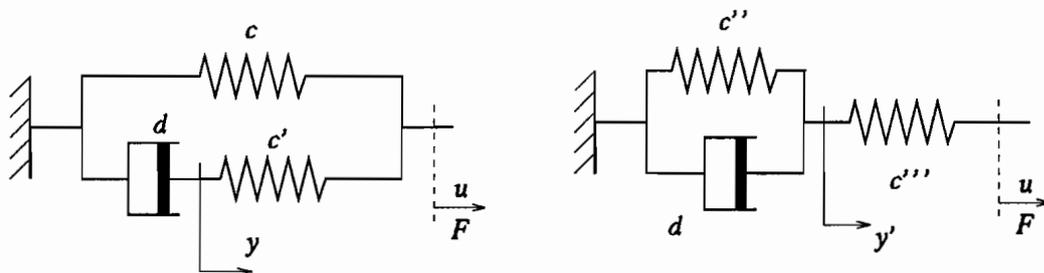
$$\xi = \frac{4H}{\pi c \hat{u}} \tag{3.51}$$

3.3 3- und 4-parametrische Dämpfungsmodelle

Mit 3-parametrischen Dämpfungsmodellen lassen sich einige weitere Arten des Werkstoffverhaltens darstellen, als erstes Beispiel sei hier das Modell von Poynting angeführt:

3.3.1 Poynting-Thomson-Modell, 'standard linear solid'

Dieses Modell besteht aus einer Parallelschaltung eines Maxwell-Modells mit einer masselosen linearen Feder, im Bild links. Es wird im folgenden nur noch als Poynting-Modell angesprochen.



Mit Hilfe des Poynting-Modells lassen sich realistischere Werkstoffeigenschaften als zum Beispiel mit dem Kelvin-Voigt-Modell darstellen. Es kann viskoelastische Werkstoffe mit schwindendem Gedächtnis modellieren. In anderer Form ist dieses Modell auch als 'standard linear solid' bekannt [38, 46](im Bild rechts); wobei die Parameter der beiden Modelle ineinander überführt werden können. Wie der Name 'standard linear solid' schon

sagt, ist dieses Modell linear, d.h. es kann noch mit allgemeinen Lösungen gearbeitet werden. Im folgenden wird auf das Modell nur unter dem Namen „Poynting-Modell“ Bezug genommen.

Wegerregung, monofrequent

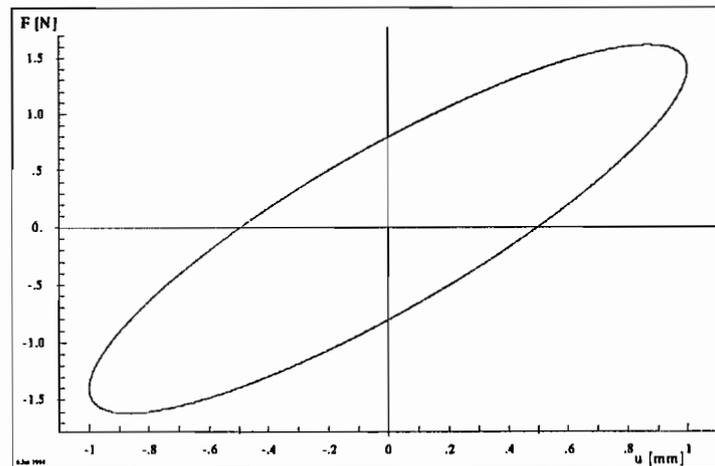


Abbildung 3.23: Poynting-Modell oder “standard linear solid“, Hysterese

Die Antwort des Poynting-Modells auf eine stationär harmonische Krafterregung ist in Bild 3.23 als Hysterese dargestellt, es handelt sich um eine einfache Ellipse wie beim linear-viskosen Kelvin-Modell, die im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

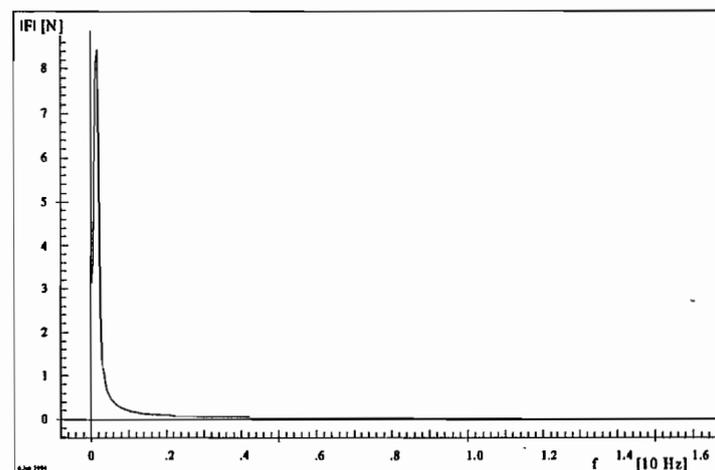


Abbildung 3.24: Poynting-Modell oder “standard linear solid“, Betrag der FFT bei harmonisch monofrequenter Erregungsfunktion

Das Amplitudendiagramm aus der FFT der monofrequenten Erregung mit konstanter Amplitude zeigt, wie zu erwarten, eine einfache monofrequente Systemantwort mit der Frequenz der Erregung, Bild 3.24, wie sie für lineare Systeme typisch ist.

Für die Berechnung der allgemeinen Lösung soll das Modell mit einer äußeren Kraft $F(t)$ belastet werden, die folgendermaßen definiert ist:

$$F(t) = \hat{F} \sin \omega t \quad (3.52)$$

Aus dem Kräftegleichgewicht ergibt sich unter der Bedingung $c = c'$:

$$2cu - cy = \hat{F} \sin \omega t \quad (3.53)$$

$$dy + cy = cu \quad (3.54)$$

Mit Hilfe der aus den beiden Gleichungen resultierenden einen Differentialgleichung

$$2dy + cy = \hat{F} \sin \omega t \quad (3.55)$$

läßt sich die innere Variable $y(t)$ wie für Gleichung 3.30 bestimmen:

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{c}{2a}t} + \frac{\hat{F}}{c^2 + 4\omega^2 d^2} (c \sin \omega t - 2\omega d \cos \omega t) \quad (3.56)$$

Daraus kann mit Gl. 3.53 $u(t)$ berechnet werden:

$$u(t) = \frac{1}{2c} \hat{F} \sin \omega t + \frac{1}{2} \left(c_1 e^{-\frac{c}{2a}t} + \frac{\hat{F}}{c^2 + 4\omega^2 d^2} (c \sin \omega t - 2\omega d \cos \omega t) \right) \quad (3.57)$$

Wird der Einschwingvorgang vernachlässigt, so ergibt sich daraus folgende Gleichung für die Amplitude der resultierenden Schwingung:

$$|u(t)| = \hat{F} \sqrt{\left(\frac{1}{2c} + \frac{c}{2(c^2 + 4\omega^2 d^2)} \right)^2 + \left(\frac{\omega d}{c^2 + 4\omega^2 d^2} \right)^2} \quad (3.58)$$

Diese Funktion über der Frequenz aufgetragen, ergibt Bild 3.25.

Der Grenzwert für ω gegen Null ist dabei \hat{F}/c , da der Strang mit der viskosen Dämpfung dann keine Steifigkeit besitzt, für ω gegen Unendlich ist der Grenzwert $\hat{F}/(2c)$, da der viskose Dämpfer unendlich steif wird und es sich nur noch um eine reine Parallelschaltung der beiden Federn des Poynting-Modells handelt.

Wegerregung, Sweep

Die allgemeine Lösung für harmonische Wegerregung läßt sich unter Zuhilfenahme von Gl. 3.31 und 3.32 berechnen, wenn die parallele lineare Feder als Federkraft

$$-cu(t) = -\hat{c}u \sin \omega t$$

in der Kraft $F_p(t)$ berücksichtigt wird. Dabei spielt es keine Rolle, daß die Anordnung des viskosen Dämpfers und der Feder im Maxwell-Modell umgekehrt ist, da hier keine innere Variable $y(t)$ mehr betrachtet werden muß.

$$F_p(t) = -\frac{\hat{u}\omega d}{c^2 + \omega^2 d^2} (\omega d \sin \omega t + c \cos \omega t) - \hat{c}u \sin \omega t \quad (3.59)$$

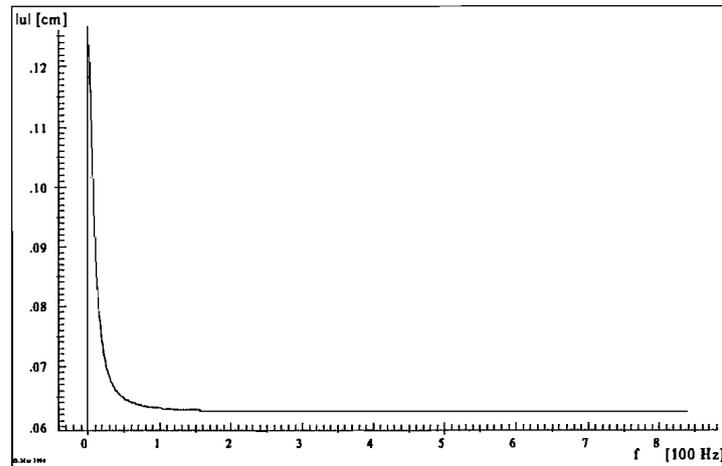


Abbildung 3.25: Poynting-Modell, Kräfteerregung, Amplitude $|u(t)|$ bei $\hat{F} = const.$

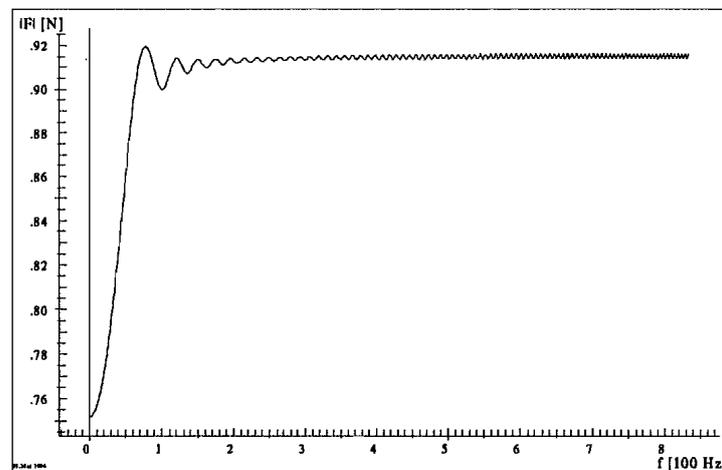
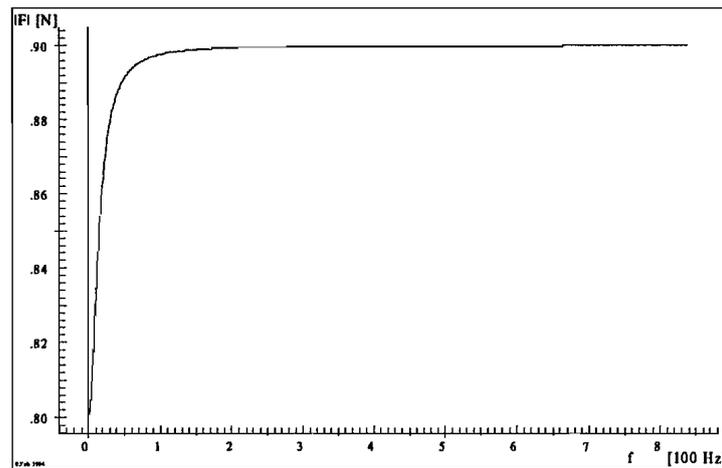


Abbildung 3.26: Poynting-Modell, konstante Wegerregung mit Sweep, $\hat{u} = const.$

Daraus ist wiederum die Amplitude der wegerregten Schwingung zu berechnen:

$$|F_p(t)| = \frac{\hat{u}\omega d}{c^2 + \omega^2 d^2} \sqrt{(\omega d + \frac{c\hat{u}(c^2 + \omega^2 d^2)}{\hat{u}\omega d})^2 + c^2} \quad (3.60)$$

Bei konstanter Amplitude über der Frequenz aufgetragen, ergibt das den Verlauf von Bild 3.26 oben. Die Simulation, in Bild 3.26 unten gezeigt, ergibt ungefähr das gleiche Bild, nur durch die Transformationsfehler der FFT verfälscht. Der Verlauf ist in beiden Fällen relativ glatt, weil viskose Dämpfung vorhanden ist. Wie schon beim Maxwell-Modell ist durch die bandbegrenzte Simulation auch hier die Steilheit bei kleinem ω nicht optimal.

Dieses Bild ist sehr ähnlich zu dem des Maxwell-Modells (Bild 3.11), denn die beiden Modelle sind fast gleich aufgebaut, nur ist hier die (Kraft-) Amplitude natürlich größer wegen der parallelgeschalteten linearen Feder bei sonst gleichen Parametern für den Maxwell-Anteil.

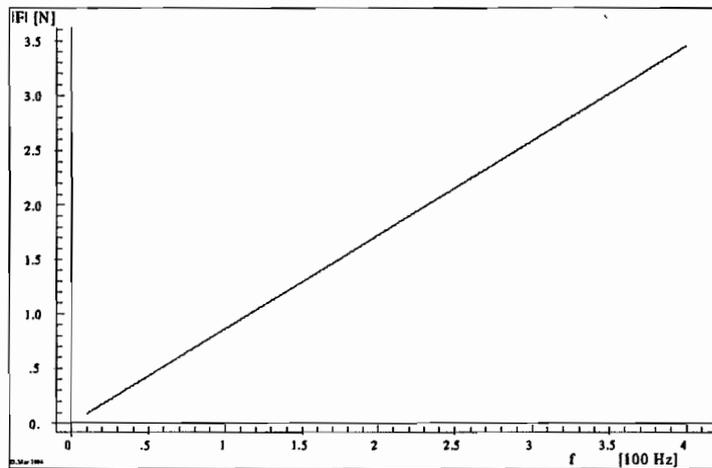


Abbildung 3.27: Poynting-Modell, Wegerregung, $\omega = const.$

Bei konstanter Frequenz über der Amplitude aufgetragen, erhält man Bild 3.27, das Modell antwortet linear auf die Erregung.

Für das Poynting-Modell können wiederum die maximale potentielle Energie U und die Dissipationsenergie W_D im Zyklus bestimmt werden:

$$U = U_{Maxwell} + \frac{1}{2}c\hat{u}^2 \quad (3.61)$$

$$W_D = W_{D,Maxwell} \quad (3.62)$$

Damit ergibt sich das Dämpfungsvermögen des Poynting-Modells nach den Gl. 3.12, 3.33 und 3.34:

$$\xi = \frac{c\omega d}{2c^2 + \omega^2 d^2} \quad (3.63)$$

Das Bild 3.28 zeigt diese Funktion über der Frequenz aufgetragen.

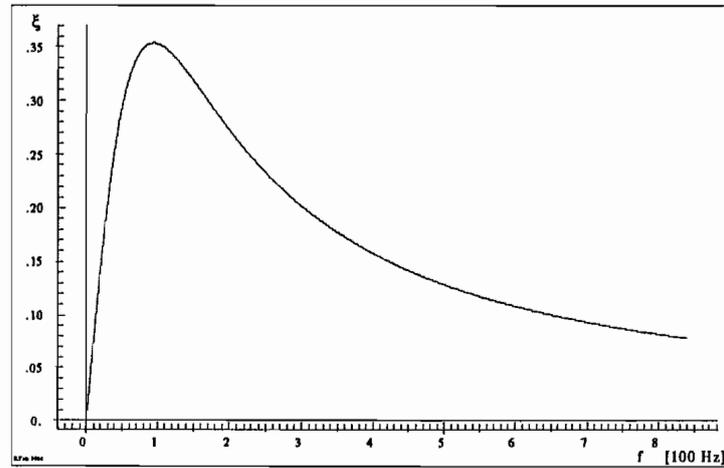


Abbildung 3.28: Poynting-Modell oder "standard linear solid", Dämpfungsvermögen

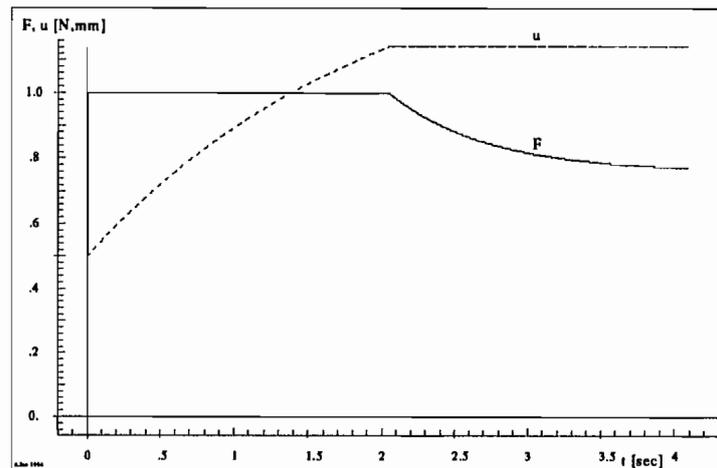


Abbildung 3.29: Poynting-Modell oder "standard linear solid", Kraftsprungantwort

Kraftsprung

Die Antwort des Poynting-Modells auf einen Kraftsprung zum Zeitpunkt $t=0$ sec mit einer Relaxation zum Zeitpunkt $t=1$ sec, mit Hilfe der Laplace-Transformation berechnet, lautet ($c = c'$):

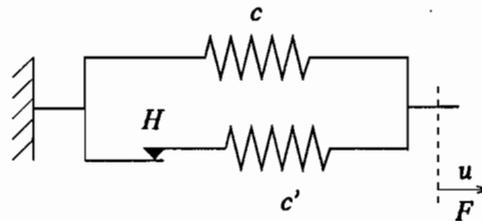
$$u(t) = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{ct}{2d}} + \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{c(t-1)}{2d}} - 1 \right) g(t-1) \right), \quad (3.64)$$

mit der Einheitssprungfunktion $g(t)$.

Diese Funktion $u(t)$ ist in Bild 3.29 dargestellt. Man erkennt die Spontanverschiebung und die in der Relaxationsphase auf einen Wert asymptotisch zustrebende Kraft, der der rein elastischen Größe $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = c u(t \geq 2)$ entspricht. Sowohl in Bezug auf die Spontanverschiebung als auch auf die Relaxationsphase nach der Entspannung können durch das Verhalten dieses Modells reale Werkstoffe sehr gut abgebildet werden.

3.3.2 Drei-Parameter-Modell mit Reibung

Ein anderes Modell mit 3 Parametern ergibt sich, wenn der viskose Dämpfer aus dem Poynting-Modell durch ein Coulomb'sches Reibelement ersetzt wird.



Die von diesem Modell wiedergegebene Werkstoffcharakteristik ist die eines elastisch-plastisch-verfestigenden Werkstoffs, das Gedächtnis des Modells ist nichtschwindend, da die Abhängigkeit der Elementkraft von vorherigen Verschiebungszuständen nicht mit der Zeit abnimmt.

Wegerregung, monofrequent

Die Hysterese des drei-parametrischen Dämpfungsmodells mit Reibung unter einer harmonischen Wegerregung $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \phi)$ ist eine Addition der Hysterese des Prandtl-Modells mit einer linearen Federkennlinie, Bild 3.30. Im ersten Quadranten erkennt man die Form der Dehnungs-Verschiebungs-Kurve des elastisch-plastisch-verfestigenden Werkstoffes mit elastischem und plastisch-verfestigendem Bereich wieder.

Aus der FFT der monofrequent harmonisch angeregten Schwingung, als Betrag der FFT dargestellt, kann nun anhand des Antwortspektrums erkannt werden, daß das System auf eine monofrequent-stationäre Erregung breitbandig antwortet, also nichtlinear ist, Bild 3.31.

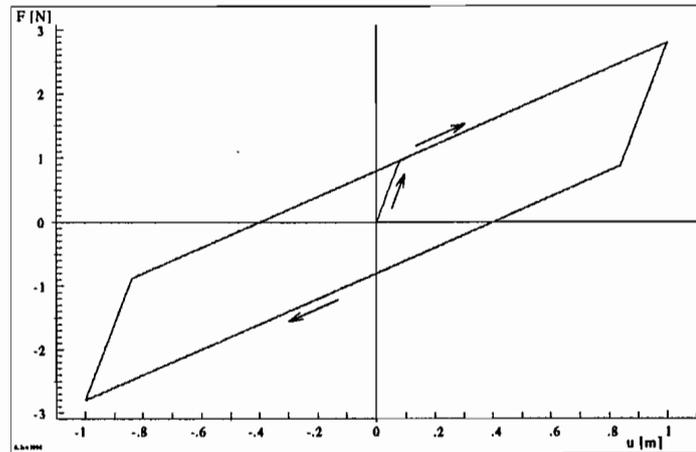


Abbildung 3.30: Elastisch-plastisch-verfestigendes Materialverhalten bzw. 3-Parameter-Modell mit Reibung: Hysterese

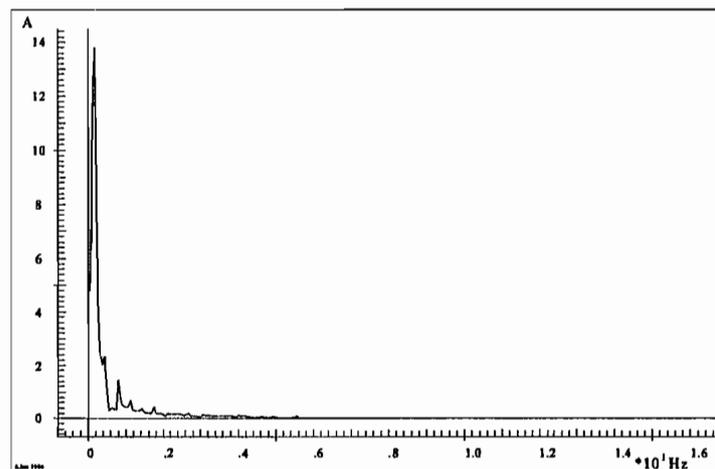


Abbildung 3.31: Elastisch-plastisch-verfestigendes Materialverhalten, Betrag der FFT bei harmonischer Schwingung

Wegerregung, Sweep

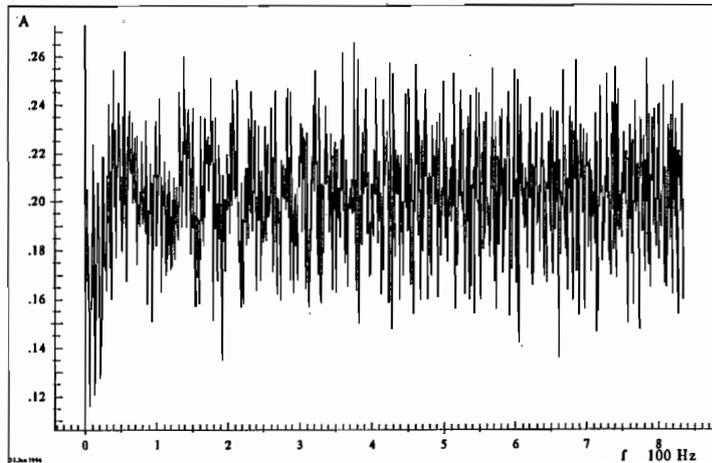


Abbildung 3.32: Drei-Parameter-Modell, konstante Wegerregung mit Sweep

Wird das Drei-Parameter-Modell mit einem Sweep bei konstanter Amplitude erregt, zeigt sich im Betrag der FFT der Kraft die Frequenzunabhängigkeit des Modells, stark aufgerauht von den Schaltfunktionen, Bild 3.32.

Die Berechnung der potentiellen Energie U und der Dissipationsenergie W_D kann in Anlehnung an das Prandtl-Modell erfolgen. Es muß nur, wie beim Poynting-Modell, die lineare Feder beachtet werden, die zusätzlich parallelgeschaltet ist.

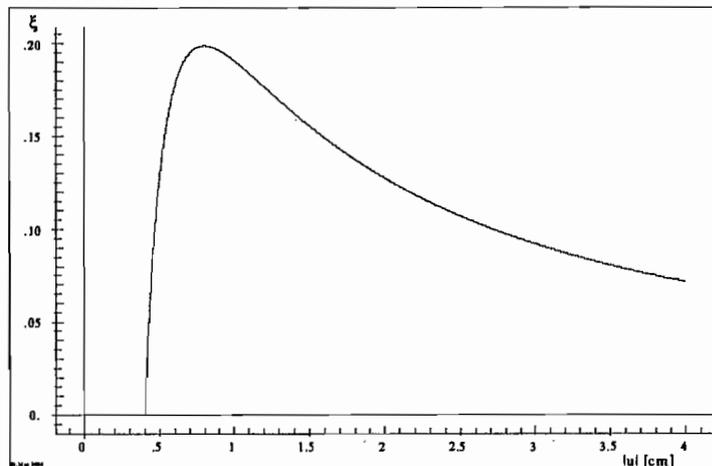


Abbildung 3.33: Drei-Parameter-Modell, Dämpfungsvermögen

$$U = U_{Prandtl} + \frac{1}{2}c\hat{u}^2 \quad (3.65)$$

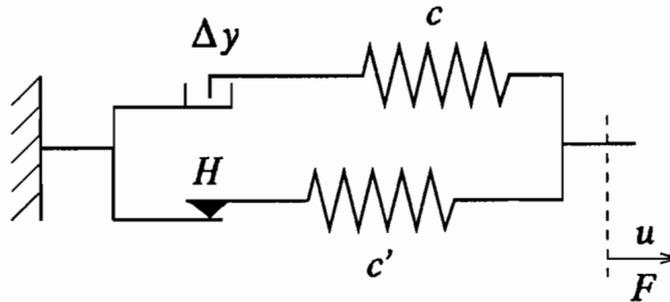
$$W_D = W_{D,Prandtl} \quad (3.66)$$

Damit läßt sich nach Gl. 3.12 das Dämpfungsvermögen des Drei-Parameter-Modells berechnen, das wegen der zusätzlichen Feder prinzipiell anders aussieht, Bild 3.33.

$$\xi_{3par} = \frac{4H(\hat{u} - \frac{H}{c})}{\pi(\frac{H}{c^2} + c\hat{u}^2)} \quad \text{für } \hat{u} > \frac{H}{c}, \quad \xi_{3par} = 0 \quad \text{sonst} \quad (3.67)$$

3.3.3 Vier-Parameter-Modell

Zur Demonstration der Möglichkeiten der phänomenologischen Modellierung kann zusätzlich eine Lose als vierter Parameter eingeführt werden:



Die Lose habe ein Spiel von $\pm\Delta y$.

Wegerregung, monofrequent

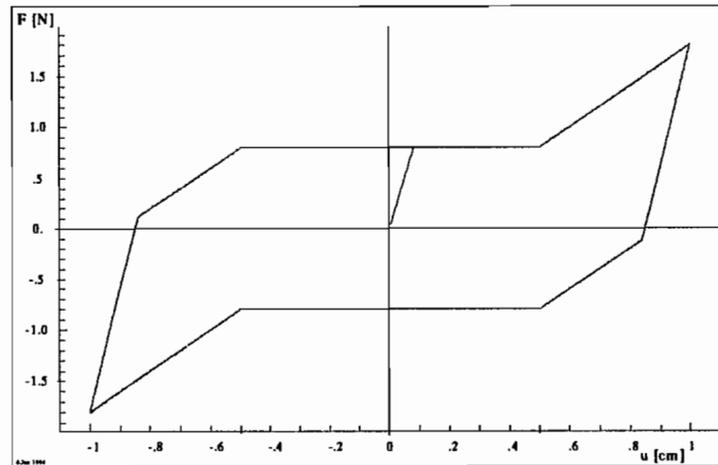


Abbildung 3.34: Elastisch-plastisch-verfestigendes Materialverhalten mit Lose, Hysterese

Mit einer harmonischen Erregung konstanter Frequenz läßt sich ein elastisch-plastisch-verfestigendes Materialverhalten modellieren, bei dem nach Erreichen der Dehngrenze vor Beginn der Verfestigung eine ideal-plastische Verformung auftritt. In Bild 3.34 wird das an der Hysterese deutlich, die auf eine stationär-harmonische Erregung folgt. Dieses Verhalten wird erreicht, indem der Strang mit der Lose bis zum Erreichen des Anschlages das System zu einem reinen Prandtl-Modell macht, was in der Hysterese im Mittelteil gut zu sehen ist. Erst darüber verhält sich das System dann wie das im vorherigen Abschnitt vorgestellte Drei-parametriges Dämpfungsmodell, erkennbar an den Außenseiten der Hysterese.

Wird die stationär-harmonische Antwort des Modells als Betrag der FFT über der Frequenz dargestellt, so ergibt sich eine breitbandige Systemantwort, wie bei einem nichtlinearen System zu erwarten, da wiederum die Hysterese nicht mit einer einzigen Frequenz parametrisch erzeugt werden kann, Bild 3.35.

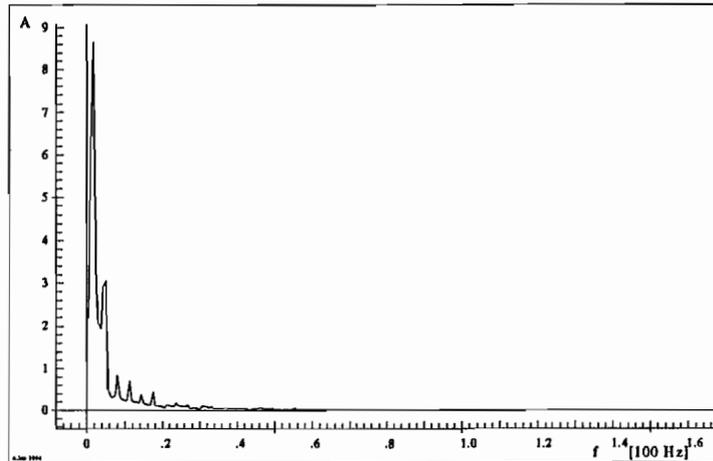


Abbildung 3.35: Elastisch-plastisch-verfestigendes Materialverhalten mit Lose, Betrag der FFT bei harmonischer Schwingung

Wegerregung, Sweep

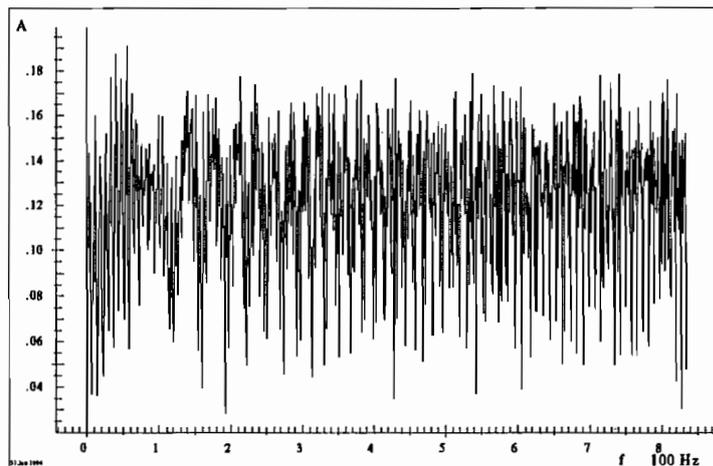


Abbildung 3.36: Vier-Parameter-Modell, konstante Wegerregung mit Sweep

Dieses Modell, mit einem Sweep konstanter Amplitude wegerregt, ist wiederum in seinem Betrag der FFT frequenzunabhängig und zugleich stark aufgeraut, Bild 3.36.

Das Dämpfungsvermögen ξ dieses Modells kann leicht aus dem des Drei-Parameter-Modells abgeleitet werden, indem bei der potentiellen Energie der Term \hat{u} durch $\hat{u} - \Delta y$ ersetzt wird:

$$\xi = 0 \quad \text{für} \quad \hat{u} \leq \frac{H}{c} \quad (3.68)$$

$$\xi = \frac{4H(\hat{u} - \frac{H}{c})}{\pi \frac{H}{c^2}} \quad \text{für} \quad \hat{u} > \frac{H}{c} \quad \text{und} \quad \hat{u} \leq \Delta y \quad (3.69)$$

$$\xi = \frac{4H(\hat{u} - \frac{H}{c})}{\pi(\frac{H}{c^2} + c(\hat{u} - \Delta y)^2)} \quad \text{sonst} \quad (3.70)$$

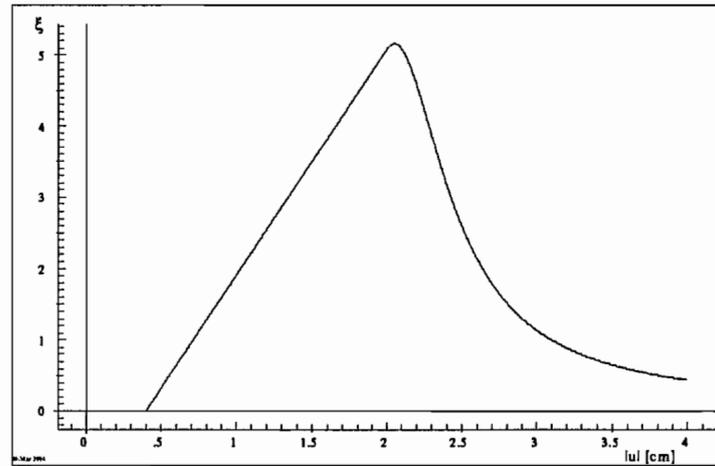
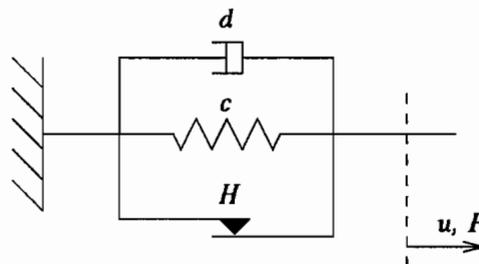


Abbildung 3.37: Elastisch-plastisch-verfestigendes Materialverhalten mit Lose, Dämpfungsvermögen

Es ergibt sich eine Darstellung wie beim Prandtl-Modell bis $\hat{u} = \Delta y$, darüber ein Verhalten wie beim 3-Parameter-Modell.

3.3.4 Dieterle-Modell

Ein praktisches Beispiel für die gezielte Modellierung eines gegebenen Werkstoff- oder Bauteilverhaltens ist das Modell von Dieterle [17], das eine Addition von Coulomb- und Kelvin-Modell darstellt.



Bei der Aufgabe, das Werkstoffverhalten von Stahlbeton zu modellieren, gelangte Dieterle zu der Parallelschaltung einer Feder, die die Systemsteifigkeit repräsentiert, mit einem viskosen Dämpfer und einem Reibelement, so daß sowohl die Frequenzabhängigkeit der Dämpfung des Stahlbetons als auch die Amplitudenabhängigkeit derselben gut wiedergegeben werden können.

Wegerregung, monofrequent

Die Hysterese eines solchen Systems bei einer harmonischen Wegerregung ist in Bild 3.38 beispielhaft dargestellt, mit den Parametern verändert sie sich nicht nur in der Größe, sondern auch in der Form, wie es bei viskoelastischem Verhalten typisch ist. Die Form der Hysterese ergibt sich durch die 2 Hälften der Ellipse eines einfachen linear-viskos gedämpften Einmassenschwingers, die an ihrer vertikalen Tangente um den Betrag $2H$ auseinandergezogen sind, da das Reibelement bei Richtungsumkehr der Verformung nur

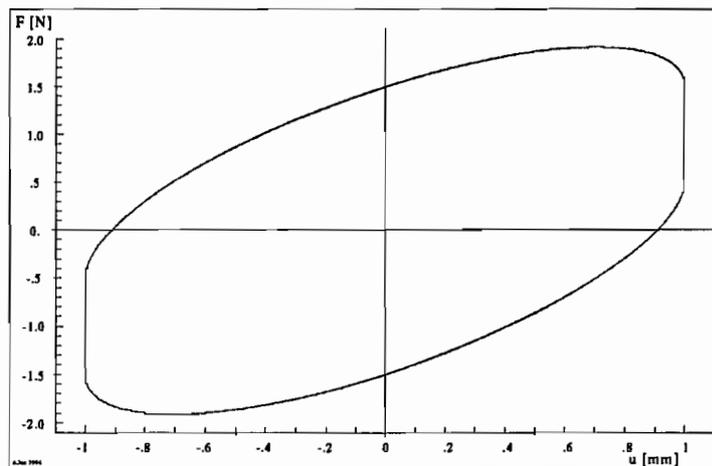


Abbildung 3.38: Modell von Dieterle, Hysterese

das Vorzeichen der Kraft, nicht aber den Betrag wechselt, ein Verhalten, das natürlich nicht ganz den Verhältnissen in der Realität entspricht.

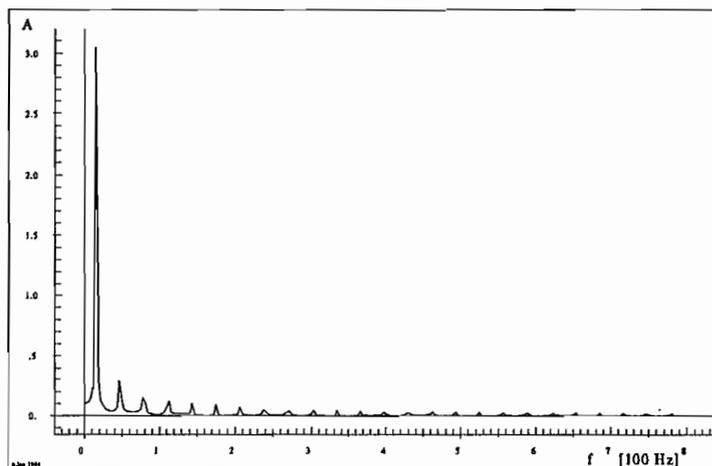


Abbildung 3.39: Modell von Dieterle, Betrag der FFT bei harmonischer Schwingung

Der Betrag der FFT des Dieterle-Modells in Bild 3.39 ist wieder der eines nichtlinearen Systems wegen der breitbandigen Antwort, erklärlich wiederum mit der Form der Hysterese, die monofrequent nicht parametrisch dargestellt werden kann.

Wegerregung, Sweep

Der Betrag der FFT bei Sweep mit Wegerregung zeigt bei höheren Frequenzen im wesentlichen das gleiche wie das Kelvin-Voigt-Modell (Bild 3.5), da das Reibelement hier nur einen etwas aufrauhenden Einfluß hat, Bild 3.40.

Werden die maximale potentielle Energie und die Dissipationsenergie im Schwingungszyklus bei steigender Erregungsfrequenz und konstanter Amplitude berechnet, so kann nach Formel 3.12 das Dämpfungsvermögen über der Frequenz berechnet werden, Bild 3.41. Die potentielle Energie ist dabei die der linearen Feder $\frac{1}{2}c\hat{u}^2$, die Dissipationsenergie

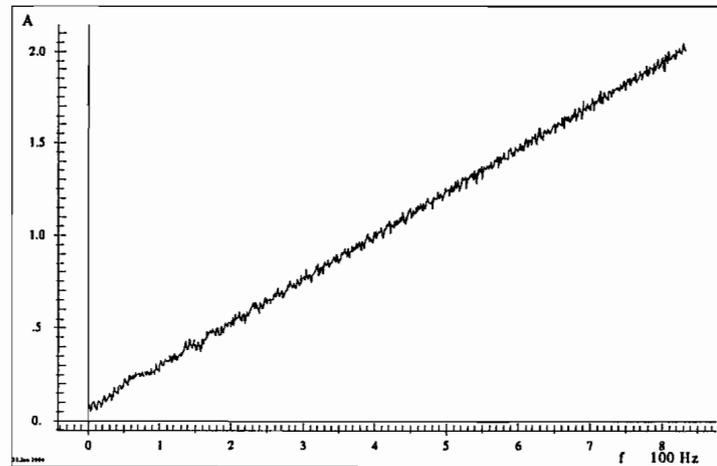


Abbildung 3.40: Modell von Dieterle, Betrag der FFT bei Sweep

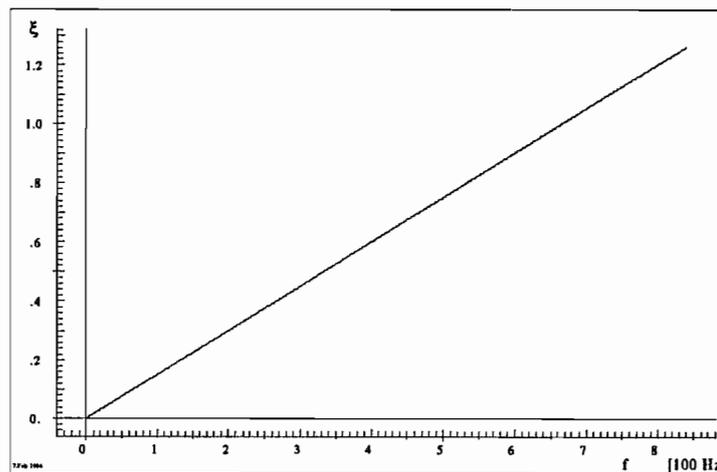


Abbildung 3.41: Modell von Dieterle, Dämpfungsvermögen, $a = \text{const.}$

des Dieterle-Modells ist die Summe der entsprechenden Energien des Coulomb- und des Kelvin-Voigt-Modells. Durch die steigende Frequenz ist der Einfluß des viskosen Dämpfers dominant, die Abhängigkeit ist die gleiche wie die beim Kelvin-Voigt-Modell, Bild 3.7.

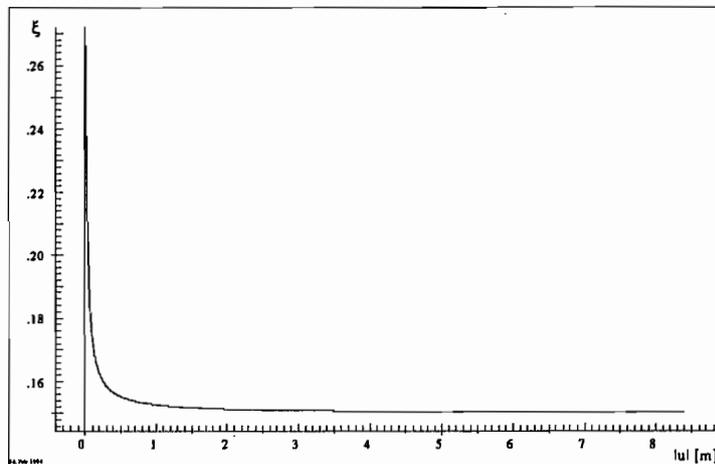


Abbildung 3.42: Modell von Dieterle, Dämpfungsvermögen, $\omega = \text{const.}$

Bei konstanter Frequenz über der Amplitude aufgetragen, Bild 3.42, ergibt sich ein anderes Bild, da nun der Anteil des viskosen Dämpfers nicht mehr dominiert, sondern das Reibelement dafür sorgt, daß bei kleinen Amplituden das Dämpfungsvermögen gegen ∞ strebt, die Schwingung also steckenbleibt wie in der Realität auch. Bei großen Amplituden wird der viskose Dämpfer dominant, das Dämpfungsvermögen strebt dem Grenzwert $\frac{d\omega}{c}$ zu.

3.4 n-parametrische Dämpfungsmodelle

Diese Modelle bestehen im wesentlichen aus phänomenologisch begründeten Kombinationen der ein- und zweiparametrischen Dämpfungsmodelle, mit denen bestimmte Stoffgesetze approximiert werden sollen.

3.4.1 Biot-Modell

Ein einfach aufgebautes Modell für linear-viskoelastisches Materialverhalten liefert das Biot-Modell, (Bild 3.43), bei dem eine lineare masselose Feder und n Maxwell-Elemente parallel geschaltet sind. Die inneren Variablen y_i der Maxwell-Elemente sind eingeführt, um die Abhängigkeit der Kraft F von allen vorhergehenden Verformungen u wiederzuspiegeln. Diese Abhängigkeit klingt mit der Zeit exponentiell ab.

Die Gesamtkraft des Biot-Modells ist:

$$F_b = c_0 u + \sum_i d_i y_i \quad (3.71)$$

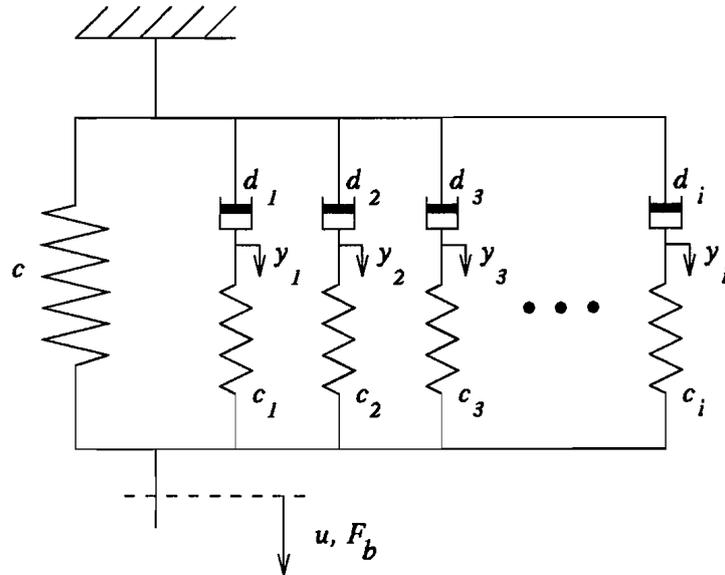


Abbildung 3.43: Biot-Modell

Die Differentialgleichung für den Einzelstrang i lautet:

$$d_i \dot{y}_i + c_i y_i = c_i u \quad (3.72)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$y_i(t) = \int_0^\infty u(t - \tau) e^{-\frac{c_i}{d_i} \tau} d\tau \quad (3.73)$$

Damit ergibt sich die Gesamtkraft des Modells für $y_i(t = -\infty) = 0$ als

$$F_b(t) = c_0 u + \int_0^\infty \sum_i d_i \dot{u}(t - \tau) e^{-\frac{c_i}{d_i} \tau} d\tau. \quad (3.74)$$

Die in dieser Lösung enthaltene Relaxations- oder Gedächtnisfunktion $d_i e^{-\frac{c_i}{d_i} \tau}$ klingt monoton mit der Zeit ab, da die c_i und d_i als physikalische Parameter nur positiv sein können. Damit handelt es sich beim Biot-Modell als Summe vieler Maxwell-Modelle um ein Modell mit nachlassendem Gedächtnis.

Harmonische Wegerregung

Wird das Faltungsintegral aus Gl. 3.73 mit der gesamten Gleichung laplacetransformiert, so geht die Faltung in eine einfache Multiplikation über:

$$Y_i(s) = \frac{1}{1 + \frac{d_i}{c_i} s} U(s) \quad (3.75)$$

Bei einer harmonischen Erregungsfunktion

$$u(t) = \hat{u} \sin \omega t \quad (3.76)$$

ist diese Gleichung lösbar mit folgendem Ergebnis:

$$y_i(t) = \frac{c_i \omega d_i \hat{u}}{c_i^2 + \omega^2 d_i^2} e^{-\frac{c_i}{d_i} t} + \frac{-c_i \omega d_i \hat{u} \cos(\omega t) + c_i^2 \hat{u} \sin(\omega t)}{c_i^2 + \omega^2 d_i^2} \quad (3.77)$$

Die einzelnen Summanden der Gleichung 3.74 wurden zur Berechnung mit einer Exponentialverteilung $\Phi_i(\alpha)$ bewertet.

$$\Phi_i(\alpha) = \alpha e^{-\alpha i}, \quad \text{mit} \quad \sum_i \Phi_i = 1, \quad i = 1, 1000 \quad (3.78)$$

Diese bewertete Summengleichung, über der Zeit aufgetragen, zeigt deutlich das verschwindende Gedächtnis des Biot-Modells, indem der Mittelwert der Schwingung mit der Zeit abklingt: Bild 3.44.

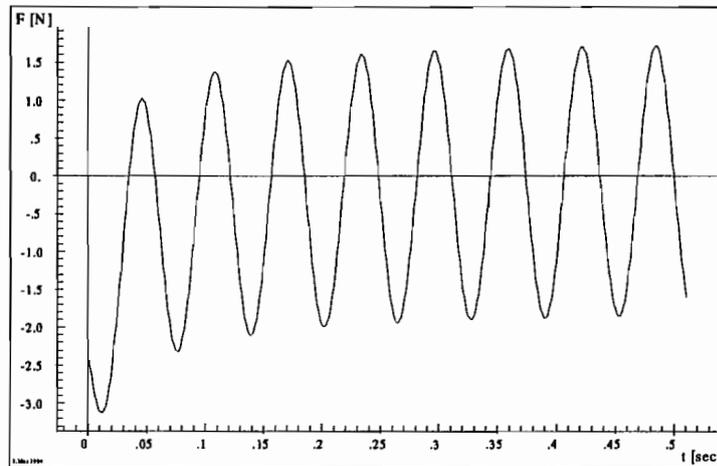


Abbildung 3.44: Biot-Modell: Konstante harmonische Wegerregung ab $t = 0$ sec

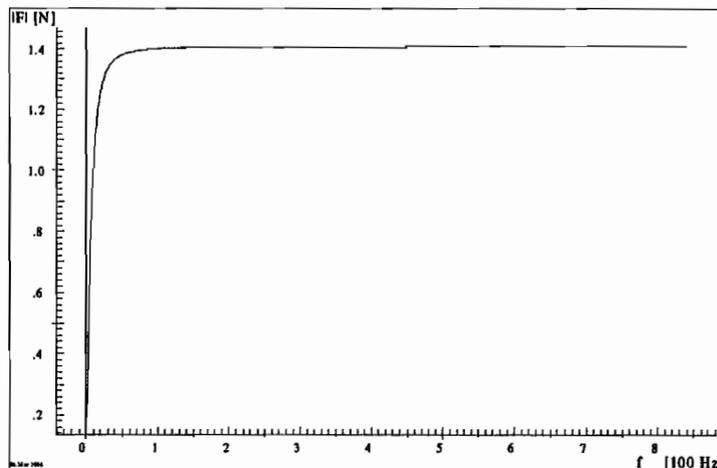


Abbildung 3.45: Biot-Modell: Harmonische Wegerregung, Sweep

Die Amplitude von Gl. 3.74, über der Frequenz aufgetragen, ergibt einen Grenzwert von Null für ω gleich Null und einen Grenzwert für hohe Frequenzen, der sich aus der reinen

Parallelschaltung der Federn ergibt, Bild 3.45 und Gl. 3.79.

$$|F(t)| = c_o \hat{u} + \sum_i |d_i \dot{y}_i(t)| = c_o \hat{u} + \sum_i \frac{c_i \omega d_i \hat{u}}{\sqrt{c_i^2 + \omega^2 d_i^2}} \quad (3.79)$$

Während sich mit der obigen Gl. 3.74 aus einer gegebenen Verschiebung mit Hilfe der Laplace-Transformation eine Kraft berechnen läßt, ist die Umkehrung der Gleichung nicht mehr sinnvoll, da dann die Summe in den Nenner kommt und keine Rücktransformation in den Zeitbereich mehr möglich ist. Insofern ist das Biot-Modell nur für die Berechnung von Kräften aus Verschiebungen geeignet, nicht für den umgekehrten Fall.

Als Hysterese aufgetragen ergibt sich für das Biot-Modell das einfache Bild des viskosen Dämpfers, abgesehen vom Einschwingvorgang, der vom verschwindenden Gedächtnis verursacht wird, Bild 3.46.

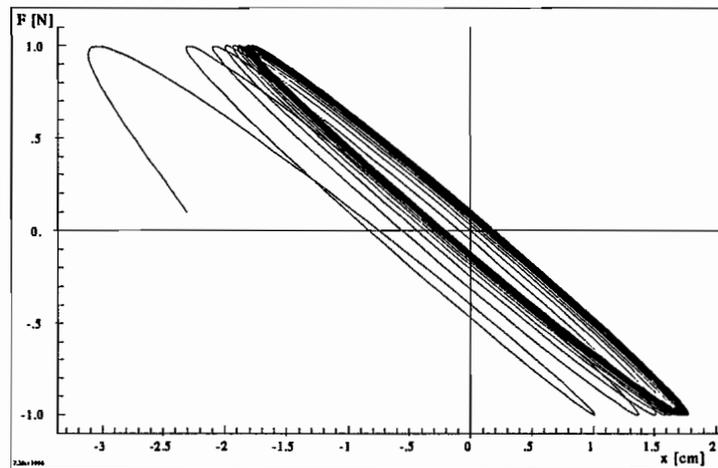


Abbildung 3.46: Biot-Modell: Harmonische Wegerregung, Hysterese

Rechteckerregung $u(t)$

Wird das Biot-Modell mit einer Rechteckverschiebung erregt, so lautet die Gleichung für den Kraftverlauf (mit der Einheitssprungfunktion $g(t)$):

$$F(t) = c(1 - g(t - 1)) + \sum_i c_i \left(\exp^{-\frac{c_i}{d_i} t} - g(t - 1) \exp^{-\frac{c_i}{d_i} (t-1)} \right) \quad (3.80)$$

Für die Auswertung wurden die einzelnen Anteile der Gleichung wieder einer Gewichtung mit einer Exponentialverteilung $\Phi_i(\alpha)$ wie oben in Gl. 3.78 unterworfen. Das Resultat dieser Berechnung, über der Zeit aufgetragen, zeigt Bild 3.47. Zu beachten ist dabei, daß die exponentiell abklingende Kraft des Biot-Modells hier nicht von einer Massenträgheit, sondern ausschließlich vom abklingenden Gedächtnis des Modells verursacht wird, da der Berechnung ein masseloses Modell zugrundeliegt.

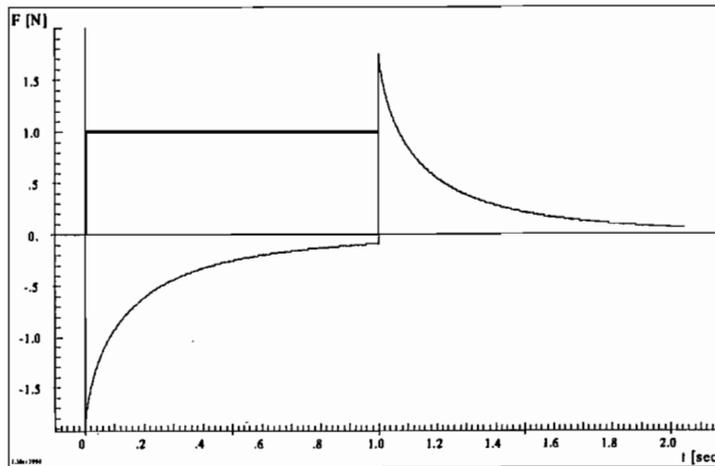


Abbildung 3.47: Biot-Modell: Rechteck-Erregung

Wegerregung, Sweep

Das Dämpfungsvermögen des Biot-Modells läßt sich mit einer Summierung der Anteile aus den einzelnen bewerteten Maxwell-Elementen berechnen:

$$\xi_{Biot} = \frac{\sum W_{D,Maxwell,i} \Phi_i}{U_{Maxwell,i} \Phi_i + \frac{1}{2} c \hat{u}^2} = \frac{\sum_i \frac{\pi \hat{u}^2 c^2 \omega d_i}{c^2 + \omega^2 d_i^2} \Phi_i}{\sum_i \frac{\frac{1}{2} \hat{u}^2 c^3}{c^2 + \omega^2 d_i^2} \Phi_i + \frac{1}{2} c \hat{u}^2} \quad (3.81)$$

Diese Funktion, über ω aufgetragen, ergibt das folgende, für ein viskoses System bei Krafterregung typische Aussehen, Bild 3.48.

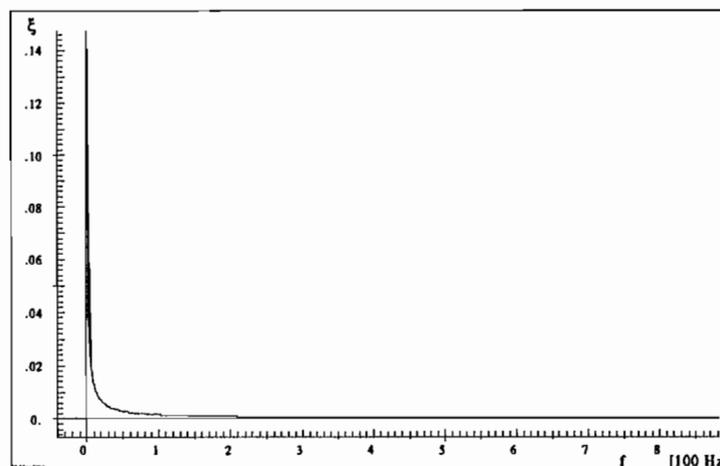
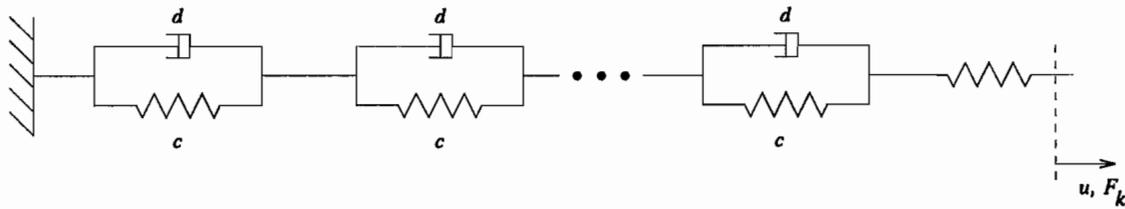


Abbildung 3.48: Biot-Modell: Dämpfungsvermögen

Eine praktische Anwendung des Biot-Modells zur Modellierung eines entsprechenden Stoffgesetzes für spezielle technische Dämpfungselemente findet sich in [1].

3.4.2 Kelvin-Kette



Das logische Pendant zum Biot-Modell bildet die Kelvin-Kette, bei der die lineare masselose Feder und die n Kelvin-Voigt-Elemente in Reihe geschaltet sind. Es gibt wieder n innere Variablen y_i , durch die das verschwindende Gedächtnis der Kelvin-Kette gebildet wird. Diese Variablen werden bei der Aufstellung der Gleichung für die Kelvin-Kette im Bildbereich der Laplace-Transformation wieder substituiert, wenn nach der Verschiebung bei gegebener Kraft F aufgelöst wird:

$$U(s) = - \left(\sum_i \frac{1}{c_i + d_i s} + \frac{1}{c_0} \right) F(s) \quad (3.82)$$

Harmonische Krafterregung

Wird die Kelvin-Kette von einer harmonischen Kraft

$$F(t) = \hat{F} \sin \Omega t$$

erregt, so kann $U(s)$ in den Zeitbereich zurücktransformiert werden:

$$u(t) = -\frac{\hat{F}}{c_0} \cos \Omega t - \sum_i \left(\frac{c_i e^{-\frac{c_i}{d_i} t} - c_i \cos \Omega t - \Omega d_i \sin \Omega t}{c_i^2 + \Omega^2 d_i^2} \right) \hat{F} \quad (3.83)$$

Diese Funktion über der Zeit aufgetragen, ergibt Bild 3.49. Der Einschwingvorgang klingt

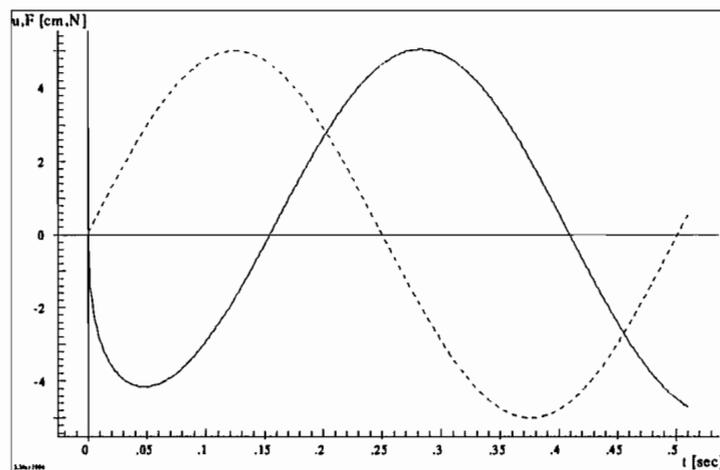


Abbildung 3.49: Kelvin-Kette: Konstante harmonische Krafterregung ab $t = 0$ sec,
 ————— $u(t)$, - - - - - $F(t)$

relativ schnell ab, es folgt eine zur gestrichelten Erregung phasenversetzte Verschiebung,

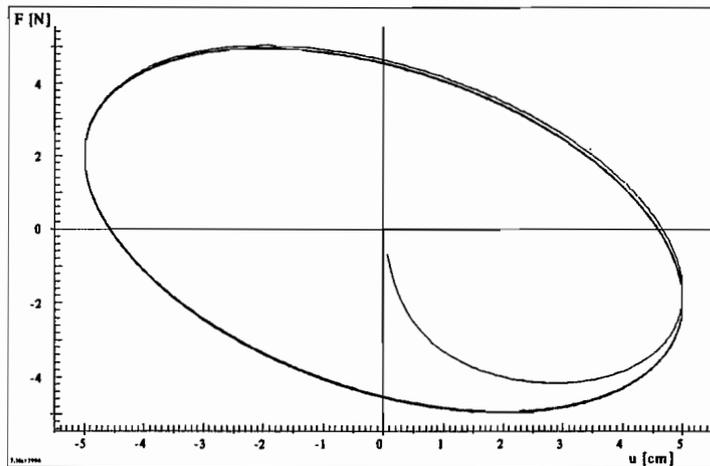


Abbildung 3.50: Kelvin-Kette: Konstante harmonische Krafterregung, Hysterese

Bild 3.49. Aufgetragen als Hysterese mit der Erregungskraft $F(t)$ auf der Ordinate ergibt sich die Hysterese wie in Bild 3.50.

Wird die Amplitude dieser Funktion gebildet und über der Frequenz aufgetragen, so ergibt sich das ähnlich vom Maxwell-Modell her gewohnte Bild der exponentiellen Amplitudenabnahme über der Frequenz, Bild 3.51.

$$\hat{u} = \hat{F} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{c_0} - \sum_i \frac{c_i}{c_i^2 + \Omega^2 d_i^2}\right)^2 + \left(\sum_i \frac{-\Omega d_i}{c_i^2 + \Omega^2 d_i^2}\right)^2} \quad (3.84)$$

Für $\omega = 0$ ergibt sich dabei die durch die Steifigkeit der in Reihe geschalteten Federn und

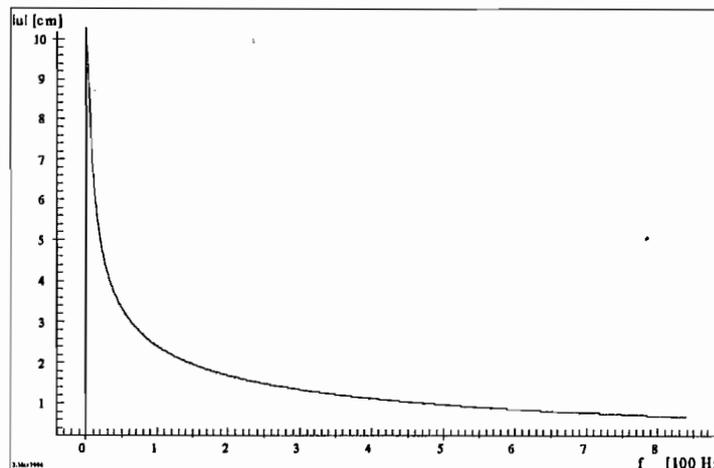


Abbildung 3.51: Kelvin-Kette: Harmonische Krafterregung, Sweep

die wegfallenden Dämpfungskräfte resultierende Verschiebung $-(\frac{1}{c_0} + \sum_i \frac{1}{c_i})\hat{F}$.

Rechteckerregung $F(t)$

Bei einer Erregung mit einer Rechteckfunktion, $F(0 < t < 1) = 1$, $F(t) = 0$ sonst, kann ebenfalls im Zeitbereich die Lösung dargestellt werden (mit der Einheitssprungfunktion

$g(t)$), Bild 3.52.

$$u(t) = -\frac{1}{c_0}(1 - g(t)) + \sum_i \left(\frac{1}{c_i} (e^{-\frac{c_i}{d_i} t} - 1) + g(t) \frac{1}{c_i} (1 - e^{-\frac{c_i}{d_i} (t-1)}) \right) \quad (3.85)$$

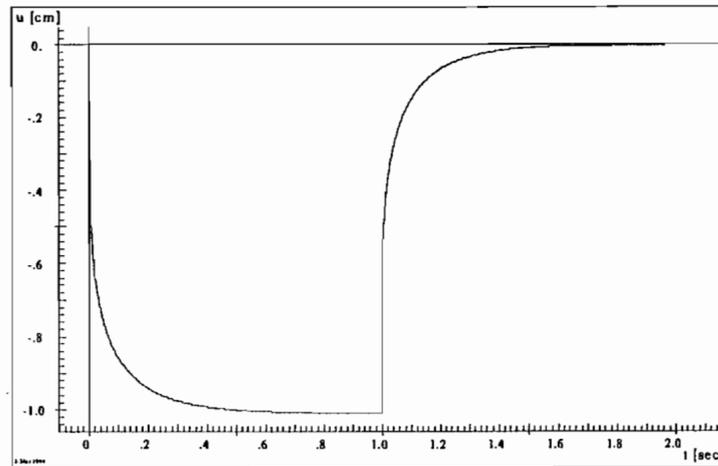


Abbildung 3.52: Kelvin-Kette: Rechteck-Krafterregung

Hier ist wiederum zu beachten, daß die asymptotischen Verläufe von $u(t)$ wieder nur vom Gedächtnis des Modells verursacht werden, da das Modell masselos ist.

Krafterregung, Sweep

Wie schon beim Biot-Modell, so kann auch hier aus den Anteilen der Einzelemente, bei der Kelvin-Kette sind das Kelvin-Voigt-Modelle, das Dämpfungsvermögen berechnet werden:

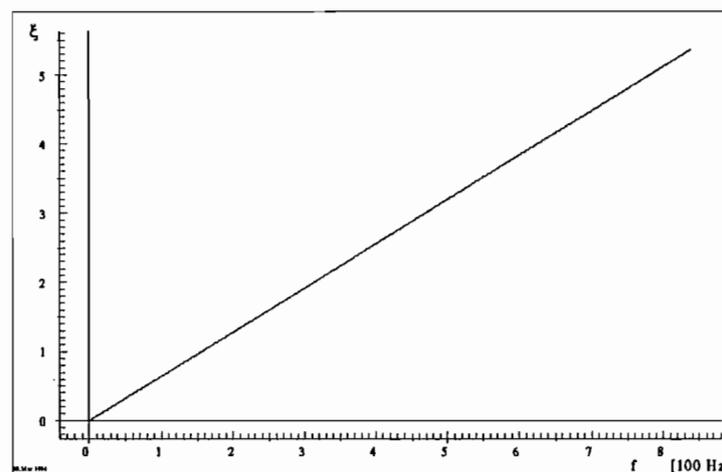


Abbildung 3.53: Kelvin-Kette: Dämpfungsvermögen

$$\xi_{\text{Kelvin-Kette}} = \frac{\sum W_{D, \text{Kelvin-Voigt}, i} \Phi_i}{U_{\text{Kelvin-Voigt}, i} \Phi_i + \frac{1}{2} c \hat{u}^2} = \frac{\sum_i \pi \hat{u}^2 \omega d_i \Phi_i}{\sum_i \frac{1}{2} c \hat{u}^2 \Phi_i + \frac{1}{2} c \hat{u}^2} \quad (3.86)$$

Wiederum über der Frequenz aufgetragen, zeigt sich das für viskose Systeme typische lineare Ansteigen des Dämpfungsvermögens, Bild 3.53. Der Kehrwert dieser Funktion ergäbe Bild 3.48, das Dämpfungsvermögen des Biot-Modells. Mithin sind Kelvin-Kette und Biot-Modell nur dadurch in ihrem Dämpfungsverhalten unterschieden, daß ersteres für Kraftgrößenverfahren und letzteres für Weggrößenverfahren einsetzbar ist.

Es konnte im übrigen keine praktische Anwendung des Modells in der Literatur gefunden werden, mit den heutigen Weggrößenverfahren zusammen ist die Anwendung dieses Modells auch nicht möglich, dazu müßte das Biot-Modell herangezogen werden.

3.4.3 Iwan- und Masing-Modell

Eine andere Klasse von Modellen ist mit dem Iwan- und dem Masing-Modell realisiert. Diese Modelle haben prinzipiell die gleiche Charakteristik in Bezug auf die Hysterese: Sie sind beide amplitudenabhängig und nicht frequenzabhängig.

Das Iwan-Modell formuliert eine Verschiebung als Funktion einer Kraft, das Masing-Modell formuliert dazu komplementär eine Kraft als Funktion einer Verschiebung. Da in der Schwingungslehre meist mit Bewegungsgleichungen in Verschiebungen (Weggrößenverfahren) gearbeitet wird, ist das Masingmodell denn auch das für die Praxis relevantere Modell, analog zum Verhältnis zwischen Biot-Modell und Kelvin-Kette.

Iwan-Modell:

Dieses Modell geht auf eine Idee von Iwan [34] zurück und wurde entwickelt, um Hysteresen konkreter Messungen phänomenologisch begründet abzubilden, Bild 3.54. Bei diesen Messungen traten der Bauschinger-Effekt und Hystereseschleifen auf, die ausgeprägte Spitzen bei Richtungsumkehr der Verformung aufwiesen. Bei diesem Modell handelt es sich um eine Reihenschaltung von Coulomb-Modellen mit einer einzelnen masselosen linearen Feder am Ende der Kette.

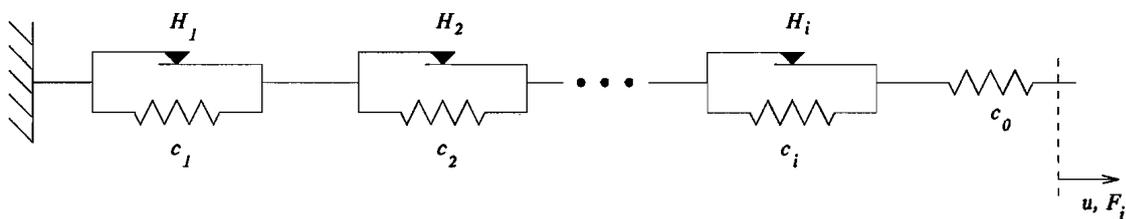


Abbildung 3.54: Iwan-Modell

Die Evolutionsgleichung des Iwan-Modells ergibt sich aus einer Summierung der einzelnen Anteile aus den Coulomb-Elementen:

$$\dot{u} = \dot{F} \left(\frac{1}{c_0} + \sum_{i=1}^l \frac{1}{c_i} \right) - \sum_{i=1}^l \left(\frac{\dot{R}_i}{c_i} \right) \quad (3.87)$$

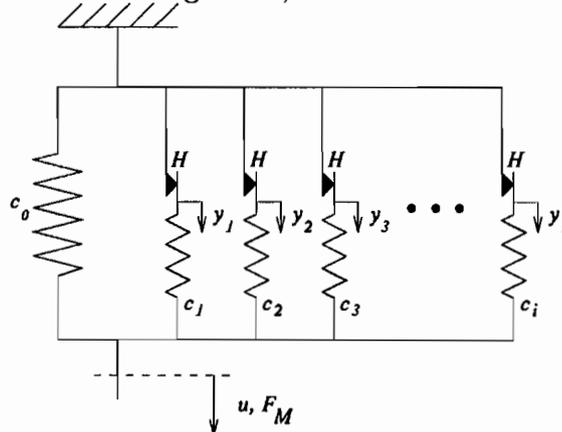
Durch den Grenzübergang $l \rightarrow \infty$ wird das Iwan-Modell kontinuierlich, wobei dann die Parameter über eine oder mehrere Verteilungsfunktionen bestimmt sein müssen. Bei $c_i = \text{const.}$ und nur einer Verteilungsfunktion Φ für die Haftkräfte R ist die Verteilungsfunktion aus einer Erstbelastungskurve analytisch bestimmbar als:

$$\frac{d^2 u}{dF^2} = \Phi(F) \quad (3.88)$$

Problematisch an dieser Gleichung in Bezug auf die praktische Anwendung ist, daß es nur sehr schwer möglich ist, Meßwerte zu erhalten, die die erforderlichen für die Analyse benötigten Eigenschaften haben. Beispiele für experimentell zu gewinnende Erstbelastungskurven sind die Erstbelastung eines Stahlbetonbauteils oder die Belastung eines spannungsarmgeglühten Stahlbauteils. Das dabei weiterhin auftretende praktische Problem ist die Berechnung der Krümmung $d^2 u/dF^2$ aus den in der Regel relativ stark aufgerauten Kurvenzügen. Die einwandfreie analytische Bestimmung der Verteilungsfunktion kann demnach nur aus durch Simulationen erzeugten Daten erfolgen. Außerdem sind reale Meßwerte verrauscht, und ein reales System hat kein exaktes reines Iwan-Verhalten, was eine Identifikation der Verteilungsfunktion mit Hilfe von Gleichung 3.88 unmöglich macht.

Masing-Modell:

Das Masing-Modell wurde schon in den 20er Jahren als Modell für amplitudenabhängige Werkstoffdämpfung von G.Masing entwickelt [47, 48, 49, 50] und von einer ganzen Reihe von Autoren für die phänomenologische Modellierung z.B. metallischer Werkstoffe und reibgedämpfter Strukturen verwandt, u.a. in [34, 40, 57, 63, 71]. Es ist aus N Prandtl-Strängen und einer linearen Feder aufgebaut, alle diese Elemente sind parallel angeordnet.



In diesem Abschnitt werden nur einige grundlegende Anmerkungen zum Masing-Modell gemacht, ein eigenes Kapitel zu analytischer Lösung und Verhalten des Modells folgt. Die Evolutionsgleichung des Masing-Modells ist eine Summierung der linearen Federkraft, der rein elastischen und der gleitenden Anteile aus den Coulomb-Elementen:

$$F_M = c_0 u + \sum_{i=n+1}^N \frac{H_i}{N} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{N} u \quad (3.89)$$

Die c_i und H_i können beide über eine Verteilungsfunktion bestimmt sein, aber es soll gelten $N \rightarrow \infty$ und $c_i = \text{const.}$ mit einer allgemeinen Verteilung Φ für die H_i . Damit wird die Elementkraft zu:

$$F_M = c_0 u + cu \int_{cu}^{\infty} \Phi(\eta) d\eta + \int_0^{cu} \eta \Phi(\eta) d\eta \quad (3.90)$$

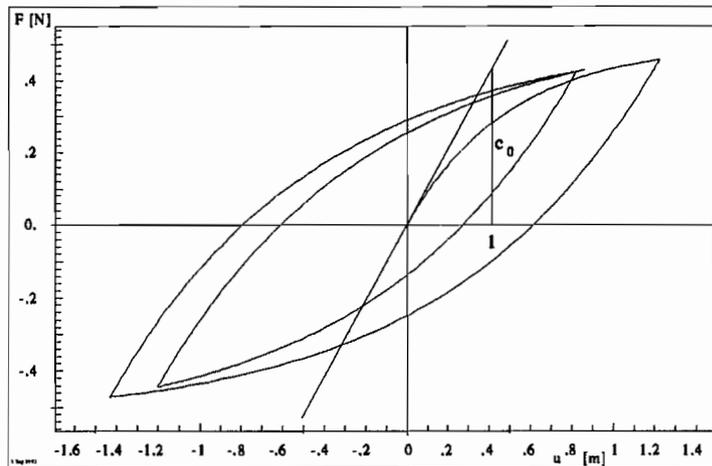


Abbildung 3.55: Erstbelastungskurve

Die Verteilungsfunktion $\Phi(\eta)$ der Haftkräfte ist nun anhand der Erstbelastungskurve, Bild 3.55, analytisch berechenbar durch:

$$\Phi = -\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 F}{du^2} \quad (3.91)$$

In Bezug auf die praktische Anwendbarkeit dieser Gleichung gilt das, was schon oben beim Iwan-Modell gesagt wurde. Für die Anwendung in Bewegungsdifferentialgleichungen der Mechanik ist das Masingelement allerdings besser geeignet, da es zu den in Verschiebungen formulierten Gleichungen ebenfalls eine aus Verschiebungen (und der Gedächtnisfunktion) formulierte Kraft liefert.

Masingelement und II-Ebene

Einen Eindruck von der Funktion des Masingelementes liefert die Parallele zwischen dem eindimensionalen Masingelement und einer Übertragung des Elementes in die II-Ebene ähnlich [34], dargestellt in Bild 3.56. Dort sind die einzelnen Coulomb-Elemente in Analogie wiedergegeben als Kreiszyylinder, die in der unverformten Ausgangskonstellation konzentrisch um die Normale im Ursprung der II-Ebene gruppiert sind. Jeder dieser Kreiszyylinder repräsentiert eine von-Mises-Fließfläche für ein Coulomb-Element, die Gewichtung der Elemente über ihre Verteilungsdichtefunktion ist dabei nicht darstellbar.

- Bild 3.56 links: Unverformte Ausgangslage, von-Mises-Fließflächen als Kreiszyylinder normal zur II-Ebene, Verteilungsdichte nicht dargestellt. Unten die Gedächtnisfunktion des Masingelementes in „jungfräulichem“ Zustand.

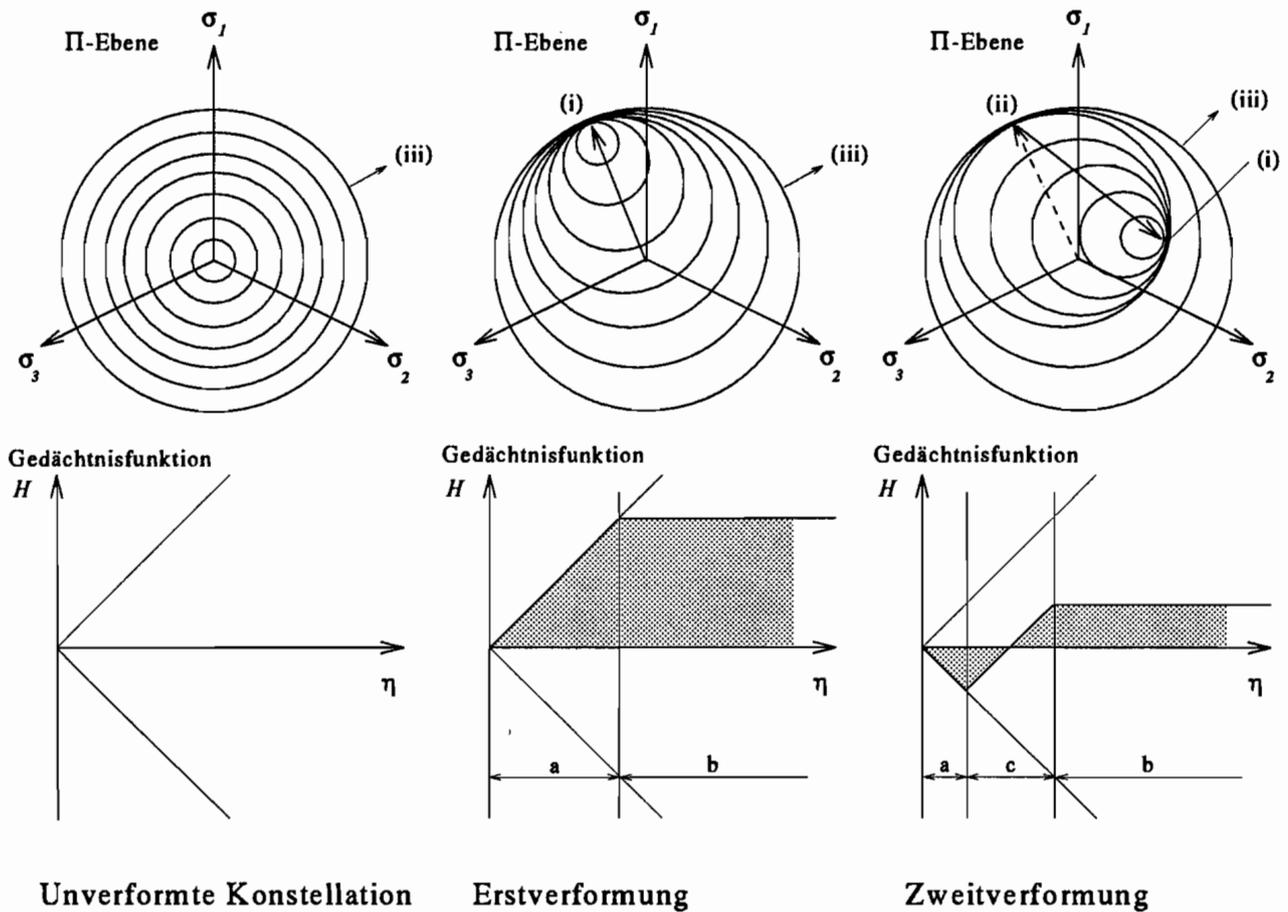


Abbildung 3.56: Analogie II-Ebene und Gedächtnisfunktion

- Bild 3.56 Mitte: Wird eine Erstverformung vorgenommen, so setzt in den Coulomb-Elementen, in denen die Haftkraft oder Fließbedingung erreicht wird, kinematische Verfestigung ein, d.h. der Kreiszyylinder wird in der II-Ebene verschoben. Die verschobenen Elemente haben dabei eine gemeinsame Tangente ihrer Fließflächen. Darunter die Gedächtnisfunktion des Masingelementes, im Bereich (a) hat Fließen/Gleiten eingesetzt, der Bereich (b) ist bisher rein elastisch verformt.
- Bild 3.56 rechts: Bei einer anschließenden Verformung in einer anderen Hauptspannungsrichtung werden nun, ausgehend vom ersten Zustand, wiederum diejenigen Elemente kinematisch verfestigt, in denen die Fließregel/Haftgrenze erreicht wird, wobei die gleitenden/fließenden Elemente ebenso eine gemeinsame Tangente ihrer Kreiszyylinder aufweisen wie bei der Erstbelastung. Beim dazugehörigen Bild der Gedächtnisfunktion des Masingelementes gleiten die Anteile im Bereich (a), sind die Anteile im Bereich (c) wieder elastisch, aber bereits plastisch verformt, und im Bereich (b) nach wie vor rein elastisch.

Die Analogie zeigt, daß momentan gleitende/fließende Elemente eine gemeinsame Tangente ihrer Fließflächen haben, die im Punkt der momentanen Spannungen liegt, Bild 3.56 Punkt (i). Elemente, die bereits kinematisch verfestigt sind, aber nicht momentan gleiten/fließen, haben eine gemeinsame Tangente ihrer Fließflächen in einem „Wendepunkt“

der vorherigen Verformungsgeschichte, Bild 3.56 Punkt (ii). Unter (iii) sind jeweils die bisher rein elastisch gebliebenen Elemente zusammengefaßt, von denen hier exemplarisch nur der erste, „innerste rein elastische“ Kreiszyylinder in der II-Ebene abgebildet ist.

3.5 Tabellarische Übersicht der vorgestellten Modelle

Modell	Linearität	Spontanversch.	Gedächtnis	Viskoelastizität
Coulombreibung	nein	ja	keines	nein
Kelvin-Modell	ja	nein	keines	ja
Maxwell-Modell	ja	ja	schwindend	ja
Prandtl-Modell	nein	ja	nichtschwindend	nein
Coulomb-Modell	nein	nein	keines	nein
Poynting-Modell	ja	ja	schwindend	ja
3-Parameter-Modell	nein	ja	nichtschwindend	nein
4-Parameter-Modell	nein	ja	nichtschwindend	nein
Dieterle-Modell	nein	nein	keines	ja
Biot-Modell	ja	ja	schwindend	ja
Kelvin-Kette	ja	ja	schwindend	ja
Iwan-Modell	nein	ja	nichtschwindend	nein
Masing-Modell	nein	ja	nichtschwindend	nein

In der obenstehenden Tabelle wird noch einmal ein Überblick über einige Eigenschaften der vorgestellten Modelle gegeben. Zum letzten genannten Modell, dem Masing-Modell, folgt nun ein eigenes Kapitel, das sich mit der numerischen Realisierung des Modells und seinen Eigenschaften ausführlich auseinandersetzt, da es im weiteren als Basis für eine Modellierung der amplitudenabhängigen Dämpfung von Stahlbeton dienen soll.

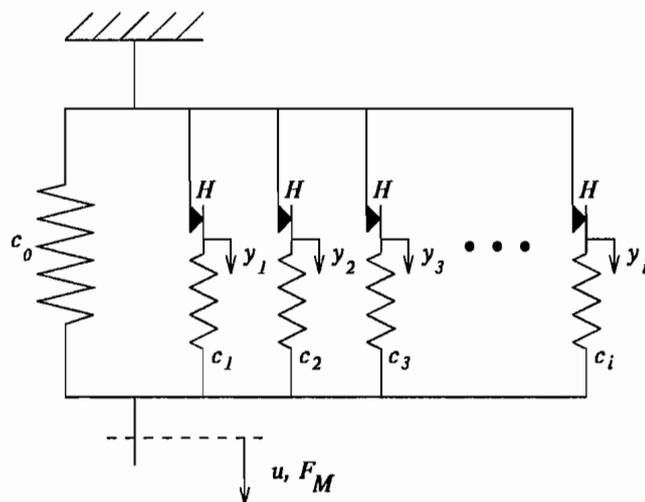
Kapitel 4

Das Masingelement

In einem eigenen Kapitel soll dieses Modell mit einer erstmaligen analytischen Lösung vorgestellt werden, die den bisher üblichen Einschränkungen nicht mehr unterliegt. Anschließend werden die Eigenschaften des Modells in Bezug auf seine Parameter und insbesondere die Dämpfung diskutiert.

Mit der vorliegenden Arbeit wird vor allem die Modellierung der Dämpfung von Stahlbeton verbessert. Ausgehend von den in der Literatur schon vorliegenden Untersuchungen und Erfahrungen konnte das Masingelement als geeignetes Modell für die nichtlinearen Anteile der Dämpfung dieses Werkstoffes bezeichnet werden [17, 18, 20, 45, 53, 63].

4.1 Analytische Lösung



Zur Erzielung einer realitätsnahen phänomenologischen Dämpfungscharakteristik wird für diese Arbeit ein Masingelement mit unendlich vielen Prandtl-Strängen konstanter Federkraft k_1 und exponentieller Verteilung der variablen Haftkräfte H gewählt. Die unendlich vielen Prandtl-Stränge werden erst durch die Exponentialverteilung handhabbar gemacht, denn sie beinhaltet implizit die notwendige Normierung, so daß das Intervall der Haftkräfte H von 0 bis ∞ reicht und dennoch eine endliche Haftkraft garantiert ist.

Die Lösungsproblematik bleibt aber dennoch bestehen. Hier wird über die Gedächtnisfunktion der Weg beschritten, stückweise lösbare Integrale über das gesamte Element zu berechnen. Damit wird das bisher als nicht realisierbar betrachtete Modell (z.B. [46, 57]) durch die analytische Lösung der Integrale der Gedächtnisfunktion anwendbar gemacht. Phänomene wie z.B. der Bauschinger-Effekt lassen sich damit modellieren, indem lediglich zwei Parameter variiert werden.

Zur Ermittlung der Gesamtkraft des Elementes muß nun über alle Stränge integriert werden, d.h. die Gedächtnisfunktion, die aus einer Verformungsgeschichte entstanden ist, muß bekannt und integrierbar sein. Die praktikabelste Darstellung der Gedächtnisfunktion des gewählten Modells mit kontinuierlicher exponentieller Verteilung der Haftkräfte ist, die aktuelle Strangkraft über der Verteilungskordinate η der Exponentialverteilung $\Phi(\eta) = \alpha e^{-\alpha\eta}$ darzustellen, Bild 4.1. Wegen der Reibelemente handelt es sich um ein nichtschwindendes Gedächtnis. Zur besseren Handhabung kann man die Haftgrenze im Strang an der Stelle η zu $H = \eta$ setzen, wegen der weiterhin freien anderen Parameter spielt diese Definition keine verfälschende Rolle. Damit ist nun die Linie $H = \eta$ bzw. $H = -\eta$ auch gleichzeitig die an einer Stelle η maximal erreichbare Haftkraft H , ab der dann Gleiten einsetzt.

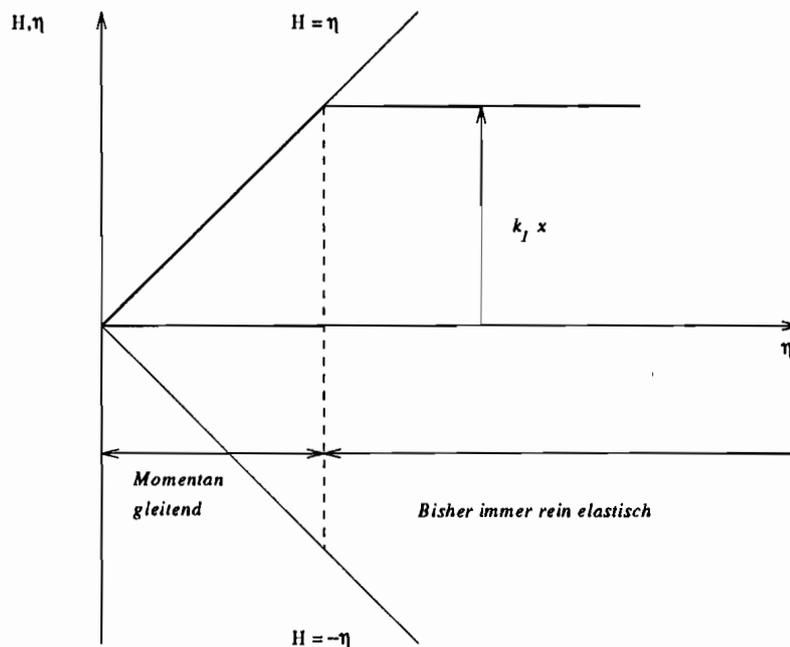


Abbildung 4.1: Gedächtnisfunktion nach einfacher Verschiebung

Beginnt man aus einer unverformten Lage heraus eine Belastung/Verschiebung des Masinelementes, so fangen die Stränge an zu gleiten, die die Gleichung $\eta < k_1 x$ mit η der Verteilungskordinate des Masinelementes, k_1 der konstanten Federkraft in allen Prandtl-Strängen und x der Verformung des Elementes erfüllen. Alle übrigen Stränge bleiben elastisch, so daß sich Bild 4.1 ergibt.

Bei weiterer Verformungszunahme vergrößert sich nur noch die Anzahl der gleitenden Stränge, die Form der Gedächtnisfunktion bleibt erhalten. Anders bei Verformungsrichtungswechsel: Die bisher gleitenden Stränge haften sofort wieder, für η nahe 0 aber setzt

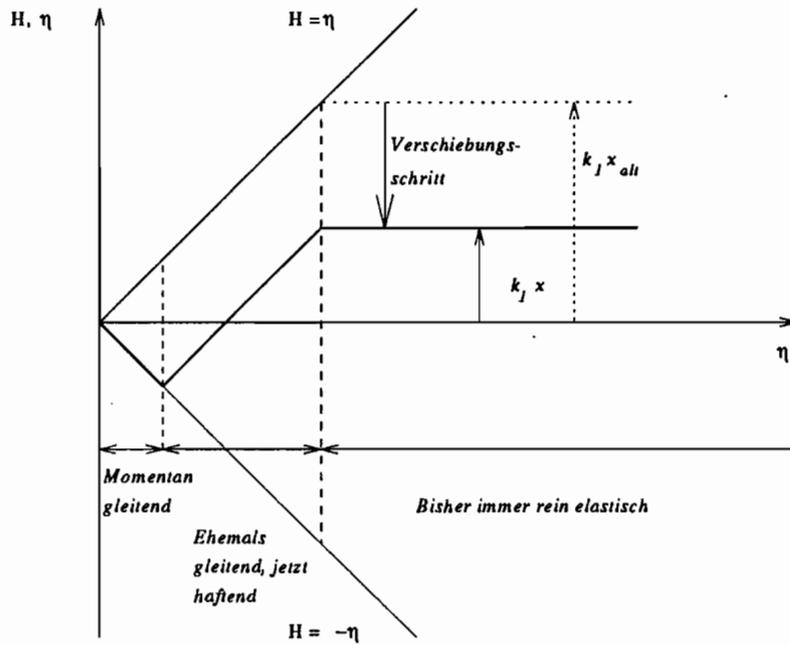


Abbildung 4.2: Gedächtnisfunktion nach Richtungswechsel der Verschiebung

sogleich Gleiten in die andere Richtung ein, wenn an einer Stelle η die Haftkraft $H = \pm\eta$ erreicht wird, dargestellt in Bild 4.2.

Auf diese Art kann nun eine vielfach gezackte Gedächtnisfunktion entstehen, wenn die Verformung monoton abklingt, Bild 4.3. Jede neue Überschreitung einer lokalen Amplitude löscht alle Anteile der Gedächtnisfunktion, die aus kleineren Amplituden resultieren, bei $x > |x_{max}|$ ergibt sich wieder das vorletzte Bild, bei $-x \geq |x_{max}|$ muß die Gedächtnisfunktion um die Abszisse gespiegelt gedacht werden. Die Gedächtnisfunktion kann auch als der Ort aller Reibelementspitzen nach einer entsprechenden Belastungsgeschichte interpretiert werden. Bei Gleiten findet dann keine weitere Verschiebung statt, die Reibspitze bleibt auf der Geraden $H = \pm\eta$ stehen. Zur Berechnung der Gesamtkraft des Elementes müssen nun nur noch die einzelnen Anteile mit einer Exponentialverteilung

$$\Phi(x) = \alpha e^{-\alpha x} ; \int_0^{\infty} \Phi(x) = 1 \quad (4.1)$$

bewertet werden, womit dann die Gesamtkraft des Elementes insgesamt endlich bleibt. Damit wird der differentielle Kraftanteil an einer Stelle η :

$$h(\eta) = \alpha e^{-\alpha\eta} H(\eta) = \alpha e^{-\alpha\eta} (p\eta + q) \quad (4.2)$$

mit

$$H(\eta) = p\eta + q, \quad (4.3)$$

der Geradengleichung der Gedächtnisfunktion an der Stelle η . Die Integration aller Stränge über das Intervall $\eta_{k+1} \leq \eta < \eta_k$, in dem für die Gedächtnisfunktion die k-te Geradengleichung (Bild 4.4)

$$H(\eta) = p_k\eta + q_k \quad (4.4)$$

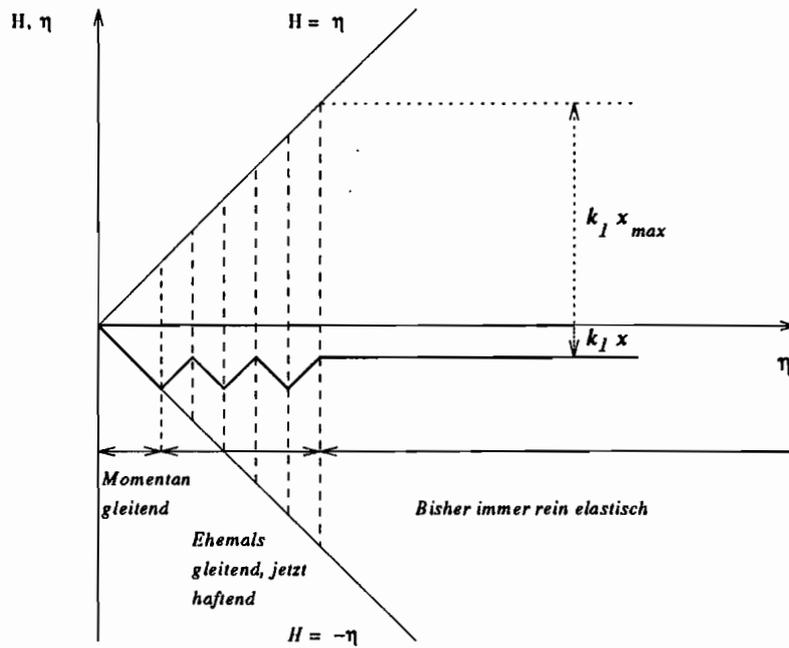


Abbildung 4.3: Gedächtnisfunktion nach monoton abklingender Schwingung

gilt, liefert nun einen Kraftanteil für die Gesamtkraft F_M im k -ten Anteil der Gedächtnisfunktion:

$$F_{Mk} = \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \alpha e^{-\alpha\eta} (p_k \eta + q_k) d\eta \quad (4.5)$$

Das Integral läßt sich auflösen und liefert analytisch die Kraft im Masingelement, die aus Verschiebung und Gedächtnisfunktion resultiert:

$$\begin{aligned} F_{Mk} &= \int_{\eta_{k+1}}^{\eta_k} \alpha e^{-\alpha\eta} (p_k \eta + q_k) d\eta \\ &= \int_{\eta_{k+1}}^{\eta_k} e^{-\alpha\eta} p_k \eta d\eta + \alpha q_k \int_{\eta_{k+1}}^{\eta_k} e^{-\alpha\eta} d\eta \\ &= \alpha p_k \left[\frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha\eta} (-\alpha\eta - 1) \right]_{\eta_{k+1}}^{\eta_k} + \alpha q \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\eta} \right]_{\eta_{k+1}}^{\eta_k} \\ &= \frac{p_k}{\alpha} e^{-\alpha\eta_{k+1}} (1 + \alpha\eta_{k+1}) - e^{-\alpha\eta_k} (1 + \alpha\eta_k) + q (e^{-\alpha\eta_{k+1}} - e^{-\alpha\eta_k}) \\ &= e^{-\alpha\eta_{k+1}} \left(\frac{p_k}{\alpha} + p_k \eta_{k+1} + q_k \right) - e^{-\alpha\eta_k} \left(\frac{p_k}{\alpha} + p_k \eta_k + q_k \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Mit dieser analytischen Lösung des Teilintegrals über die bewertete Gedächtnisfunktion ist für jede beliebige Gedächtnisfunktion die Gesamtkraft F_M berechenbar. Die Summe über alle n Geraden oder Anteile der Gedächtnisfunktion ergibt diese Gesamtkraft F_M :

$$F_M = \sum_{k=0}^n F_{Mk} = \sum_{k=0}^n \left(\int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \alpha e^{-\alpha\eta} (p_k \eta + q_k) d\eta \right) \quad (4.7)$$

Das Vorgehen für die Berechnung des Masingelementes ist nun:

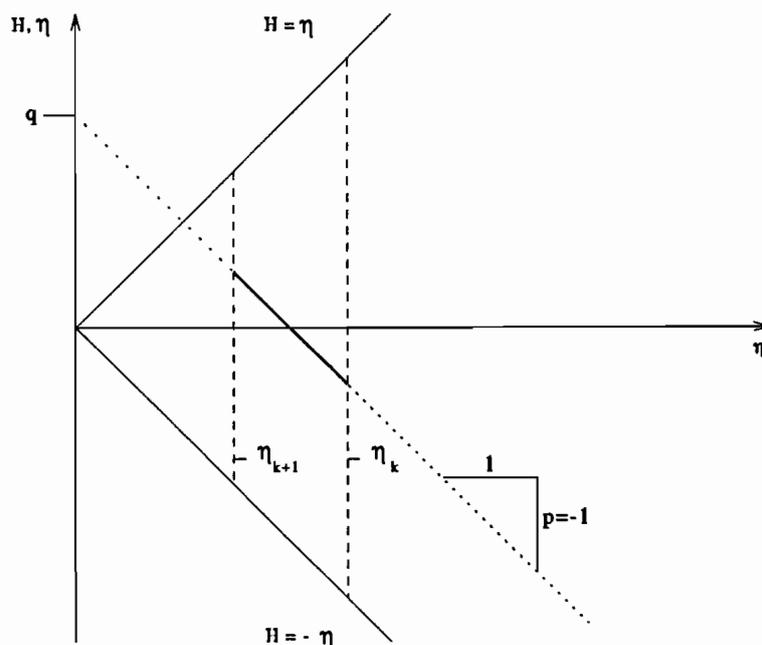


Abbildung 4.4: k -tes Stuecke der Gedachtnisfunktion $H = p_k \eta + q_k$ im Intervall $\{\eta_{k+1}, \eta_k\}$

1. Festlegung eines Anfangszustandes für die Gedachtnisfunktion H_0 , die Gesamtkraft F_{M0} und die Systemgrößen.
2. Berechnung der neuen Gesamtkraft F_{Mi} anhand der vorgegebenen neuen Verschiebung x_i , der alten Gedachtnisfunktion H_{i-1} und der alten Gesamtkraft F_{Mi-1} des vorhergehenden Iterationsschrittes $i-1$. Wegen des perfekten Gedächtnisses des Masingelementes kann die Iteration im Rahmen einer Einschnittformel wie z.B. Euler- oder Runge-Kutta-Verfahren erfolgen.
3. Berechnung und Abspeicherung aller Anteile der neuen Gedachtnisfunktion H_i und der aktuellen Elementkraft F_{Mi} als Basis für einen neuen Iterationsschritt $i+1$.
4. Nach vollständiger Berechnung eines Iterationsschrittes i beginnt die Rechnung von vorne mit $i = i+1$ und Punkt 2.

Die bisherige Literatur, z.B. [1, 34, 40, 57], ging im Falle von n -parametrischen Modellen für nichtlineare Dämpfung wie dem Masing-, Iwan- und Biot-Modell generell davon aus, daß diese Modelle ohne starke Einschränkungen nicht praktisch eingesetzt werden können. Der Vorteil des hier erarbeiteten Vorgehens liegt in folgenden Punkten:

- Bisher übliche stueckweise Linearisierungen der beteiligten Funktionen entfallen ersatzlos [63, 73].
- Beschränkungen der Verteilungsfunktion auf andere Intervalle als $\{0, \infty\}$ entfallen ersatzlos [63].
- Die Wiedergabe der kontinuierlichen Elementverteilung der Prandtl-Stränge durch einige wenige Stränge ist nicht mehr erforderlich [73].

- Die Erfassung der inneren Variablen bei der Berechnung bereitet mit wachsender Anzahl der Teilstränge schnell Probleme [63, 73]. Eine große Anzahl innerer Variablen ist hier nicht mehr erforderlich, da unendlich viele Teilstränge mit *einer* Gedächtnisfunktion erfaßt sind, deren Parameterzahl das vierfache der Anzahl ihrer Teilstücke beträgt, in der Regel nach eigenen Versuchen nicht über 800, was mit dem vorliegenden Algorithmus problemlos zu handhaben ist. Es ist kein neuer Ansatz erforderlich für „längere“ Gedächtnisfunktionen, lediglich eine höhere Dimensionierung der Felder und mehr Rechenzeit.

Beim hier vorliegenden Ansatz ist nun erstmals auf dem Weg, die $n = \infty$ Parameter über eine Exponentialverteilung zu erfassen, durchgängig eine unendliche Anzahl innerer Variablen des Masingmodells gegeben, die aber rechentechnisch keine Probleme mehr bereitet wie bisher immer angenommen. Einer praktischen Anwendung des Masingmodells im ursprünglichen Sinne steht damit nichts mehr im Wege.

Da das Iwan-Modell die Verschiebung zu einer gegebenen Kraft ergibt, also sinnvollerweise nur für in Kräften formulierte Probleme angewandt werden sollte, ist es wegen der in der Mechanik üblichen Formulierung der Differentialgleichungen in Verschiebungen weniger praxisnah. Seine ansonsten gleiche Charakteristik wird mit dem Masingelement auf einfachere Art in FEM-Systeme z.B. eingebaut.

4.2 Numerische Realisierung des Masingelementes

4.2.1 Algorithmus

Die programmtechnische Realisierung des Masingelementes erfordert zum einen die Berechnung bzw. Integration der Gedächtnisfunktion und die Summierung und Integration der bewerteten Gedächtnisfunktion zur Gesamtkraft des Masingelementes F_M .

Berechnung der Gedächtnisfunktion und des Gesamtwertes.

Ausgehend von einem beliebigen Zustand kann nach einem kleinen Verformungsschritt nur eines von 2 Szenarien eingetreten sein:

- Es gleiten mehr Elemente als vorher, wenn keine Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit auftraten (in Bild 4.5 gestrichelt)
- Es gleiten nur sehr wenige Elemente bei $\eta \simeq 0$, da ein Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit aufgetreten ist (in Bild 4.5 gepunktet)

Dabei findet eine reine Verschiebung der Gedächtnisfunktion nach oben oder unten statt, bei der nur im vorderen Bereich bei den aktuell gleitenden oder ehemals gleitenden Teilsträngen auch die Form der Gedächtnisfunktion geändert wird. Diese Änderung erfolgt, weil die Haftgrenze $H = \pm\eta$ nicht überschritten werden kann. Der Teil der Gedächtnisfunktion, der die Haftgrenze auch nach der Verschiebung nicht berührt, wird lediglich

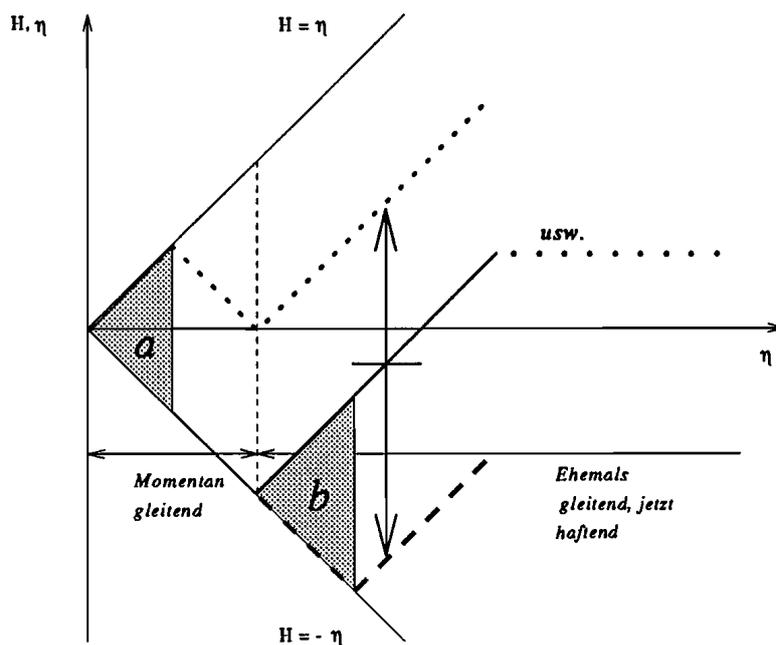


Abbildung 4.5: Gedächtnisfunktion

vertikal verschoben um $k_1 \delta x$ (Bild 4.5). Dieser Teil wird, wie in Bild 4.6 gezeigt, von $\eta = \infty$ her in einzelnen Geradenstücken berechnet.

Das Vorgehen bei der Berechnung der neuen Gedächtnisfunktion ist wie im Folgenden dargestellt:

1. Die alte Gedächtnisfunktion wird um den Betrag $k_1 \Delta x$ verschoben.
2. Es wird von $\eta = \infty$ her überprüft, welche Gerade der neuen Gedächtnisfunktion als erste einen Schnittpunkt mit einer der beiden Linien $H = \eta$ und $H = -\eta$ (den Haftgrenzen) aufweist.
3. Ist ein solcher Schnittpunkt gefunden, so werden alle $i - 1$ Anteile der Gedächtnisfunktion bis dahin in die neue Gedächtnisfunktion übernommen, ohne die Gerade mit dem Schnittpunkt.
4. Das erste Stück der i -ten Geraden wird als neuer i -ter Bestandteil der Gedächtnisfunktion übernommen.
5. Das Geradenstück von der Schnittstelle bis zum Ursprung des Diagramms wird als $i + 1$ -te Gerade in die neue Gedächtnisfunktion abgespeichert.

Bei der Berechnung der Gedächtnisfunktion durch rein additive Verschiebung traten allerdings numerische Probleme auf. Infolgedessen wird anhand der Knickstellen η_i und der Neigung p_i der einzelnen Abschnitte der Gedächtnisfunktion deren Verlauf jeweils bis zum Schnittpunkt komplett neu berechnet und dann bis zum Ursprung ergänzt und abgeschlossen, ausgehend vom Punkt $\eta_1 = |k_1 x|$ (siehe Bild 4.6). Aufgrund der vorliegenden Gedächtnisfunktion kann danach die Berechnung der Integrale erfolgen, für die keinerlei

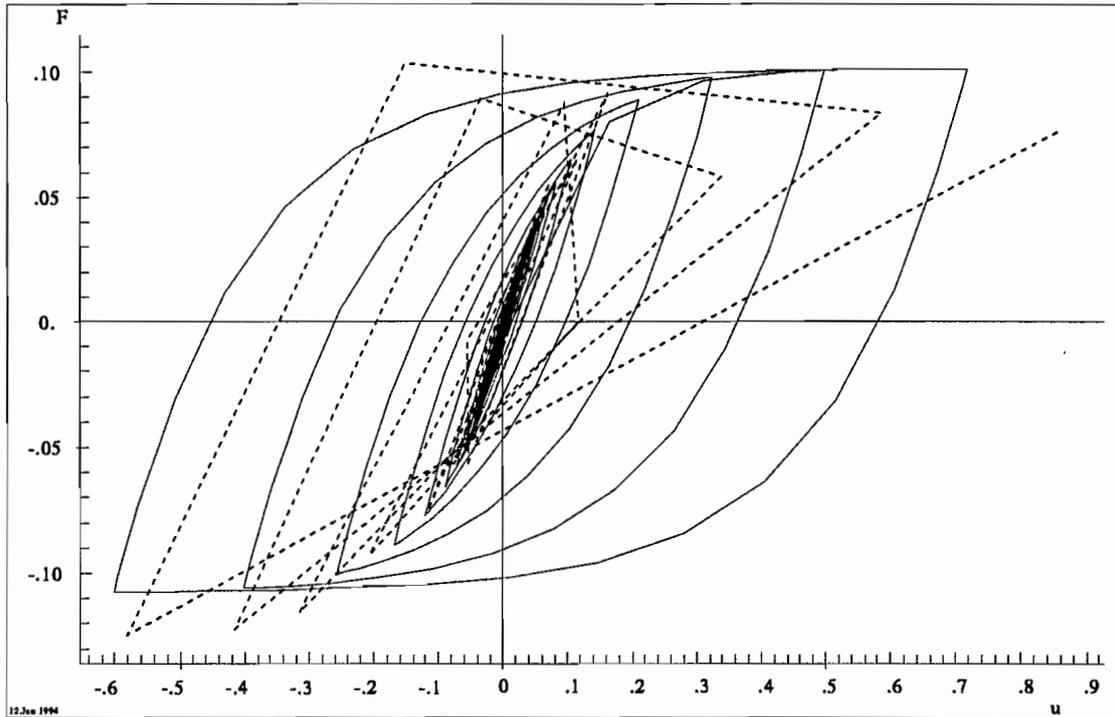


Abbildung 4.7: Unterabtastung einer Schwingung mit Masingelement

4.3 Charakteristik des Masingelementes

Als erstes Beispiel, an dem sich exemplarisch die Eigenschaften der mit einem Masingelement erzeugten Dämpfung zeigen lassen, dient der Einmassenschwinger, wie in Bild 4.8 dargestellt.

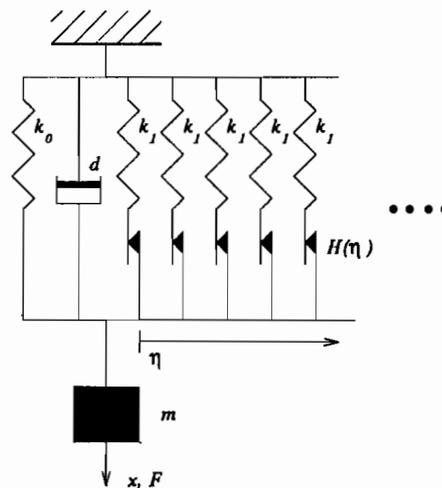


Abbildung 4.8: 1-Massenschwinger mit Masingelement

Die DGL des 1-Massenschwingers wurde um die als äußere, verformungsgesteuerte Erregung eingeführte Dämpfungskraft des Masingelementes erweitert:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = F_M(x) \quad (4.9)$$

Zur Integration wird die DGL in ein DGL-System 1. Ordnung überführt:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0x + \dot{x} + 0 \\ \ddot{x} &= -\frac{k}{m}x - \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}F_M(x)\end{aligned}\quad (4.10)$$

In Matrixschreibweise:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{F}_M \quad (4.11)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ F_M(x) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

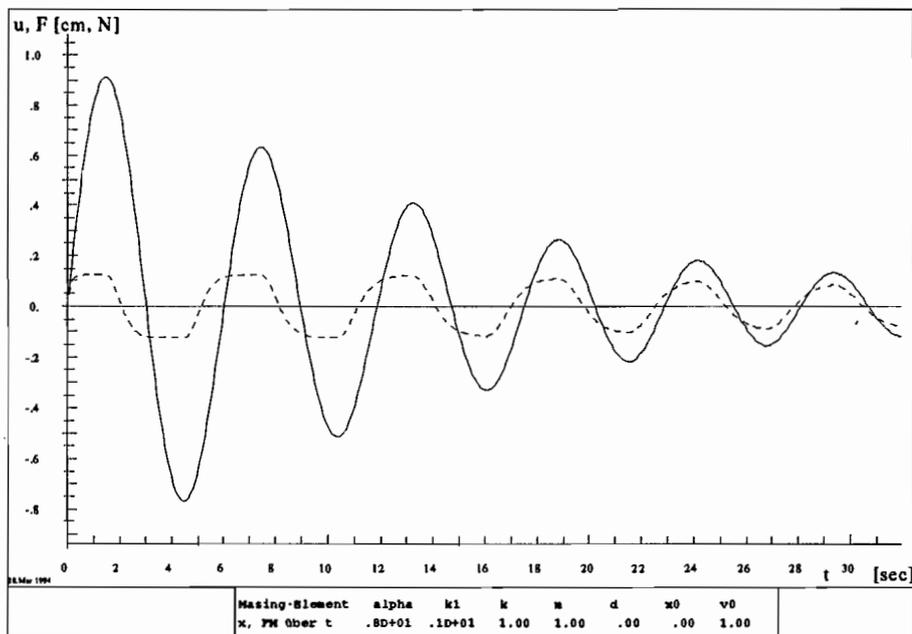
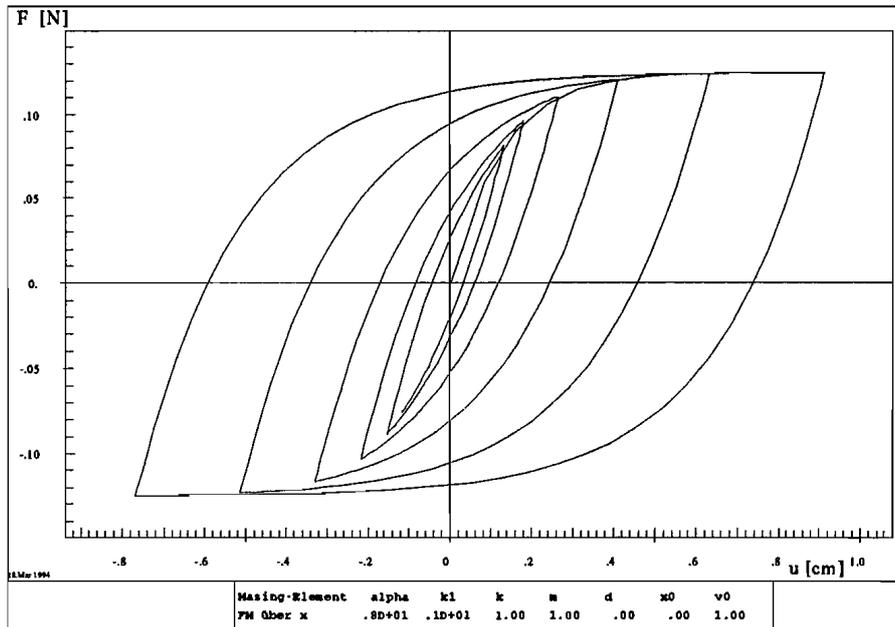
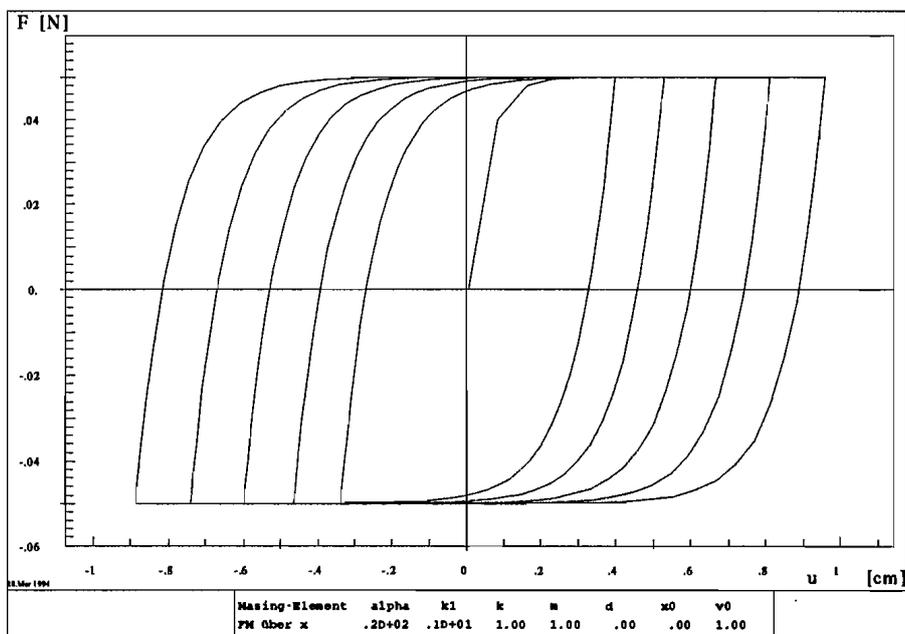


Abbildung 4.9: Masingdämpfung, $\alpha = 8$

Der Zustandsvektor \mathbf{z} wird über der Zeit integriert, bei jedem Aufruf der DGL wird ein Vektor $\dot{\mathbf{z}}$ berechnet. Erst nach vollständiger Berechnung eines neuen Integrationsschrittes wird die zugehörige Gedächtnisfunktion vollständig abgespeichert, für die Zwischenschritte bleibt die alte Form als Ausgangspunkt maßgeblich. Ein erstes Beispiel zeigt bei $d = 0$, $m = 1$, $k = 1$, $\nu = 1$ und $\alpha = 8$, daß die Einhüllende bei reiner Masingdämpfung im Unterschied zur einfachen Reibungsdämpfung keine Gerade mehr ist (Bild 4.9).

Die zu diesem Zeitverlauf zugehörige Hystereseschleife macht den Unterschied zur viskosen Dämpfung deutlich (Bild 4.10), indem die ausgeprägten Ecken der Schleifen eine deutliche Nichtlinearität anzeigen, hier aufgrund der Reibelemente in den Prandtl-Strängen. Besonderes Merkmal der Hystereseschleife des Masingelementes ist auch, daß die Gesamtkraft niemals den Betrag $\frac{1}{\alpha} = 1.25\text{N}$ erreichen kann, also auch bei theoretisch denkbaren unendlich großen Wegamplituden die Kraft sich lediglich einer horizontalen Asymptote bei $\pm \frac{1}{\alpha}$ annähert.

Abbildung 4.10: Masingdämpfung, Hysterese, $\alpha = 8$ Abbildung 4.11: Masingdämpfung, $\alpha = 20$

Das erste Beispiel wiederum, nur mit größerem α gerechnet, zeigt die Änderung der Hysterese wie in Bild 4.11, die Form der Hysterese hat sich durch die Betonung der Prandtl-Stränge mit kleinen Haftkräften aufgeweitet und die Kraftasymptote ist wegen des kleineren $\frac{1}{\alpha} = 0.05\text{N}$ ebenfalls kleiner geworden.

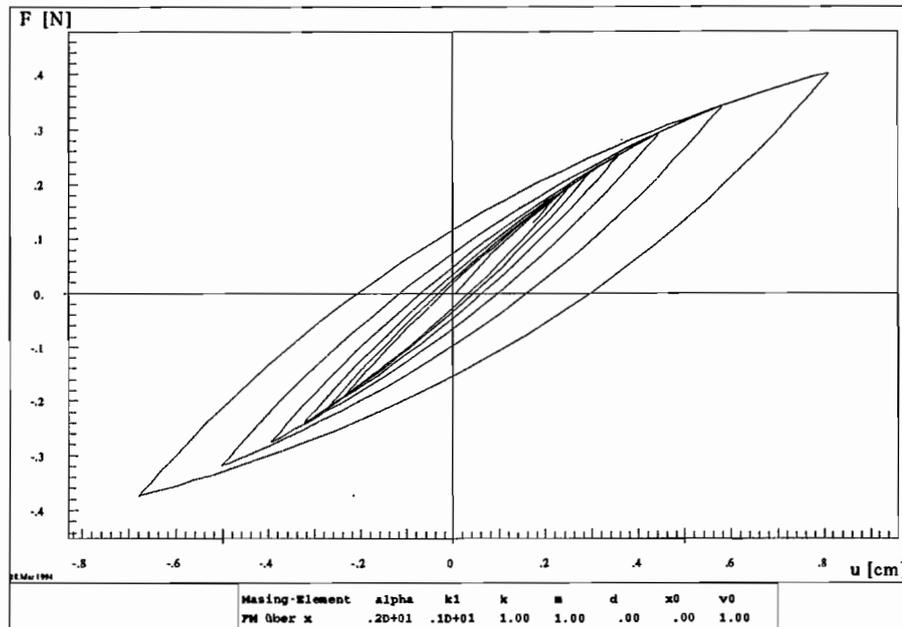


Abbildung 4.12: Masingdämpfung, $\alpha = 2$

Bei kleinerem α als im ersten Beispiel ergibt sich Bild 4.12, hier ist der Anteil der Prandtl-Stränge mit großen Haftkräften betont und deswegen die Hysterese eingengt worden, die Kraftasymptote liegt jetzt höher bei $\frac{1}{\alpha} = 0.5\text{N}$.

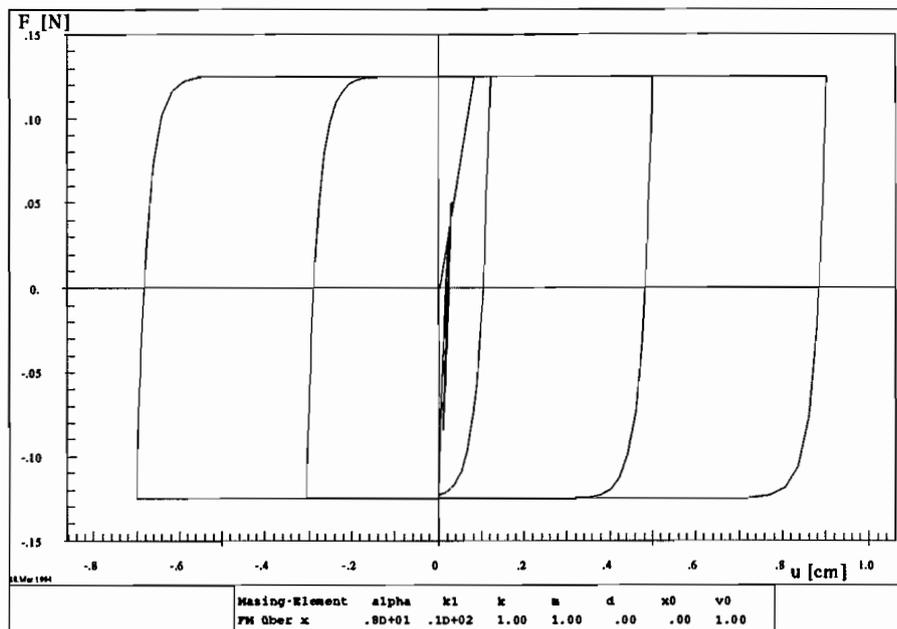
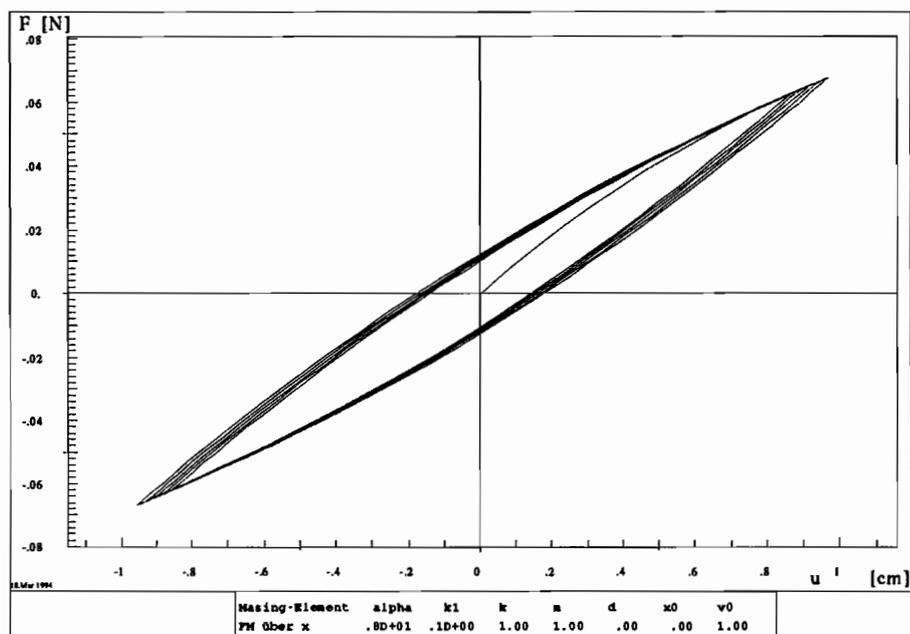
Es ist also bei *größerem* α mit einer Annäherung an das Verhalten des reinen Reibungsdämpfers zu rechnen, da auf diese Weise die kleinen Haftkräfte den größten Anteil an der Gesamtkraft des Elementes haben. Mit *kleinerem* α ist mit einem annähernd ungedämpften Verhalten (bei $d = 0$) zu rechnen, da dann die Stränge mit großen Haftkräften die wesentlichen Anteile an der Gesamtkraft des Elementes haben, in denen der Gleitzustand nie erreicht wird. Zu beachten ist die zur Änderung von α umgekehrt proportionale Änderung der Amplitude der Gesamtkraft.

Bei ansonsten identischen Werten ($\alpha = 8$) im Vergleich zum ersten Beispiel, aber dafür höherem k_1 , Bild 4.13, bleibt die Asymptote bei $\frac{1}{\alpha} = \frac{1\text{N}}{8} = 0.125\text{N}$ erhalten, es ändert sich nur die Form der Hysterese hin zum reinen Reibschwinger, da die Verteilungsfunktion,

$$\alpha e^{-\alpha \eta_{k+1}} = \alpha e^{-\alpha k_1 x}$$

die im Integral zur Berechnung der Gedächtnisfunktion enthalten ist, jetzt die Prandtl-Stränge mit kleinen Haftkräften stärker betont.

Mit geringerem k_1 , Bild 4.14, wird dementsprechend der Anteil des Masingelementes stärker betont, in dem Prandtl-Stränge mit großen Haftkräften enthalten sind. Im Vergleich zu Bild 4.13 fällt dabei auf, daß die Amplitudenabnahme durch die Verkleinerung

Abbildung 4.13: Masingdämpfung, $\alpha = 8, k_1 = 10$ Abbildung 4.14: Masingdämpfung, $\alpha = 8, k_1 = 0.1$

von k_1 wesentlich geringer ausfällt, das Dämpfungsvermögen bei konstantem α mithin proportional mit k_1 sinkt.

Werden die Größen $\nu = \frac{k_0}{k_1}$ als Steifigkeitsverhältnis und $\lambda = \alpha \hat{x}$ als Amplitudenmaß eingeführt, so ergibt sich für das logarithmische Dämpfungsmaß nach [63]:

$$\xi_z(\lambda, \nu) = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda - 2 + e^{-\lambda}(2 + \lambda)}{\nu \lambda^2 + 2 - 2e^{-\lambda}(1 + \lambda)}. \quad (4.14)$$

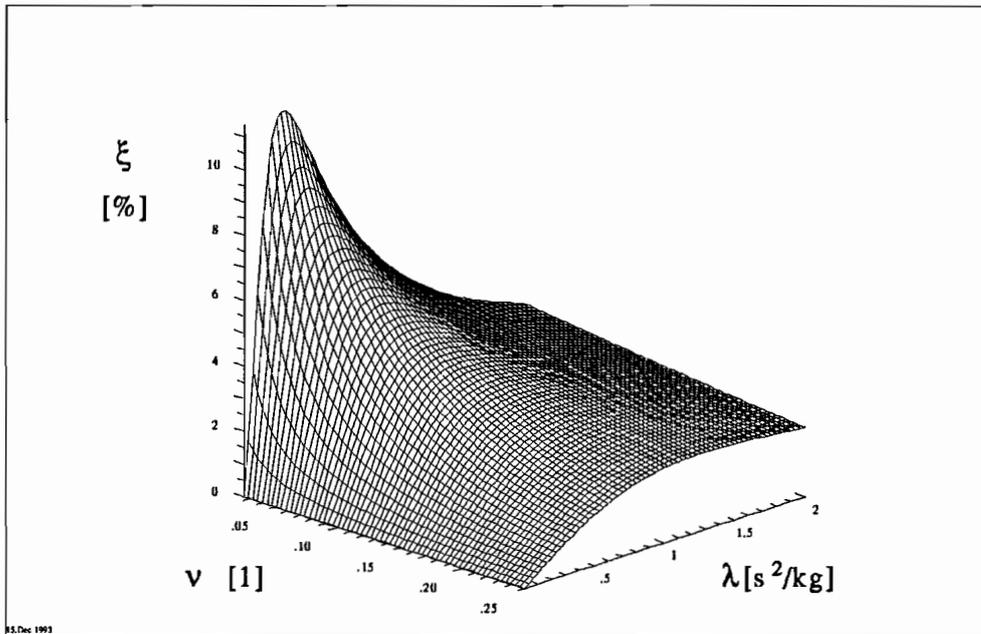


Abbildung 4.15: Charakteristik der Masingdämpfung

Dieses Dämpfungsmaß hat über λ und ν aufgetragen eine ausgeprägte Charakteristik (Bild 4.15). So ist deutlich die vorher gezeigte Abhängigkeit des Dämpfungsvermögens von k_1 bzw. jetzt ν zu erkennen, demgegenüber die Abhängigkeit von λ diesbezüglich wesentlich geringer ausfällt. Wohl aber ist mit einer Kombination von ν und λ eine maximale Dämpfung zu erreichen, die bei $\nu \ll 1$ und $\lambda \approx 1$ liegt. Bei sehr großen Amplituden ist wieder mit geringer werdender Dämpfung zu rechnen.

Im Extremfall sehr starker Dämpfung mit Masingelementen, also bei $\nu \ll 1$ und $\lambda \approx 1$, kann man in Zeitverlauf und Phasenebenendarstellung das bei Reibungsdämpfung zu erwartende „Steckenbleiben“ beobachten (Bild 4.16).

Zwar ist die Einhüllende der Schwingung keine Gerade mehr, wie beim reinen Reibschwinger, aber auch keine Exponentialfunktion wie beim viskos gedämpften Schwinger, Bild 4.17.

Wegerregung, Sweep

Das Masingelement, mit einem Sweep konstanter Amplitude wegerregt, zeigt wie andere reine Reibdämpfer ein frequenzunabhängiges Verhalten, Bild 4.18.

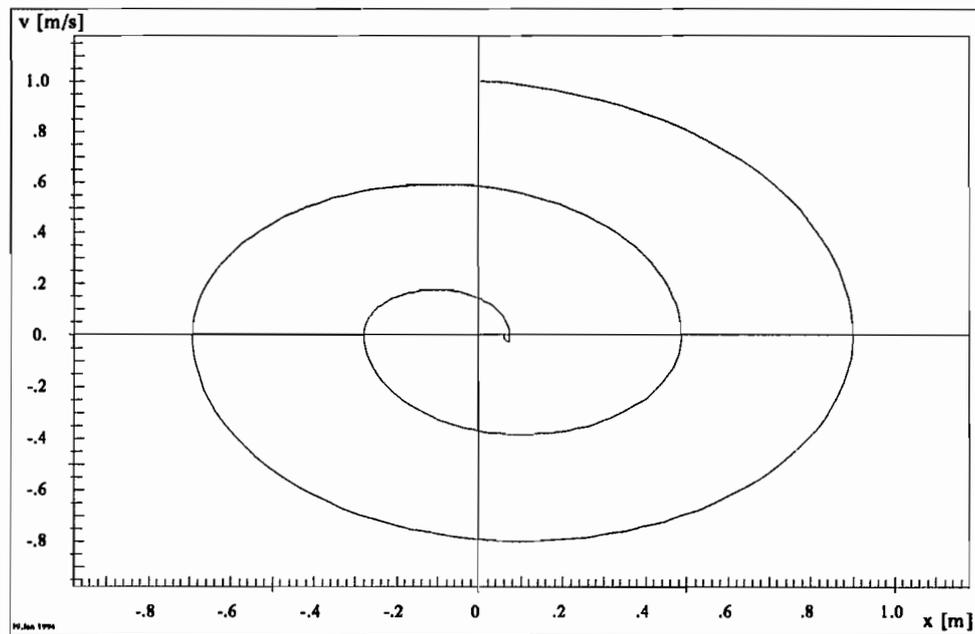
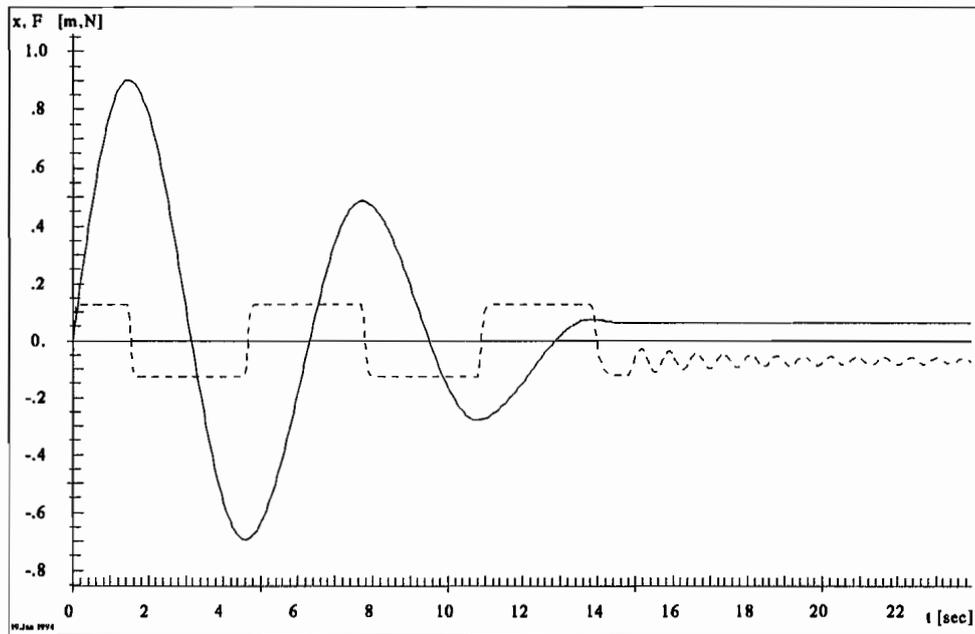


Abbildung 4.16: Extrem starke Masingdämpfung

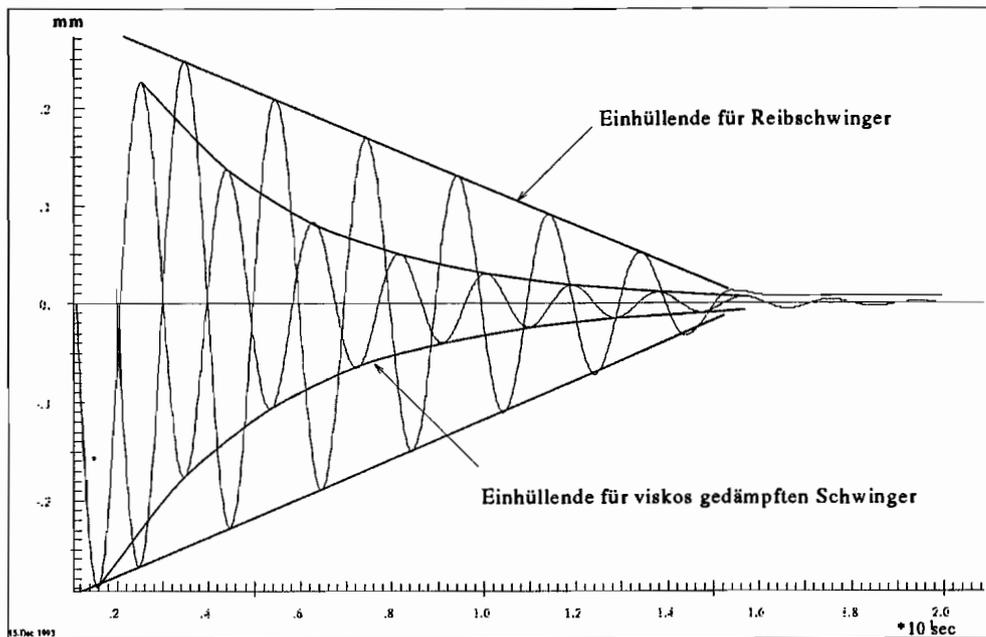


Abbildung 4.17: Vergleich der Einhüllenden von viskos gedämpftem Schwinger und reinem Reibschwinger

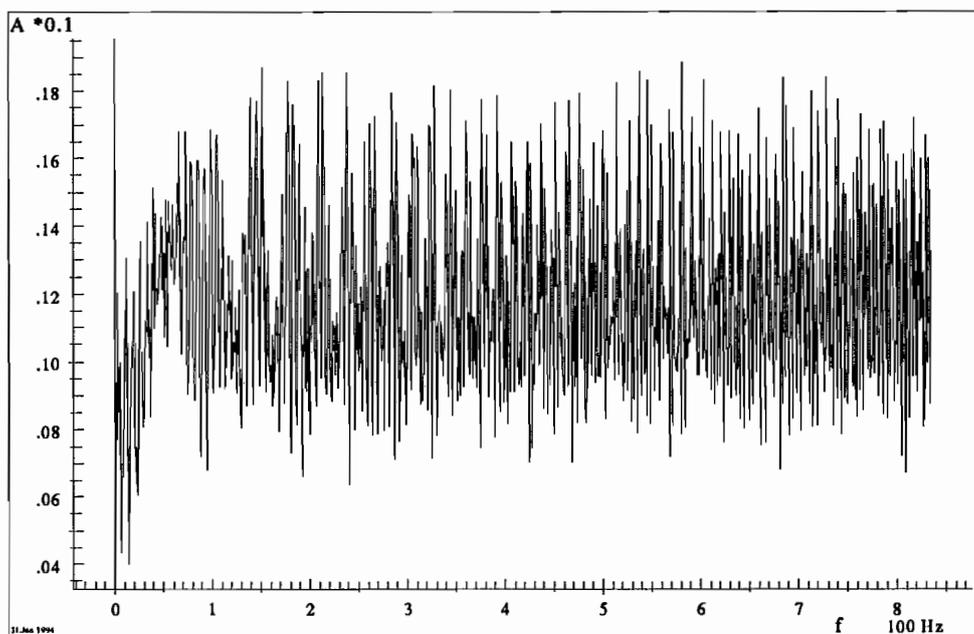


Abbildung 4.18: Masingelement, Sweep mit konstanter Amplitude

Kapitel 5

Anwendung des Masingelementes in der Methode der finiten Elemente

In diesem Kapitel soll aufgezeigt werden, welche Einsatzmöglichkeiten das Masingelement in der Strukturodynamik im Rahmen der Methode der finiten Elemente (FEM) besitzt. Das ist insofern besonders wichtig, als die FEM momentan die am weitesten verbreitete Methode der Behandlung der Strukturodynamik darstellt. Vielfach wird auch die modale Analyse eingesetzt, die aber für nichtlineare Systeme nicht generell anwendbar ist und insofern in ihrem Anwendungsbereich beschränkter ist. Bei schwach ausgeprägten Nichtlinearitäten kann es noch sinnvoll sein, die Vorteile der modalen Entkopplung zu nutzen, indem ein gewisser Fehler in Kauf genommen wird, aber bei z.B. ausgeprägten Oberwellen ist davon auszugehen, daß keine Linearisierung mehr in Kauf genommen werden kann.

Für den Einsatz des Masingelementes in FEM-Systemen lassen sich einige Vorbemerkungen machen:

- Die Art der einzusetzenden finiten Elemente wird von der betrachteten Struktur vorgegeben.
- Die Art der Einkopplung der Masingdämpfung ins Element ist letztendlich vom Material abhängig. Dieses bestimmt, welcher Mechanismus bzw. welche Zustandsgrößen die amplitudenabhängige Dämpfung verursachen. Beim Stahlbeton zum Beispiel ist vor allem die Biegung bzw. die daraus resultierende Krümmung wesentlich.

Sinnvoll ist hier das Vorgehen in den physikalischen Koordinaten der Elemente anstelle modaler Koordinaten, um auf Elementebene die Masingelemente integrieren zu können. An verschiedenen Elementtypen soll gezeigt werden, wie das möglich ist. Dabei wird davon ausgegangen, daß die FEM-Programme als Quelle vorliegen und eine direkte Einbindung auf Quellcodebasis möglich ist, nur im letzten Absatz wird kurz umrissen, wie eine Einbindung auf Objektcodebasis möglich ist.

5.1 Bisherige Ansätze

Viele bisherige Ansätze zur Berechnung nichtlinearer Dämpfung gingen von modal transformierten Systemen aus, um dann die nichtlinearen Einflüsse in modalen Koordinaten einzuführen, wie in Bild 5.1 gezeigt [63]. Zur Interpretation der Ergebnisse wurde dann eine Rücktransformation in physikalische Koordinaten vorgenommen.

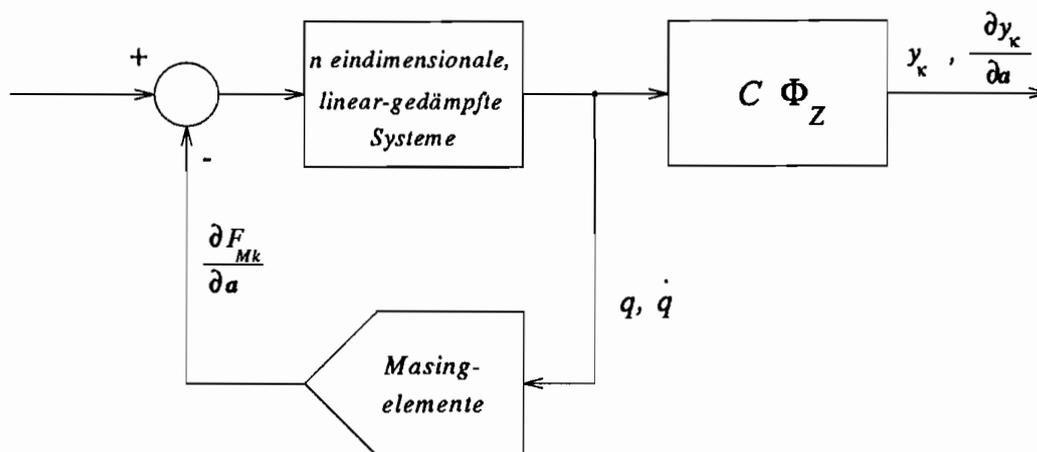


Abbildung 5.1: Blockschaltbild Rückführungsmodell

Problematisch bei dieser Vorgehensweise ist, daß die Modaltransformation nur für lineare Systeme zulässig ist. In modalen Koordinaten ermittelte Systemparameter, insbesondere diejenigen der nichtlinearen Systemanteile, können nicht verallgemeinert werden. Für eine möglichst breite, praxisorientierte Anwendung nichtlinearer Modelle ist es also erforderlich, in physikalischen Koordinaten zu arbeiten. Das Vorgehen in modalen Koordinaten ist bei nichtlinearen Systemen mehr oder weniger regelungstechnisch orientiert, da dort nur die Regelabweichung zwischen Messung und Simulation minimiert werden soll und die dazu erforderlichen Parameter weder zeitlich konstant noch bekannt sein müssen. Anders herum gesehen erlaubt das modale Modell zwar die sehr gute Anpassung der einzelnen (linearen) Eigenfrequenzen und Eigenformen mit Hilfe nichtlinearer Elemente in der Rückführung, aber beim Vorliegen nichtlinearer Systeme können die dabei auftretenden Oberschwingungen in modalen Koordinaten nicht beschrieben werden.

Die in modalen Koordinaten triviale Frage der Implementierung des Masingmodells erfordert in physikalischen Koordinaten eine genauere Überlegung bezüglich der Dämpfungsmechanismen. Durch die Entkopplung aus der Modalanalyse konnte nur jeder Eigenform ein Masingelement zugeordnet werden, im allgemeinen Fall aber sind verschiedenste Mechanismen der Dissipation zu erfassen, für Systeme mit vielen Freiheitsgraden. Wie die Dämpfung speziell durch das Masingelement auf Elementebene erfaßt werden kann, soll im Folgenden für einige einfache Elementtypen gezeigt werden.

5.2 Zugstab-Element

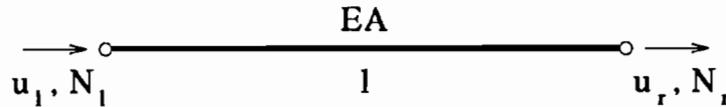


Abbildung 5.2: Zugstab-Element

Für diesem einfachsten Elementtyp ist wegen der Eindimensionalität der Mechanismus der amplitudenabhängigen Dämpfung klar, da nur Dehnungsverschiebungen der Knoten vorkommen. Damit ist die einzig mögliche Kopplung der Elementverschiebungen die Differenz der Knotenverschiebungen.

Die Parameter des Masingelementes ergeben sich somit als:

- $k_0 = \frac{EA}{l}$: die Zugsteifigkeit des Elementes wird als Parallelfeder des Masingmodells betrachtet, um eine einwandfreie Skalierung zu erreichen.
- $k_1 = \nu k_0$: die Federsteifigkeit der Prandtl-Stränge ergibt sich mit Hilfe des freien Parameters ν .
- $x = \frac{1}{l}(u_r - u_l)$ die für die Steuerung des Masingelementes wesentliche Zustandsgröße ist die Dehnung des Elementes.
- α ist der freie Parameter für die Bewertung der Prandtl-Stränge.

Damit ergibt sich das gewohnte Differentialgleichungssystem für Mehrfreiheitsgradsysteme:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_M \quad (5.1)$$

Die Masingkraft ist wiederum als Kraftvektor auf der rechten Seite eingeführt, legt man als Randbedingung $u_l = 0$ zugrunde, so ist die Matrizendifferentialgleichung auf die skalare Differentialgleichung eines Ein-Freiheitsgrad-Systems mit Masingelement zurückgeführt:

$$m\ddot{u}_r + d\dot{u}_r + ku_r = f + f_M \quad (5.2)$$

Ähnliche Verhältnisse treten bei allen eindimensionalen Strukturen oder Elementen auf.

5.3 Bernoulli-Balken-Element

Die Frage nach dem Dämpfungsmechanismus für die amplitudenabhängige Dämpfung ist hier schwieriger zu beantworten, da sowohl Durchbiegung als auch Neigung oder eine Kombination derselben als wesentliche Zustandsgrößen in Frage kommen. Hier soll exemplarisch anhand der mittleren Krümmung im Element gezeigt werden, wie die Integration durchgeführt werden kann.

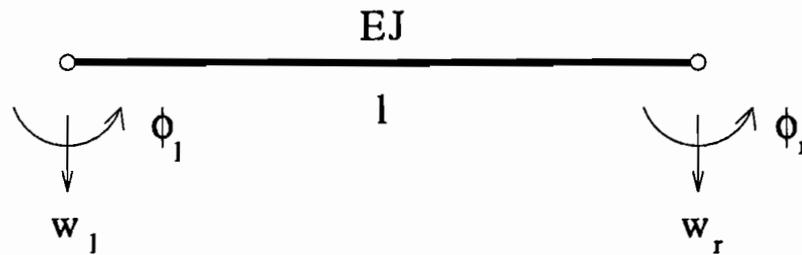
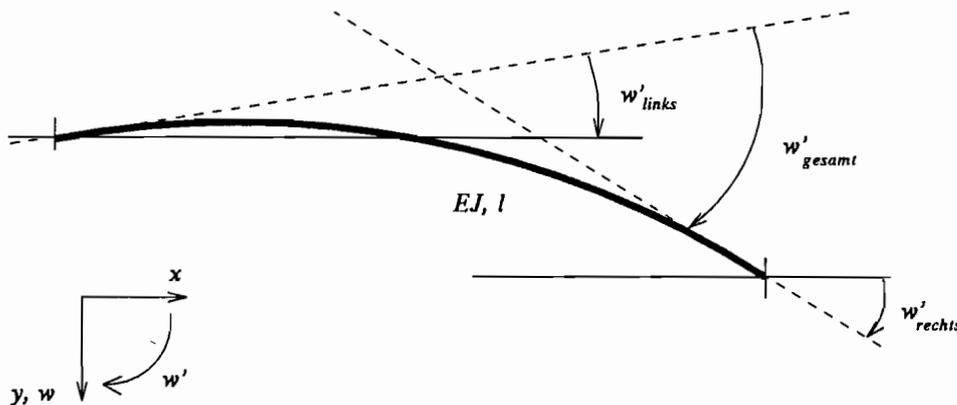


Abbildung 5.3: Bernoulli-Balken-Element

Die zur Verfügung stehenden Element-Verschiebungs- und Kraft-Vektoren sind:

$$\mathbf{u} = [\phi_l, w_l, \phi_r, w_r]^T \quad (5.3)$$

$$\mathbf{F} = [M_l, Q_l, M_r, Q_r]^T \quad (5.4)$$

Abbildung 5.4: Berechnung der mittleren Elementkrümmung \bar{w}''

Die mittlere Elementkrümmung läßt sich nun nach Bild 5.4 wie folgt berechnen:

$$\bar{w}'' = \frac{1}{l}(w'_r - w'_l) = \frac{1}{l}(\phi_r - \phi_l) \quad (5.5)$$

Diese Größe stellt nichts anderes dar als die auf die Elementlänge bezogene Differenz der Elementneigungen in den Knoten. Damit läßt sich nun eine generalisierte Masingkraft $F_M = F_M(\bar{w}'')$ berechnen, die als Moment in die Differentialgleichungen einzuführen ist. Das geschieht, indem das Differentialgleichungssystem für das Element auf der rechten Seite um einen Kraftvektor erweitert wird, in dem dieses Moment als äußere generalisierte Kraft enthalten ist:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} + [-F_M, 0, F_M, 0]^T \quad (5.6)$$

Die Systemmatrizen und Systemvektoren lassen sich danach auf gewohnte Weise zusammenstellen. Der einzige Eingriff in das FEM-Programm ist der Aufruf des Moduls, das die Masingkräfte berechnet und zum Vektor der äußeren Kräfte addiert. Dazu werden nur jeweils für jedes Masingelement die Randneigungen der beiden Knoten benötigt, die zum Balkenelement gehören.

Ein problematischer Grenzfall für die Berechnung der mittleren Elementkrümmung tritt dann auf, Bild 5.5, wenn beide Enden zwar die gleiche Neigung, aber eine unterschiedliche Durchbiegung aufweisen.

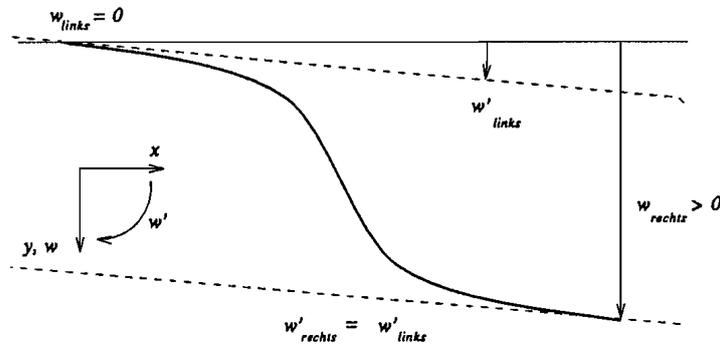


Abbildung 5.5: Grenzfall bei der Berechnung von \bar{w}''

Für die Berechnung dynamischer Probleme bedeutet das, daß eine Eigenform zu hoher Ordnung für die gewählte Diskretisierung auftritt. Das Problem läßt sich einerseits eliminieren, indem die Diskretisierung verfeinert wird, hier z.B. halbe Elementlängen gewählt werden, oder aber indem die zugehörigen hochfrequenten Anregungen gar nicht erst auftreten. Letzteres läßt sich durch die Wahl der Erregung des Systems oder durch Filterung der Meßsignale erreichen. Ein günstiger Einfluß auf die Aufrauhung des Verlaufs der mittleren Elementkrümmung ist es, daß eine auch in der Realität immer vorhandene viskose Dämpfung eben diese Rauigkeit einschränkt und in Verbindung damit auch die höheren Frequenzen entsprechend dämpft. Bei den hier eingesetzten Modellen wurde immer auch ein viskoser Dämpfungsanteil eingesetzt, nur zu Demonstrationszwecken ohne Viskosität gerechnet, da das die realen Verhältnisse nicht mehr wiedergibt.

5.3.1 Modellierung der Dämpfung von Stahlbetonbalken

Nach der Literatur [14, 17, 20, 45] und nach eigenen Versuchsergebnissen ist beim hier betrachteten Werkstoff Stahlbeton die Hauptdämpfungsursache für Schwingungen bei relativ niedrigen Frequenzen die Relativverschiebung zwischen Zementmatrix und Bewehrung. Insbesondere gilt das wenn eine vorhergehende Lastgeschichte Mikrorisse in der weniger zugfesten Zementmatrix verursacht hat [63]. Die dann auf die Grenzflächen zwischen Matrix und Bewehrung wirkenden Reibkräfte werden also von der Krümmung des Bauteils verursacht, die für eine Öffnung der Anrisse der Zementmatrix und Dehnung der Bewehrung sorgt. Bei den hier untersuchten balkenförmigen Strukturen, die schlank gehalten sind und deshalb in ihren linearen Systemanteilen gut mit einfachen FEM-Balkenelementen modelliert werden können, kann demnach die mittlere Elementkrümmung zur Steuerung der Reibeinflüsse herangezogen werden.

5.4 Plattenelement

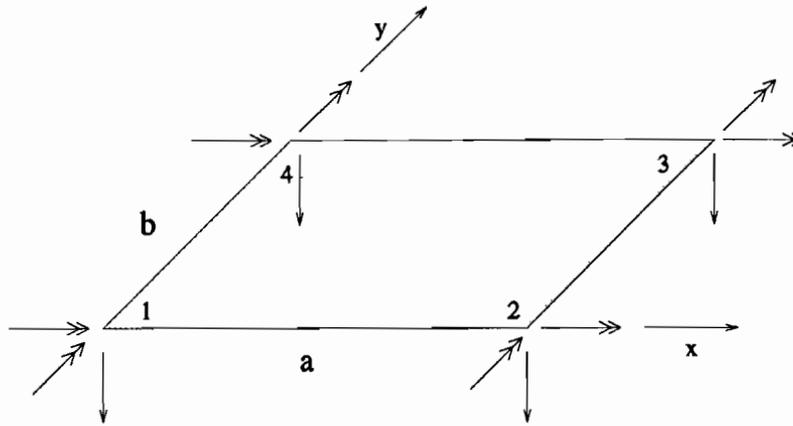


Abbildung 5.6: Plattenelement mit 12 Freiheitsgraden

Das einfachste Beispiel für ein Plattenelement ist das des inkompatiblen Rechteckelementes mit 12 Freiheitsgraden. An jedem der 4 Knoten des Elementes treten folgende Verschiebungsgrößen auf:

$$w_i \quad w_{i,x} \quad w_{i,y}$$

In diesem Plattenelement können auf einfache Art und Weise 4 Masingelemente integriert werden, indem die mittleren Krümmungen entlang der Außenseiten des Rechteckes jeweils zur Ansteuerung eines Masingelementes benutzt werden. Die Berechnung der vier Momente aus den mittleren Krümmungen wird wie folgt vorgenommen:

$$\begin{aligned} M_{12x} &= F_{Masing}(\bar{w}''_{12}) = F_{Masing}((w_{2,x} - w_{1,x})/a) \\ M_{43x} &= F_{Masing}(\bar{w}''_{43}) = F_{Masing}((w_{3,x} - w_{4,x})/a) \\ M_{14y} &= F_{Masing}(\bar{w}''_{14}) = F_{Masing}((w_{4,y} - w_{1,y})/b) \\ M_{23y} &= F_{Masing}(\bar{w}''_{23}) = F_{Masing}((w_{3,y} - w_{2,y})/b) \end{aligned}$$

Diese Momente werden im Elementkraftvektor einsortiert (die Normierungen dienen nur der Vereinfachung der Schreibweise):

$$\mathbf{F} = [0, M_{12x}, -M_{14y} \frac{a}{b}, 0, -M_{12x}, M_{23y} \frac{a}{b}, 0, -M_{43x}, -M_{23y} \frac{a}{b}, 0, M_{43x}, -M_{14y} \frac{a}{b}]^T \quad (5.7)$$

Mit Hilfe dieses zusätzlichen Kraftvektors auf der rechten Seite des Differentialgleichungssystems kann nun wieder die Systemgleichung aufgestellt werden. Anders als beim Standardfall ist wiederum nur, daß die Berechnung einer neuen rechten Seite in jedem Zeitschritt der Lösung erforderlich ist. Allgemeine Lösungen gibt es wegen der Nichtlinearität nicht mehr.

5.5 Verwendung des Masingelementes als Modul in Verbindung mit FEM-Objektcode

Für viele Fälle ist die Integration bestimmter Modelle in bestehende Programmsysteme wünschenswert, aber kein Quellcode vorhanden. Ist aber im Rahmen dieser Programmsysteme eine Zeitintegration möglich und sind die Zustandsgrößen nach jedem Zeitschritt verfügbar, so kann durch eine Aktualisierung der rechten Seite eine prinzipiell beliebige Nichtlinearität integriert werden. Dazu muß nur der Lastvektor der äußeren Lasten neu erstellt werden, die Systemmatrizen ansonsten bleiben unberührt. Damit ist eine Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen über die Zeitintegration möglich, bei der im Vergleich zu Lastinkrementverfahren, die die Elementmatrizen für jeden Lastschritt neu aufbauen – um z.B. nichtlineare Steifigkeiten zu modellieren – der Rechenaufwand relativ gering bleibt.

Kapitel 6

Zur nichtlinearen Identifikation

6.1 Allgemeines zur Identifikation

Zuerst soll einmal der Versuch unternommen werden, den Begriff der Identifikation als Oberbegriff abzuklären und abzugrenzen, bevor die Unterteilung seiner Bestandteile versucht wird.

Bei der Analyse technischer Systeme ist die prinzipielle Fragestellung die von **Ursache** und **Wirkung** an einem **System**. Die exakte Zuordnung dieser Begriffe ist schwierig, da es keine reine Ursache gibt, denn zum Beispiel sind die Erregungskräfte an einem mechanischen System niemals unendlich groß, es kann keine genaue Verschiebung vorgegeben werden. Die beabsichtigte Wirkung wirkt demnach wieder auf die Ursache zurück. Auch ist es prinzipiell nicht möglich, ein System zu beobachten, ohne die Zustandsgrößen desselben dabei gleichzeitig zu beeinflussen. Wissenschaftlich formuliert wurde dieses Axiom von Werner Heisenberg in Form seiner Unschärferelation. Zugleich stellt das beobachtende System immer auch ein System mit eigenem Verhalten dar, was die Beobachtung zusätzlich noch einmal verfälscht. In allen diesen Bereichen bringen Ungenauigkeiten und Rauschen zusätzliche unvermeidbare Verfälschungen mit sich. Den objektiven Meßwert an sich gibt es also nicht. Diese Einschränkungen sind bei jeder Auswertung von Meßergebnissen, wie z.B. auch bei der Identifikation, zu beachten.

Die oben genannte Ursache wird in der Technik meist mit dem Begriff **Eingang**, die Wirkung mit **Ausgang** bezeichnet. Wenn das System selbst mit Ein- und Ausgang bekannt ist, ist keine Analyse mehr erforderlich. Ist einer der drei Anteile gesucht und sind zugleich zwei bekannt, gibt es vier Möglichkeiten, hier vorzugehen (Bild 6.1): Die vier Fälle sind:

1. Ein- und Ausgangsverhalten eines zu entwickelnden Systems sind vorgegeben, z.B. in Form eines Frequenzganges beim Filterentwurf. Gesucht ist dann das System, das diese Vorgaben erfüllt. Das entsprechende Verfahren heißt dann **Systementwurf**.
2. Sind System, Modell und Systemausgang bekannt, kann man auch von einem **Beobachter** sprechen, denn über eine Modellierung eines bekannten Systems und dessen bekannte Ausgangsgrößen wird beim Beobachter der Systemeingang rekonstruiert.

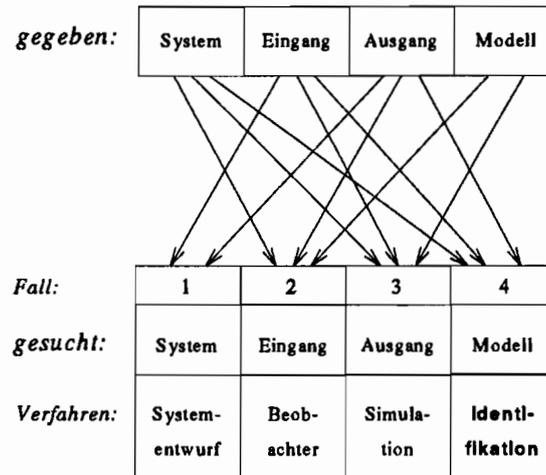


Abbildung 6.1: Analyse am realen System

Besonders interessant ist die Anwendung des Beobachters bei Messung weniger Ausgangs- oder Zustandsgrößen zur Rekonstruktion einer größeren Anzahl nicht zugänglicher Eingangsgrößen.

- Bei bekanntem Eingang und gegebener Modellierung wird der Systemausgang gesucht. Mit einem Integrationsalgorithmus kann daraus der Systemausgang in Form einer **Simulation** berechnet werden.
- Sind Eingangs- und Ausgangsgrößen eines Systems, nicht aber das System selbst, bekannt und wird ein Modell für das System gesucht, kann dieser Vorgang als **Identifikation** bezeichnet werden. Mit Hilfe eines aufgrund der Vorkenntnisse als geeignet angenommenen Modells wird versucht, dessen Parameter dem Verhalten des realen Systems anzupassen. Die Auswahl des geeigneten Modellansatzes kann Teil eines entsprechenden Verfahrens sein, die Identifikation muß sich nicht auf die Bestimmung der Parameter eines Modells beschränken.

Der Begriff der Identifikation kann davon ausgehend als Oberbegriff über eine ganze Reihe von Vorgängen genommen werden, in deren Verlauf versucht wird, ein reales System anhand der Ein- und Ausgangsgrößen theoretisch und praktisch zu erfassen (Bild 6.2).

Der erste Schritt einer Identifikation ist demnach die **Analyse** von Ein- und Ausgangsgrößen, teilweise auf der Basis von a-priori-Kenntnissen wie z.B. der Geometrie des Systems oder der Werkstoffeigenschaften, bei der die nötigen Informationen über ein reales System gewonnen und verarbeitet werden. Diese stehen danach für eine theoretische Erfassung zur Verfügung. Die Verarbeitung der Informationen führt zur **Modellbildung**, die zuerst nur auf theoretischer Basis stattfinden kann.

Im nächsten Schritt der **praktischen Modellierung** wird aus dem theoretischen Modell ein für die numerische Bearbeitung und Simulation geeignetes Rechnermodell abgeleitet. Dieser Schritt verlangt Überlegungen in Bezug auf die notwendigen und hinreichenden Bestandteile der Realisierung im Rahmen des konkreten Problems. Es kann also durchaus sein, daß bestimmte Aspekte des realen Systems, z.B. dessen Kontinuität, gar nicht mehr

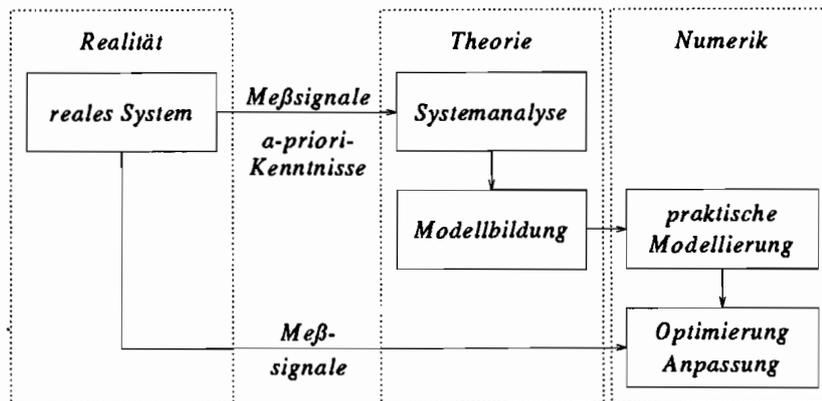


Abbildung 6.2: Blockschema Identifikation

übernommen werden, das Modell also diskret aufgebaut ist. Bei signaltheoretischen Fragestellungen steht hier die Ordnung des Modells im Vordergrund, in der Regelungstechnik die Stabilität und in der Mechanik oft die Anzahl der Modellfreiheitsgrade, da häufig Methoden zur praktischen Modellierung herangezogen werden, die auf einer Diskretisierung beruhen.

Im letzten Schritt dann wird das numerische Modell mit Hilfe von aus dem realen System gewonnenen Daten (Ein- und Ausgänge) **optimiert bzw. angepaßt**, um all die Vereinfachungen der vorausgegangenen Schritte auszugleichen und eine optimale Übereinstimmung mit der Realität zu erzielen. Insofern wären theoretisch Optimierungen oder Anpassungen überflüssig für den Fall, daß vom realen System schon genügend genaue Kenntnisse vorhanden sind. Das ist aber insbesondere bei komplexen Systemen und/oder erhöhten Genauigkeitsanforderungen selten der Fall.

Für den nichtwissenschaftlichen Anwender der Identifikation liegt wegen des umfangreichen Gebietes der Einsatz externer Forschungsmittel oder von Expertensystemen nahe, um ohne zu hohen finanziellen und mit vernünftigen Zeitaufwand zu Resultaten zu gelangen. Es gibt erste Ansätze zu Expertensystemen insbesondere für das Gebiet der Regelungstechnik, z.B. [52], um dem Anwender einen gangbaren Weg durch die Vielzahl der Methoden und Ansätze aufzuzeigen, insbesondere eine Vereinfachung und Beschleunigung von Reglersynthese und Reglerentwurf. Problematisch ist dabei bisher, daß nur spezielle Klassen von Systemen jeweils zusammenzufassen sind, die ganze Vielfalt der in der Mechanik denkbaren Probleme kann nicht mit einem einzigen Softwarepaket abgedeckt werden.

Die ersten drei Schritte der Identifikation nach diesem Schema sind im Rahmen dieser Arbeit auf andere Kapitel verteilt, hier soll nun auf die Realisierung des vierten und letzten Schrittes eingegangen werden.

6.1.1 Optimierung

Ziel aller Optimierungs- und Anpassungsmethoden ist es, irgend etwas zu verbessern, anzupassen oder genauer zu beschreiben. Da das Werkzeug für diese Methoden der Digitalrechner ist, ist Voraussetzung, daß dieses „Etwas“, dieses Problem, diese Gleichung

oder dieses Modell in Form eines digital programmierbaren Algorithmus abbildbar ist. Außerdem muß die Frage: „Was ist gut?“ die Form eines ebenfalls im Digitalrechner darstellbaren Kriteriums annehmen können, z.B. als Fehlerfunktion. Meist ist diese Fehlerfunktion abgeleitet aus einer Abweichung von einem Zielwert oder einem Zielverlauf wie bei einer Meßwertreihe. Aufgrund anderer Meßgrößen kann sich für das gleiche Modell ergeben, daß eine unzureichende Fehlerfunktion keine guten Resultate zuläßt, da sie nicht mehr die eigentlich gewünschten Kriterien zur Geltung bringen kann. Der Verfahrensablauf insgesamt läßt sich in einige grobe Unterabschnitte einteilen, Bild 6.3, wobei die fett eingezeichneten Elemente für Anteile stehen, in denen problemspezifische Vorgaben oder Modellierungen erforderlich sein können.

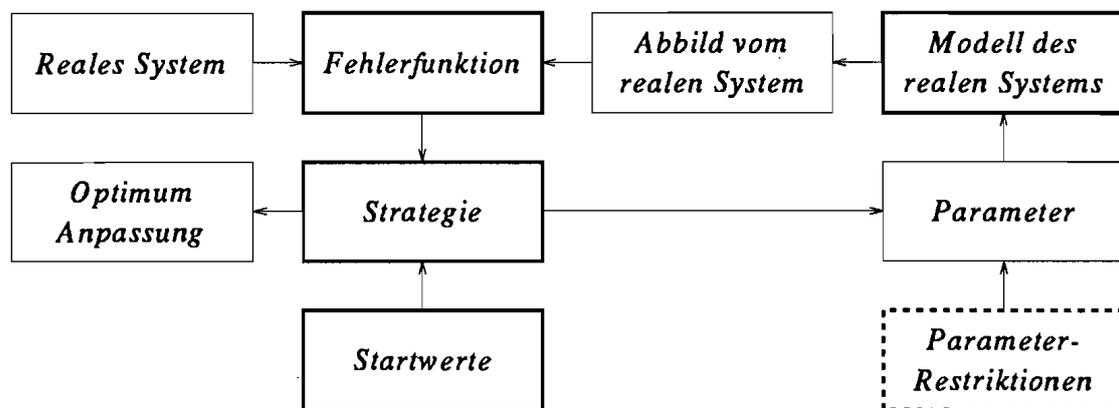


Abbildung 6.3: Blockschema Optimierung/Anpassung

Erforderliche Vorgaben für eine Optimierung sind:

- Der Startvektor für die Parameter.
- Die Optimierungsstrategie zur Erzeugung neuer Parametersätze.
- Die Fehlerfunktion zur Qualitätsanalyse eines Parametersatzes, z.B. anhand von Vergleichen mit Meßwerten.
- Das Modell des realen Systems, das auch eine rein theoretisch-mathematische Gleichung sein kann.
- Die Restriktionen der Parameter.

Rein nebensächlich ist im Verlauf des Vorgehens die Frage, ob man minimieren oder maximieren soll, da das durch Multiplikation des Fehlermaßes mit -1 ineinander überzuführen ist, oder wie das absolute Optimum definiert ist. Problematisch bei nichtlinearen Modellen ist das Auftreten von lokalen Extrema, was besondere Strategien erforderlich macht. Die Strategie muß mit der Fehlerfunktion abgestimmt sein, um jeweils einen „guten“ neuen Parametersatz zu bekommen, der das mit dem Modell zusammen erhaltene Abbild, in Form von Zustandsgrößen z.B., so verändert, daß die Fehlerfunktion einen besseren Wert annimmt. Für den Beginn ist die Vorgabe von Startwerten erforderlich, ob zufallsverteilt oder gezielt, das ist eine Frage der Vorkenntnisse. Bei Verfahren mit Beschränkungen der

Parameterintervalle (engl. constrained) ist für jeden Parametersatz die Einhaltung der entsprechenden expliziten oder auch impliziten Bedingungen zu garantieren. Im folgenden soll nun die Einteilung der Optimierungsverfahren nach groben Kriterien gegeben werden. Für eine generelle Klassifizierung der Verfahren kann man zuerst anhand der Strategie nach Gradienten- und Suchverfahren unterscheiden:

- **Gradientenverfahren** benötigen für die Verbesserung eines n -dimensionalen Parametervektors \mathbf{p} einer Funktion f im \mathbb{R}^{n+1} deren Gradienten $\mathbf{g} = \nabla f$. Diese Verfahren funktionieren nur bei linearen Funktionen f exakt, da es dann genau eine Lösung gibt. Für nichtlineare Funktionen kann mit bereichsweiser Linearisierung und Bildung eines lokalen Gradienten iterativ gearbeitet werden. Bei Funktionalen kann es schwierig oder sogar unmöglich sein, einen Gradienten zu berechnen, oder es gibt eine unbekannte Anzahl von lokalen Extrema, bei denen das Gradientenverfahren stagniert, weshalb dann Suchverfahren in Frage kommen.
- **Suchverfahren:** Hierbei wird die genaue Topologie der durch f im \mathbb{R}^{n+1} gebildeten Hyperfläche als unbekannt angenommen und deswegen versucht, auf andere Art und Weise einen Weg zum Optimum bzw. zur Lösung zu finden. Die eingesetzten Strategien benützen häufig etwas, das man auch als empirischen Gradienten bezeichnen kann, um Rechenzeit zu sparen. Völlig ohne Strategie kommen Monte-Carlo-Methoden aus, die im Roulette-Verfahren eine Lösung gewinnen sollen, dabei aber sehr unwirtschaftlich mit der Rechenzeit umgehen. Insbesondere bei anspruchsvollen Problemen und großen oder unbeschränkten Parametergebieten muß eine Strategie den Aufwand verringern helfen.

Außerdem kann nach beschränkten (constrained) und unbeschränkten (unconstrained) Parameterintervallen unterschieden werden:

- **Beschränkte Parameterintervalle** (constrained) sind vor allem für physikalische Problemstellungen sinnvoll, oder auch wenn relativ gute Startwerte oder Startintervalle vorliegen. So ist es bei mechanischen Problemen natürlicherweise gegeben, daß alle Massen, Dämpfungen und Steifigkeiten immer größer als Null bzw. positiv definit sind, was in Form von Beschränkungen für die Verhinderung sinnloser Rechenläufe sorgt.
- **Unbeschränkte Parameterintervalle** (unconstrained) kommen nur für sehr gut konvergierende Problemstellungen in Frage, bei denen die Aufgabe rein mathematischer Natur ist oder für die keine Startintervalle vorgegeben werden können.

Zum Lösungsverhalten der Optimierung bezüglich der constraints einige Bemerkungen:

- Das Gebiet der Restriktionen sollte konvex sein, damit keine zusätzlichen lokalen Minima am Rand entstehen. Konvex ist ein Gebiet dann, wenn es keine zwei Punkte \mathbf{a} und \mathbf{b} im Gebiet gibt, deren Verbindungsgerade teilweise oder ganz außerhalb des Gebietes liegt (Bild 6.4): Dadurch erst entstehen zusätzliche lokale Maxima wie die hier gezeigten zwei Punkte an den Spitzen des mondförmigen nichtkonvexen Gebietes.

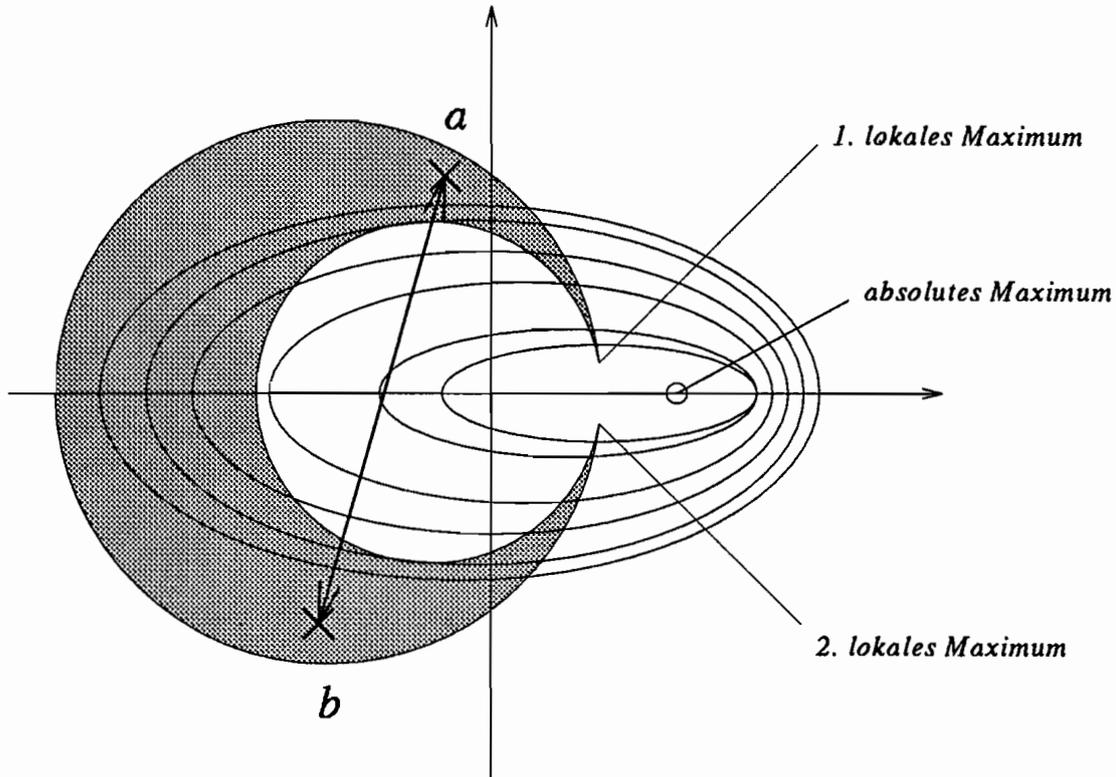


Abbildung 6.4: Nichtkonvexe Restriktionen

- Es ist möglich, daß die im \mathfrak{R}^{n+1} aufgespannte Hyperfläche lokale oder absolute Maxima am Rande des Restriktionsgebietes oder ganz außerhalb besitzt (Bild 6.5). Diese können nur dann sicher als Lösungen ausgeschlossen werden, wenn ihre Parameter physikalisch sinnlos sind. Die Restriktionen, die nur aufgrund von Schätzungen oder aufgrund von Plausibilitätserwägungen angenommen werden, sind also mit großer Vorsicht zu betrachten und gegebenenfalls ist das Restriktionsgebiet zu erweitern, auch wenn das mit erhöhtem Rechenzeitbedarf bezahlt werden muß.

6.2 Beschreibung des vorliegenden Problems und Wahl des Verfahrens

Der vorliegenden Optimierungsaufgabe liegt ein FEM-Modell mit eingebauten nichtlinearen Masingelementen zugrunde. Dieses Modell soll die amplitudenabhängige Dämpfung von Stahlbeton modellieren. Die Parameter des Modells werden an Meßwerte angepaßt; das führt zu einem Fehlerfunktional im \mathfrak{R}^{n+1} , dessen Topologie im allgemeinen nicht bekannt sein kann. Die für eine eindeutige Lösung des Maximalwertproblems der Optimierung erforderliche konkave Topologie des Funktionals ist nicht erfüllbar, wohl aber kann der Raum der Parameter konvex definiert sein. Es gibt danach sowohl die Möglichkeit, daß unzulässige „noch bessere“ Optima existieren, als auch eine Vielheit der Extrema im Gebiet der Parameter.

Da alle Parameter physikalische Bedeutungen haben, ist es sinnvoll, Optimierungsverfah-

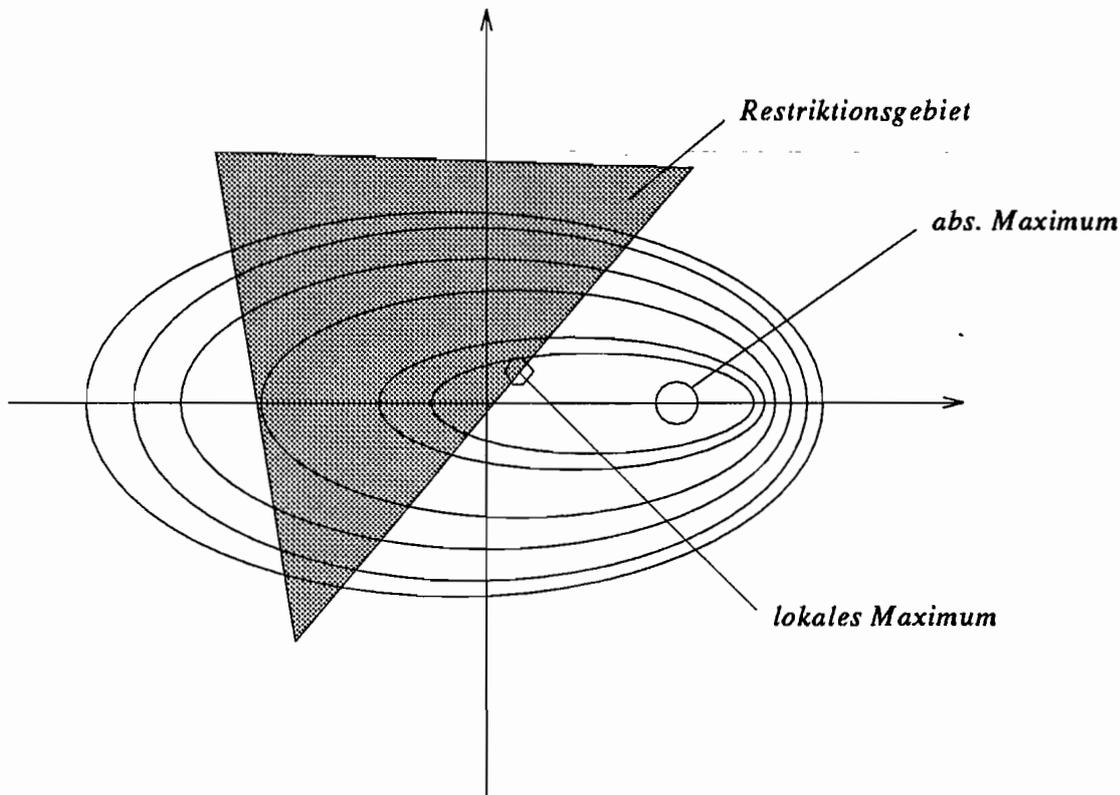


Abbildung 6.5: Konvexe Restriktionen

ren mit Restriktionen anzuwenden. Damit können dann alle Vorkenntnisse leicht eingebracht werden, die erforderliche Rechenzeit läßt sich signifikant reduzieren. Versuche, die festen Restriktionen durch penalty-Terme im Funktional zu ersetzen, um dann mit Verfahren ohne Restriktionen arbeiten zu können, ergaben keine zufriedenstellenden Resultate. Das Problem liegt dann in der zwangsläufig willkürlichen Bemessung der penalty-Terme [62].

Infolge der unbekanntenen, da teilweise unstetigen Gradienten des Funktionals ist es nicht mehr möglich, Gradientenverfahren einzusetzen. Eine Optimierung in modalen Koordinaten scheidet wegen der Ungültigkeit der Modaltransformation für die vorliegenden nichtlinearen Systeme ebenfalls aus.

Das gewünschte Ergebnis der Optimierung sind hier physikalische Parameter, deshalb sind Verfahren wie der in der Regelungstechnik eingesetzte Kalman-Filter ungeeignet, da sie mit veränderlichen Parametersätzen über der Zeit arbeiten, anstatt konstante Ergebnisse zu liefern.

Für die vorliegende Arbeit kamen somit nur noch Suchverfahren mit Restriktionen in Betracht. Versuche mit vorkonfektionierten Optimierern [54], ergaben, daß das complex-Verfahren von Box [9] die besten Eigenschaften für die hier eingesetzten Funktionale zu haben schien. Vielleicht ist das darauf zurückzuführen, daß das Verfahren im Vergleich zu anderen, z.B. Hooke-Jeeves [41], nach Bedarf mehr Punkte mit in die Strategie einbezieht. Es war allerdings nicht leicht, gute Ergebnisse zu erzielen, denn zu oft scheiterte das Verfahren an scheinbar lokalen Minima, um dann wegen Überschreitung der maxima-

len Anzahl der Iterationen abzurechnen. Deshalb wurde nach den Angaben von [9] und [41] das Verfahren programmiert und anschließend modifiziert. Durch die Modifikationen sollte eine größere Abbruchsicherheit erzielt werden. Die Evolutionsmethode nach [61] oder [67] ergab infolge einer offensichtlich nicht optimalen Abstimmung zwischen Funktional und Strategien einen erheblich höheren Rechenzeitbedarf um etwa Faktor 4-5 für eine vergleichbare Verbesserung.

6.3 Das Complex-Verfahren

Das Complex-Verfahren [9] ist eine Erweiterung des Simplex-Verfahrens von Nelder und Mead um Restriktionen für die Parameter. Voraussetzung für das Verfahren ist die Vorgabe eines Zielfunktionals, der impliziten und expliziten Restriktionen für die m Parameter und von n (meist $m = 2n$ empfohlen) Startvektoren für die Optimierung (in Bild 6.6: $n=7$), die alle die impliziten und expliziten Restriktionen erfüllen müssen. Parameter, die natürlicherweise keinen Restriktionen unterliegen, müssen mit „sicheren“ Grenzen beschränkt werden.

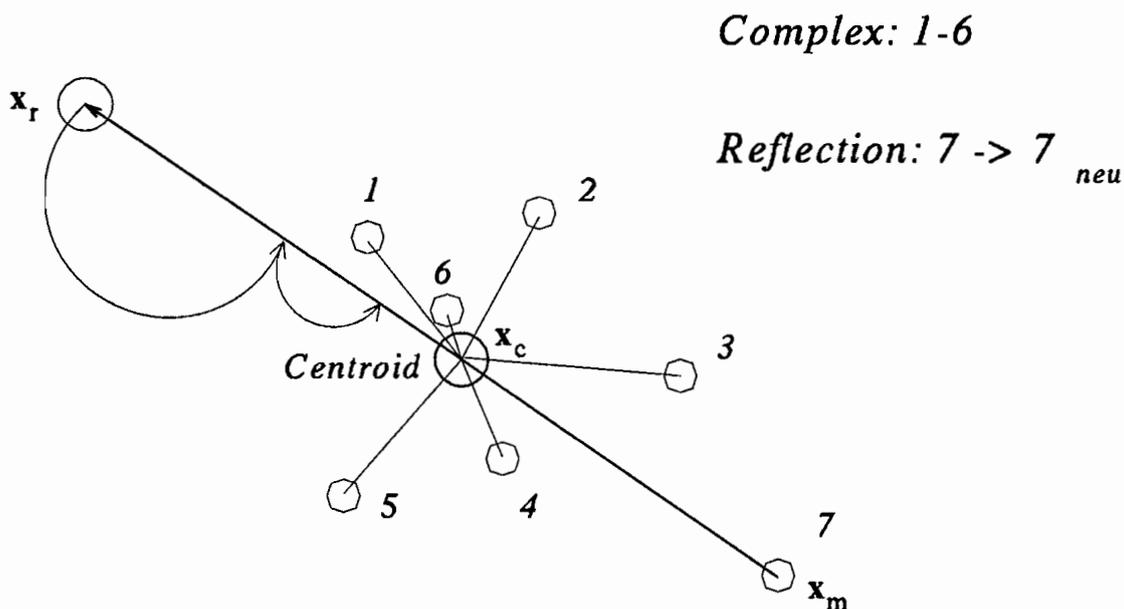


Abbildung 6.6: Complex-Verfahren mit $m = 2$ und $n = 7$

Im ersten Arbeitsschritt wird für jeden der n Startvektoren das Funktional ausgewertet, und die Startvektoren werden nach der Qualität dieser Ergebnisse sortiert. Die $m - 1$ besten Punkte (im Bild: 1-6) bilden zusammen den „complex“, nach dem das Verfahren benannt ist, ein Polyeder im \mathfrak{R}^m . Der Schwerpunkt dieser $m - 1$ besten Punkte, der centroid x_c ,

$$\mathbf{x}_c = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{x}_i \quad (6.1)$$

ist dann der Punkt, an dem der schlechteste Punkt \mathbf{x}_m gespiegelt wird mit einem Reflektionsfaktor α :

$$\mathbf{x}_r = (1 + \alpha) \mathbf{x}_c - \alpha \mathbf{x}_m . \quad (6.2)$$

Dieser Schritt ist nun der Kern der Optimierungsstrategie des Complex-Verfahrens: Es steht dahinter die Annahme, daß topologisch vom schlechtesten Punkt \mathbf{x}_m aus gesehen „hinter“ dem Schwerpunkt der anderen Vektoren bessere Werte zu erhoffen sind.

Für den neuen Parametervektor \mathbf{x}_r muß nun die Einhaltung der Restriktionen überprüft werden. Sollte dabei eine Verletzung der expliziten Restriktion im Parameter i festgestellt werden, so wird jeweils folgendermaßen korrigiert:

$$p_i = r_i \pm \delta, \quad (6.3)$$

das heißt, der Wert wird um einen Betrag δ in den zulässigen Bereich verlegt. Wird eine Verletzung der impliziten Restriktionen festgestellt, so wird der Abstand von \mathbf{x}_m zu \mathbf{x}_c halbiert,

$$\mathbf{x}_r = (\mathbf{x}_r + \mathbf{x}_m)/2 \quad (6.4)$$

bis ein zulässiger Punkt erreicht worden ist. Ist der Bereich der Restriktionen konvex, so kann es dabei keine Schwierigkeiten geben. Mit dem zulässigen \mathbf{x}_r wird nun das Funktional ermittelt und anschließend überprüft, ob eine Verbesserung gegenüber dem alten Wert von \mathbf{x}_m erreicht wurde. Ist das nicht der Fall, so wird wieder halbiert wie bei der Verletzung der impliziten Restriktionen und neu berechnet. Nach einer gewissen Anzahl von solchen Wiederholungen wird das Verfahren dann wegen schlechter Konvergenz abbrechen, wenn keine Verbesserung erzielt werden kann.

Ist aber eine Verbesserung gegenüber dem alten Zustand erreicht worden, so wird neu sortiert und die Konvergenz getestet. Dazu muß ein Kriterium prüfen, ob alle m Werte in einer Umgebung mit dem Radius ϵ liegen und ob die letzten Verbesserungen nur eine sehr geringe Verbesserung gebracht haben. Die genauen Werte für das Kriterium muß der Anwender jeweils selbst festlegen, je nach gefordertem Genauigkeitsgrad usw. Ist Konvergenz eingetreten, so wird abgebrochen mit der Ausgabe der Ergebnisse. Ist keine Konvergenz eingetreten, wird wieder mit der Bildung von Centroid \mathbf{x}_c und Reflektion \mathbf{x}_r begonnen.

6.3.1 Erforderliche Vorgaben für das jeweilige Optimierungsproblem

Einige Angaben benötigt das Complex-Verfahren vor dem Start, die, wie oben beschrieben, nicht in allgemeiner Form vorgegeben werden können:

- Die Startwerte wurden hier für einen ersten Vektor über eine Steuerdatei fest vorgegeben, für die anderen $m - 1$ Vektoren wurde die Koordinate j des i -ten Vektors mit Pseudozufallszahlen rnd wie folgt erstellt:

$$x_{ij} = x_{uij} + (x_{oij} - x_{uij}) * rnd \quad (6.5)$$

x_{oij} und x_{uij} sind dabei die obere und untere explizite Grenze für die jeweilige Komponente i des Vektors j . Damit konnte einerseits ein erster vorbestimmter Vektor auf jeden Fall eingegeben werden, der z.B. aus einer vorhergehenden Optimierung stammte und so noch verbessert werden sollte. Andererseits ergab die Streuung der Parameter eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß nicht nur ein sehr kleiner Bereich abgedeckt wurde, in dem dann z.B. ein relativ schlechtes lokales Minimum liegen kann.

- Die Steuergrößen für die Reflektion α , den Konvergenzradius ϵ , die maximale Anzahl der Rückschritte $itmax$ und das δ für die Korrektur der Verletzung expliziter Restriktionen sind über die gleiche Steuerdatei wie der erste Startvektor definiert und müssen nach Bedarf und Ergebnissen modifiziert werden.
- Implizite Restriktionen werden über eine spezielle Routine erfaßt und müssen nach Bedarf individuell programmiert werden.
- Explizite Restriktionen werden über die Steuerdatei vorgegeben.

6.3.2 Für die Aufgabenstellung dieser Arbeit erforderliche Modifikationen des Complex-Verfahrens

Im Laufe der ersten Optimierungsversuche dieser Arbeit trat das Problem auf, daß sehr oft an einem bestimmten Punkt die Optimierung abgebrochen wurde, da mit einfacher Reflektion keine Verbesserung mehr erzielt wurde. Hier konnte mit einer „Reflektion“ mit negativem α in vielen Fällen Abhilfe geschaffen werden. Damit lag \mathbf{x}_r dann auf der Verbindungslinie zwischen \mathbf{x}_m und \mathbf{x}_c , was in vielen Fällen doch noch eine weitere Verbesserung herbeiführte, wenn das Verfahren in Richtung der positiven Reflektion nicht mehr konvergierte.

Reicht auch das nicht aus, so können weitere Versuche mit zufallsverteilten Parametervektoren vor allem in einem frühen Stadium der Optimierung das Verfahren weiterbringen.

Im nächsten Kapitel nun sollen einige Anwendungen des Verfahrens gezeigt werden, wobei es insbesondere um Probleme geht, bei denen sehr viele Parameter mit einer gewissen Unsicherheit wegen schlechter oder sehr schlechter Vorkenntnisse optimiert werden sollen. Bei den vorzustellenden Modellen sind die Parameter der linearen Systemanteile zwar schon linear vorgeschätzt, aber im Gesamtmodell ergaben sich aufgrund der Optimierung doch noch Abweichungen zu den Startwerten.

Kapitel 7

Anwendungsbeispiele des Masingelementes

7.1 Optimierung der Parameter eines Einmassenschwingers

Als erstes Anwendungsbeispiel für das modifizierte Complex-Verfahren soll eine Optimierung der Parameter eines mit einem Masingelement gekoppelten Einmassenschwingers vorgestellt werden, Bild 7.1.

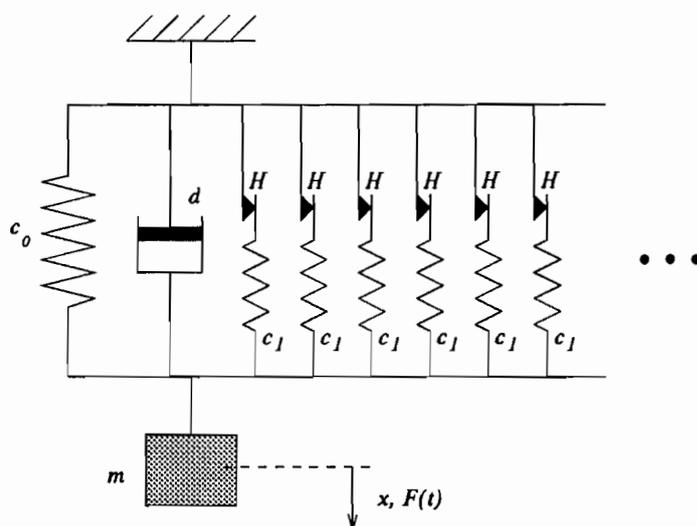


Abbildung 7.1: Einmassenschwinger mit Masingelement

Eine mit einer Simulation erzeugte transiente Schwingung des Modells soll als Grundlage für die Optimierung dienen. Die Parameter, die der Simulation zugrunde liegen, sind:

m	=	1.0	kg
d	=	1.0	kg/s
k	=	1.0	N/m
ν	=	0.2	1
α	=	8.0	1/N
$x(t=0)$	=	0.0	m
$\dot{x}(t=0)$	=	0.0	m/s
t_{ges}	=	8.0	sec

Das der Optimierung zugrundeliegende Gütefunktional wird dabei in der Phasenebene definiert als Quadrat des Betrages des Differenzvektors aus Simulation und Original (hier ebenfalls eine Simulation, ansonsten in der Regel Meßdaten):

$$I = \sum_{i=1}^{256} [(x_i - y_i)^2 + (\dot{x}_i - \dot{y}_i)^2] \quad (7.1)$$

Damit wurde eine ideale Abstimmung der Optimierungsergebnisse in Betrag und Phase erreicht, zusammen mit einer sehr guten Konvergenz der Optimierung. Im Bild 7.2 sind die einzelnen Summanden des Fehlerfunktional mit Linien zwischen den Zustandspunkten (x_i, \dot{x}_i) und (y_i, \dot{y}_i) verbunden, zur besseren Übersicht ist allerdings nur ein Drittel der Punkte so dargestellt.

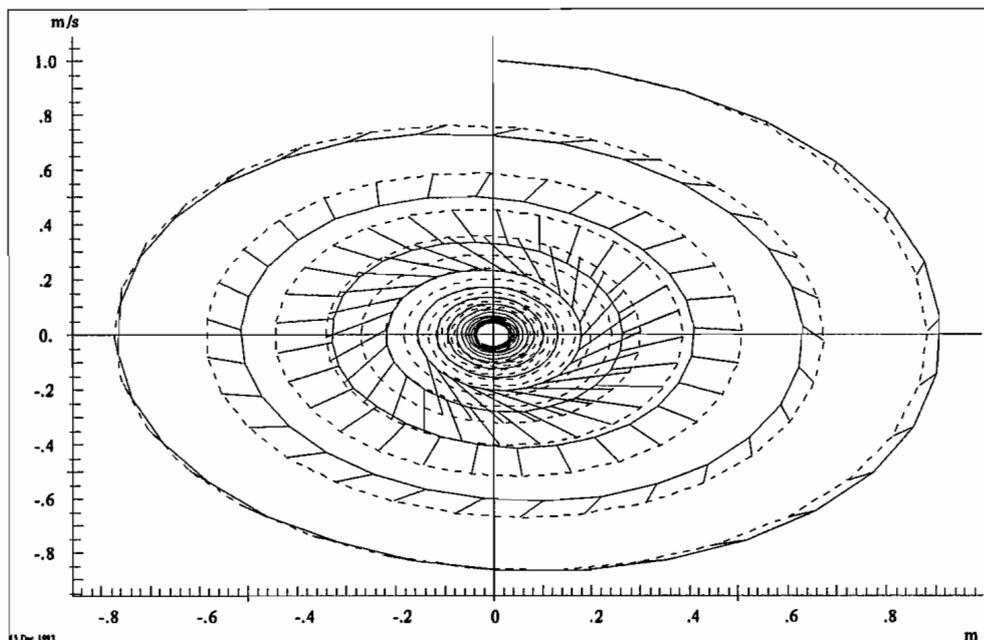


Abbildung 7.2: Fehlerfunktional in der Phasenebene

Die gewählten Intervalle der expliziten Restriktionen für die Optimierung lauten:

$$\begin{aligned}
 0.9 &< m < 1.1 \\
 5.0 &< d < 1.0 \\
 0.1 &< c_0 < 10.0 \\
 0.1 &< \nu < 10.0 \\
 0.1 &< \alpha < 10.0 \\
 -10.0 &< x_0 < 10.0 \\
 -10.0 &< \dot{x}_0 < 10.0
 \end{aligned}$$

Die Intervalle wurden extrem groß ausgelegt, um die Leistungsfähigkeit des Optimierungsverfahrens zu demonstrieren. Das erste Ergebnis dieser Berechnungen ist in Bild 7.3 im Zeitbereich und in Bild 7.4 in der Phasenebene gezeigt. Das Abbruchkriterium

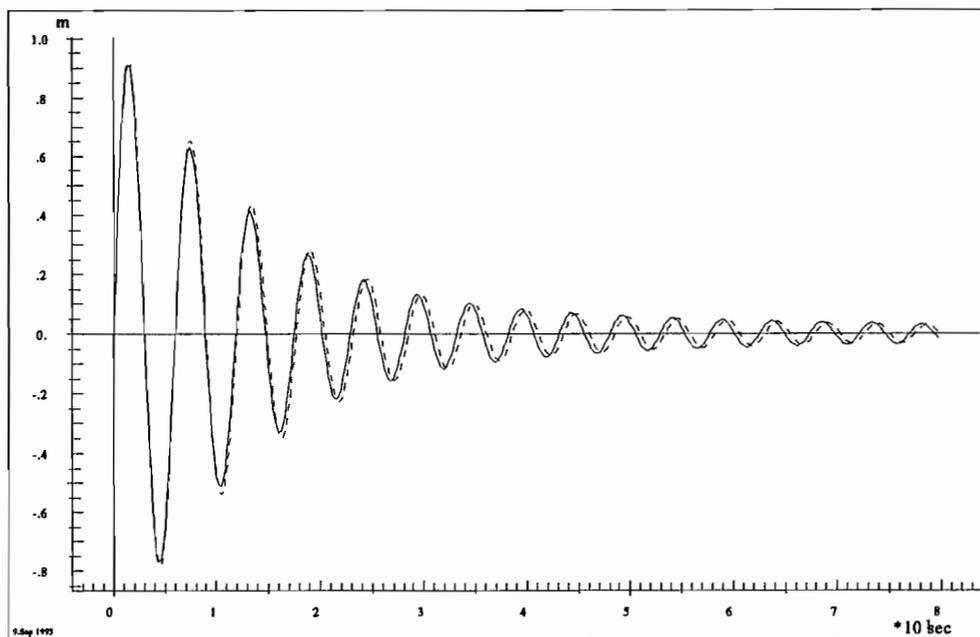


Abbildung 7.3: Optimierung, Ergebnis im Zeitdiagramm

für die Optimierung ist hier so ausgewählt, daß ein Unterschied überhaupt noch erkennbar ist, die erforderliche Rechenzeit beträgt für eine solche Optimierung ca. 4 Minuten, was bei 14 Mflops etwa $3,7 \cdot 10^9$ Fließkommaoperationen entspricht. Eine Verschärfung des Abbruchkriteriums der Optimierung um den Faktor 100 bringt keine wesentliche Verbesserung mehr, außer daß der Unterschied zwischen Original und Simulation fast völlig verschwindet, sowohl was die Parameter als auch was die Darstellung des Verlaufs angeht, Bild 7.5.

Der Rechenzeitbedarf läßt sich so beliebig steigern, ohne daß noch nennenswerte Verbesserungen zu bemerken sind, die Konvergenz des Verfahrens ist im Nahbereich relativ schlecht, was von einigen Autoren für das Complex-Verfahren bestätigt wird, z.B. [10, 41]. Obwohl die Anpassung der Verläufe vor allem für die Schwingungsintervalle mit relativ größeren Amplituden sehr gut ist, sind auch schon mit wenig Rechenzeitverbrauch die Ergebnisse für kleinere Amplituden sehr gut. Dafür sorgt vor allem die Formulierung des Fehlerfunktional in der Phasenebene, die bei experimentell gewonnenen Meßdaten allerdings meist unmöglich ist, da es nur selten und dann auch nur im Labor möglich ist, Ver-

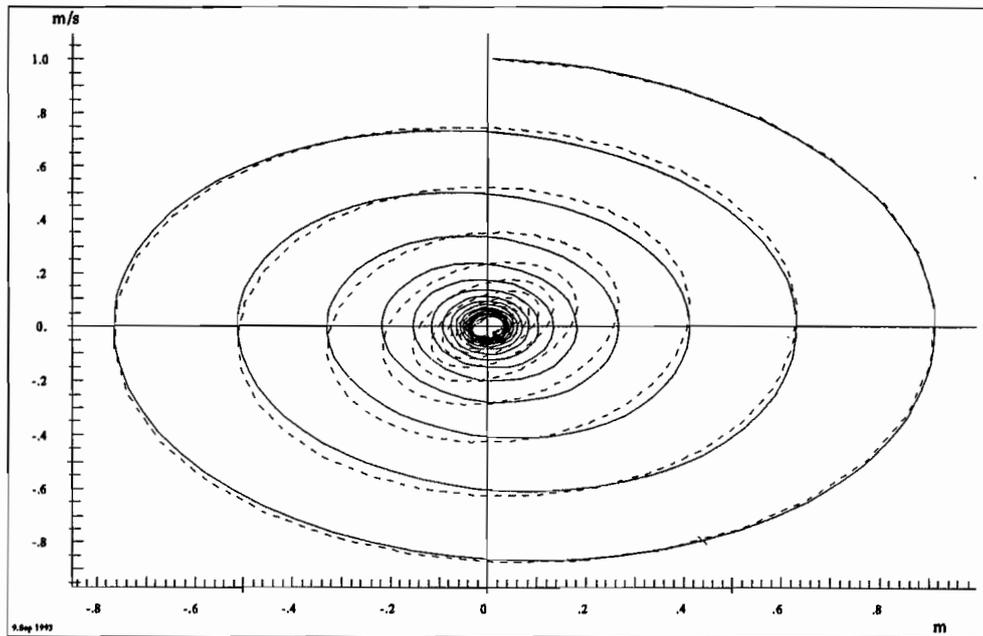


Abbildung 7.4: Optimierung, Ergebnis in der Phasenebene

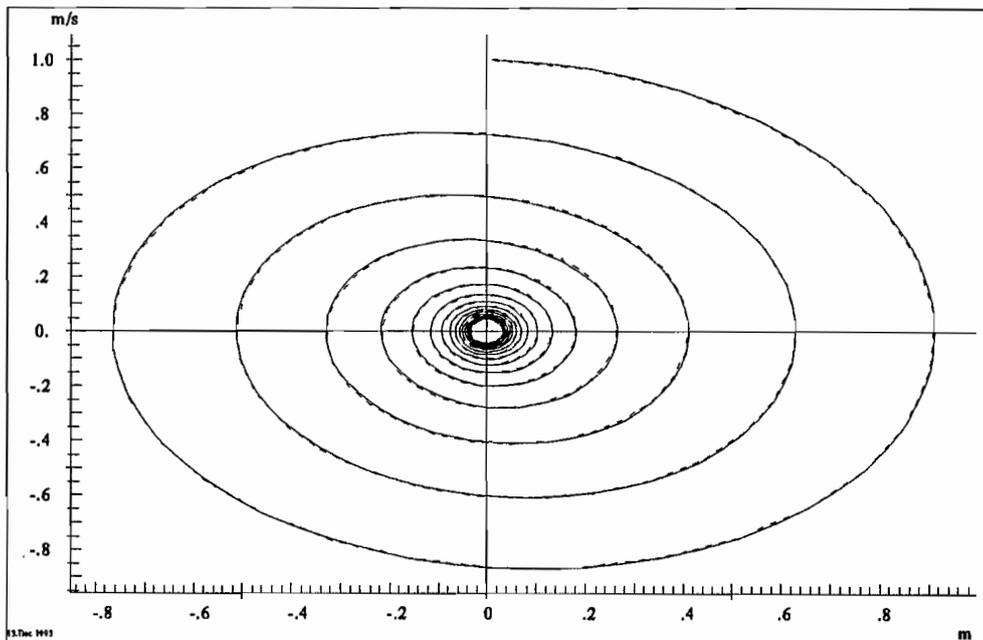


Abbildung 7.5: Optimierung „sehr genau“

schiebungen und Geschwindigkeiten zu messen. Ideal daran ist, daß keine Anfangswerte geschätzt werden müssen, in der Praxis allerdings können meist nur die Beschleunigungen einfach gemessen werden, da es in der Regel sehr schwer ist, ein vollständig entkoppeltes Bezugssystem zu finden, von dem aus zuverlässige Messungen von Verschiebungen und Geschwindigkeiten vorgenommen werden können. Bei der jederzeit einfach möglichen Beschleunigungsmessung ist es für die Stabilität der Optimierungsergebnisse ideal, wenn zusätzliche Informationen über einige Verschiebungen und Geschwindigkeiten an mindestens einem Punkt vorliegen. Damit wird die Anpassung der Parameter wesentlich erleichtert und beschleunigt. Eine Optimierung allein aufgrund der Beschleunigungsmessungen konnte bei den für diese Arbeit vorgenommenen Versuchen nicht erfolgreich durchgeführt werden.

7.2 Modelle realer Strukturen für die Optimierung

Die Eignung der Masingelemente zur Modellierung amplitudenabhängiger Dämpfung sollte an Strukturen aus Stahlbeton aufgezeigt werden, bei dem diese Art der Dämpfung besonders ausgeprägt ist. Ursache dafür ist die bei mikroschädigter Zementmatrix auftretende Relativverschiebung zwischen Matrix und Bewehrung [17, 20, 63].

Die erste Struktur, an der das diesbezügliche Dämpfungsverhalten untersucht werden soll, ist ein Stahlbetonbalken mit relativ idealen Lagerbedingungen, die zweite ein im Freien aufgestellter Stahlbetonmast, der in einem Bodenfundament eingegossen ist und wegen der nicht idealen Lagerbedingungen weniger ideale Voraussetzungen für Messung und Optimierung bietet.

Die theoretische Modellierung beider Strukturen erfolgt für die linearen Systemanteile mit der FEM-Methode. Die linearen Steifigkeiten sind mit aus dem Bernoulli-Balken und der Potentialtheorie abgeleiteten linearen Balkenelementen modelliert. Die Trägheitsterme der Bewegungsgleichungen sind mit konsistenten Massenmatrizen aus dem linearen Verschiebungsfeldansatz für das jeweilige Balkenelement formuliert. Die ebenfalls vorhandene viskose Dämpfung der Systeme kann als Rayleigh-Dämpfung $D = aM + bK$ erfaßt werden, da sie nur die vor allem bei niedrigen Frequenzen geringe Restdämpfung liefert, allerdings auch für die numerische Stabilität der Zeitintegrationen von Bedeutung ist.

Je nach vorliegenden Versuchsdaten konnte die Anzahl der Balkenelemente variiert werden, um eine ausreichende Modellierung der auftretenden Eigenformen sicherzustellen.

Um die für nichtlineare Systeme ungültigen Modal- und Integraltransformationen zu umgehen, sind alle Simulationen und Berechnungen im Zeitbereich in physikalischen Koordinaten erfolgt. Der eingesetzte Integrationsalgorithmus ist eine Einschrittformel nach Runge-Kutta (4.Ordnung), die in Bezug auf die Integration der Masingelemente in die Rechenmodelle optimal ist, da zur Berechnung eines Zeitschrittes nur die jeweils letzte Gedächtnisfunktion abgespeichert werden muß. Alle für die Integration erforderlichen Zwischenschritte werden nur temporär berechnet, erst nach Abschluß eines Zeitschrittes wird die neue Gedächtnisfunktion berechnet und abgespeichert. Daneben kann bei einer Einschrittformel, falls erforderlich, die Zeitschrittweite leicht variiert werden, um nötigenfalls die Stabilität zu verbessern. Die hier gezeigten Ergebnisse wurden alle mit einer

Abtastrate von ca. 1504 Hz gewonnen, die Simulation dann mit der gleichen Zeitschrittweite durchgeführt. Dabei ergab sich, infolge der wesentlich tieferen Frequenzanteile der untersuchten Schwingungen, kein Stabilitätsproblem mehr.

Als für die amplitudenabhängige Dämpfung wesentliche Zustandsgröße wurde, wie im Kapitel 3 gezeigt, die mittlere Elementkrümmung gewählt. Zu beachten ist dabei, daß eine Änderung der Elementlänge bei einer vergrößerten Elementanzahl wegen der nichtlinearen Zusammenhänge auch zu anderen Parametern für die Masingelemente führt. Alle Elemente des jeweiligen Modells haben die gleichen Parameter α und ν für die nichtlinearen Anteile aus den Masingelementen. Damit ist die Anzahl der freien Parameter für die Optimierung minimal gehalten, eine Empfindlichkeit ist außerdem für globale Parameter leichter zu sichern als für lokale Parameter, die z.B. nur für ein Element gelten.

Für die Ermittlung der linearen Systemanteile erwiesen sich Messungen mit Impulserregung als optimal, mit deren Hilfe, unter Zuhilfenahme des gleichen Optimierers, die Balkensteifigkeit EJ/l^3 und die viskose Dämpfung $D = aK + bM$ in erster Näherung zu ermitteln waren. Die so gewonnenen Parameter konnten dann zusammen mit den Startwerten der nichtlinearen Systemanteile für die Optimierung eingesetzt werden, eine Variation von $\pm 5\%$ wurde für die Balkensteifigkeit zugelassen, um Fehler aus der Bestimmung ausgleichen zu können.

Als Hauptproblem für die Optimierung erwies es sich, daß bei Impulserregung nicht nur das erregte System, sondern auch die ganze beteiligte analoge Meßkette, insbesondere die für die A/D-Wandlung erforderlichen Anti-Aliasing-Filter, einen Einschwingvorgang mitmachen, durch den die letztendlich am Ende der Meßkette gewonnenen Ergebnisse die Anfangsbedingungen nicht mehr wiedergeben. Wurden die Anfangsbedingungen als weitere Parameter bei der Optimierung eingeführt, so konnte trotzdem keine Konvergenz zwischen Meßwerten und Simulation erzielt werden. Weil eine Elimination dieser Verfälschung der Anfangsbedingungen numerisch und experimentell nicht möglich ist, ist die Frage der Anfangswerte bei transienten Schwingungen nicht abschließend zu klären.

Für die endgültigen Messungen wird daher so vorgegangen, daß alle Versuche in den versuchstechnisch möglichen Frequenzbereichen mit harmonischen Erregungen durchgeführt werden. Somit ist es möglich, bei der Optimierung im Fehlerfunktional den transienten Anteil der Simulation zu eliminieren und dadurch eine weitgehende Entkopplung von analog und digital verzerrten Anfangswerten zu erhalten. Dabei stellte sich heraus, daß für die Bildung des Fehlerfunktionals 256 Scans in einem entsprechend dem Signal angepaßten Zeitraster ausreichen, eine größere Anzahl an Stützstellen ergab keine besseren Ergebnisse.

Die Bewertung der Simulationsergebnisse wird durch ein Funktional vorgenommen, in dem zuerst das Fehlerquadrat der beiden Funktionen berechnet wird:

$$I_q = \sum_{i=1}^{256} (x_i^2 - y_i^2) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 \quad (7.2)$$

Dieses Fehlermaß allein erwies sich als nicht ausreichend zur Garantierung der Konvergenz für Phasen und Amplituden, da es auf Dämpfungseinflüsse zu empfindlich reagiert

und ein von dieser Empfindlichkeit verursachtes lokales Maximum bei der größten zulässigen Dämpfung einen Irrläufer bei der Optimierung erzeugt. Eine Verbesserung bringt die Einführung des Verhältnisses der Flächenintegrale von Messung und Simulation, angenähert über eine in ihrer Genauigkeit hier ausreichende Rechteckformel, Bild 7.6:

$$I_x = \sum_{i=1}^{256} |x_i| \quad (7.3)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{256} |y_i| \quad (7.4)$$

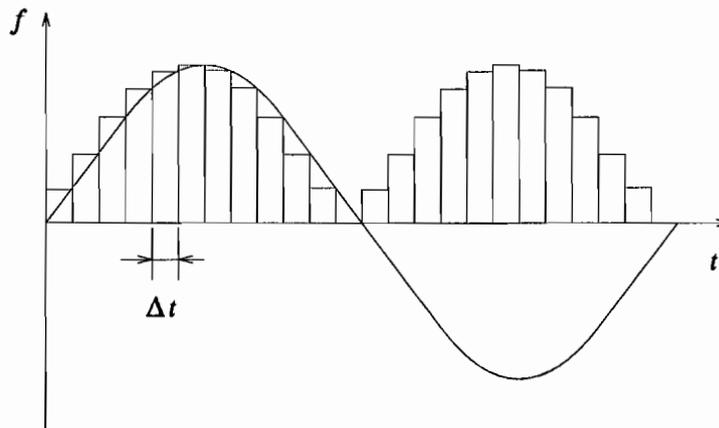


Abbildung 7.6: Rechteckformel

Der Wert aus dem Fehlerquadrat wurde nun um das Verhältnis dieser beiden Flächen korrigiert:

$$I_{ges} = I_q \frac{\max(I_x, I_y)}{\min(I_x, I_y)} \quad (7.5)$$

Damit ist die Einhaltung von Phase und Amplitude beim Optimalwert garantiert. Nur auf diese Weise kann bei den vorliegenden Messungen von $\ddot{\mathbf{x}}$ und \mathbf{F} anstelle der Messung des Verlaufes der Zustandsgrößen \mathbf{x} und $\dot{\mathbf{x}}$ in der Phasenebene eine Konvergenz der Optimierung zu physikalisch sinnvollen Parametern erreicht werden. Die Messung von \mathbf{x} und $\dot{\mathbf{x}}$ wäre optimal, ist aber experimentell nicht immer realisierbar. Keine Rolle spielt hier, daß für die gewählten Fehlernormen analytische oder numerische Empfindlichkeiten nicht angegeben werden können, was bei Gradientenverfahren erforderlich ist, denn der eingesetzte Optimierer bestimmt anstatt dessen eine Art empirischen Gradienten mit Hilfe einer Anzahl von Stützstellen.

7.2.1 Simulations- und Optimierungsmodell für den Laborbalken

Der für die Labormessungen eingesetzte Stahlbetonbalken ist an Drahtseilen in den Knoten der ungeraden Schwingungsformen aufgehängt. Damit ist eine von Zwangskräften

weitgehend freie Lagerung gesichert, störend ist nur noch der bei der Impulserregung auftretende Starrkörperverschiebungsanteil der Messungen.

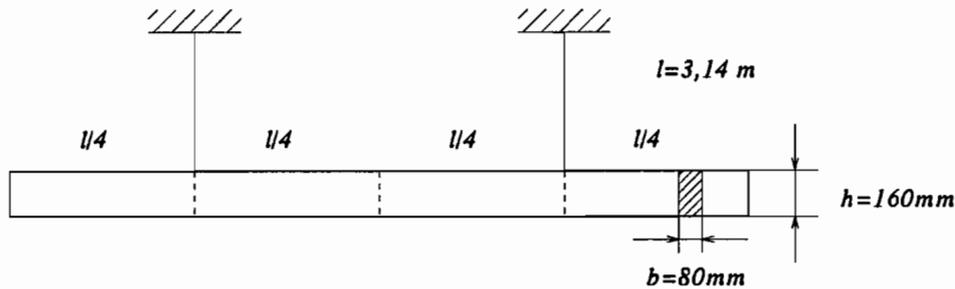


Abbildung 7.7: Laborbalken aus Stahlbeton

Als Eigenfrequenzen der linearen Pendelschwingung und der Torsionspendelschwingung des als starr betrachteten Balkens in den Drahtseilen ergeben sich folgende Werte:

$$f_{linear} = 0.34 Hz \quad f_{Torsion} = 0.30 Hz$$

Diese Frequenzen liegen weit unter den für die Analyse interessanten elastischen Eigenfrequenzen des Balkens und sorgen in der FFT nur für einen nahezu statischen Anteil bei 0 Hz.

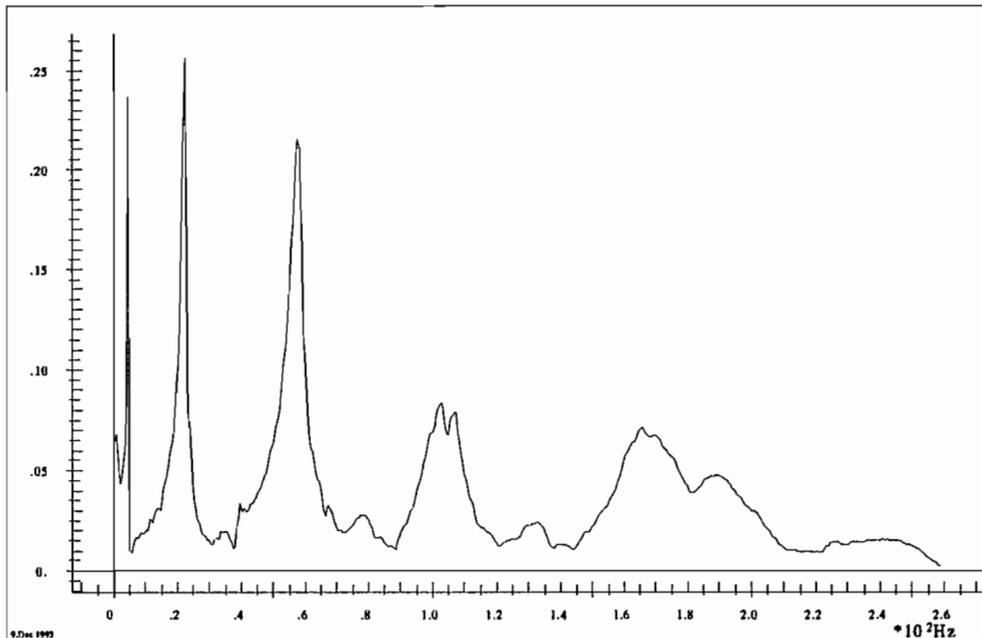


Abbildung 7.8: FFT, Laborbalken mit Impulserregung

Eigenform	Frequenz
1.	12.70 Hz
2.	162.83 Hz
3.	450.57 Hz
4.	883.21 Hz
5.	1460.00 Hz

Die Diskretisierung des Modells wurde variabel gehalten, um bei Bedarf alle jeweils auftretenden Eigenformen des Balkens abbilden zu können, die auch in der Messung enthalten sind.

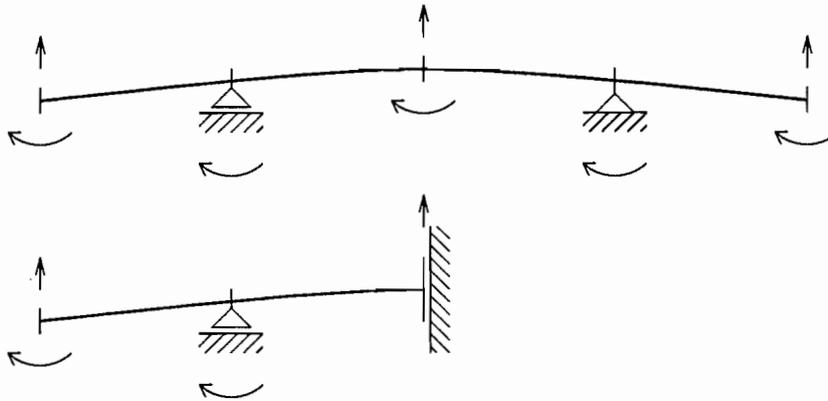


Abbildung 7.9: Balkenmodell und vereinfachtes Ersatzsystem

Das Modell kann wegen der Aufhängung nur spiegelsymmetrisch zur Balkenmitte erregt werden, damit entfallen alle geraden, unsymmetrischen Eigenformen. Somit ist auch die Möglichkeit gegeben, das Modell um die Hälfte zu reduzieren, wie in Bild 7.9 zu sehen ist. Die für die Berechnung erforderliche Rechenzeit kann durch die Reduktion in etwa auf 25 % des alten Wertes gedrückt werden, lediglich die Randbedingungen müssen geändert werden.

7.2.2 Ergebnisse der Optimierung beim Laborbalken

Quasistatische Erregung

Zur weitestgehenden Ausschaltung aller viskosen Dämpfungseinflüsse wurde eine quasistatische Erregung gewählt, bei der mit circa 1/6 Hz im Aussteuerungsbereich der Meßaufnehmer eine annähernd harmonische Kraft (wegen der niedrigen Frequenz nur annähernd harmonisch möglich) aufgebracht wurde. Die aus diesen Messungen gewonnene Hysterese gab erste Aufschlüsse über das Materialverhalten des Stahlbetons, es war eine gute Charakteristik zu erkennen, wie sie mit Masingelementen modellierbar erscheint: Bilder 7.10, 7.11 und 7.12.

Die Optimierung erbrachte folgende Ergebnisse: Der Verlauf der Hysterese konnte sehr gut abgebildet werden, mit Ausnahme des S-Schlages bei ungenau zentrierten Hysteresen, da das Masingelement keine solche Charakteristik erzeugen kann. Hier einige Hysteresen, die relativ gut zentriert sind: Bilder 7.13, 7.14 und 7.15.

Mit diesem Ergebnis konnte erwartet werden, daß die statisch-hysteretischen Anteile dynamischer Versuche ebenfalls mit Hilfe des gewählten Ansatzes darstellbar sind. Die Biegesteifigkeit läßt sich aus den drei genannten Bildern ablesen als Steigung der Hysteresen mit circa:

$$c = -1.61kN/m$$

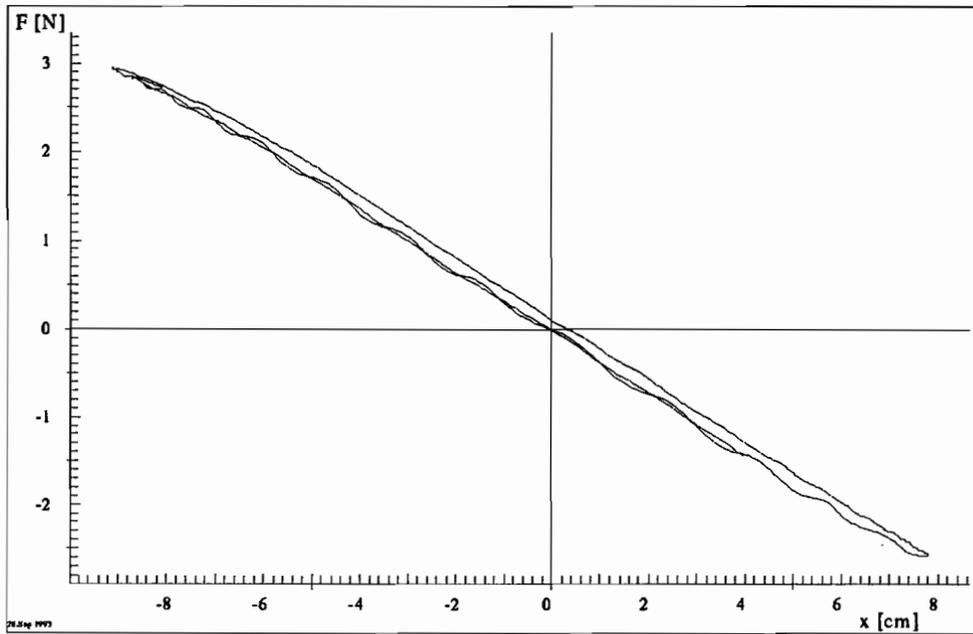


Abbildung 7.10: Hysterese stat14

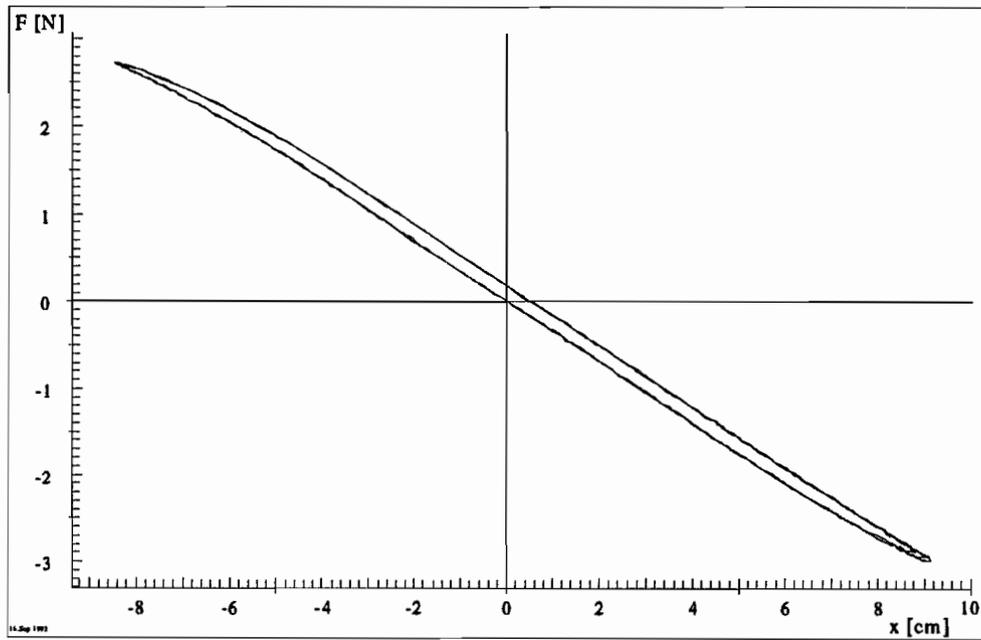


Abbildung 7.11: Hysterese stat15

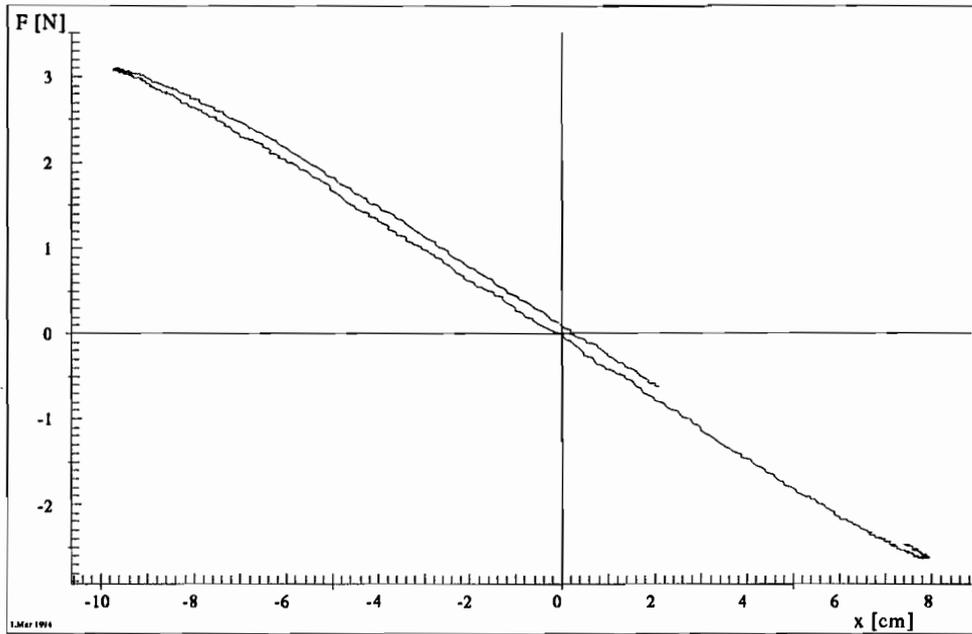


Abbildung 7.12: Hysterese stat21

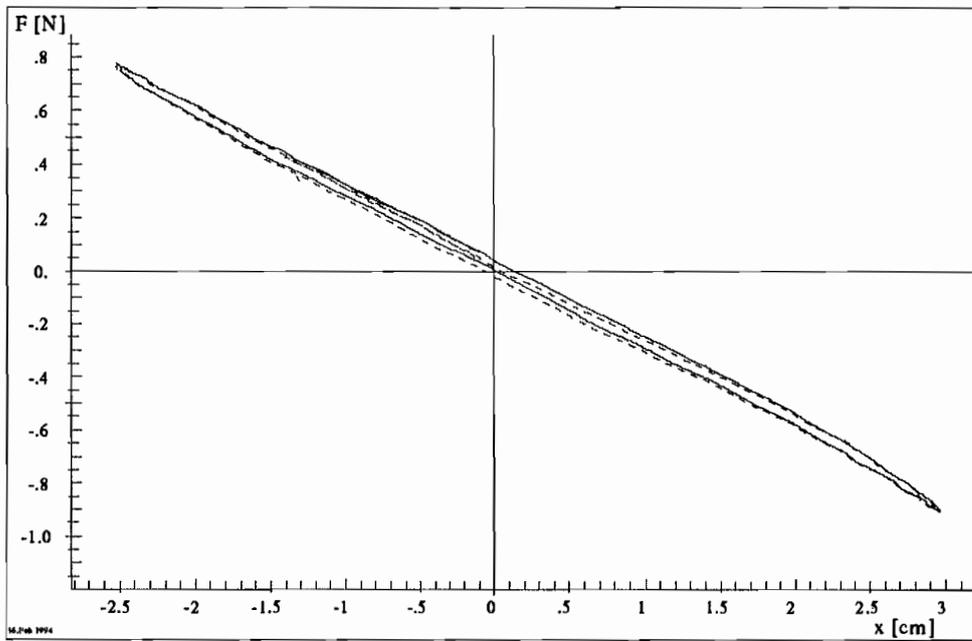


Abbildung 7.13: Optimierung und Messung stat14

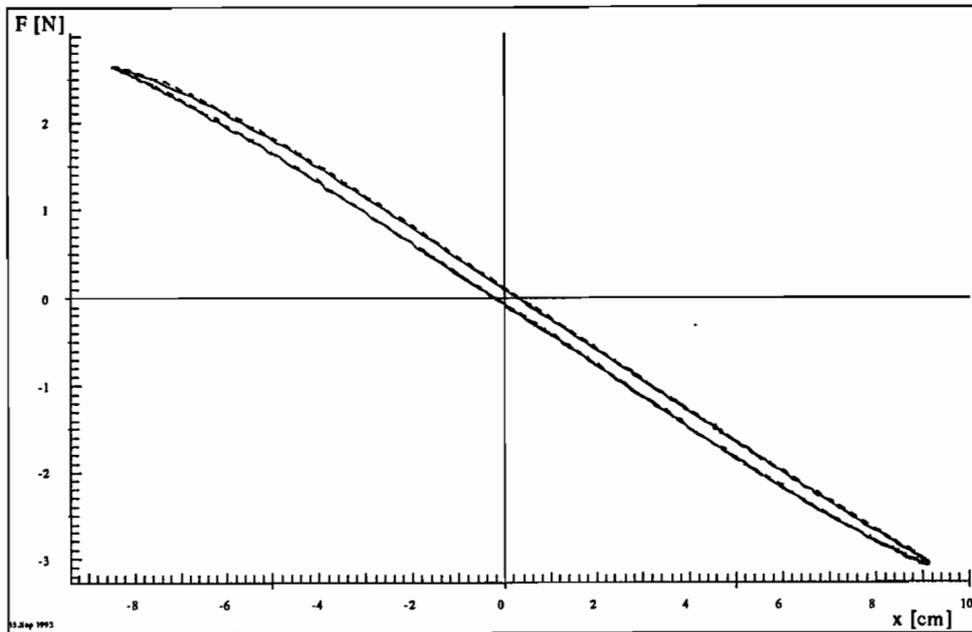


Abbildung 7.14: Optimierung und Messung stat15

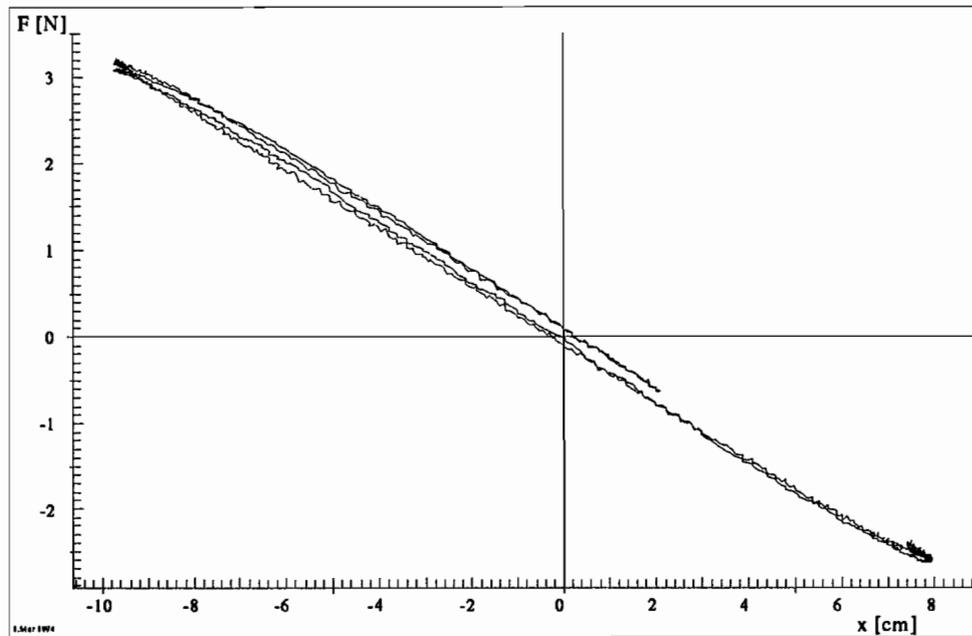


Abbildung 7.15: Optimierung und Messung stat21

Bekannt sind des weiteren:

Parameter	Wert	Einheit
b	80	mm
h	160	mm
ρ	$2.5 \cdot 10^{-6}$	kg mm ⁻³
l	3140	mm
J	$27.31 \cdot 10^6$	mm ⁴

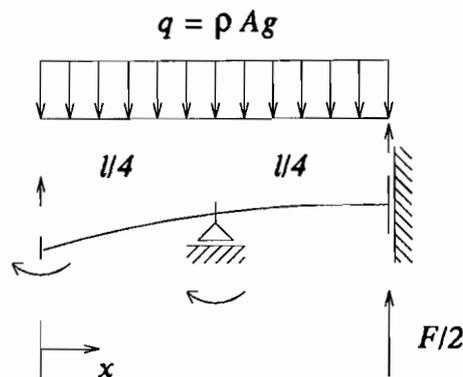


Abbildung 7.16: Idealisiertes Balkenmodell

Für das physikalische Ersatzmodell des Balkens, Bild 7.16, läßt sich mit Hilfe der Randbedingungen

$$\begin{aligned} w(x = \frac{l}{4}) &= 0 \\ w'(x = \frac{l}{2}) &= 0 \\ w''(x = 0) &= 0 \\ w'''(x = \frac{l}{2}) &= 0 \end{aligned}$$

folgende Gleichung aufstellen:

$$F(x) = -192 \frac{EJ}{l^3} w(x) + 2.5 \rho A l g \quad (7.6)$$

Die abgelesene Steifigkeit des Balkens $c = -1.61 \frac{kN}{m}$ ergibt mit $x = \frac{l}{2}$ folgenden Zusammenhang:

$$\frac{\partial F}{\partial w} = c = -192 \frac{EJ}{l^3} = -1.61 \frac{kN}{m} \quad (7.7)$$

Damit wird der E-Modul ermittelt:

$$E = \frac{1.61 \text{ kN } l^3}{192 \text{ m } J} = \frac{1.61 \cdot 10^3 \text{ kg m } 3.14^3 \text{ m}^3 12}{192 \text{ s}^2 \text{ m } 0.08 \text{ m } 0.16^3 \text{ m}^3} = 9.507 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \quad (7.8)$$

Mit dieser ersten Näherung für den E-Modul können dann dynamische Vorgänge untersucht werden.

Harmonische Erregung des Stahlbetonbalkens

In einem zweiten Schritt sollen nun Versuche mit harmonischer Erregung in Balkenmitte ausgewertet werden. Die Parameter der linearen Systemanteile wie Massen, Steifigkeiten und Rayleigh-Dämpfung wurden aus vorhergegangenen Versuchen mit Impulserregung oder quasistatischen Versuchen bestimmt. Gemessen wurden für diese Versuche die Beschleunigungen an beiden Enden und in der Mitte des Balkens, die (Erregungs-) Kraft und die Verschiebung in Balkenmitte, siehe Bild 7.17.

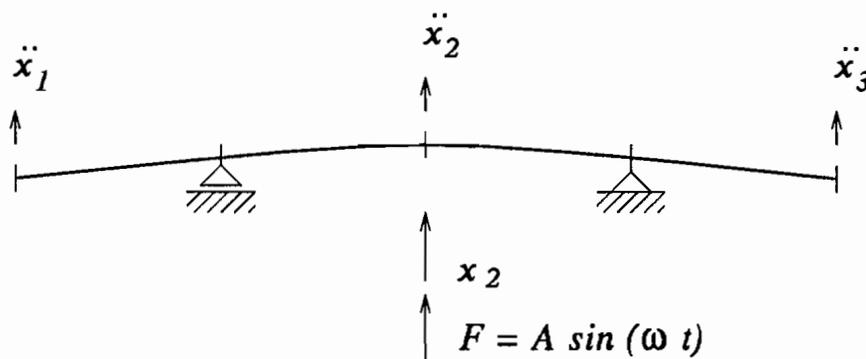


Abbildung 7.17: Schema des Versuchsaufbaus

Infolge der begrenzten Leistung des eingesetzten Shakers konnte nur eine Eigenform derart angeregt werden, daß sich überhaupt eine brauchbare Hysterese ergab, die zugehörige Frequenz lag bei 13 Hz (1. Eigenfrequenz). Bei den höheren Eigenfrequenzen war der Dämpfungseinfluß so groß, daß keine ausreichenden Amplituden mehr erzielt werden konnten, um nichtlineare Effekte aufzeigen zu können. Eine typische Hysterese bei der Erregung der ersten Eigenform zeigt das Bild 7.18.

Gezeigt und für die Optimierung benutzt ist hier ein stationär harmonischer Ausschnitt aus der entsprechenden Messung. Damit ist das Problem der Anfangswerte für das FEM-Modell und die eingesetzten Masingelemente derart gelöst, daß auch bei der Simulation erst nach weitgehender Beendigung der transienten Vorgänge das Fehlerfunktional berechnet wird.

Da nur in der ersten Eigenform angeregt wurde, konnte hier das Ersatzmodell mit minimal 2 Balkenelementen gewählt werden, Bild 7.19: In jedem der eingesetzten Balkenelemente ist ein Masingelement, über die mittlere Elementkrümmung gesteuert, eingekoppelt. Die Optimierung der einzelnen Versuche ergab, daß auch bei mehrfachem Neustart stabile Maxima des Fehlerfunktionals erreicht wurden. Aufgrund einer Streuung der Parameter der Nichtlinearitäten für die Versuche stellt sich allerdings die Frage, ob die aus der Optimierung gewonnenen Erkenntnisse zu verallgemeinern sind. In jedem Fall eignen sie sich zur Abbildung des spezifischen Antwortverhaltens eines Systems, wie an den zwei folgenden Beispielen deutlich wird: Bilder 7.20 und 7.21.

Gegenüber der Optimierung des Einmassenschwingers ist der Rechenzeitverbrauch hier entsprechend ganz grob proportional zum Quadrat der Anzahl der Systemfreiheitsgrade

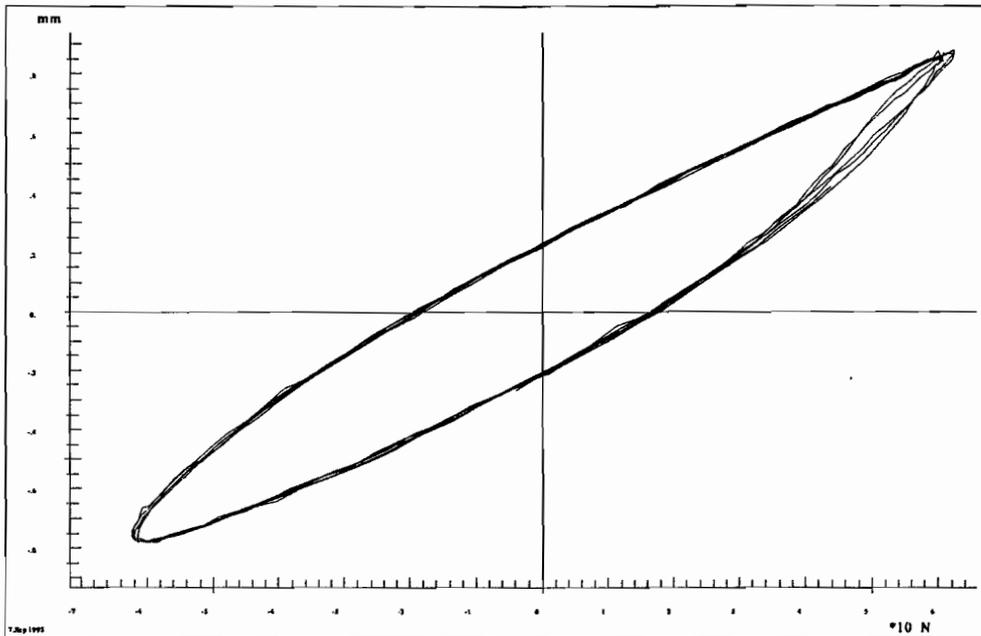


Abbildung 7.18: Typische dynamische Hysterese des Stahlbetonbalkens

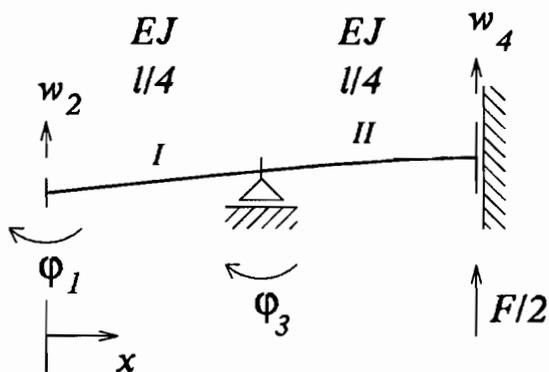


Abbildung 7.19: Idealisiertes Ersatzmodell mit 2 Balkenelementen

angewachsen. Nur in der Optimierung an sich ist der Verbrauch der Rechenzeit lediglich nach Güte des Startvektors und der Restriktionen bestimmt. Insofern erreicht der Optimierer das Abbruchkriterium rein zufällig schneller oder langsamer.

7.2.3 Simulations- und Optimierungsmodell für den Stahlbetonmast

An einem im Freien aufgestellten Stahlbetonmast wurden Messungen durchgeführt, zuerst mit Impulserregungsantworten zur Bestimmung der linearen Systemanteile des Modells. Der Mast hat folgende Abmessungen:

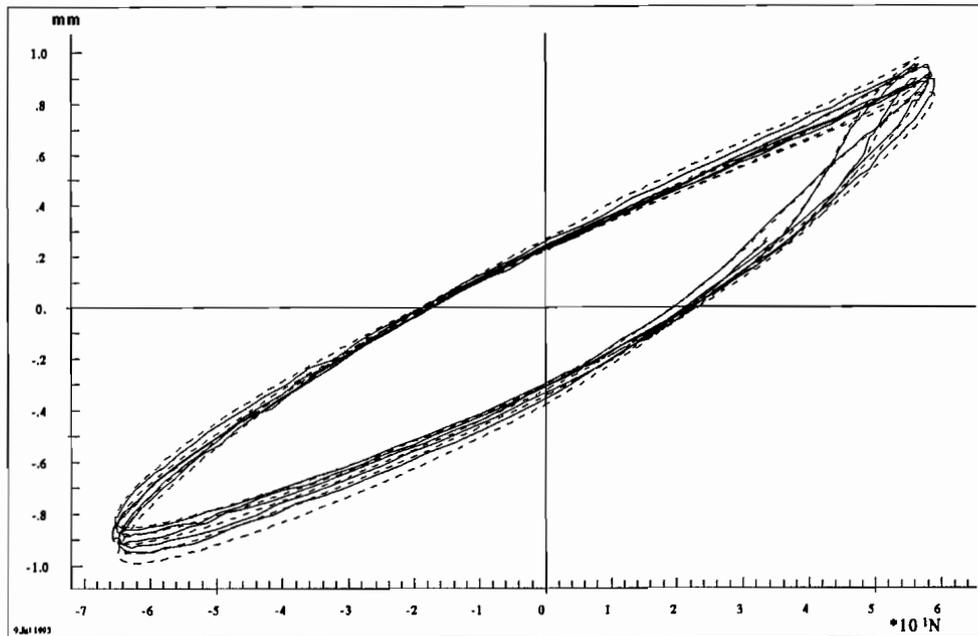


Abbildung 7.20: Messung und Optimierung

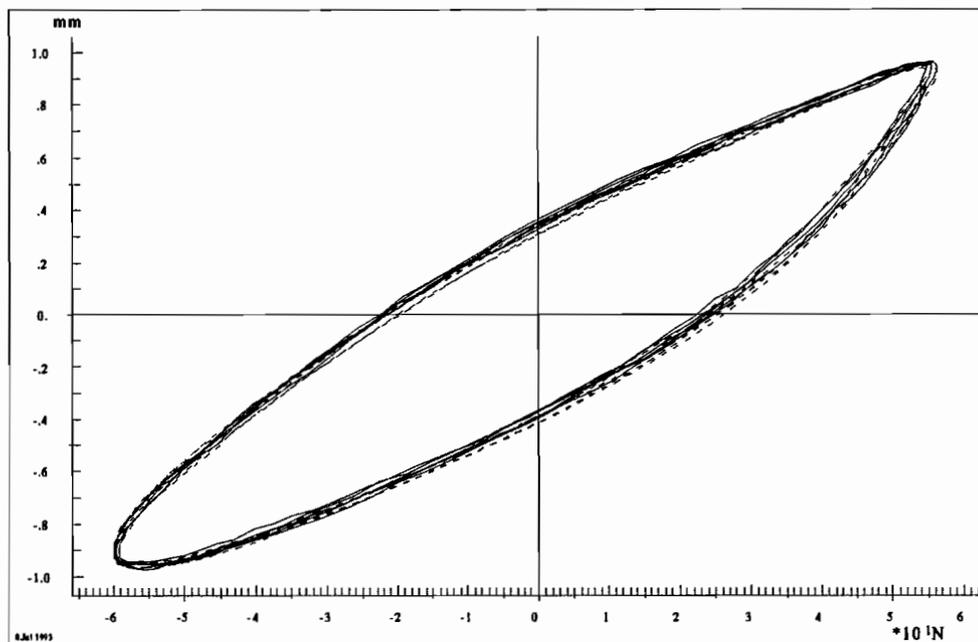


Abbildung 7.21: Messung und Optimierung

h	12.40 m
d_a	0.25 m
d_i	0.15 m

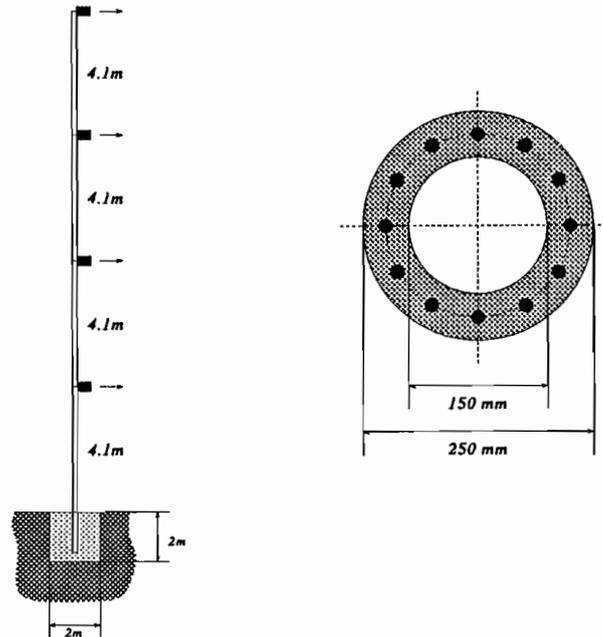


Abbildung 7.22: Stahlbetonmast

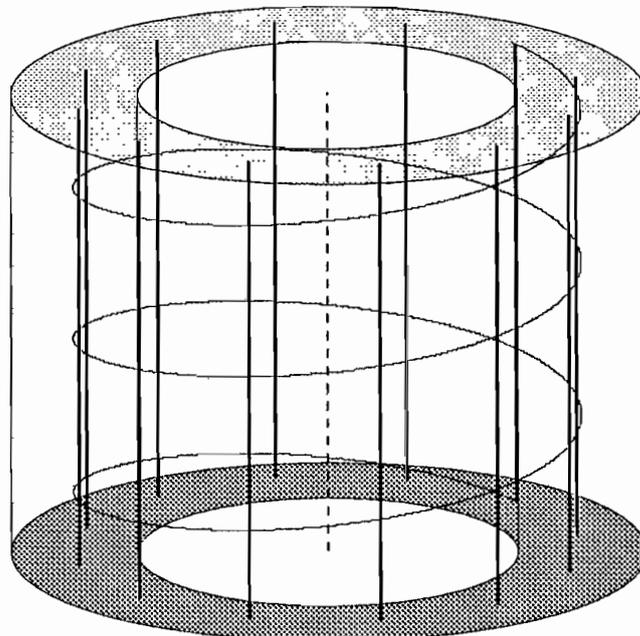


Abbildung 7.23: Bewehrungsschema des Mastes

Die Bewehrung des Mastes ist aus 12 14mm-Längseisen B ST 500 S und einer 5mm-Wendel zusammengesetzt. Der Beton selbst ist ein B50. Der Schaft steckt zusätzliche 1.6 m im Fundament und ist dort nach der Ausrichtung fest eingegossen, wobei das Fundament mit

2 m Durchmesser und 2 m Höhe eine sehr viel größere Masse als der Mast selbst hat (Faktor: circa 16-mal). Im Abstand von jeweils $h/4$ am Mast sind Beschleunigungsaufnehmer fest montiert, mit denen somit die ersten vier Eigenformen erfaßt werden können.

Der Einfluß der Bodenelastizität und Abstrahldämpfung wurde in einer getrennten Untersuchung analysiert. Der Einsatz der dazu erforderlichen BEM-Methode im Zeitbereich erforderte die Integration über eine Fundamentallösung im Halbraum, die in der Nähe der Quellpunkte Singularitäten vom Typ $\frac{1}{r^3}$ besitzt. Erst neueste Forschungen zeigen hier Lösungsansätze auf [31, 33]. Mit den bisher üblichen Methoden der Gaussquadratur und des „Drüberintegrierens“ sind bei Fundamentallösungen von diesem Typ keine zuverlässigen Ergebnisse zu erwarten. Eine durchgeführte BEM-Analyse - mit einer komplexen Steifigkeit als Dämpfungsansatz im Frequenzbereich - ergab, nachdem die Bodeneffekte auf eine komplexe 6x6-Matrix im Frequenzbereich reduziert waren, die erforderliche Modellierung der Bodendämpfung und Bodenelastizität. Jedes der 36 Elemente der Matrix stellt eine diskrete Funktion an 256 Frequenzpunkten dar. Diese „Einspannungsmatrix“ kann gleichwohl an ein FEM-Modell des Mastes angekoppelt werden, der Rechenaufwand ist allerdings immens, da für jeden Frequenzpunkt das komplette Gleichungssystem gelöst werden muß. Das so im Frequenzbereich erhaltene Ergebnis wird dann anschließend in den Zeitbereich zurücktransformiert. Für 256 Frequenzpunkte dauert eine derartige Berechnung circa 5-6 Stunden. Im Rahmen einer Optimierungsstrategie sind die Rechenzeiten bei circa 400-700 erforderlichen Durchläufen bis zum Erreichen des Abbruchkriteriums im Falle schlechter Vorkenntnisse nicht mehr tragbar [33]. Eine denkbare äquivalente Dämpfung aus den Frequenzgängen zu bestimmen wäre zwar möglich, aber wegen der in Kapitel 2 geschilderten Schwierigkeiten wurde darauf verzichtet.

Das oben schon Gesagte über die Problematik der Anfangswerte trifft auch hier zu, deshalb wurden die Impulserregungsversuche wieder nur benutzt, um einen Abgleich des linearen FEM-Modells vorzunehmen. Zwei typische Amplituden-FFT's sind hier dargestellt, zusammen mit den Eigenwerten des angepaßten Modells, Bilder 7.24 und 7.25.

Eigenform	Frequenz	Einheit
1.	1.19	Hz
2.	7.49	Hz
3.	20.96	Hz
4.	41.08	Hz
5.	67.90	Hz
6.	101.43	Hz
7.	141.67	Hz
8.	188.62	Hz

Dieser Abgleich ist insofern fundamental wichtig für die Optimierung, weil vom Masingelement in der hier vorliegenden Form keine Eigenfrequenzen „erzeugt“ werden, es ist rein in Verschiebungen formuliert und damit vollkommen frequenzunabhängig. Phase und Amplitude im Groben müssen vom linearen System her richtig vorbestimmt sein.

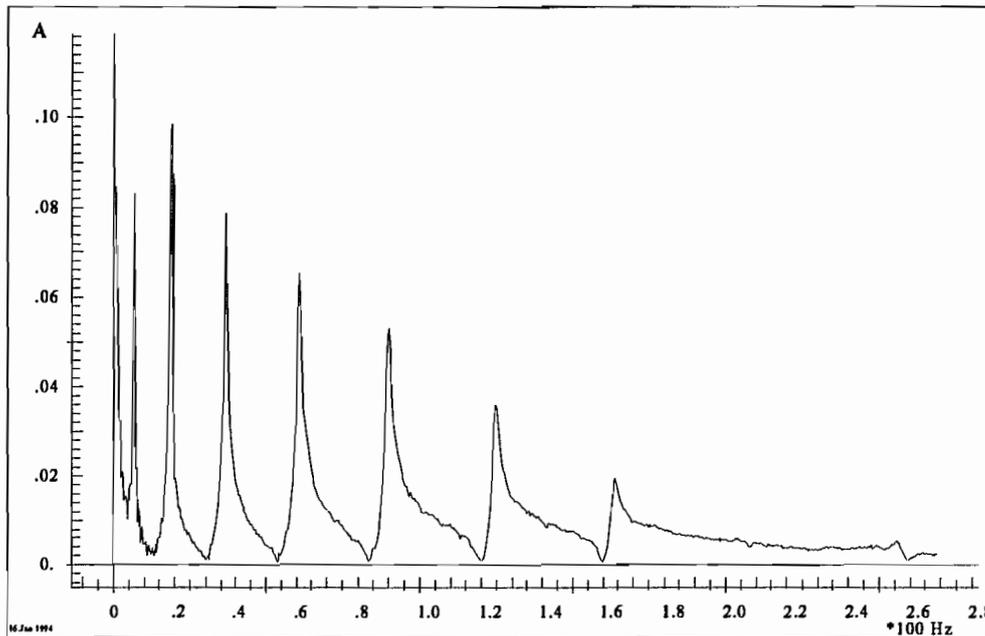


Abbildung 7.24: Amplitudengang Stahlbetonmast nach Impulserregung, 1

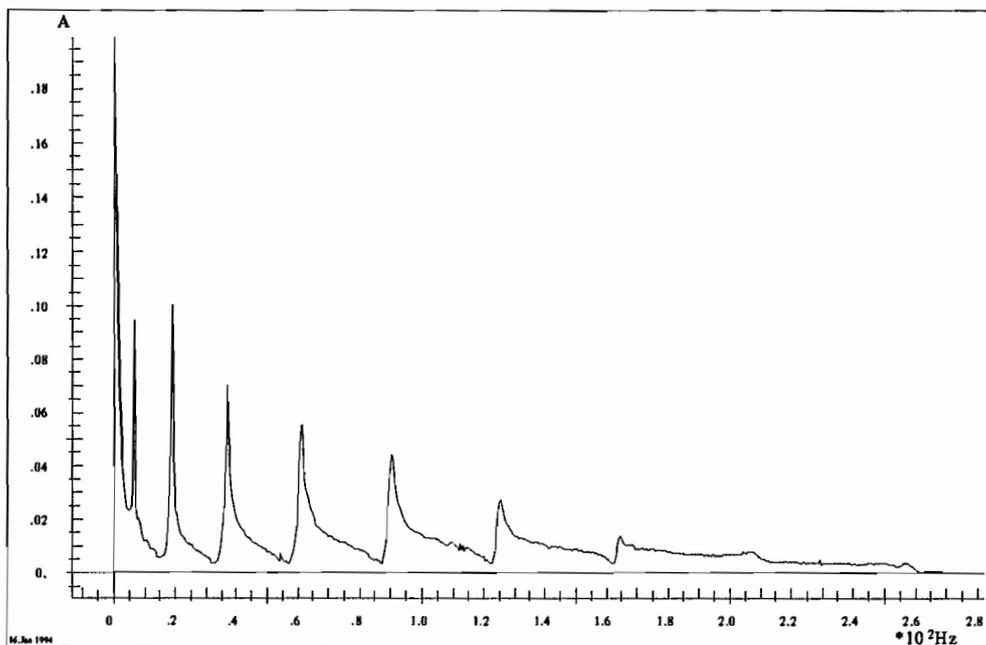


Abbildung 7.25: Amplitudengang Stahlbetonmast nach Impulserregung, 2

7.2.4 Optimierungsergebnisse am Stahlbetonmast

Der Optimierung des Mastmodells mit integrierten Masingelementen liegen Messungen zugrunde, bei denen 4 Beschleunigungen, 1 Verschiebung und die Erregungskraft der harmonischen Erregung gemessen wurden, wie in Bild 7.26 dargestellt.

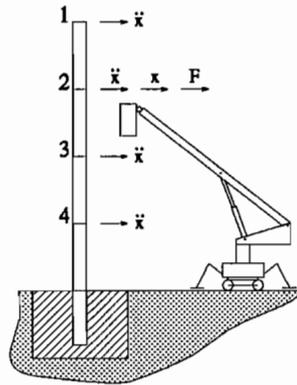


Abbildung 7.26: Messungen am Stahlbetonmast

Wegen der Größe des Mastes konnte keine völlig entkoppelte Basis für die Wegmessung gefunden werden. Das zeigte sich in der tieffrequenten überlagerten Schwingung im folgenden ungefilterten Plot, Bild 7.27. Durch eine digitale Hochpaßfilterung mit sehr tiefer

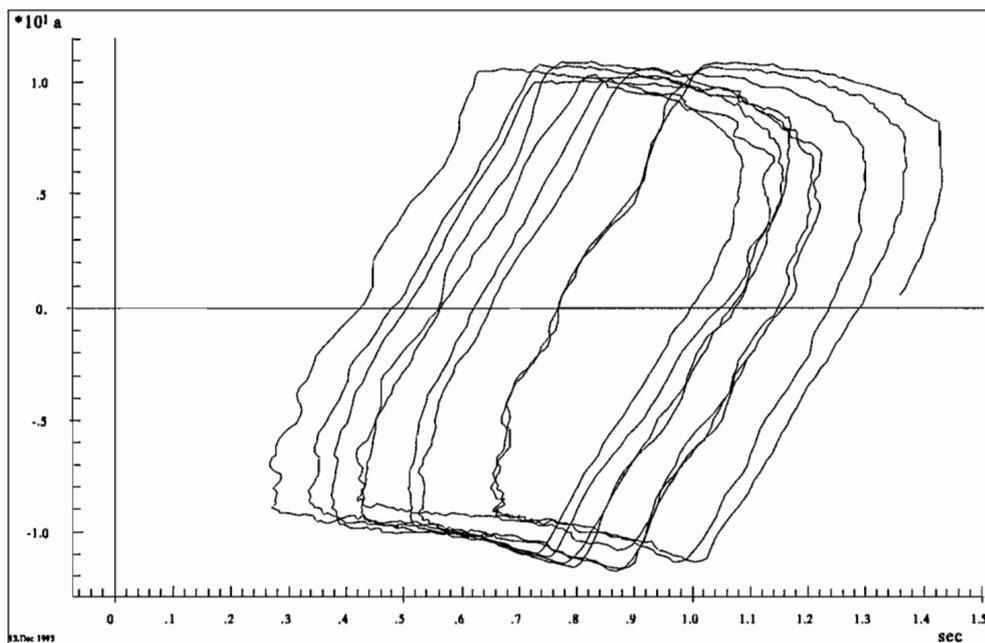


Abbildung 7.27: Verschiebung x_1 , ungefiltert

Eckfrequenz konnte dieser Effekt stark vermindert werden, Bild 7.28. Bei der Optimierung muß nach einer solchen Filterung nur darauf geachtet werden, daß die von Ansatzgrad n_{Filter} und der Abtastrate $1/\Delta t$ abhängige Einschwingzeit des Digitalfilters

$$t_{trans} = n_{Filter} \Delta t$$

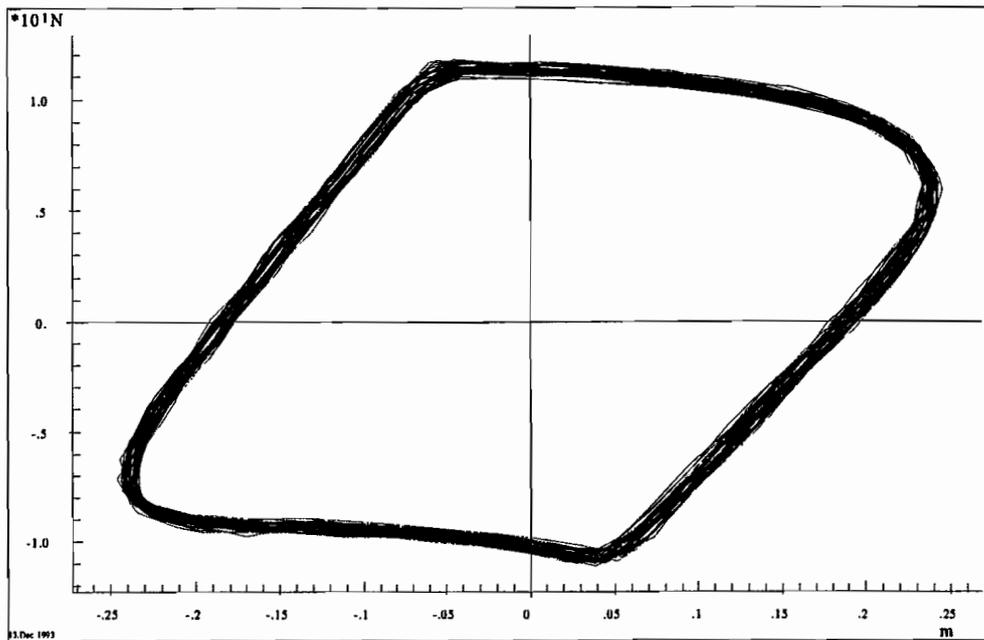


Abbildung 7.28: Verschiebung x_1 , gefiltert mit Tiefpaß 8 Hz

nicht mit in die Bewertung einbezogen wird. Bei langen Meßzeiten und harmonischen Erregungen ist das kein Problem mehr. Die konstante Gruppenlaufzeit des eingesetzten FIR-Filters sorgt im übrigen für eine rein konstante Zeitverschiebung aller Signalanteile [6]. Mit den solchermaßen vorbereiteten Meßwerten kann nun eine Optimierung des Modells gestartet werden.

Angeregt wurden hier 2 Eigenformen, die 2. und die 4.; die 1. Eigenform war mit circa 1 Hz zu tieffrequent für den vorhandenen Shaker, die 3. Eigenform wurde an keiner der nacheinander gemessenen 4 Erregungsstellen ausreichend angeregt, erst bei der 4. Eigenform konnte wieder eine ausreichende Amplitude erzeugt werden. Dafür war deutlich die erste harmonische Oberwelle der zweiten Eigenfrequenz zu sehen, Bild 7.30. Bei höheren Eigenformen als der 4. reichte die vorhandene Leistung nicht mehr aus, um ausreichende Amplituden für verwertbare Hysteresen zu erzielen, obwohl eine deutliche Anregung bis zur 8. Eigenfrequenz hin zu erkennen war, die bei circa 180 Hz liegt (Theorie: 188 Hz), Bilder 7.29 bis 7.30.

Bei der zweiten Eigenform konnten die besten Ergebnisse der Anpassung erzielt werden, da die Amplituden dabei die relativ größten waren, Bilder 7.33 und 7.34.

Wegen der immer noch in der Nähe der Pendelfrequenz der Bezugssystems Steiger liegenden Erregung von circa 8 Hz ist die verbleibende Ungenauigkeit zum Teil noch diesem Meßfehler zuzurechnen. Bei einigen Messungen war dieser Effekt sogar noch ausgeprägter, für diese konnte kein zuverlässiges Maximum des Fehlerfunktional bestimmt werden, sie mußten ausgesondert werden, hier lediglich zur Demonstration Bild 7.35.

Die nächstmögliche Anregung in der 4. Eigenfrequenz ergab zwar einen wesentlich geringeren Taumeleffekt, aber die Form der Hysteresen zeigt, daß das Modell die Hysterese nicht mehr getreu wiedergeben kann, Bild 7.36.

In noch höheren Eigenformen, wie hier der 8. mit circa 180 Hz, zeigte sich eine grundsätz-

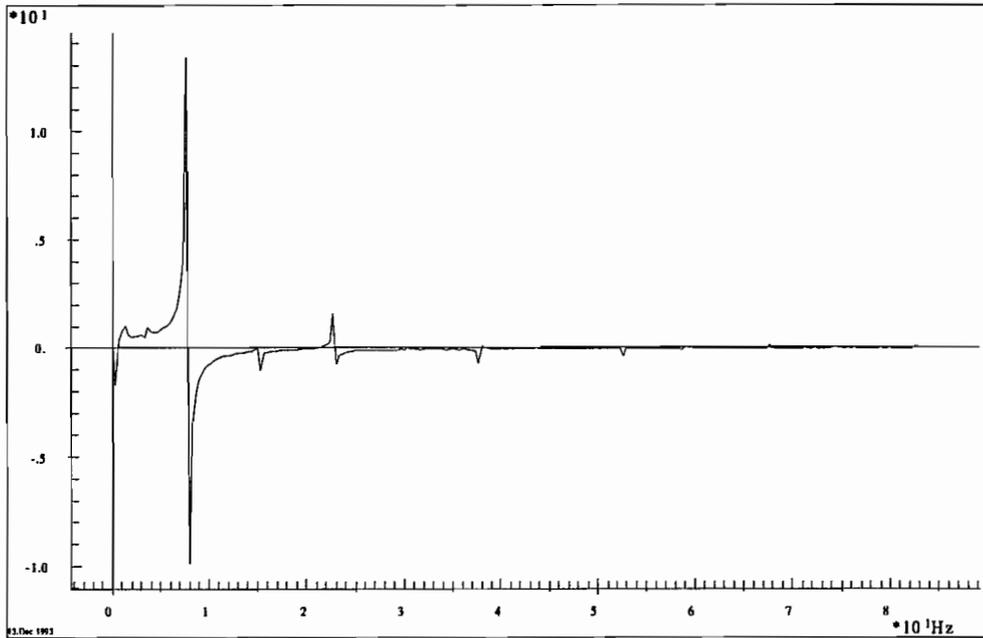


Abbildung 7.29: FFT der Anregung: 2. Eigenfrequenz bei 7.9 Hz

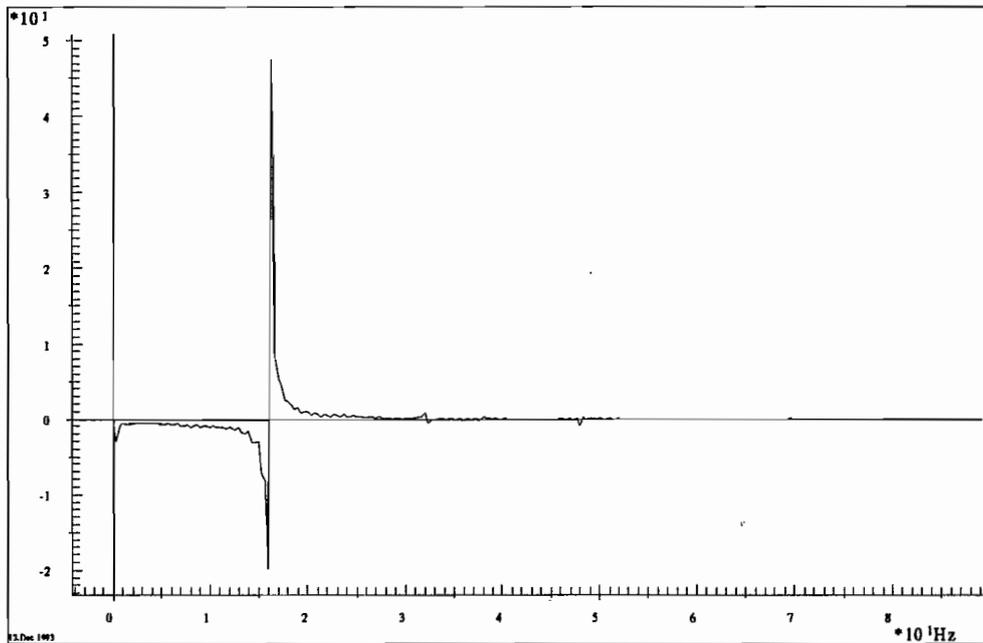


Abbildung 7.30: FFT der Anregung: 1. Oberwelle der 2. Eigenfrequenz bei 16 Hz

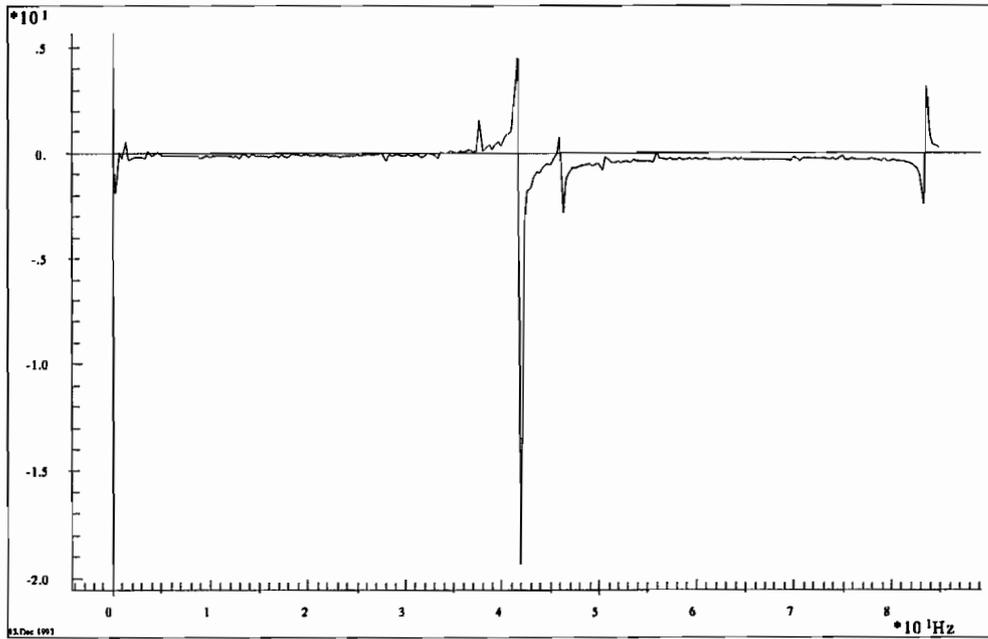


Abbildung 7.31: FFT der Anregung: 4. Eigenfrequenz bei 42 Hz (mit 1. Oberschwingung bei 82 Hz!)

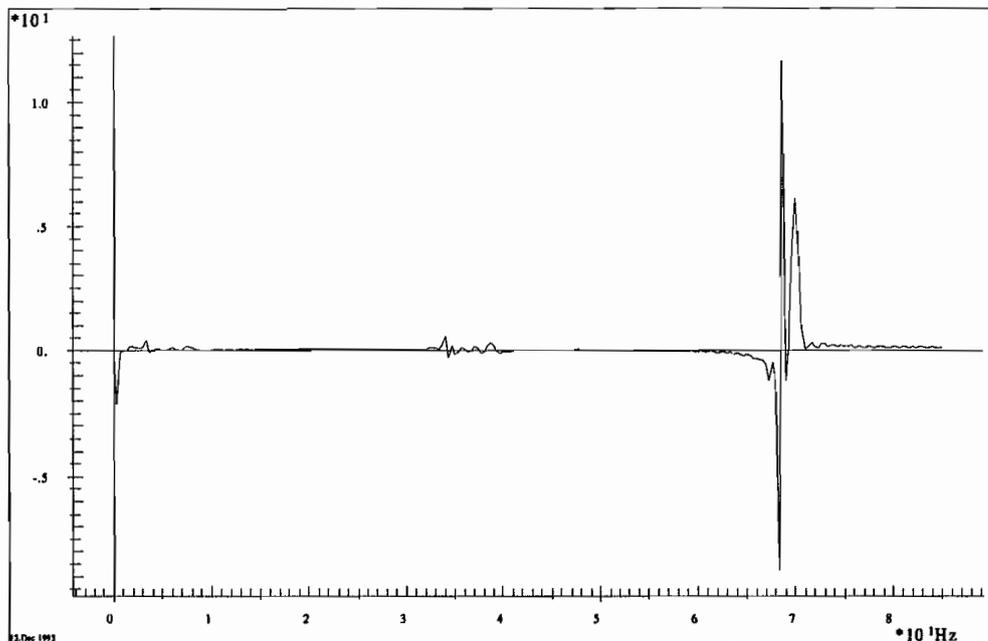


Abbildung 7.32: FFT der Anregung: 5. Eigenfrequenz bei 69 Hz

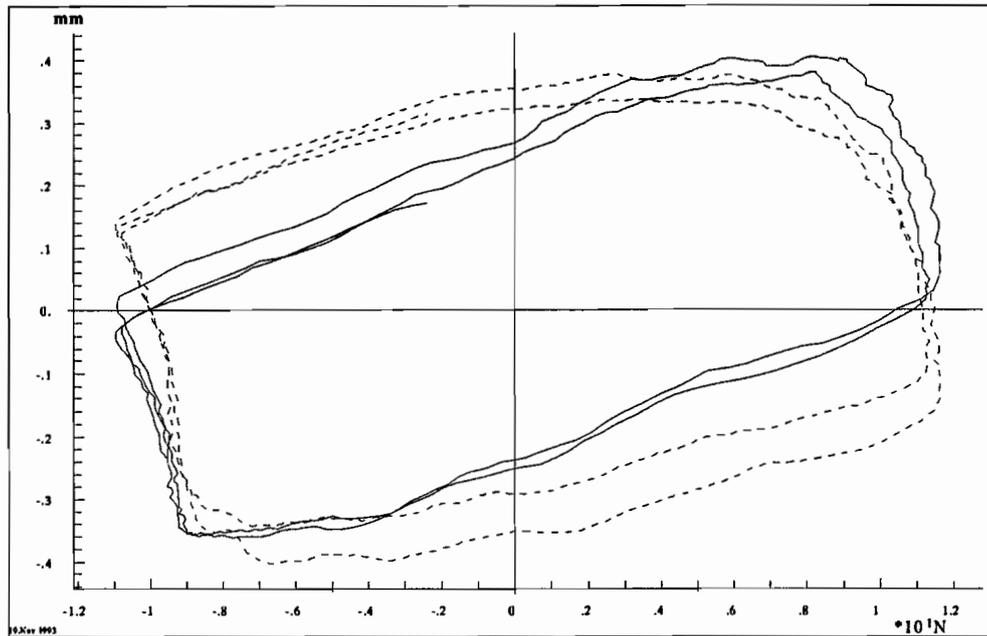


Abbildung 7.33: Anpassung bei circa 8 Hz Erregung, 1

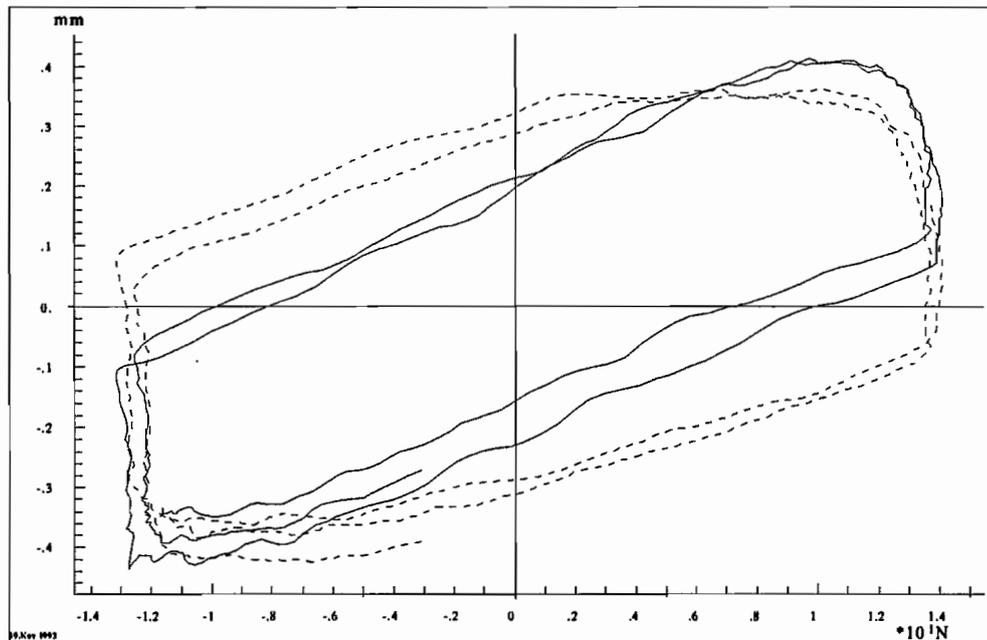


Abbildung 7.34: Anpassung bei circa 8 Hz Erregung, 2

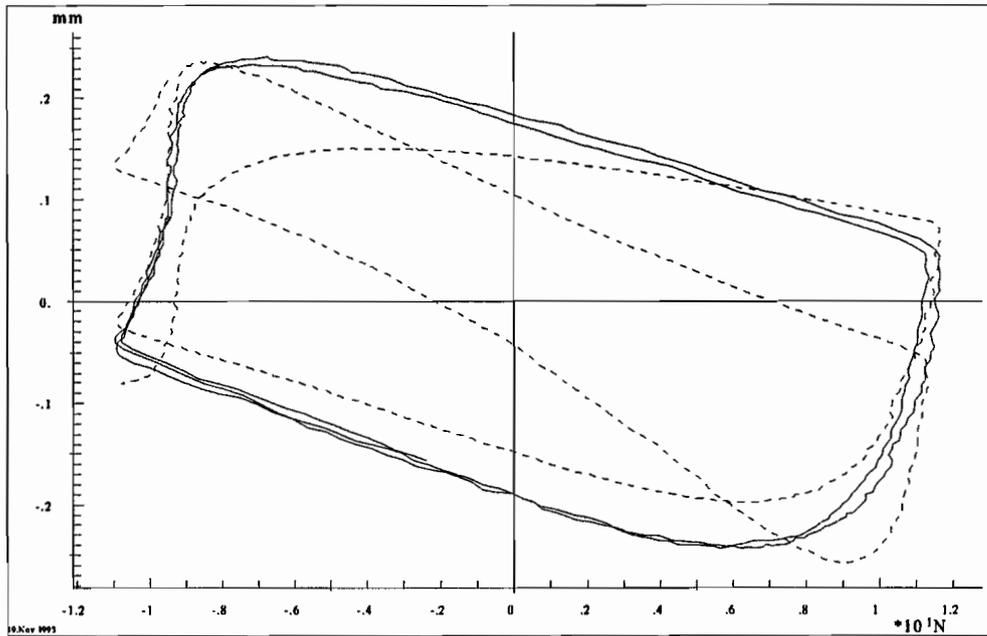


Abbildung 7.35: Optimierung bei misslungener Messung

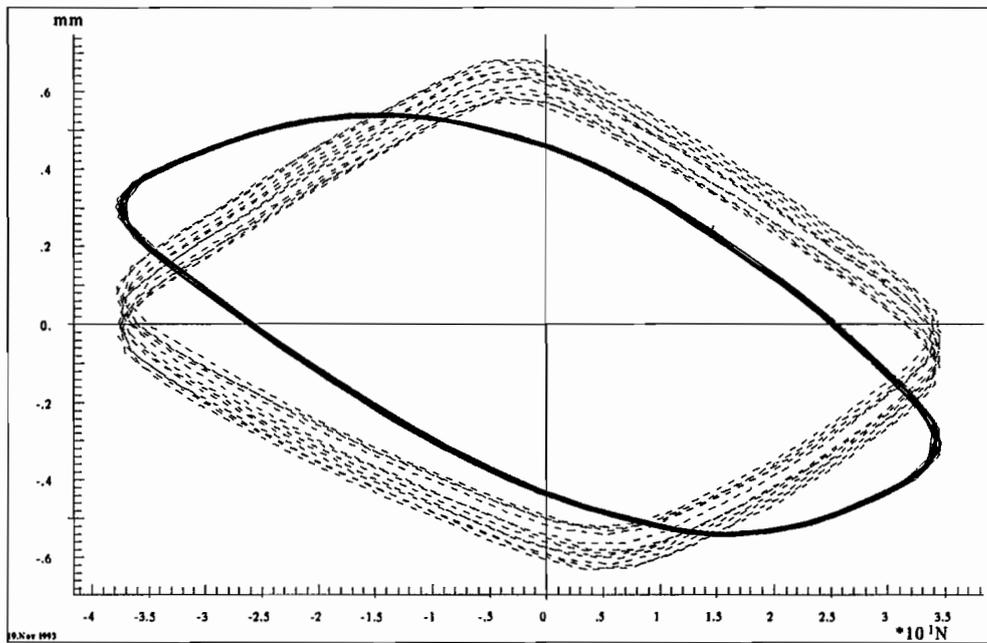


Abbildung 7.36: Anpassung bei circa 42 Hz Erregung

liche Diskrepanz zwischen Modell und Messung, Bild 7.37.

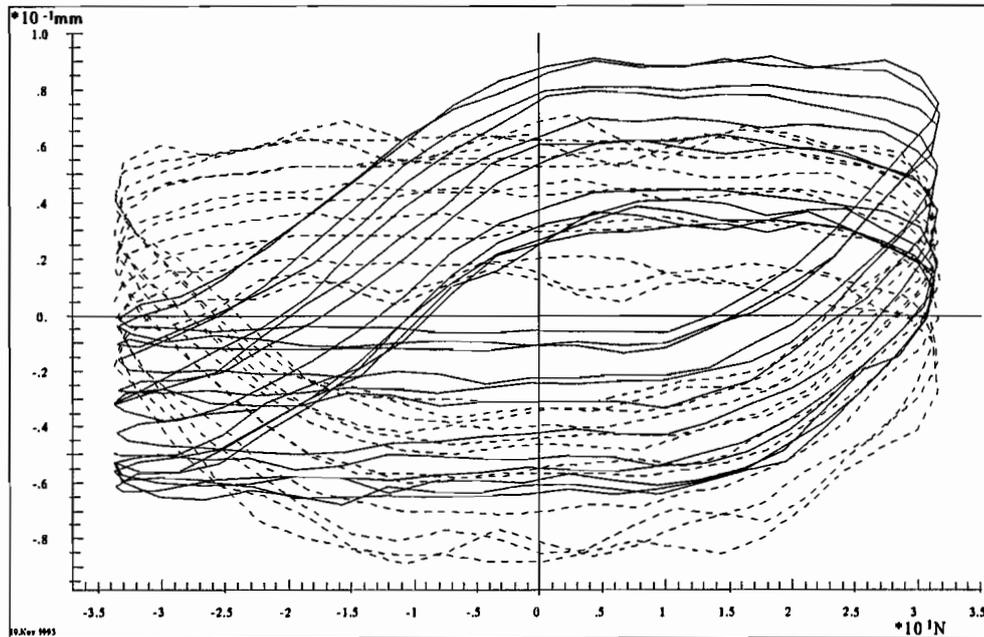


Abbildung 7.37: Anpassung bei circa 180 Hz Erregung, keine verwertbare Hysterese mehr

Zu den Parametern, die bei den verschiedenen Messungen mit optimaler Auswertung in beiden Eigenformen erhalten wurden, ist anzumerken, daß diese einer recht großen Streuung unterlagen. Die Zahlenwerte werden am Ende des Kapitels in Form einer Tabelle genannt.

Ganz allgemein kann zu den Optimierungsergebnissen für den Stahlbetonmast bemerkt werden, daß die Vernachlässigung des Bodeneinflusses und der Luftkräfte als bekannte Einschränkungen der Modellierung eine Unsicherheit in die Bewertung bringen. Abhilfe könnte hier für den Bodeneinfluß dadurch geschaffen werden, daß die Kräfte und Verschiebungen an der Einspannstelle gemessen werden. Damit könnte im Idealfall eine völlige Entkopplung von den Bodeneinflüssen erreicht werden, allein es fehlt die Meßtechnik für die dazu erforderliche optimale Erfassung aller Schnittgrößen. Über den Einfluß der Luftdämpfung ist zu sagen, daß er, da frequenzabhängig, erst bei den höheren Eigenfrequenzen des Systems auftritt. Entsprechende Untersuchungen haben gezeigt [5], daß bei Vorhandensein von Luft eine wesentliche frequenzabhängige Dämpfung zu beobachten ist, die im Vakuum bis auf einen minimalen Restwert hin abnimmt. Auch von dieser Seite ist also klar, daß bei höheren Eigenfrequenzen schlechtere Ergebnisse zu erwarten sind wegen der hier vorhandenen Vernachlässigung der Luftdämpfung. Eigene Versuche mit einem Fadenpendel haben gezeigt, daß der übliche Ansatz

$$W_d = c_w \frac{1}{2} u_\infty^2 \rho A \quad (7.9)$$

für die Luftdämpfungskraft bei den vorliegenden geringen Geschwindigkeiten nicht gilt, eher ein viskoser Ansatz angebracht ist. Die aus Tabellenwerken entnommenen Ansätze und Werte waren nicht einmal größordnungsmäßig richtig.

7.3 Ergebnisüberblick

Einen Überblick über die aus den Optimierungen gewonnenen Parameter für das Masingmodell geben die drei folgenden Tabellen. Angegeben werden die Einzelergebnisse der Optimierungen für die jeweiligen Versuche und der Schnitt über alle Ergebnisse der Versuchsreihe. Die viskose Restdämpfung wurde dabei modal angenommen mit:

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (7.10)$$

. Für die Optimierungen war α dabei grundsätzlich gleich Null gesetzt, β wurde in einem Intervall von $10^{-4.0}$ bis $10^{-3.5}$ leicht variiert. Damit wurde eine geringe viskose Grunddämpfung erreicht, was auch die sonst leicht numerisch instabile Simulation verbesserte.

Ergebnisse für die quasistatischen Versuche am Stahlbetonbalken

i	ν [1]	α [1/N]
14	0.519	4.898
15	1.151	5.202
16	1.216	4.965
21	0.990	2.759
∅	0.970	4.456

[Restfehler: ≈ 5.0]

Ergebnisse für die harmonischen Versuche am Stahlbetonbalken

i	ν [1]	α [1/N]
6	0.589	11.434
9	0.759	4.330
10	0.832	8.000
16	0.339	6.000
18	0.652	7.906
20	0.836	1.210
21	0.580	6.330
∅	0.655	6.459

[Restfehler: ≈ 12.0]

Ergebnisse für die harmonischen Versuche am Stahlbetonmast

i	ν [1]	α [1/N]
11	0.939	2.160
13	0.608	9.300
14	0.533	6.340
15	0.487	3.318
16	0.416	4.508
21	0.285	5.200
Ø	0.549	5.138

[Restfehler: ≈ 60.0]

7.3.1 Wertung

Da die Durchschnittswerte aus den 3 Versuchsreihen relativ gut zusammenliegen, für α und ν gleichermaßen, kann davon ausgegangen werden, daß das gewählte Modell zur Erfassung der nichtlinearen Dämpfung von Stahlbeton gut geeignet ist, lediglich die Streuung der Werte ist noch unbefriedigend groß. Falls eine große Datenbasis die gleiche Streuung aufweisen sollte, muß zunächst untersucht werden, ob die Versuchsbedingungen vergleichbar waren. Hier liegen 89 (= 21 + 35 + 33) Versuche zugrunde, von denen aber nur die Ergebnisse in den Tabellen wiedergegeben sind, deren Restfehler die geringsten Werte ergab. Damit war immer auch eine sehr gute Konvergenz der 10 Parametersätze der Optimierung verbunden.

Kapitel 8

Resümee und Ausblick

Die vorliegende Arbeit behandelt die Modellierung der Dämpfung in der Strukturodynamik. Sie führt ein in die verbreitetsten Dämpfungsansätze für Strukturen und schildert die dabei auftretenden Beschränkungen und Probleme.

Für die bisher in der Literatur verstreut vorliegenden phänomenologischen Dämpfungsmodelle gibt sie zusammenfassende Übersicht. Die Modelle werden zur besseren Klassifizierung mit ihren verschiedenen Eigenheiten vorgestellt. Zusammen mit der hier angeführten neuen analytischen Lösung für das kontinuierlich aufgebaute Masingelement sind bis auf das relativ unbedeutende Iwan-Modell alle diese Modelle für dynamische Berechnungen einsetzbar, entsprechende Simulationsrechnungen werden hier benutzt zur Erstellung der Zeitverläufe. Damit steht eine Art Baukastensystem zur phänomenologischen Modellierung der Dämpfung zur Verfügung, mit dem viele Dämpfungsarten anhand ihrer Hysteresen modellierbar sind.

Daran anschließend wird die analytische Lösung für das Masingelement eingesetzt, um FEM-Systeme mit einer entsprechenden Dämpfungscharakteristik zu modellieren. Dies wird an verschiedenen Elementtypen demonstriert, angefangen vom trivialen Fall des Stabelementes über das Balkenelement bis hin zum 12-parametrischen Plattenelement. Ein geeigneter Optimierer für die Anpassung der Parameter des Masingmodells wurde entwickelt und an einem Einmassenschwinger getestet.

Zwei mit Masingelementen bedämpfte Modelle von realen Strukturen werden in finiten Elementen erstellt, ein an Drahtseilen aufgehängter Stahlbetonbalken und ein im Freien aufgestellter Stahlbetonmast. Die Parameter dieser Modelle wurden anhand experimenteller Daten identifiziert. Für den Balken wurden zunächst quasistatische Versuche bei ca. 0.15 Hz ausgewertet, die eine rein amplitudenabhängige Dämpfung ohne viskose Einflüsse lieferten. Mit den so gewonnenen Kenntnissen ließen sich Identifikationen der übrigen Parameter bei harmonischer Erregung durchführen. Wegen der vergleichsweise idealen Lagerung des Balkens waren die Ergebnisse der Identifikation hier entsprechend besser als beim Stahlbetonmast, bei dem die Streuung der Parameter größer war.

Die Anwendung des Masingelementes für die Modellierung der Dämpfung von Stahlbeton ist somit, beeinträchtigt lediglich durch die Versuchsbedingungen, als gelungen zu bezeichnen. Durch die neue analytische Lösung des kontinuierlichen Masingelementes kann jetzt

auch in physikalischen Koordinaten gearbeitet werden, die Einschränkung der Gültigkeit bei Anwendung in modalen Koordinaten ist weggefallen und die Parameterwerte liegen physikalisch anstatt nur modal vor.

Ausblick: Die Modellierung der Dämpfung mit phänomenologischen Modellen eröffnet im Zusammenhang mit konventionellen Methoden der Systemdynamik eine große Zahl von Möglichkeiten zur Abbildung vorgegebener Hystereseformen bzw. Dämpfungsarten. Zu verbessern sind nach wie vor die Randbedingungen für die Erfassung von Meßwerten. Die oft schlecht mögliche Definition der Systemgrenzen schränkt die Identifizierbarkeit von Dämpfungsparametern ein. Zur Erfassung der Anfangsbedingungen bei transienten Schwingungen kann eine Simulation unter Einbeziehung der gesamten Meßkette – über die hier vorgestellte eigens entwickelte Meßtechnik hinaus – Fortschritte bringen. Dazu müßte dann eine Art Beobachtermodell für die analoge und gegebenenfalls auch digitale Meßtechnik geschaffen werden. Besonders naheliegend ist der Einsatz der phänomenologischen Modellierung für spezielle technische Dämpfungselemente, wozu es auch eine ganze Anzahl jüngerer Publikationen gibt [1, 26, 38, 40, 57]. Infolge der Kopplungsmöglichkeiten verschiedener Einzelemente zu Systemen wird es immer wieder neue Modellierungsaufgaben geben, für die flexible Werkzeuge gefragt sind. Der eingeschlagene Weg der Dämpfungsmodellierung über die Hysterese erschließt viele Anwendungsgebiete, die konventionellen Methoden der Systemdynamik verschlossen sind.

Anhang A

Meßwerterfassung und -verarbeitung

Für diese Arbeit wurden umfangreiche Meßreihen aufgenommen, deren Durchführung hier in Grundzügen beschrieben wird. Infolge der in der Einleitung schon angesprochenen Schwierigkeiten, eine für dynamische Vorgänge auf mehreren Kanälen geeignete Meßtechnik zu finden, mußten viele insbesondere analoge Geräte selbst entwickelt und gebaut werden. Problematisch ist meist die im tiefen Frequenzbereich schlechte Empfindlichkeit industrieller Systeme, die entweder für statische oder für relativ hochfrequente Vorgänge konzipiert sind. Teilweise wurden deshalb eigene Meßwertaufnehmer gebaut, wo es möglich war aber auch fertige Aufnehmer eingesetzt. Die komplette Analogtechnik für Filter und Verstärker wurde speziell für tieffrequente dynamische Messungen an Strukturen entworfen und realisiert, erst bei der A/D-Wandlung wurde wieder ein fertiges Produkt eingesetzt.

A.1 Meßwertaufnehmer

A.1.1 Beschleunigungsaufnehmer

Bei allen für diese Arbeit durchgeführten Messungen wurden auch Beschleunigungen gemessen. Für relativ hochfrequente ($f > 100\text{Hz}$) Messungen wurden Aufnehmer der Firma PCB verwandt. Problematisch waren die Messungen an dem im Freien aufgestellten Betonmasten, dessen 1. Eigenfrequenz bei ca. 1Hz liegt. Auch bei dem speziell für tiefe Frequenzen geeigneten Aufnehmer PCB393C war die Antwort auf eine derart tiefe Frequenz bei den gegebenen Amplituden zu niedrig. Die Antwort eines Beschleunigungsaufnehmers mit einer seismischen Masse m auf eine harmonische Schwingung mit Amplitude \hat{x} und Frequenz Ω ist mit der piezoelektrischen Konstanten K eine Spannung U :

$$U = KF = K \frac{1}{2} m \hat{x} \Omega^2 \quad (\text{A.1})$$

Zur Vergrößerung des Signal-Rausch-Abstandes könnten zuerst die Frequenz oder die Amplitude erhöht werden, die aber als Prozeßgrößen in der Regel nicht verändert be-

einflußbar sind. Es bleibt also nur noch übrig, die Empfindlichkeit K des Aufnehmers und/oder die seismische Masse m zu vergrößern. Durch die Wahl geeigneter Piëzofolien gelang es, die elektrische Empfindlichkeit K zu steigern. Weitere Verbesserung konnte danach nur die Vergrößerung der seismischen Masse m bringen, mit der Gefahr, daß bei extrem großer Masse im höheren Frequenzbereich schnell Übersteuern einsetzt. Als Kompromiß wurde aufgrund entsprechender Versuche eine seismische Masse von ca. 1 kg gewählt.

Elektrisches Funktionsprinzip der Beschleunigungsaufnehmer

Alle eingesetzten Beschleunigungsaufnehmer einschließlich der selbst entwickelten Modelle hatten das gleiche Funktionsprinzip. Sie werden über ein Koaxialkabel mit einem Konstantstrom von 4mA bei 0-24V Spannungshub gespeist, Bild A.1.

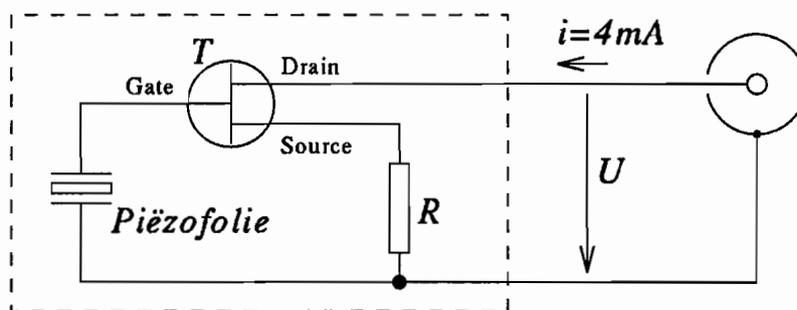


Abbildung A.1: Schaltungsprinzip Piëzo-Beschleunigungsaufnehmer

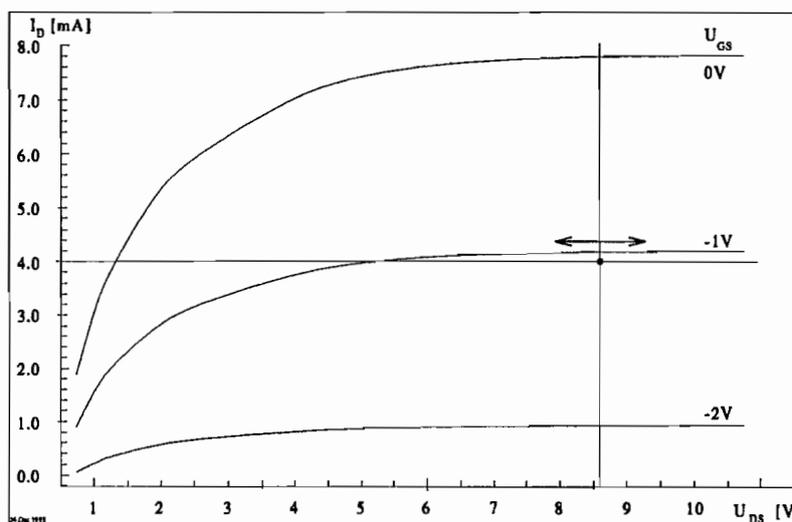


Abbildung A.2: Kennlinie J-FET

Der Fet-Transistor T , ein BF245C, ist über den Widerstand R in den Arbeitspunkt gebracht, Bild A.2. Die horizontale Gerade bei 4mA kennzeichnet den Arbeitsbereich des Transistors. Im Arbeitspunkt bei [8.6V, 4mA] liegen eben diese 4mA Konstantstrom von

der Stromquelle über den Kanal als Drain-Source-Strom I_{DS} an. Eine geringe Änderung des Drain-Source-Innenwiderstandes R_{DS} durch eine Änderung der Gate-Source-Spannung U_{GS} verursacht eine relativ große Änderung der Drain-Source-Spannung U_{DS} . Bei einer maximalen Versorgungsspannung der Stromquelle von +24V ergibt das einen Spannungshub von ca. $\pm 10V$.

Wird die Piëzofolie von einer Kraft F mechanisch erregt, so erzeugt der Piëzoeffekt eine Ladung Q in ihr, die wegen des großen Gate-Source-Widerstandes des FET von ca. $15\text{ G}\Omega$ nur langsam abfließt und demnach über Spannungsaufbau die Gate-Source-Spannung U_{GS} des FET ändert. Damit ist der Widerstand der Reihenschaltung von R und R_{DS} geändert und die Stromquelle stellt nach dem Ohm'schen Gesetz $U = RI$ mit $I = \text{const.}$ und $R = R(F)$ eine neue Spannung U ein, die proportional zur Kraft auf die Folie, damit zur Ladung Q und auch zum Widerstand R_{ges} ist. Wird die Kraft auf die Folie mit einer seismischen Masse erzeugt, so ist letztendlich Gleichung A.1 das Ergebnis [51, 68].

Der prinzipielle Aufbau des Beschleunigungsaufnehmers ist in Bild A.3 gezeigt:

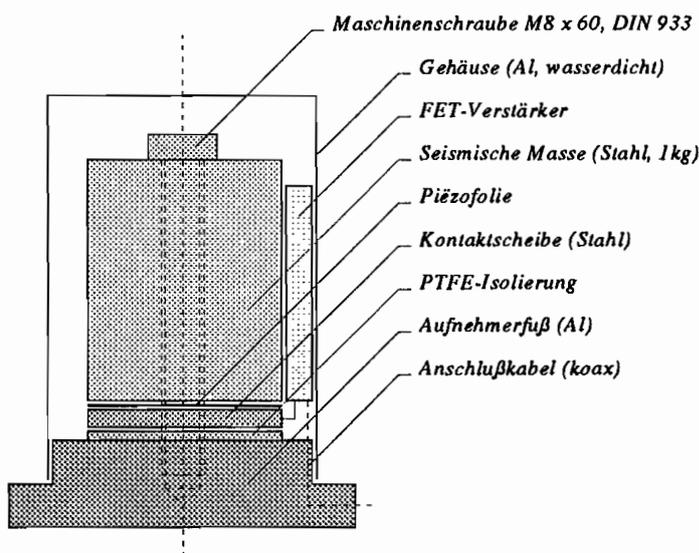


Abbildung A.3: Konstruktionsprinzip Piëzo-Beschleunigungsaufnehmer

Die eingebaute Aufnahmerelektronik beinhaltet bereits Abgleich und Verstärkung für die Meßsignale. Günstig ist der 1-adrige Koaxialkabelanschluß auf jeden Fall für die Störempfindlichkeit und Einfachheit der Übertragungsstrecke. Auch mit dem Signal korrelierte elektromagnetische Störungen auf das Kabel oder den abgeschirmten Aufnehmer bleiben ohne sichtbare Auswirkungen. Der Verstärker muß dazu natürlich genauso effektiv abgeschirmt sein. Der Aufnehmer ist besonders querbeschleunigungsunempfindlich, wenn 2 Lagen Folien in gegensinniger Richtung aufeinander liegen, damit sich die Schubkraftanteile der Ladungen gegenseitig aufheben, was hier auch realisiert wurde. Im übrigen wird dabei auch die Empfindlichkeit verdoppelt.

Abgleich der Beschleunigungsaufnehmer

Die fertigen Aufnehmer mußten geeicht werden, da die von den Herstellern aller elektronischen Bauteile, insbesondere des FET und die vom Hersteller der piezoelektrischen Folie genannten Eigenschaften großen Streuungen unterliegen. Als Beschleunigung mit relativ genau bekanntem Wert stand nur die Erdbeschleunigung zur Verfügung. Damit kam nur ein Fallversuch zum Abgleich der Aufnehmer in Frage, wozu die Aufnehmer an einem Draht befestigt und durch Zerschneiden des Drahtes zum Fallen gebracht wurden. Die seismische Masse der Aufnehmer erfuhr dabei einen Beschleunigungssprung von -1 g auf 0 g . Anhand dieses Sprunges konnte mit mehreren Messungen für jeden Aufnehmer die Empfindlichkeit desselben bestimmt werden. Als Beispiel ist hier eine solche Messung gezeigt, Bild A.4, schon normiert auf die erste Vergleichsmessung.

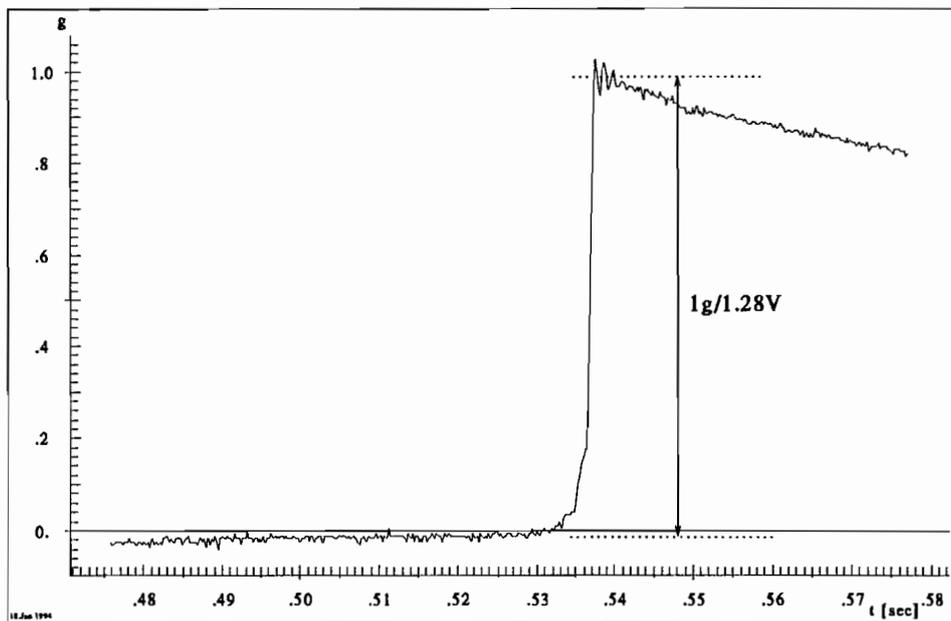


Abbildung A.4: Abgleich der Beschleunigungsaufnehmer, Beispiel

Die Empfindlichkeit kann durch Parallelschaltung eines hochohmigen Widerstandes ($R > 100\text{ M}\Omega$) mit der Folie zu Gunsten der Rauschempfindlichkeit des Aufnehmers verringert werden. Maximal werden dabei ca. 3.5 V/g erreicht, realisiert aber nur 1.0 bis 1.5 Volt, um den Rauschpegel niedrig zu halten. Diese Empfindlichkeit ist im Gegensatz zu den vorher verfügbaren Aufnehmern bis zu wesentlich tieferen Frequenzen von ca. 0.1 Hz gewährleistet.

A.1.2 Kraftaufnehmer

Für die dynamischen Messungen mit Frequenzen über 10 Hz wurden piezoelektrische Aufnehmer eingesetzt, die bei tieferen Frequenzen infolge ihrer Hochpaßcharakteristik unerwünschte Filterungen verursachen. Die in diesen Aufnehmern erzeugten Ladungen werden an den immer vorhandenen endlichen Widerständen im Aufnehmer selbst, im Kabel und am Verstärkereingang abgebaut, statische Messungen damit unmöglich gemacht.

Für diese statischen Messungen kamen Trägerfrequenz-DMS-Aufnehmer zum Einsatz, die von DC bis ca. 1 kHz einsetzbar sind, aber einen größeren Aufwand erfordern für Geräte und Abgleich als piezoelektrische Aufnehmer, die deshalb wenn möglich immer vorgezogen wurden.

A.1.3 Wegaufnehmer

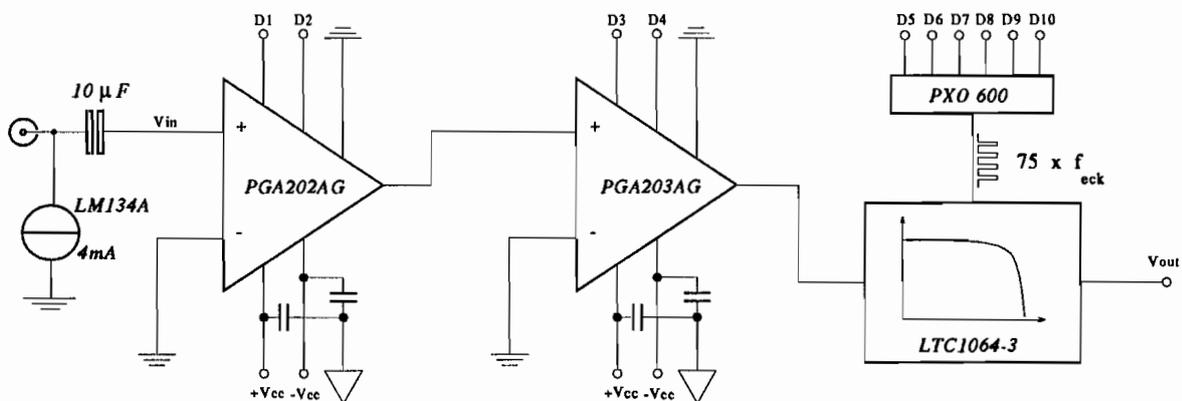
Wo möglich, wurden auch Wege gemessen, um bessere Informationen über die Systemantworten zu erhalten als nur über Beschleunigungsmessungen. Dafür wurden induktive Trägerfrequenz-Tauchspulen-Aufnehmer eingesetzt, die allerdings nur bis ca. 1kHz brauchbare Ergebnisse liefern.

A.2 Analoge Verstärker und Filter

Speziell für die zu bewältigenden Meßaufgaben mit Frequenzen von um 1 Hz wurde eine analoge Meßwertverarbeitung entwickelt [19], die folgende Kriterien erfüllen sollte:

- Frequenzgang von $\ll 1\text{Hz}$ bis ca. 5kHz
- Temperaturstabilität
- Hohe Genauigkeit der Amplituden
- Lineare Phase für konstante Gruppenlaufzeit
- Hohe Sicherheit beim Arbeiten, Fehlertoleranz

Die realisierte Schaltung, die dann zum Einsatz kam, ist in folgendem Bild dargestellt:



Eine (optional abschaltbare) Stromquelle am Eingang speist angeschlossene piezoelektrische Aufnehmer für Kräfte und Beschleunigungen mit 4mA bei einem Spannungshub

von $12V \pm 11.5V$. Ihre Steuerspannung wird über eine Sperrimpedanz als Hochpaß mit einer Eckfrequenz bei $\frac{1}{RC}$ vom Gleichspannungsanteil (Offset) befreit. Diese Sperrimpedanz zwischen Stromquelle und erstem Verstärker ist für den gewünschten Frequenzgang auszulegen. Gewählt wurde hier ein bipolarer Elektrolytkondensator mit $10\mu F$, der eine untere Eckfrequenz (-3dB) von 0.12 Hz liefert. Bei piezoelektrischen Aufnehmern ist dieser Wechselspannungsanteil das eigentliche Nutzsignal. Für Gleichspannungsmessungen oder sehr tieffrequente Vorgänge lassen sich Stromquelle und Sperrimpedanz auskoppeln, um eine reine DC-Spannungsmessung zu ermöglichen. Dann ist der Eingang der Schaltung direkt mit dem ersten Verstärker verbunden.

Zwei auf die Sperrimpedanz folgende oder bei DC-Spannungsmessung direkt angeschlossene Instrumentenverstärker-OP's PGA 202/203 ermöglichen 16 frei wählbare Verstärkungsstufen von 1x bis 8000x, die von der Steuersoftware her vorzugeben sind.

Daran anschließend folgt ein analoges linear-phasiges 'switched-capacitance'-Tiefpaßfilter 8. Ordnung. Dessen Eckfrequenz wird ebenfalls über die Steuersoftware vorgegeben, indem ein programmierbarer Frequenzgenerator den Steuertakt für das Filter erzeugt, der hier um Faktor 75 über der Eckfrequenz liegt und Filter-Eckfrequenzen von 0.005Hz bis 13653.33Hz ermöglicht. Am Ausgang des Filters wird das Signal für den A/D-Wandler abgenommen.

Der Temperaturgradient der eingesetzten komplexen Analogschaltkreise liegt bei unter 10 ppm, die Stromquelle LM134A ist mit einer Siliziumdiode BAW76 temperaturkompensiert.

Die Amplitudengenauigkeit der Burr-Brown-OP's PGA202AG und PGA203AG ist ab Werk über Lasertrimmung auf unter $1^0/00$ eingestellt. Diese OP's haben eine für die hier gemessenen Signale voll ausreichende Bandbreite von 0Hz bis 100kHz.

Der Filter LTC1064-3 ist im Durchlaßbereich 0.3% genau. Ebenfalls im Durchlaßbereich hat der Filter eine konstante Gruppenlaufzeit, d.h. die einzelnen Frequenzanteile des Signals ändern während der Filterung ihre Phasenlage zueinander nicht, sondern erfahren eine reine Zeitverschiebung, die für alle Signalanteile im Durchlaßbereich gleich ist.

Die anschließende A/D-Wandlung erfolgt mit 12 Bit, d.h. die maximale digitale Genauigkeit beträgt $1/2048$ unter Berücksichtigung des Quantisierungsfehlers.

Bei den Messungen ist eine maximale Fehlertoleranz dadurch gegeben, daß alle Parameter von Verstärkungen über Filtereckfrequenz und Abtastrate digital vom Rechner vorgegeben und auf ihre Zulässigkeit überprüft werden, Aliasing-Fehler sind somit fast ausgeschlossen, auch ist die Protokollierung immer gleich vollständig und zuverlässig.

A.3 Digitale Signalverarbeitung

Der eingesetzte A/D-Wandler DVME601B hat auf einer eigenen Karte DVME645 für jeden Kanal einen sample&hold-Verstärker. Damit wird eine Simultanabtastung mit nachfolgender gemultiplexter A/D-Wandlung vorgenommen, die bei rein sukzessiver Abtastung und Wandlung vorhandene Phasenverschiebung zwischen den Kanälen tritt nicht

mehr auf. Unter Echtzeitbedingungen ist in dieser Konfiguration eine Summenabtastrate von ca. 84 kHz zu erreichen, weit mehr als benötigt wurde.

Nach der Abspeicherung der Meßdaten auf der Festplatte kann später die eigentliche (off-line-) Meßdatenverarbeitung erfolgen. Es ist sinnvoll, Messungen mit einer hohen Abtastrate zu fahren, da später mit einer digitalen Filterung und anschließendem Resampling unter Einhaltung des Shannon-Theorems eine Datenreduktion vorgenommen werden kann, die eine niedrigere Abtastrate simuliert, der umgekehrte Weg aber logischerweise nicht gangbar ist. Die digitalen Filter sind selbstverständlich auch geeignet, um unerwünschte Frequenzanteile aus dem Meßsignal herauszufiltern. Dabei können die gleichen Filtertypen, die auch aus der analogen Filtertechnik bekannt sind, eingesetzt werden. Als Beispiel sei hier ein FIR-Tiefpaß 301. Ordnung mit seiner Impulsantwort gezeigt, das Amplitudenspektrum in Bild A.5 und der Phasengang in Bild A.6.

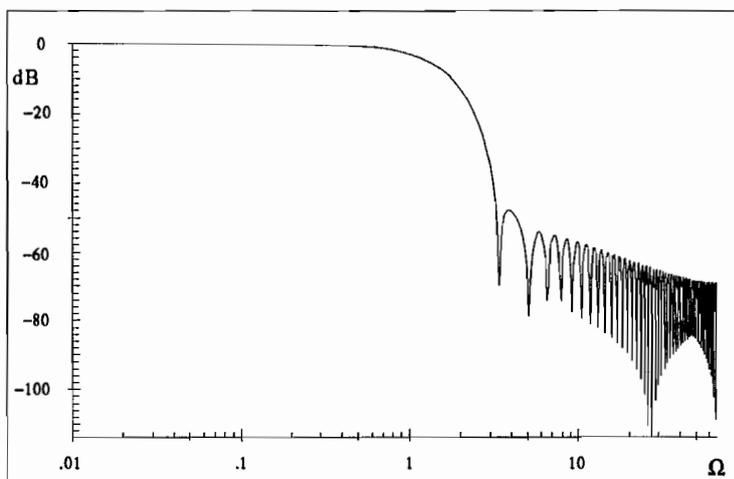


Abbildung A.5: Digitalfilter, Amplitudenspektrum

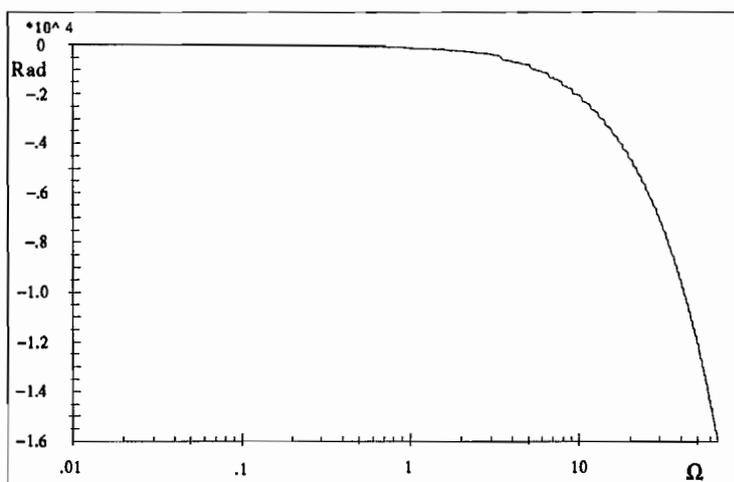


Abbildung A.6: Digitalfilter, Phasengang

Bei der digitalen Filterung ist zuerst das Frequenzverhältnis von Abtastung und Eckfrequenz zu beachten. Ist dieses sehr groß, so muß ein hoher Ansatzgrad für das Fil-

terpolynom gewählt werden. Je höher der Ansatzgrad ausfällt, desto schwerer wird es beim Entwurf des Filterpolynoms an der Eckfrequenz eine Amplitude von -3dB einzustellen. Das Filterpolynom wurde hier mit einer Genauigkeit von 10^{-4} bestimmt, damit die Amplitudenverfälschung infolge der Filterung möglichst klein bleibt. Bei extremen Frequenzverhältnissen (ab ca. 100) ist damit zu rechnen, daß kein Polynom mehr gefunden werden kann, das die gewünschte Amplitude bei der Eckfrequenz erfüllt. Die Stabilität stellt bei diesen FIR-Filtern kein Problem dar [6, 68].

Durch den Grad des Ansatzpolynoms wird die Einschwingzeit des Filters bestimmt, die wie bei analogen Filtern auch die Erfassung transients Vorgänge erschwert. Erst wenn das Filterpolynom „voll“ ist, ist der Einschwingvorgang beendet:

$$t_{trans} = n_{Polynom} \cdot \Delta t \quad (\text{A.2})$$

Die eingesetzten digitalen Filter haben wie auch die gewählten analogen Filter eine lineare Phase und damit konstante Gruppenlaufzeit. Alle Spektralanteile des Signals erfahren somit auch bei der digitalen Filterung eine reine Zeitverschiebung um die Einschwingzeit t_{trans} , die Signalphase wird nicht beeinflusst.

Literaturverzeichnis

- [1] R. Ahrens. *Innere Variablen in linear-viskoelastischen Schwingungssystemen*. Dissertation, TU Braunschweig, Braunschweig, 1992.
- [2] J. Argyris, H.-P. Mlejnek. *Die Methode der finiten Elemente*. I: Verschiebungsmethode in der Statik. Vieweg, Braunschweig, 1986.
- [3] J. Argyris, H.-P. Mlejnek. *Die Methode der finiten Elemente*. III: Einführung in die Dynamik. Vieweg, Braunschweig, 1986.
- [4] G. Backhaus. *Deformationsgesetze*. Akademie Verlag, Berlin(Ost), 1983.
- [5] W.E. Baker et al. Air and internal damping of thin cantilever beams. *Int.J.Mech.Sci.*, 9:734–766, 1967.
- [6] H. Behrens. Grundlagen analoger und digitaler Filter. Studienarbeit, Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1991.
- [7] P. Börner. *Statik, Reibung*. Hanser Verlag, München, 1973.
- [8] St. Bohlen; L. Gaul. Berechnung und Messung des Schwingungsverhaltens mechanischer Strukturen bei nichtlinearer Kopplung durch Fügestellen. *VDI Berichte*, 627:91–118, 1987.
- [9] M.J. Box. A new method of constrained optimization and a comparison with other methods. *Comp. Journal*, 8:42–52, 1965.
- [10] B.D. Bunday. *Basic Optimization Methods*. Edward Arnold, London, 1985.
- [11] I.N. Bronstein, K.A.Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1984.
- [12] S.H. Crandall. The role of damping in vibration theory. *Int. Journ. of Sound and Vibr.*, 11:3–18, 1970.
- [13] D. Darwin; C.K. Nmai. Energy dissipation in RC beams under cyclic load. *Int. Journ. Struct. Eng.*, pages 1829–1846, 1986.
- [14] T.H. Dawson. Continuum Description of Hysteresis Damping of Vibrations. *Int.J.Solids and Structures*, 14:457–464, 1978.

- [15] P. Dechent. *Berechnung und Bemessung reibgedämpfter Bauwerke unter Erdbebenbeanspruchung*. Dissertation, Techn.-wiss. Mitt., Inst. f. konstr. Ingenieurbau Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1989.
- [16] G. Denkhaus. Über Werkstoffdämpfung bei Biegeschwingungen. *Ingenieur-Archiv*, XVII:300–307, 1948.
- [17] R. Dieterle. *Modelle für das Dämpfungsverhalten von schwingenden Stahlbetonträgern in gerissenem und ungerissenem Zustand*. Dissertation, ETH Zürich, Zürich, 1981.
- [18] R. Dieterle; H. Bachmann. *Versuche über den Einfluß der Rißbildung auf die dynamischen Eigenschaften von Leichtbeton- und Betonbalken*. ETH, Institut f. Baustatik und Konstr., Zürich, 1979.
- [19] M. Epping, T. Pagel. VME-analog, ein VME-Bus-Board zur Aufbereitung analoger Signale, incl. UNIX-Software. Studienarbeit, Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1992.
- [20] R. Flesch. *Das Dämpfungsverhalten schwingender Stahlbetontragwerke*. Dissertation, Univ. Wien, Wien, 1980.
- [21] R.H. Gallagher. *Finite-Element-Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [22] L. Gaul. Analytical and experimental study of the dynamics of structures with joints and attached substructures. *ASME Design Engineering Division Conference*, 1985.
- [23] L. Gaul. Analytische und experimentelle Ermittlung der Frequenzen, Schwingungsformen und Dämpfung gekoppelter Schwingungen. *ZAMM*, 65:T50–T53, 1985.
- [24] L. Gaul. Identification of nonlinear structural joint models and implementation in discretized structure models. *ASME Design Technology Conferences*, pages 213–219, 1987.
- [25] L. Gaul. Wave transmission and energy dissipation at structural and machine joints. *ASME Design Engineering Technical Conference*, 1981.
- [26] L. Gaul. Zur Dämmung und Dämpfung von Biegewellen an Fügstellen. *Ingenieur-Archiv*, 51:101–110, 1981.
- [27] L. Gaul. Zur Dynamik der Wechselwirkung von Strukturen mit dem Baugrund (Habilitationsschrift). Technical report, TU Hannover, 1985.
- [28] L. Gaul. Zur Wellenausbreitung in Strukturen mit Fügstellen. *ZAMM*, 62:T41–T44, 1982.
- [29] L. Gaul; S. Bohlen. Zum nichtlinearen Übertragungsverhalten von Fügstellen. *ZAMM*, 64:T45–T48, 1984.
- [30] L. Gaul, S. Bohlen, H. Kempfle. Transient and forced oscillations of systems with constant hysteretic damping. *Mech. Research Communications*, 1985.

- [31] M. Giuggiani et al. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary element integral equations. *J. of Appl. Mechanics*, 1990.
- [32] C.O. Hayes. Inelastic material models in earthquake response. *J. of the Structural Division, ASCE*, 107(ST1):13–28, 1981.
- [33] O. Huber. Schwingungsanalyse des Systems Bauwerk-Baugrund am Beispiel eines Industrieschornsteins. Diplomarbeit, Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1990.
- [34] W.D. Iwan. On a Class of Models for the Yielding Behaviour of Continuous and Composite Systems. *J. of Appl. Mech.*, 34(3):612–617, 1967.
- [35] W.D. Iwan. A Distributed-element Model for Hysteresis and its Steady-State Response. *J. of Appl. Mech.*, 33(4):893–900, 1966.
- [36] W.D. Iwan; A.O. Cifuentes. A model for system identification of degrading structures. *Earthquake Eng. and Struct. Dyn.*, 14:877–890, 1986.
- [37] Iwan, Moser, Pappas. The stochastic response of strongly nonlinear systems with coulomb damping elements. *IUTAM Symp. Innsbruck*, 1987.
- [38] H. Kolsch. Modellierung und Identifikation von Metallkabeldämpfern. *ZAMM*, 72, 1992.
- [39] H. Kolsch. *Schwingungsdämpfung durch statische Hysterese*. Dissertation, TU Braunschweig, Braunschweig, 1993.
- [40] H. Kolsch; D. Ottl. Modellierung und numerische Simulation von Federelementen mit statischer Hysterese. Technical report, Curt-Risch-Inst. der Univ. Hannover, 1990.
- [41] J.L. Kuester; J.H. Mize. *Optimization Techniques*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
- [42] M. Lawo. *Optimierung im konstruktiven Ingenieurbau*. Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [43] B.J. Lazan. *Damping of materials and members in structural mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1968.
- [44] B.J. Lazan. Damping mechanism and phenomenology in materials. In *Appl. Mech. 11. Int. Conf. München*, pages 493–501, 1964.
- [45] H. Lenk. *Über das Schwingungsverhalten von Spannbeton- und Stahlbetonbalken*. Dissertation, Univ. Stuttgart, Stuttgart, 1964.
- [46] O. Mahrenholtz; L. Gaul. *Dämpfungsfragen*. VDI-Bildungswerk, 1983.
- [47] G. Masing. Zur HEYN'schen Theorie der Verfestigung der Metalle durch verborgen elastische Spannungen. *Wissenschaftl. Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*, 3(1):231–239, 1923/1924.

- [48] G. Masing. Berechnung von Dehnungs- und Stauchungslinien auf Grund von inneren Spannungen. *Wissenschaftl. Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*, 5(2):135–141, 1926/1927.
- [49] G. Masing. Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing. In *Proceedings of the Second International Congress of Applied Mechanics*, pages 332–335, 1926.
- [50] G. Masing, W. Manksch. Über das Verhalten von kalt gerecktem Messing bei Zug- und Stauchbelastung. *Wissenschaftl. Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*, 5(2):142–155, 1926/1927.
- [51] R. Möller. Konstruktion eines Beschleunigungsaufnehmers für die Messung tiefer Frequenzen. Konstruktiver Entwurf, Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1991.
- [52] H. Meier zu Farwig. *Ein Beratungssystem zur Systemidentifikation*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1992.
- [53] I.F. Meyer. *Ein werkstoffgerechtes Schädigungsmodell und Stababschnittselement für Stahlbeton unter zyklischer nichtlinearer Beanspruchung*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1988.
- [54] NAG. *Handbook for the NAG Workstation Library*. Numerical Algorithms Group, Oxford, 1990.
- [55] H.G. Natke. *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Vieweg, Braunschweig, 1983.
- [56] L.V. Nikitin. Longitudinal vibrations of elastic rods in the presence of dry friction. *Mekhanika Tverdogo Tela*, 13(6):137–145, 1978.
- [57] D. Ottl. Schwingungen mechanischer Systeme mit Strukturdämpfung. *VDI Forschungshefte*, 603:3–36, 1981.
- [58] K. Peleg. Dynamic restoring and dissipative parameters of non-linear systems. *Int.J.Mech.Sci.*, 23(10):595–606, 1981.
- [59] K. Popp. Chaotische Bewegungen beim Reibschwinger mit simultaner Selbst- und Fremderregung. *ZAMM*, 71:T71–T73, 1991.
- [60] S.S. Rao. *The Finite Element Method in Engineering*. Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [61] I. Rechenberg. *Evolutionstrategie*. Friedrich Frommann Verlag, Stuttgart, 1973.
- [62] Press et al. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Oxford, 1989.
- [63] G. Renker. *Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme*. Dissertation, Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1989.
- [64] G. Renker; H. Waller. Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Dämpfung von Stahlbetonkonstruktionen. *Forschung im Ingenieurwesen, VDI-Z*, 1991.

- [65] L.A. Roussos et al. Finite element model with nonviscous damping. *AIAA Journal*, 20(6):831–838, 1982.
- [66] R. Schmidt. *Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen*. Dissertation, Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1988.
- [67] H.P. Schwefel. *Numerische Optimierung von Computermodellen mittels der Evolutionsstrategie*. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1977.
- [68] U. Tietze, Ch. Schenk. *Halbleiterschaltungstechnik*. Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [69] H. Waller; W. Krings. *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*. BI-Wiss.-Verlag, Mannheim, 1975.
- [70] H. Waller; R. Schmidt. *Schwingungslehre für Ingenieure*. BI-Wiss.-Verlag, Mannheim, 1989.
- [71] Z. Wang.; C. Laird. Relationship between loading process and masing behaviour in cyclic deformation. *Mat. Sci. Eng. A*, 101:L1–L5, 1988.
- [72] S. Wolfram. *Mathematica*. Addison–Wesley, Redwood City (Cal.), 1991.
- [73] M. Zhang. *Zur Beschreibung und Identifikation von mechanischen Schwingungssystemen mit nichtlinearen Strukturdämpfungen*. Dissertation, Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1990.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name		Christoph Beerens
geboren	4. Juni 1960	in Recklinghausen
Familienstand		verheiratet

Schulbildung

Grundschule	1966	- 1970	Katholische Grundschule Osterath
Gymnasium	1970	- 1972	Meerbusch-Gymnasium in Meerbusch
	1972	- 1979	Albert-Einstein-Gymnasium in Kaarst
Abitur	22. Mai 1979		

Zivildienst und Orden

Jugendhaus St. Michael	1.9.1979	- 30.9.1980	Kaarst
Kath. Ordensgemeinschaft	1.10.1980	- 30.9.1983	Salesianer, Paderborn
Noviziat	1.10.1980	- 30.9.1981	Paderborn
Jugendherberge Düsseldorf	1.10.1983	- 31.12.1983	Düsseldorf-Oberkassel

Studium

Katholische Theologie	1.10.1981	- 30.9.1983	Theologische Fakultät Paderborn
Vordiplom Theologie	30.9.1983		
Maschinenbau	1.10.1984	- 20.7.1989	Ruhr-Universität Bochum
Vordiplom Maschinenbau	30.9.1986		
Diplom Maschinenbau	20.7.1989		

Praktika

Fa. Mannesmann Forschung	1.3.1984	- 30.6.1984	Duisburg-Huckingen
Fa. Schiess AG	1.7.1984	- 31.8.1984	Düsseldorf-Heerdt
Fa. Stahlwerke Bochum	1.3.1985	- 31.3.1985	Bochum

Tätigkeiten am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Studentische Hilfskraft	1.3.1985	- 28.2.1989	Lehrstuhl II, Prof. Dr.-Ing. H.Stumpf
Wissenschaftliche Hilfskraft	1.9.1989	- 31.10.1989	Arbeitsgruppe numerische
Wissenschaftlicher Mitarbeiter	seit 1.11.1989		Methoden und Simulationstechnik, Prof. Dr.-Ing. H.Waller

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Sączuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis

- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in
verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung
angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schieße:
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua
unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 91**