

**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Andreas Feldmüller

Ein thermoplastisches Stoffgesetz  
isotrop geschädigter Kontinua

Heft Nr. 75



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum**

**Andreas Feldmüller**

**Ein thermoplastisches Stoffgesetz  
isotrop geschädigter Kontinua**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 75  
April 1991

**Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum**

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Meinen Referenten Herrn Prof. em. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Th. Lehmann und Herrn Prof. Dr.-Ing. O.-T. Bruhns danke ich für die Übernahme der Referate und die hilfreichen Anregungen bei der Entstehung dieser Arbeit.

Ein herzlicher Dank gilt allen Beschäftigten der Institute für Mechanik und Werkstoffe der Ruhr-Universität, die durch ihre Mitwirkung diese Arbeit erst ermöglicht haben. Stellvertretend für die Kommilitonen und Arbeitskollegen, die mich in den vergangenen Jahren begleitet haben, möchte ich Herrn Dr.-Ing. U. Rott nennen, der mir seit unserer Studienzeit ein wichtiger Gesprächspartner und hilfsbereiter Weggefährte ist.

April 1991

Andreas Feldmüller

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Otto -T. Bruhns

Prof. em. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Theodor Lehmann

Tag der Einreichung: 04.01.1991

Tag der mündlichen Prüfung: 26.04.1991

© 1991 Dr.-Ing. Andreas Feldmüller  
Kronenstraße 67, 4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## **Zusammenfassung**

In dieser Arbeit wird ein thermoplastisches Stoffgesetz vorgestellt, das zur Beschreibung von großen inelastischen Deformationen geeignet ist und die durch Mikroporen hervorgerufene Materialschädigung berücksichtigt. Dieser nahezu isotrope Schädigungsmechanismus wird mit einer als Porenvolumenanteil definierten skalaren Schädigungsvariablen erfaßt, die auch als Kriterium für die Bildung eines Makrodefektes verwendet wird.

Für Ck15-Stahl werden die Materialfunktionen anhand von Zugversuchen unter Einbeziehung lokaler Werte aus der Einschnürzone ermittelt.

Die unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse durchgeführten Finite-Elemente-Rechnungen von Einschnürprozessen zeigen eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten.

Die in einem speziellen Temperaturbereich festgestellte außergewöhnliche Geschwindigkeitsabhängigkeit der Meßwerte wird in dem umfangreichen experimentellen Kapitel verdeutlicht. Die Ursachen für dieses mit einem zeitunabhängigen Stoffgesetz nicht zu beschreibende Verhalten werden im Kapitel "Reckalterung" diskutiert.

## **Summary**

In this paper a thermoplastic constitutive law is introduced, which describes large inelastic deformations and material damage caused by microvoids. To take this almost isotropic damage mechanism into consideration the void volume fraction is introduced. This scalar damage variable is also used as a criterion for the formation of a macrodefect.

The material functions of Ck 15 - steel are determined using tension tests and taking local data of the neck into consideration.

The finite element calculations of necking processes, taking thermal influences into account, are in good agreement with the experimental data.

The extraordinary rate dependence of the measured values detected in a special temperature range is shown in the extensive experimental chapter. The causes for this behaviour, which cannot be described by a time independent constitutive law, are discussed in the chapter "Strain aging".

Meinem Arbeitskollegen Peter Grundmann  
mit Dank für die zahlreichen großen  
und kleinen Hilfen, wenn mal  
wieder "Not am Mann" war, überwiegt.

Andreas Fehrmüller

## Inhaltsverzeichnis

<b>Symbole und Bezeichnungen</b>	<b>III</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Theoretische Beschreibung des Materialverhaltens</b>	<b>7</b>
2.1 Große Deformationen	7
2.2 Spannungstensoren	10
2.3 Thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua	13
2.3.1 Vorbemerkungen	13
2.3.2 Definition der Schädigungsvariablen	13
2.3.3 Thermomechanische Kopplung	15
2.3.4 Elastische Deformationen	20
2.3.5 Plastische Deformationen	21
2.3.6 Schädigungsinduzierte Deformationen	22
2.3.7 Thermodynamische Restriktionen	24
<b>3. Vergleich mit anderen Schädigungsmodellen</b>	<b>25</b>
<b>4. Experimente</b>	<b>30</b>
4.1 Material, Form und Wärmebehandlung der Proben	30
4.2 Versuchseinrichtung	31
4.3 Versuchsvorbereitungen und Kalibrierversuche	33
4.3.1 Längenmessung	33
4.3.2 Temperaturmessung	34
4.4 Darstellung von Spannungen, Dehnungen und Temperaturen	37
4.4.1 Globale Meßwerte	37
4.4.2 Lokale Meßwerte	50
4.5 Materialschädigung	66
4.5.1 Schädigungsermittlung mit Schliffbildern	66
4.5.2 Schädigungsermittlung durch Messung des E-Moduls	74
<b>5. Reckalterung</b>	<b>78</b>
<b>6. Ermittlung der Materialfunktionen</b>	<b>82</b>
6.1 Verfestigungsfunktion	82
6.2 Schädigungsfunktion	89
6.3 Weitere Materialfunktionen	92
<b>7. Gleichungen zur Berechnung axialsymmetrischer Probleme</b>	<b>95</b>
7.1 Stoffgesetzaufbereitung für weggesteuerte Prozesse	95
7.2 Axialsymmetrische Probleme in Zylinderkoordinaten	96
7.3 Homogener Zug	98

7.4	Berechnung inhomogener Prozesse mit Finiten Elementen	101
7.4.1	Vorbemerkungen	101
7.4.2	Programmablauf	102
7.4.3	Mechanischer Prozeß	104
7.4.4	Thermischer Prozeß	113
7.4.5	Kritische Schädigung und Bruch	116
<b>8.</b>	<b>Rechnungen und Ergebnisse</b>	<b>119</b>
8.1	Allgemeine Darstellung der berechneten Systeme	119
8.2	Numerische Probleme	119
8.3	Ergebnisse der Berechnungen und Vergleich mit den Experimenten	121
<b>9.</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>138</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>142</b>

### Symbole und Bezeichnungen

$a$	interne Variable
$a_k$	temperaturabhängiger Koeffizient der Funktion $k^2(a)$
$a_\sigma$	temperaturabhängiger Koeffizient der Funktion $\sigma(\varepsilon)$
$A_e$	Elementoberfläche
$A_A$	virtuelle Arbeit der äußeren flächenhaft angreifenden Kräfte
$A_V$	virtuelle Arbeit der volumenhaft angreifenden Kräfte
$b_k$	temperaturabhängiger Koeffizient der Funktion $k^2(a)$
$b_\sigma$	temperaturabhängiger Koeffizient der Funktion $\sigma(\varepsilon)$
$[B_1]$	Verzerrungs-Verschiebungsmatrix
$[B_{nl}]$	Gradienten-Verschiebungsmatrix
$[B^w]$	Temperaturgradienten-Interpolationsmatrix
$c_k$	temperaturabhängiger Koeffizient der Funktion $k^2(a)$
$c_\sigma$	temperaturabhängiger Koeffizient der Funktion $\sigma(\varepsilon)$
$c_1 \dots c_9$	Abkürzungen
$c_{k1} \dots c_{k3}$	Abkürzungen
$c_{s1} \dots c_{s2}$	Abkürzungen
$c_{\Theta 1} \dots c_{\Theta 3}$	Abkürzungen
$c_p$	spezifische Wärmekapazität
$C^D$	deformationsinduzierter Spannungszuwachs
$C^\Theta$	temperaturinduzierter Spannungszuwachs
$[c^w]$	Element-Wärmekapazitätsmatrix
$[C]$	symmetrische Spannungs-Verzerrungsmatrix
$[C^*]$	unsymmetrische Spannungs-Verzerrungsmatrix
$[C^w]$	System-Wärmekapazitätsmatrix
$d_k$	temperaturabhängiger Koeffizient der Funktion $k^2(a)$
$d_\sigma$	temperaturabhängiger Koeffizient der Funktion $\sigma(\varepsilon)$
$dA$	gerichtetes Flächenelement
$\tilde{dA}$	effektives Flächenelement
$dA_m$	Flächenanteil des Matrixmaterials
$dA_v$	Flächenanteil der Mikroporen
$df$	Kraftvektor
$dV$	Volumenelement
$D$	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
$D_i$	inelastischer Anteil von $D$
$D_p$	plastischer Anteil von $D$
$D_r$	elastischer Anteil von $D$
$D_v$	schädigungsinduzierter Anteil von $D$
$e$	linear von den Verschiebungen abhängender Anteil von $\varepsilon_g$
$e_\alpha$	Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems
$E$	Elastizitätsmodul
$\tilde{E}$	scheinbarer Elastizitätsmodul

$f_r$	Radienkorrekturfaktor
$F$	Fließbedingung
$F$	Kraft
$\mathbf{F}$	Deformationsgradient
$[f]$	Element-Lastvektor der Elementspannungen
$[F]$	System-Lastvektor der Elementspannungen
$\mathbf{g}_\alpha$	Basisvektoren des krummlinigen Koordinatensystems
$\mathbf{g}^\alpha$	reziproke Basisvektoren des krummlinigen Koordinatensystems
$g_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}$	ko- bzw. kontravariante Komponenten des Metriktensors
$G$	Schubmodul
$h_i$	Ansatzfunktionen
$[H]$	Interpolationsmatrix
$[H^w]$	Temperatur-Interpolationsmatrix
$k^2$	isotrope Verfestigungsfunktion
$[k_1]$	Element-Steifigkeitsmatrix bei linearer Verzerrung
$[k_{n1}]$	Element-Steifigkeitsmatrix bei nichtlinearer Verzerrung
$[k^k]$	Element-Leitfähigkeitsmatrix
$[K_1]$	System-Steifigkeitsmatrix bei linearer Verzerrung
$[K_{n1}]$	System-Steifigkeitsmatrix bei nichtlinearer Verzerrung
$[K^k]$	System-Leitfähigkeitsmatrix
$l$	Länge des Meßbereiches
$L$	Geschwindigkeitsgradient
$\mathbf{n}$	Einheitsnormalenvektor
$N$	Anzahl der Elementknoten
$p$	flächenhaft verteilt angreifende Kräfte
$\mathbf{q}$	Wärmeflußvektor
$[q^B]$	Elementvektor der zugeführten Knotenpunktwärmeströme
$[q^k]$	Elementvektor der Knotenpunktwärmeströme
$[q_\Theta]$	Temperaturlastvektor
$[Q^B]$	Systemvektor der zugeführten Knotenpunktwärmeströme
$[Q^k]$	Systemvektor der Knotenpunktwärmeströme
$r$	spezifische Energiequellen
$\mathbf{r}$	Ortsvektor
$R$	Außenradius
$[r_p]$	Element-Lastvektor flächenhaft verteilt angreifender Kräfte
$[r_\Theta]$	Element-Temperaturlastvektor
$[R_p]$	System-Lastvektor flächenhaft verteilt angreifender Kräfte
$[R_\Theta]$	System-Temperaturlastvektor
$s$	spezifische Entropie
$\dot{s}_r$	Entropietransport
$\dot{s}_d$	Entropieproduktion
$\bar{s}_c$	kritischer Spannungswert
$\mathbf{S}$	gewichteter Cauchy-Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{S}}$	2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$\bar{\mathbf{S}}$	Kugeltensor der gewichteten Cauchy-Spannungen
$[\tilde{\mathbf{S}}^*]$	Spannungs-Metrikmatrix
$t$	Zeit
$T$	Temperatur
$T_v$	vorgegebene Temperatur der Randknoten
$\mathbf{T}$	Deviator der gewichteten Cauchy-Spannungen
$\mathbf{T}_s$	System-Knotenpunktstemperaturvektor
$[\mathbf{T}]$	Element-Knotenpunktstemperaturvektor
$u$	spezifische innere Energie
$u_m$	Längenänderung des Meßbereichs der Probe
$\mathbf{u}$	Verschiebungsvektor
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor
$V_e$	Elementvolumen
$\dot{w}$	spezifische Formänderungsleistung
$\dot{w}_d$	dissipativer Anteil der spezifischen Formänderungsleistung
$\dot{w}_h$	latenter Anteil der spezifischen Formänderungsleistung
$\dot{w}_i$	inelastische spezifische Formänderungsleistung
$\dot{w}_p$	plastische spezifische Formänderungsleistung
$\dot{w}_r$	elastische spezifische Formänderungsleistung
$\dot{w}_v$	schädigungsinduzierte spezifische Formänderungsleistung
$\mathbf{W}$	Rotationsgeschwindigkeitstensor
$x$	Entfernung von der Probenmitte
$x^\alpha$	krummliniges Koordinatensystem
$x^1, x^2, x^3$	Zylinderkoordinatensystem $(r, \varphi, z)$
$x_k^0 \dots x_k^3$	Koeffizienten der Temperaturpolynome
$z^\alpha$	kartesisches Koordinatensystem
<hr/>	
$\alpha$	thermischer Ausdehnungskoeffizient
$\alpha$	interne Variable
$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$	Christoffelsymbole zweiter Art
$\Delta l$	plastische Änderung der Meßlänge
$\Delta l_{ges}$	plastische Änderung der Probenlänge
$\Delta R$	Verringerung des Probenradius in der Probenmitte
$\Delta \omega_c$	Toleranz der kritischen Schädigung
$\Delta \dots$	Zuwachs von ...
$\delta \dots$	Variation von ...
$\bar{\epsilon}$	mittlere axiale Hencky-Dehnung
$\bar{\epsilon}_R$	radial gemessene mittlere axiale Hencky-Dehnung
$\bar{\epsilon}_b$	radial gemessene mittlere axiale Bruchdehnung
$\dot{\epsilon}$	axiale Deformationsgeschwindigkeit
$\epsilon_{\Theta 1}, \epsilon_{\Theta 2}$	Toleranzwerte der Iteration
$\epsilon$	Hencky-Verzerrungstensor
$\epsilon_g$	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
$\eta$	lokale Koordinate

$\dot{\eta}$	Entropieproduktion der internen Prozesse
$\eta$	quadratisch von den Verschiebungen abhängender Anteil von $\varepsilon_g$
$\vartheta, \vartheta_k, \vartheta_l$	Materialfunktionen
$\lambda$	plastischer Proportionalitätsfaktor
$\lambda_f$	Wärmeleitfähigkeit
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\xi$	Dissipationsfunktion
$\xi$	lokale Koordinate
$\rho$	Dichte
$\sigma$	axiale Cauchy-Spannung
$\bar{\sigma}$	mittlere axiale Cauchy-Spannung
$\sigma_o$	obere Fließspannung
$\sigma_u$	untere Fließspannung
$\sigma$	Cauchy-Spannungstensor
$\tilde{\sigma}$	effektiver Spannungstensor
$\tau$	Deviator des Cauchy-Spannungstensors
$\psi$	spezifische freie Enthalpie
$\omega$	Porenvolumenanteil
$\bar{\omega}$	mittlerer Porenvolumenanteil
$\omega_c$	kritischer Porenvolumenanteil

$\mathbf{1}$	Einstensor
$\hat{\phantom{x}}$	Knotenwert von ...
(i)...	i. Approximation von ...
$\overset{\circ}{\phantom{x}}$	Anfangswert von ...
...	Wert von ... im fiktiven Referenzzustand
$\dots^*$	Inverse des Tensors oder der Matrix ...
$\dots^{-1}$	Transponierte des Tensors oder der Matrix ...
$\dots^T$	Quadratnorm des Vektors ...
$\ \dots\ $	verjüngendes Produkt
$\cdot$	Divergenz von ...
$\text{div}(\dots)$	Gradient von ...
<b>grad</b> (...)	Spur von ...
$\text{Sp}(\dots)$	... falls Fließ- und Belastungsbedingung erfüllt sind
$\langle \dots \rangle$	... falls die Schädigungsbedingung erfüllt ist
$\ll \dots \gg$	kovariante Ableitung von ... nach $\alpha$
$\dots _{\alpha}$	partielle Ableitung von ... nach $\alpha$
$\dots, \alpha$	partielle Ableitung von ... nach $\alpha$
$\frac{\partial}{\partial \alpha} \dots$	partielle Ableitung von ... nach $t$ bei festgehaltenen $\overset{\circ}{x}^p$
$\frac{\partial}{\partial t} \Big _{\overset{\circ}{x}^p} \dots$	substantielle Zeitableitung von ...
$\frac{D}{dt} \dots$	substantielle Zeitableitung von ...
$\dot{\phantom{x}}$	substantielle Zeitableitung von ...
$\dots$	objektive Zeitableitung nach Jaumann von ...
$\nabla$	
$\dots$	

## 1. Einleitung

Mit zunehmender Rechenleistung, die einem wachsenden Nutzerkreis zur Verfügung steht, wird komplexes Materialverhalten auch bei größeren Strukturen berechenbar. Dabei steigt das Interesse an Stoffgesetzen, die eine Aussage über den Schädigungsgrad und das Versagen eines Bauteils ermöglichen.

Grundsätzlich stellt sich bei der Betrachtung von geschädigten Werkstoffen die Frage, ob diese mit einem kontinuumsmechanischen Materialmodell beschrieben werden können, da sich der Begriff des Kontinuums nicht ohne weiteres mit einem durch Risse oder Löcher geschädigten Werkstoff vereinbaren läßt.

In einer Erweiterung der Kontinuumstheorie wurde das Modell eines geschädigten Kontinuums entworfen. Die darauf basierenden Stoffgesetze, die für verschiedenste Materialien und Anwendungsfälle formuliert wurden, lassen sich unter dem Begriff "Kontinuum-Damage-Theorien" zusammenfassen (z. B. [1-9]).

Der Gültigkeitsbereich dieser Theorien ist begrenzt, da nicht beliebig große Schädigungen mit einem Kontinuumsmodell "geglättet" werden können. Aus diesem Grund werden Mikro- und Makroschädigungen unterschieden. Entstehen beispielsweise bei einem Belastungsprozeß im Werkstoff eine Vielzahl von Mikrorissen oder Poren, so lassen sich diese mit einer Kontinuum-Damage-Theorie erfassen. Verschmelzen diese Mikrorisse aber zu einem Makroriß, so ist eine Kontinuumstheorie nicht mehr zulässig, und es entsteht aus dem "geschädigten Körperelement" ein "Körper mit einer veränderten Geometrie", d.h. mit einem Riß oder einem Loch. Dieser Übergang von Mikro- zu Makroschädigung, der sich auch als Übergang von einem kontinuumsmechanischen zu einem bruchmechanischen Problem kennzeichnen läßt, ist fließend, da die "Maximalabmessungen" eines Mikrodefektes problemabhängig sind und sich nicht in absoluten Zahlenwerten angeben lassen. Als Anhalt kann die in [10] formulierte Bedingung gelten, daß eine Kontinuum-Damage-Theorie nur dann anwendbar ist, wenn ein repräsentatives Volumenelement  $\Delta V$  angegeben werden kann, das groß genug ist, daß es trotz der Mikrodefekte statistisch homogen ist, und gleichzeitig klein genug ist, daß das Verhalten der in  $\Delta V$  enthaltenen Materie durch Mittelwerte ausreichend gut beschrieben werden kann.

Abhängig vom Werkstoff und dem Belastungsprozeß, dem er unterworfen ist, treten unterschiedliche Formen von Materialschädigung auf, so daß ein umfassendes Stoffgesetz die verschiedensten Schädigungsarten (Poren,

Risse oder Scherbänder) erfassen muß. Im Gegensatz dazu steht die Forderung nach einer möglichst einfachen Materialbeschreibung, um auch die industrielle Anwendung und Verbreitung des Modells zu ermöglichen. Deshalb geht man in der Regel dazu über, die Vielzahl der im Werkstoff auftretenden Phänomene auf die unter bestimmten Rahmenbedingungen wesentlichen zu reduzieren.

Unter besonderer Berücksichtigung des Einflusses von Mikroscherbändern, die in verstärktem Maße bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe auftreten, entstand in den letzten Jahren am Lehrstuhl für Mechanik I der Ruhr-Universität ein Werkstoffmodell, mit dem bereits die komplexen Deformationsprozesse von Hochgeschwindigkeitsversuchen mit Hilfe einer FE-Methode nachgerechnet wurden [ 9 - 11 ].

In dieser Arbeit stehen deutlich langsamere Prozesse im Mittelpunkt, bei denen ein Auftreten von Mikroscherbändern nicht von Bedeutung ist. Das hier untersuchte duktile Materialverhalten zeichnet sich durch große plastische Deformationen und die damit verbundene Schädigung durch Mikroporen aus. Die bei der Beschreibung plastischer Deformationen ungeschädigter Körper in vielen Jahren an diesem Lehrstuhl gesammelten Erfahrungen (z.B. [ 12 - 16 ]) bilden die Grundlage für die in dieser Arbeit betrachtete Erweiterung auf isotrop geschädigte Kontinua.

Auf die Modellierung zyklischer Prozesse wird hier verzichtet. Zwischenzeitliche, elastische Entlastungen und darauf folgende, gleichsinnige Wiederbelastungen werden jedoch ausdrücklich zugelassen. Das dem im Kapitel 2 vorgestellten Stoffgesetz zugrundeliegende Konzept zur Berücksichtigung der Materialschädigung ist grundsätzlich auch bei zyklischen Prozessen anwendbar. Die erforderlichen Erweiterungen werden in dieser Arbeit aufgezeigt.

Doch auch ohne Ergänzung lassen sich Umformvorgänge, die unter Beibehaltung der Belastungsrichtung in einem oder mehreren Schritten durchgeführt werden, mit der hier formulierten Theorie beschreiben. Als technische Anwendung läßt sich beispielsweise die Simulation von Tiefziehprozessen nennen. Die Berechnung der bei diesen Vorgängen entstehenden Materialschädigung verdeutlicht die "Problemzonen" des Werkstücks und der als kritische Schädigung bezeichnete Materialkennwert kennzeichnet das Versagen des Werkstoffs. Einschränkend muß gesagt werden, daß jeweils zu prüfen ist, ob das reale Materialverhalten nicht zusätzlichen Einflüssen unterworfen ist, die von dem im Kapitel 2 dargestellten thermoplastischen Materialgesetz nicht erfaßt werden können. Dazu zählen neben den viskosen Effekten auch die Auswirkungen des Phänomens der dynamischen Reckalterung, die im Kapitel 5 näher erläutert sind.

Ein Vergleich mit den Schädigungsmodellen anderer Autoren findet sich im Kapitel 3.

Das vierte Kapitel ist dem experimentellen Teil dieser Arbeit gewidmet und erläutert die durchgeführten Versuche und ihre Ergebnisse. Die verwendeten monotonen Zugversuche bewirken in zylindrischen Vollproben bei isothermer Prozeßführung zunächst einen nahezu homogenen Spannungs- und Verzerrungszustand. Danach kommt es im Endstadium der Versuche durch eine Lokalisierung der Deformationen zu einem hochgradig inhomogenen Prozeß, der bei schnelleren, nichtisothermen Experimenten durch eine starke örtliche Erwärmung gekennzeichnet ist.

Aufgrund der beschriebenen "Zweiteilung" dieser Versuche bieten sie zum einen mit der anfänglich homogenen Deformation eine gute Grundlage zur Anpassung der Materialparameter des Stoffgesetzes und zum anderen läßt sich mit dem inhomogenen Teil des Zugversuches durch Vergleiche mit FE-Rechnungen bereits eine Aussage über die Qualität dieser Anpassung treffen. Eine derartige Kontrolle ist notwendig, da die im Kapitel 6 beschriebene Ermittlung der Werkstoff-Funktionen unter zum Teil stark vereinfachenden Annahmen vorgenommen wird.

Die für die Rechnungen erforderlichen Gleichungen sind im Kapitel 7 angegeben. Die Ergebnisse enthält das Kapitel 8, in dem auch numerische Schwierigkeiten angesprochen sind.

Die Arbeit wird mit einer Zusammenfassung beendet, verbunden mit einem Ausblick auf weitere Forschungstätigkeiten, die sich aufgrund der in dieser Arbeit aufgezeigten Probleme als wichtige und interessante Fragestellungen herausgestellt haben.

Da die im Zugversuch auftretenden thermischen und mechanischen Prozesse, insbesondere die entstehende Materialschädigung und das daraus resultierende Versagen der Probe, diese Arbeit wesentlich initiiert haben, sollen sie an dieser Stelle noch einmal zusammenhängend beschrieben und mit den Abbildungen 1.1 bis 1.4 erläutert werden:

Der Anfang eines Zugversuches verläuft nahezu homogen, da sich die Probe, abgesehen von Randeinflüssen an den eingespannten Enden, gleichmäßig verformt. Kurzzeitig stärker gedehnte Elemente des Versuchskörpers verfestigen mehr als die übrigen Teile und verformen sich deshalb in der Folge weniger. Die entstandene, kleine Störung des Deformationszustandes, die z.B. durch eine örtlich größere Inhomogenität der Mikrostruktur des Materials hervorgerufen wurde, wird auf diese Weise wieder ausgeglichen.

Im Maximallastbereich eines Zugversuches, bei dem die Probenkraft während einer längeren Deformationsphase nahezu konstant bleibt, ist die

Verfestigungsfähigkeit des Werkstoffs nicht mehr ausreichend, um eine geometrische Schwächung durch Verfestigung auszugleichen. Daraus folgend wird der Versuch stark inhomogen, da sich an dieser Schwachstelle eine Einschnürung ausbildet. Weitere plastische Formänderungen treten in der Folge nur noch in diesem Bereich auf. Die bei diesen Deformationen dissipierte Energie führt nun zu einer inhomogenen Temperaturverteilung entlang der Probe, die wesentlich von der Versuchsgeschwindigkeit beeinflusst wird. In diesem Stadium des Versuches spielt die thermomechanische Wechselwirkung, die unter anderem in [16-18] betrachtet wurde, eine entscheidende Rolle. Die Verfestigung des Werkstoffs ist abhängig von der jetzt lokal unterschiedlichen Temperatur und beeinflusst ihrerseits die dissipierte Energie und damit die Temperaturänderungen.

Das Experiment endet im allgemeinen mit einem starken Temperaturanstieg im Einschnürbereich und dem "Kegel-Tasse-Bruch" der Probe an der Stelle des kleinsten Querschnitts. Diese typische Bruchform [19, 20] ist wesentlich bestimmt durch die im Material auftretende Schädigung durch Mikroporen. Diese entstehen in der Regel an Einschlüssen, Ausscheidungen oder anderen Gefügeinhomogenitäten, wenn sich diese bei großen plastischen Verformungen von der umgebenden Matrix lösen. Dies geschieht vorherrschend im Zentrum des Einschnürbereichs, wo die größten Verformungen und allseitige Zugspannungen auftreten, die die Anrisse zu Mikroporen anwachsen lassen. Durch die Vereinigung dieser Hohlräume entsteht der makroskopische Riß, der sich von innen nach außen fortsetzt. Dabei verläßt er unter etwa  $45^\circ$  die Ebene des kleinsten Querschnitts, ändert dann seine Richtung und kehrt in diese Ebene zurück. Durch die Fortsetzung dieses Vorgangs entsteht eine zerklüftete Bruchfläche ("Tassenboden"), die makroskopisch annähernd eben ist und senkrecht zur Probenachse verläuft.

Das beschriebene Verhalten führt dazu, daß nach dem Einsetzen des Makrorisses ein fortlaufend kleiner werdender Kreisringquerschnitt die Last trägt, der zuletzt schlagartig unter etwa  $45^\circ$  absichert. Dabei wird der "Kegel" bzw. die "Tassenwand" (Scherlippen) erzeugt, die dieser Bruchform den Namen gegeben haben. Der rotationssymmetrische Fall, bei dem Kegel und Tasse vollständig ausgebildet sind, ist die Ausnahme, da sich normalerweise an beiden Bruchstücken Teile der Scherlippen bilden (Abbildung 1.1).

Die Abbildungen 1.2 bis 1.4 entstanden mit einem Raster-Elektronen-Mikroskop des Instituts für Werkstoffe der Ruhr-Universität Bochum. Sie zeigen deutlich die im Material entstandenen Hohlräume von unterschiedlichster Größe. In Abbildung 1.2 erkennt man darüberhinaus auch den kugelförmigen Einschuß, der zum Entstehen der Pore führte.

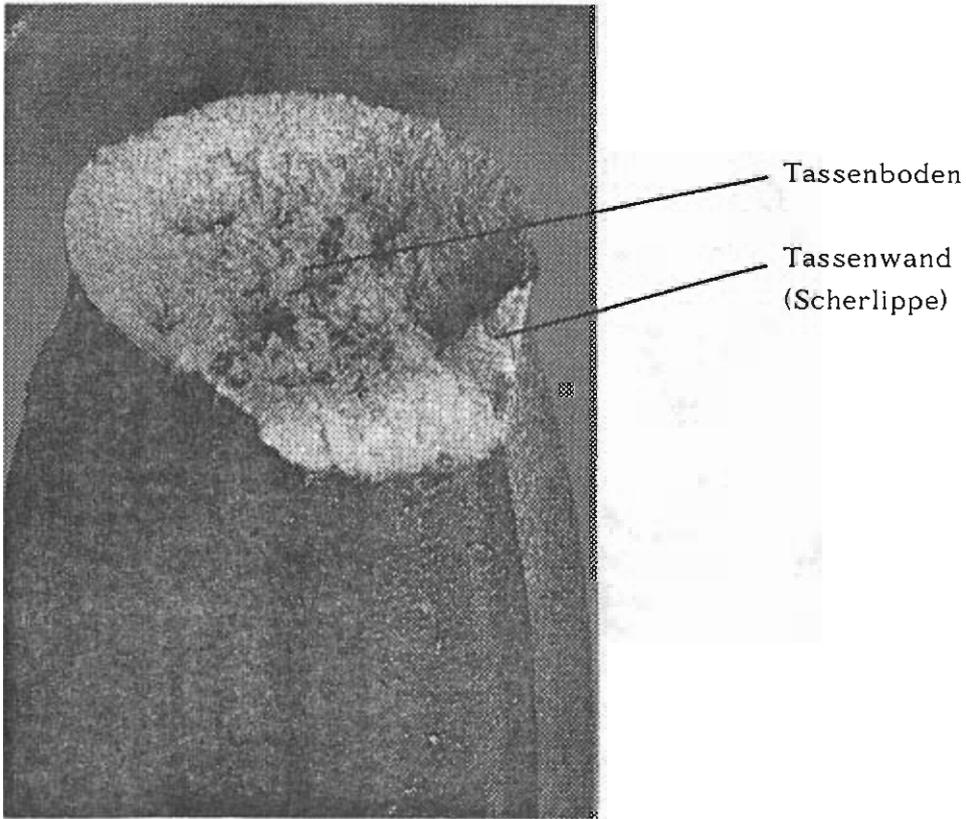


Abbildung 1.1: Bruchfläche einer Zugprobe (CK 15 Stahl)

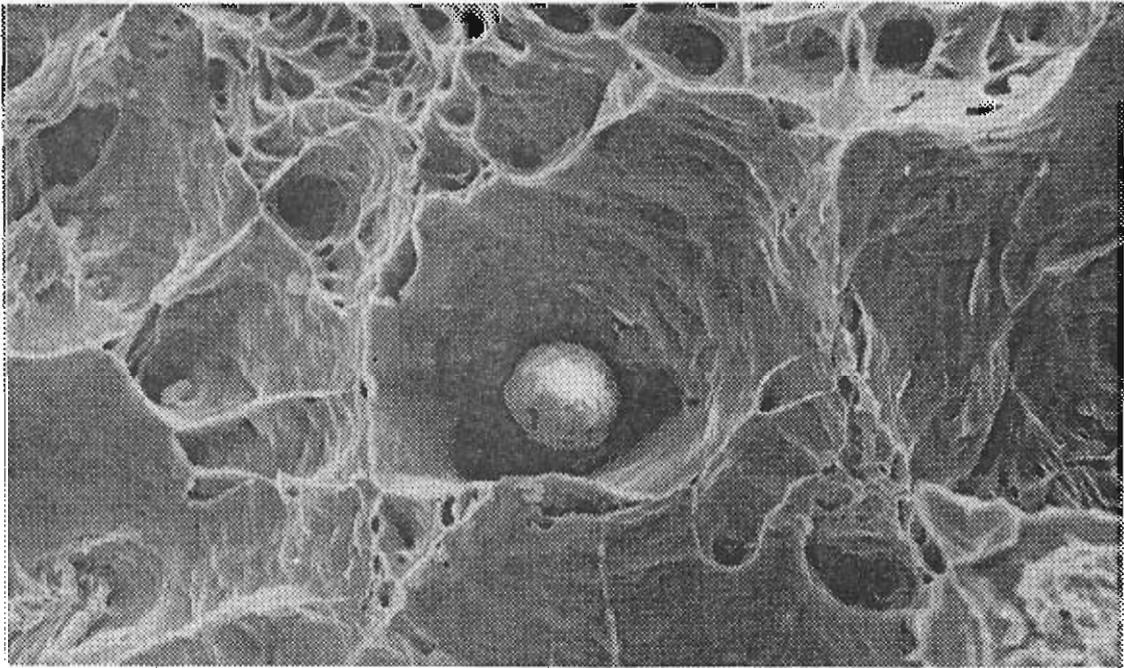


Abbildung 1.2: Detail der Bruchfläche,  $10\ \mu\text{m} \hat{=}$  

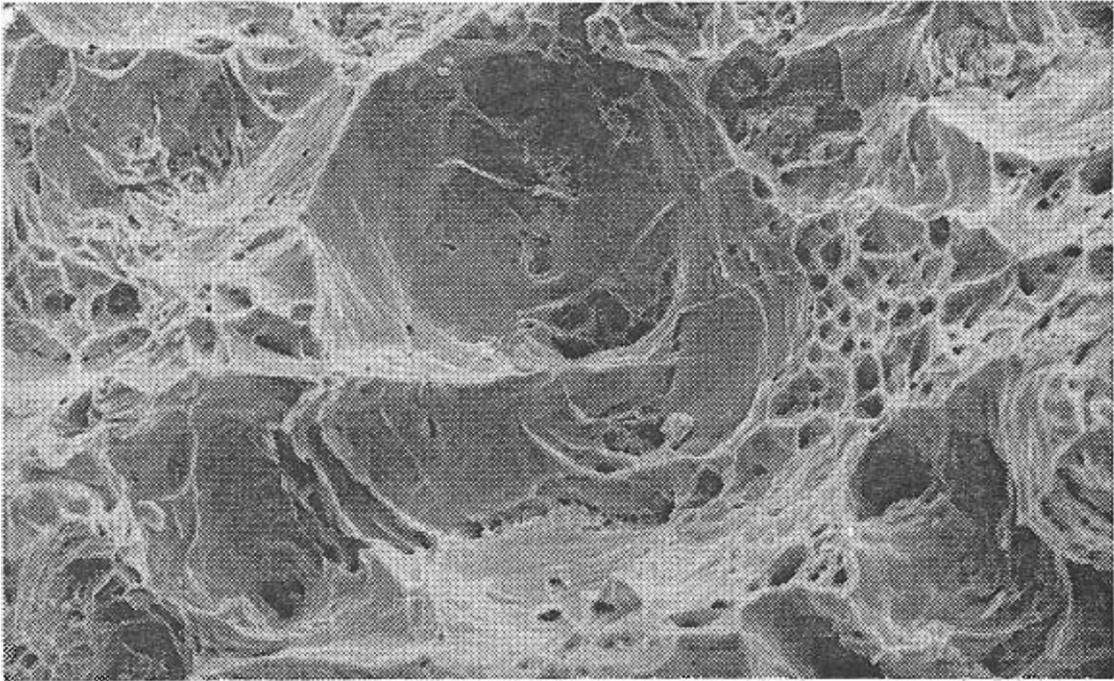


Abbildung 1.3: Detail der Bruchfläche,  $10\mu\text{m} \hat{=}$  ———

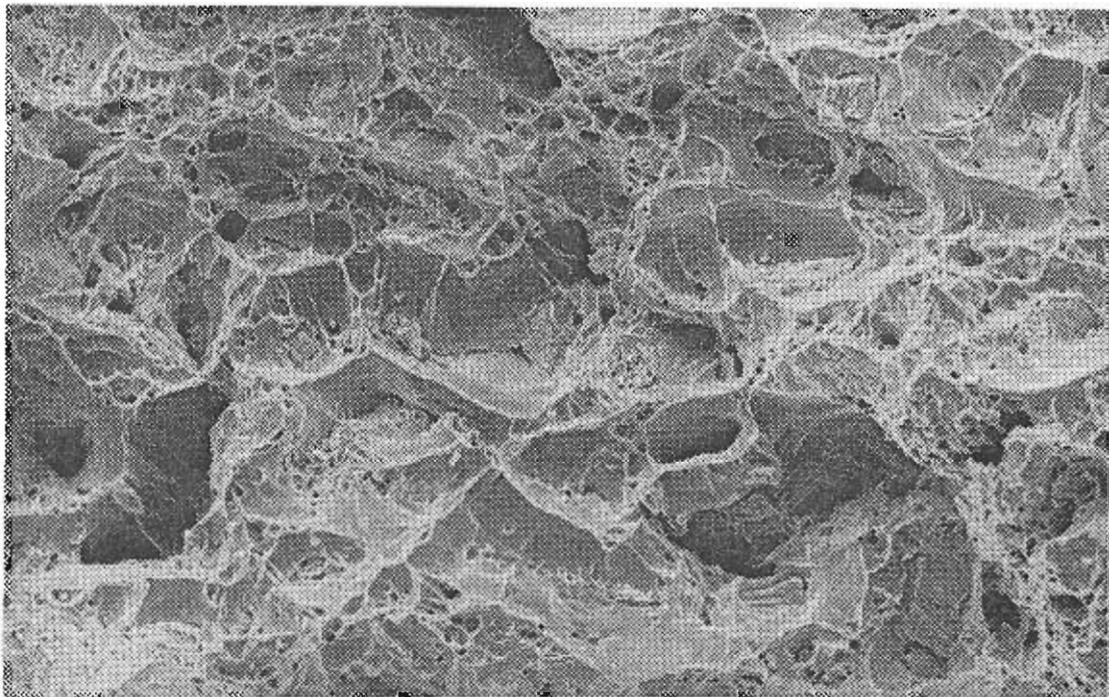


Abbildung 1.4: Detail der Bruchfläche,  $10\mu\text{m} \hat{=}$  ———

## 2. Theoretische Beschreibung des Materialverhaltens

### 2.1 Große Deformationen

Im Zusammenhang mit den in dieser Arbeit auftretenden großen plastischen Deformationen ist es erforderlich, die jeweils aktuelle Geometrie des zu untersuchenden Körpers zu betrachten, da sich diese im allgemeinen wesentlich ändert. Obwohl in zahlreichen Arbeiten aus dem Gebiet der Mechanik die zur Beschreibung großer Formänderungen benötigten Grundgleichungen und Bezeichnungen veröffentlicht wurden, sollen sie hier für den mit der Kontinuumsmechanik weniger vertrauten Leser in verkürzter Form noch einmal wiedergegeben werden. Die Unterschiede von körper- bzw. raumfesten Koordinatensystemen sind in [12] gegenübergestellt. Die folgende Darstellung beschränkt sich auf raumfeste Koordinaten, da diese Beschreibungsweise in der vorliegenden Arbeit Verwendung findet.

Neben dem kartesischen Koordinatensystem  $z^\alpha$  mit den Basisvektoren  $e_\alpha$  ist in der Abbildung 2.1 ein krummliniges, ebenfalls raumfestes Koordinatensystem  $x^\alpha$  mit den Basisvektoren  $g_\alpha$  eingezeichnet. Dabei handelt es sich bei der Betrachtung axialsymmetrischer Probleme in der Regel um ein Zylinderkoordinatensystem (vgl. Kapitel 7.2).

Die Abbildung 2.1 zeigt einen Körper in seinem Ausgangszustand  $B^0$  (Zeitpunkt  $t^0$ ) und in einem deformierten Zustand  $B$  (Zeitpunkt  $t$ ).

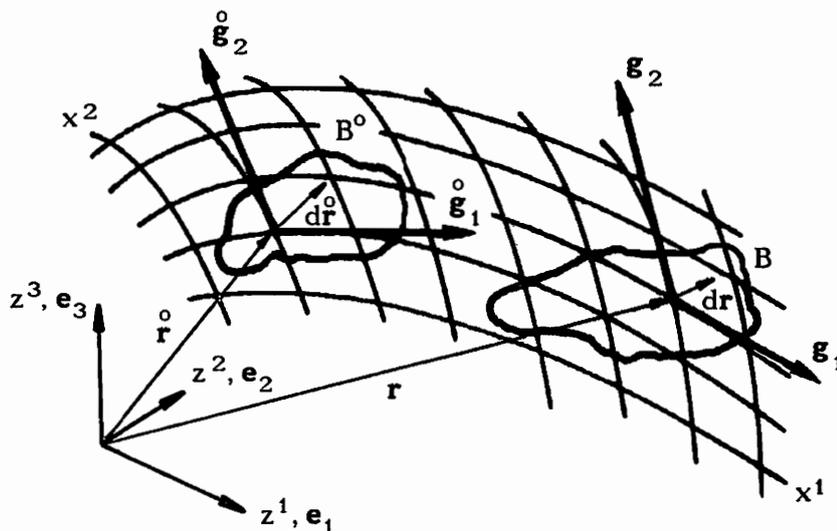


Abbildung 2.1: Beschreibung der Deformation  $B^0 \rightarrow B$

Die materiellen Körperpunkte sind durch die Angabe ihrer Anfangskoordinaten

$${}^0x^\alpha = x^\alpha(t^0) \quad (2.1)$$

eindeutig identifiziert. Ihre Bewegungen lassen sich durch die Zuordnung

$$x^\alpha = x^\alpha({}^0x^\rho, t) \quad (2.2)$$

beschreiben.

Die ortsabhängigen Basisvektoren  $\mathbf{g}_\alpha$  sind definiert als partielle Ableitung des Ortsvektors  $\mathbf{r}$  nach den Koordinaten  $x^\alpha$

$$\mathbf{g}_\alpha(x^\rho) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial(z^\rho \mathbf{e}_\rho)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial z^\rho}{\partial x^\alpha} \mathbf{e}_\rho, \quad (2.3)$$

und die dazu reziproken Basisvektoren  $\mathbf{g}^\alpha$  berechnen sich mit der Beziehung

$$\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad \delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (2.4)$$

Zur Unterscheidung spricht man von den kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{g}_\alpha$  und den kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{g}^\alpha$ . Mit dem Metriktensor lassen sich Tensoren von der einen Basis auf die andere umrechnen. Die ko- bzw. kontravarianten Komponenten des Metriktensors lauten

$$g_{\alpha\beta}(x^\rho) = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta \quad (2.5)$$

$$g^{\alpha\beta}(x^\rho) = \mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta \quad (2.6)$$

Um die Verzerrungen anzugeben, denen der Körper beim Übergang vom Ausgangszustand in den aktuellen Zustand unterworfen ist, verwendet man den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ , mit dem ein Linienelement der Ausgangskonfiguration

$$d\mathbf{r}^0 = dx^{\alpha 0} \mathbf{g}_\alpha^0 \quad (2.7)$$

in die aktuelle Konfiguration

$$d\mathbf{r} = dx^\alpha \mathbf{g}_\alpha \quad (2.8)$$

transformiert wird

$$d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}^0, \quad \mathbf{F} = F_{\cdot\beta}^\alpha \mathbf{g}_\alpha^0 \mathbf{g}^{\beta 0} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta 0}} \mathbf{g}_\alpha^0 \mathbf{g}^{\beta 0}. \quad (2.9)$$

Die inverse Transformation

$$d\mathbf{r}^0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{r}, \quad \mathbf{F}^{-1} = (F^{-1})_{\cdot\beta}^\alpha \mathbf{g}_\alpha^0 \mathbf{g}^{\beta 0} = \frac{\partial x^{\alpha 0}}{\partial x^\beta} \mathbf{g}_\alpha^0 \mathbf{g}^{\beta 0} \quad (2.10)$$

bildet ein Linienelement der aktuellen Konfiguration eindeutig in die Ausgangskonfiguration ab.

Durch die substantielle Zeitableitung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ , die als partielle Ableitung nach der Zeit  $t$  bei festgehaltenen Körperkoordinaten  $\overset{\circ}{\mathbf{x}}^\rho$  berechnet wird, ergibt sich

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{D}{dt}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\overset{\circ}{\mathbf{x}}^\rho} (F_{\cdot\beta}^\alpha) \mathbf{g}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{g}}^\beta + F_{\cdot\beta}^\alpha \dot{\mathbf{g}}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{g}}^\beta \quad (2.11)$$

Die in (2.11) auftretende zeitliche Ableitung der Basisvektoren  $\mathbf{g}_\alpha$  läßt sich durch Verwendung der Christoffelsymbole zweiter Art  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  mit den Basisvektoren selbst in Beziehung setzen [21]

$$\dot{\mathbf{g}}_\beta = v^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \mathbf{g}_\alpha \quad (2.12)$$

In [22] wird zur Berechnung der Christoffelsymbole der folgende Ausdruck abgeleitet

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\gamma\rho,\beta} + g_{\rho\beta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\rho}) \quad (2.13)$$

Die kontravarianten Komponenten  $v^\gamma$  des Geschwindigkeitsvektors eines Körperpunktes ergeben sich aus der substantiellen Zeitableitung des momentanen Ortsvektors  $\mathbf{r}$ , die mit festgehaltenen  $\overset{\circ}{\mathbf{x}}^\rho$  auszuführen ist

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\overset{\circ}{\mathbf{x}}^\rho} (x^\alpha) = \mathbf{g}_\alpha \dot{x}^\alpha = v^\alpha \mathbf{g}_\alpha \quad (2.14)$$

Multipliziert man  $\dot{\mathbf{F}}$  mit  $\mathbf{F}^{-1}$ , so folgt daraus

$$\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\overset{\circ}{\mathbf{x}}^\mu} (F_{\cdot\rho}^\alpha) (F^{-1})_{\cdot\beta}^\rho + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma \right) \mathbf{g}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{g}}^\beta = (v^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma) \mathbf{g}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{g}}^\beta \quad (2.15)$$

Im Gegensatz zu der partiellen Ableitung  $v^\alpha{}_{,\beta}$  ist die in (2.15) auftretende kovariante Ableitung

$$v^\alpha|_\beta = v^\alpha{}_{,\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma \quad (2.16)$$

ein Tensor zweiter Stufe. Dieser wird zur Definition des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}$  verwendet

$$\mathbf{L} = \mathbf{grad}(\mathbf{v}) = v^\alpha|_\beta \mathbf{g}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{g}}^\beta \quad (2.17)$$

Der Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{L}$  wird in den symmetrischen Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  und den antimetrischen Tensor der Rotationsgeschwindigkeit  $\mathbf{W}$  aufgeteilt

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.18)$$

mit

$$\mathbf{D} = d_\beta^\alpha \mathbf{g}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{g}}^\beta = \frac{1}{2} (v^\alpha|_\beta + v_\beta|^\alpha) \mathbf{g}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{g}}^\beta \quad (2.19)$$

$$\mathbf{W} = \omega_\beta^\alpha \mathbf{g}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{g}}^\beta = \frac{1}{2} (v^\alpha|_\beta - v_\beta|^\alpha) \mathbf{g}_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{g}}^\beta \quad (2.20)$$

Wie bei allen Tensoren lassen sich auch die Komponenten der kovarianten Ableitung mit den Metrikkoeffizienten in die jeweils reziproke Basis umrechnen

$$v_{\beta} |^{\alpha} = g_{\beta\gamma} v^{\gamma} |_{\rho} g^{\rho\alpha} \quad . \quad (2.21)$$

Dem in (2.20) angegebenen Tensor der Rotationsgeschwindigkeiten kommt im Zusammenhang mit den im Stoffgesetz auftretenden Zeitableitungen tensorieller Größen besondere Bedeutung zu (vgl. Gleichung (2.35)).

## 2.2 Spannungstensoren

Normalerweise wird mit dem Cauchy-Spannungstensor  $\sigma$ , der im aktuellen Zustand das gerichtete Flächenelement  $d\mathbf{A}$  mit dem Kraftvektor  $d\mathbf{f}$  verknüpft

$$d\mathbf{f} = \sigma \cdot d\mathbf{A} = \sigma \cdot \mathbf{n} dA, \quad (2.22)$$

der Begriff "wahre Spannungen" verbunden. Diese Bezeichnung ist bei der Betrachtung von geschädigten Kontinua nur bedingt sinnvoll, da sich das Flächenelement  $dA$  in diesem Fall aus der von Mikroporen (microvoids) eingenommenen Fläche  $dA_v$  und der aus Materie (Matrixmaterial) bestehenden Fläche  $dA_m$  zusammensetzt

$$d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA = \mathbf{n} (dA_m + dA_v) \quad . \quad (2.23)$$

Im Rahmen dieser Arbeit soll davon ausgegangen werden, daß die Schädigung isotrop ist, so daß das Verhältnis der Flächenanteile  $dA_m$  und  $dA_v$  nicht vom Normalenvektor  $\mathbf{n}$  des Flächenelementes  $dA$  abhängt. Diese Annahme ist nicht bei allen Schädigungsarten zulässig, stellt aber für den hier betrachteten Fall der Schädigung durch Mikroporen bei duktilen Formänderungen eine gute Näherung dar.

Da die sogenannten "wahren Spannungen" zwar ein aussagekräftiges Maß für die Belastung eines Körperelementes, nicht aber für das letztlich die Last übertragende Matrixmaterial sind, werden die "effektiven Spannungen"  $\tilde{\sigma}$  eingeführt. Die Verwendung des Spannungstensors  $\tilde{\sigma}$  ist ein wesentlicher Aspekt der "Kontinuum-Damage-Theorien" und beruht auf der Definition eines "effektiven Flächenelementes"  $d\tilde{A}$ . Im Unterschied zu [4] soll hier die tragende Fläche des Matrixmaterials  $dA_m$  mit der "effektiven Fläche"  $d\tilde{A}$  gleichgesetzt werden (vgl. Kapitel 3). Der Kraftvektor  $d\mathbf{f}$  und die Fläche  $dA_m$  werden analog zu (2.22) mit dem Tensor der effektiven Spannungen  $\tilde{\sigma}$  verknüpft

$$d\mathbf{f} = \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{n} dA_m = \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{n} (dA - dA_v) \quad . \quad (2.24)$$

Ein Vergleich von (2.22) und (2.24) liefert

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{dA}{(dA - dA_v)} \quad (2.25)$$

Unter den im folgenden erläuterten Voraussetzungen ist der hier eingeführte Spannungstensor  $\tilde{\sigma}$  identisch mit dem gewichteten Cauchy-Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \frac{\rho^0}{\rho} \sigma \quad , \quad (2.26)$$

der mit  $\sigma$  über das Verhältnis von Ausgangsdichte  $\rho^0$  zur aktuellen Dichte  $\rho$  in Beziehung steht.

Die erste Bedingung ist die Isotropie der Schädigung, die gewährleistet, daß bei einem beliebigen Schnitt durch ein repräsentatives Volumenelement  $dV$  die Fläche des Matrixmaterials proportional zur Gesamtschnittfläche ist

$$dA_m \sim dA \quad . \quad (2.27)$$

Betrachtet man ein quaderförmiges Volumenelement  $dV$  mit der Länge  $dl$  und dem Querschnitt  $dA$

$$dV = dA \, dl \quad , \quad (2.28)$$

so ergibt sich aus (2.27) und (2.28)

$$\frac{dA}{(dA - dA_v)} = \frac{dA}{dA_m} = \frac{dV}{dl \, dA_m} = \frac{dV}{dV_m} \quad . \quad (2.29)$$

Die zweite Bedingung für die Identität von  $\tilde{\sigma}$  und  $\mathbf{S}$  ist, daß die elastischen Formänderungen klein bleiben, so daß die durch sie hervorgerufenen Volumenänderungen vernachlässigbar sind. Dies ist bei metallischen Werkstoffen in der Regel der Fall, so daß das Matrixvolumen als konstant aufgefaßt werden kann. War das deformierte Volumenelement  $dV$  in seiner Ausgangskonfiguration  $dV^0$  ungeschädigt, so gilt

$$dV_m = dV_m^0 = dV^0 \quad . \quad (2.30)$$

Da im Gegensatz zur Dichte  $\rho$  die Masse  $dm$  des Volumenelementes von den während der Deformation auftretenden Mikroporen nicht verändert wird, folgt mit (2.29) und (2.30)

$$\frac{dA}{(dA - dA_v)} = \frac{dV}{dV^0} = \frac{\rho^0}{\rho} \quad . \quad (2.31)$$

Ein Vergleich von (2.25) und (2.26) zeigt, daß  $\mathbf{S}$  und  $\mathfrak{S}$  bei Gültigkeit der zur Herleitung von (2.31) erforderlichen Idealisierungen identisch sind.

Im Zusammenhang mit FE-Rechnungen, bei denen eine feste, bekannte Bezugskonfiguration vorteilhaft ist, wird vielfach der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathfrak{S}$  verwendet, der auf die Ausgangskonfiguration bezogen ist. Er läßt sich aus dem gewichteten Cauchy-Spannungstensor mit dem Deformationsgradienten errechnen

$$\mathfrak{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T = \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \quad . \quad (2.32)$$

Unabhängig davon, um welchen der angegebenen Spannungstensoren es sich handelt, kann eine Aufspaltung in einen Kugeltensor und in einen Deviator erforderlich sein. Der mit dem Kugeltensor  $\bar{\mathbf{S}}$  beschriebene hydrostatische Anteil der gewichteten Cauchy-Spannungen berechnet sich mit der Spur des Tensors

$$\bar{\mathbf{S}} = \bar{S} \mathbf{1} = \frac{1}{3} \text{Sp} (\mathbf{S}) \mathbf{1} \quad . \quad (2.33)$$

Der Deviator  $\mathbf{T}$  ergibt sich damit zu

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} - \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S} - \frac{1}{3} \text{Sp} (\mathbf{S}) \mathbf{1} \quad . \quad (2.34)$$

Bei der Formulierung von Stoffgesetzen ist zu fordern, daß die auftretenden Zeitableitungen der den Zustand des Materials beschreibenden Größen nicht durch Starrkörperrotationen beeinflußt werden. Diese Forderung läßt sich im Zusammenhang mit den in dieser Arbeit verwendeten raumfesten Koordinatensystemen mit einer sogenannten objektiven Zeitableitung erfüllen. Die Frage nach den Vor- und Nachteilen der unterschiedlichen in der Literatur veröffentlichten objektiven Zeitableitungen soll hier nicht vertieft werden. Eine ausführliche Erörterung dieser Problematik findet sich in [23].

Die in den Berechnungen dieser Arbeit verwendete Jaumann'sche Zeitableitung lautet beispielsweise für den Deviator des gewichteten Cauchy-Spannungstensors

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} = \overset{\nabla}{t}_{\beta}^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta} \quad . \quad (2.35)$$

Bei der substantiellen Zeitableitung  $\dot{\mathbf{T}}$  ist zu beachten, daß auch die Basisvektoren zeitveränderlich sind

$$\dot{\mathbf{T}} = \left( \dot{t}_{\beta}^{\alpha} \right) \mathbf{g}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta} + t_{\beta}^{\alpha} \dot{\mathbf{g}}_{\alpha} \mathbf{g}^{\beta} + t_{\beta}^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} \dot{\mathbf{g}}^{\beta} \quad . \quad (2.36)$$

Für die Maßzahlen der Jaumann'schen Zeitableitung  $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$  ergibt sich daraus nach einigen Zwischenrechnungen

$$\overset{\nabla}{t}_{\beta}^{\alpha} = \left( \dot{t}_{\beta}^{\alpha} \right) + t_{\beta}^{\gamma} d_{\gamma}^{\alpha} - t_{\gamma}^{\alpha} d_{\beta}^{\gamma} + t_{\gamma}^{\alpha} v^{\gamma}_{,\beta} - t_{\beta}^{\gamma} v^{\alpha}_{,\gamma} \quad . \quad (2.37)$$

## 2.3 Thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua

### 2.3.1 Vorbemerkungen

Das im folgenden vorgestellte phänomenologische Stoffgesetz beschreibt im Rahmen einer Theorie geschädigter Kontinua die Einflüsse von Temperatur und isotroper Materialschädigung durch Mikroporen auf das Verformungsverhalten metallischer polykristalliner Werkstoffe.

Grundlage der hier zusammengestellten Gleichungen bildet der von Lehmann in [12] angegebene allgemeine Rahmen zur Beschreibung großer nichtisothermer elasto-plastischer und elasto-viskoplastischer Deformationen. Unter Vernachlässigung der geschwindigkeitsabhängigen viskosen Effekte wurde durch eine Erweiterung der elasto-plastischen Theorie ein relativ einfaches, aber thermodynamisch konsistentes Stoffgesetz formuliert, welches die Berücksichtigung von isotroper Materialschädigung ermöglicht. Dieses Stoffgesetz ist als ein wichtiger, nicht aber letzter Schritt anzusehen, um die Einflüsse der Materialschädigung zu beschreiben. Weiterführende Überlegungen wurden von Lehmann in [8] und [24] veröffentlicht und ermöglichen insbesondere eine bessere Erfassung von schädigungsinduzierten Spannungskonzentrationen.

### 2.3.2 Definition der Schädigungsvariablen

Wie bereits angesprochen, läßt sich die bei duktilen Formänderungen auftretende Materialschädigung durch Mikroporen näherungsweise als isotrop bezeichnen. Deshalb ist die Definition einer skalaren Schädigungsvariablen ausreichend, um den Schädigungszustand des Materials zu beschreiben. Die Verwendung des Porenvolumenanteils ist naheliegend, so daß dieser von verschiedenen Autoren als Damagevariable benutzt wird [26, 27]. Das skalare, nicht negative Schädigungsmaß  $\omega$  ist als

$$\omega = \frac{dV_v^*}{dV^*} = \frac{dV^* - dV^0}{dV^*} = 1 - \frac{dV^0}{dV^*} = 1 - \frac{\rho^*}{\rho} \geq 0 \quad (2.38)$$

definiert. Die Kennzeichnung  $*$  weist auf einen den thermo-mechanischen Prozeß begleitenden Referenzzustand  $B^*$  hin, der mit dem aktuellen Zustand  $B$  durch einen fiktiven reversiblen Prozeß verbunden ist (vgl. Abbildung 2.2). Dieser reversible Prozeß wird deshalb als fiktiv bezeichnet, weil er als lokale Entlastung zu verstehen ist. Die so entstehende Konfiguration  $B^*$  ist spannungsfrei, genügt aber im allgemeinen nicht den Kompatibilitätsbedingungen.

Durch die Einführung dieser Zwischenkonfiguration gelingt es, die reversiblen Anteile eines Deformationszustands zu erfassen und den Tensor der

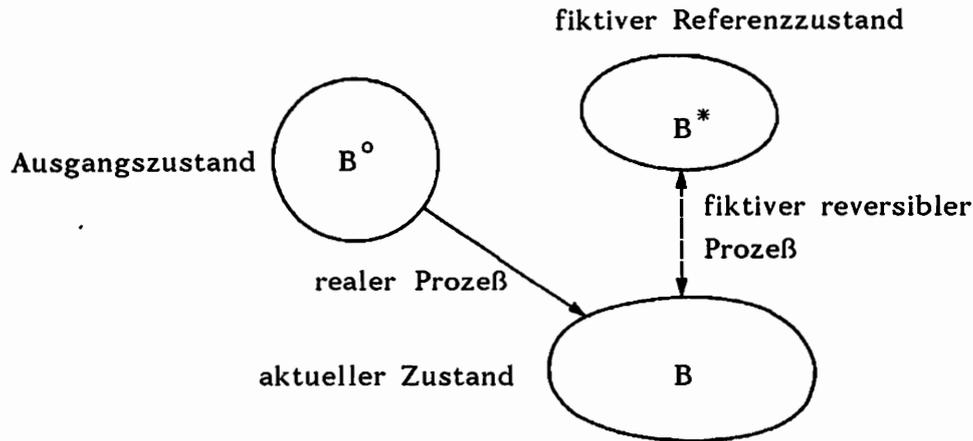


Abbildung 2.2: Referenzzustand  $B^*$

Verzerrungsgeschwindigkeiten in einen elastischen, reversiblen Teil  $\mathbf{D}_r$  und in einen inelastischen Teil  $\mathbf{D}_i$  additiv aufzuspalten

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_r + \mathbf{D}_i \quad (2.39)$$

Im Gegensatz zu einer klassischen Plastizitätstheorie, in der nur isochore plastische Deformationen auftreten, ist mit der Materialschädigung ein Anwachsen des Volumens  $dV$  verbunden, hervorgerufen durch das sich vergrößernde Porenvolumen  $dV_v$ . Aus diesem Grund wird hier eine von Bruhns in [28] vorgeschlagene Aufspaltung des Tensors der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten in einen deviatorischen Anteil  $\mathbf{D}_p$  und in einen das Volumen verändernden Anteil  $\mathbf{D}_v$  vorgenommen

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_v \quad (2.40)$$

Der deviatorische Teil wird in gewohnter Weise als "plastisch" bezeichnet, da er volumentreue inelastische Formänderungen bewirkt

$$\mathbf{D}_p = \mathbf{D}_i - \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{D}_i) \mathbf{1} \quad (2.41)$$

Der das Volumen verändernde Anteil

$$\mathbf{D}_v = \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{D}_i) \mathbf{1} \quad (2.42)$$

korrespondiert mit der in (2.38) definierten Schädigungsvariablen  $\omega$ . Dieser Definition liegen die Volumina der fiktiven Konfiguration  $B^*$  zugrunde, damit auch große reversible Volumenveränderungen keinen Einfluß auf die Schädigungsvariable  $\omega$  haben.

Da im Rahmen dieser Arbeit die elastischen Deformationen als klein gegenüber den Gesamtdeformationen angesehen werden können, ist auch die aus

ihnen resultierende Volumenänderung gering. Der Unterschied der Volumina  $dV^*$  und  $dV$  ist deshalb vernachlässigbar

$$dV^* = dV . \quad (2.43)$$

Damit geht (2.38) über in

$$\omega = \frac{dV - dV^o}{dV} = 1 - \frac{dV^o}{dV} = 1 - \frac{\rho}{\rho_0} , \quad (2.44)$$

und die Beziehung zwischen den in Kapitel 2.2 definierten Spannungstensen  $\sigma$  und  $\mathbf{S}$  läßt sich als

$$\mathbf{S} = \frac{\sigma}{1 - \omega} \quad (2.45)$$

angeben.

### 2.3.3 Thermomechanische Kopplung

Der von Lehmann [ 8 ] formulierte thermodynamische Rahmen zur phänomenologischen Beschreibung inelastischer Deformationsprozesse geht von der Annahme aus, daß der thermodynamische Zustand jedes Materieelementes eindeutig durch die aktuellen Werte eines Satzes externer und interner Zustandsvariablen bestimmt ist, selbst wenn der Körper als ganzes sich nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Bei der Betrachtung geschädigter Körper kommt als ergänzende Annahme hinzu, daß die klassische Kontinuumstheorie trotz der vorhandenen Mikroschädigungen anwendbar ist.

Betrachtet man die Formänderungen eines Polykristalls auf der mikroskopischen Ebene, so sind diese sowohl von den Gitterfehlern innerhalb der Körner als auch von der Größe und Orientierung der Körner beeinflusst. Zu den Gitterfehlern zählen Leerstellen, Versetzungen, sowie gelöste oder ausgeschiedene Legierungsatome. Insbesondere die Versetzungen, die durch ihr Wandern wesentlich zu plastischen Formänderungen beitragen, führen durch Versetzungsaufstau oder Ausheilen zu Ver- oder Entfestigung des Materials.

Obwohl durch werkstoffwissenschaftliche Untersuchungen viele dieser Mechanismen bekannt und erklärbar sind, ist eine quantitative Beschreibung der komplexen Wechselwirkungen ausgehend von der mikroskopischen Ebene mit großen Problemen behaftet, da sie zahlreiche Einflußgrößen berücksichtigen muß und mit aufwendigen statistischen Methoden verbunden ist. Aus diesem Grund sind phänomenologische Materialbeschreibungen attraktiv, da sie es ermöglichen, das Verhalten des Materials global zu beschreiben, ohne die einzelnen mikromechanischen Effekte exakt zu modellieren.

Verlangt man von einem Stoffgesetz eine vollständige Beschreibung des Materialverhaltens, das heißt, daß das Stoffgesetz jeden beliebigen thermomechanischen Prozeß erfassen kann, so enthält auch eine phänomenologische Beschreibung eine Vielzahl von Materialparametern und Funktionen.

Der große Vorteil einer phänomenologischen Materialtheorie liegt aber gerade darin, daß man sich auf die Modellierung der als wesentlich erachteten Materialphänomene beschränken kann. Dies ermöglicht die Formulierung von relativ einfachen Stoffgesetzen, die innerhalb der zu treffenden Einschränkungen das Materialverhalten mit der gewünschten Genauigkeit erfassen können. Von diesen Einschränkungen hängt es letztlich ab, aus welchen und wievielen skalaren oder tensorwertigen Größen der oben angesprochene Satz externer und interner Zustandsvariablen besteht, der es ermöglicht, den Zustand jedes Materieelementes im Rahmen der verwendeten Theorie eindeutig zu bestimmen.

Geht man beispielsweise von einem plastischen Materialverhalten mit isotroper und kinematischer Verfestigung und isotroper Materialschädigung aus, so läßt sich die auf die Masseneinheit bezogene spezifische innere Energie  $u$  angeben als

$$u = u(\boldsymbol{\varepsilon}_r, s, a, \boldsymbol{\alpha}, \omega), \quad (2.46)$$

mit der spezifischen Entropie  $s$ , dem die isotropen, elastischen Deformationen beschreibenden Hencky-Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ , der skalaren bzw. tensorwertigen internen Variablen  $a$  und  $\boldsymbol{\alpha}$ , die den Verfestigungszustand beschreiben, und  $\omega$  zur Berücksichtigung der Materialschädigung.

Dem Zuwachs an innerer Energie entspricht die Differenz von zugeführter und abgeführter Energie. Diesen Zusammenhang liefert der 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{u} = \dot{w} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mathbf{q}) + r \quad (2.47)$$

mit dem Wärmeflußvektor  $\mathbf{q}$ , der spezifischen Formänderungsleistung  $\dot{w}$  und den spezifischen Energiequellen  $r$ , die bei den hier betrachteten Prozessen unter Ausschluß von Phasentransformationen zu vernachlässigen sind ( $r=0$ ).

Die spezifische Formänderungsleistung

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho} \operatorname{Sp}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) = \frac{1}{\rho} \operatorname{Sp}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}) \quad (2.48)$$

läßt sich entsprechend (2.39) und (2.40) aufteilen

$$\dot{w} = \dot{w}_r + \dot{w}_i = \dot{w}_r + \dot{w}_p + \dot{w}_v, \quad (2.49)$$

mit

$$\dot{w}_r = \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_r) = \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\mathbf{S} \cdot \overset{\nabla}{\boldsymbol{\varepsilon}}_r) , \quad (2.50)$$

$$\dot{w}_p = \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_p) = \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_p) \quad (2.51)$$

un

$$\dot{w}_v = \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_v) = \frac{1}{3\rho} \text{Sp}(\mathbf{S}) \text{Sp}(\mathbf{D}_v) . \quad (2.52)$$

Die zweite Gleichung von (2.50) setzt voraus, daß isotropes elastisches Materialverhalten betrachtet wird [ 8, 15 ].

Da die spezifische innere Energie  $u$  als thermodynamisches Potential zur Beschreibung von plastischen Prozessen im Spannungsraum nicht geeignet ist, wird durch eine zweifache Legendre-Transformation die spezifische freie Enthalpie  $\psi$  eingeführt

$$\psi = u - \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r) - T s = \psi(\mathbf{S}, T, a, \boldsymbol{\alpha}, \omega), \quad (2.53)$$

die von der absoluten Temperatur  $T$  und dem gewichteten Cauchy-Spannungstensor  $\mathbf{S}$  abhängt. Die im Zusammenhang mit dieser Transformation auftretenden Beziehungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = -\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{S}} = \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{S}, T, a, \boldsymbol{\alpha}, \omega) \quad (2.54)$$

und

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial T} = s(\mathbf{S}, T, a, \boldsymbol{\alpha}, \omega) \quad (2.55)$$

werden als thermische bzw. kalorische Zustandsgleichung bezeichnet.

Wie bereits mehrfach angesprochen, wird in dieser Arbeit das Stoffgesetz auf eine einfache Fassung reduziert. Deshalb wird im folgenden davon ausgegangen, daß die Schädigungsvariable  $\omega$  nicht explizit in der spezifischen freien Enthalpie  $\psi$  auftritt. Das heißt jedoch nicht, daß das Materialverhalten von der Schädigung unbeeinflusst ist, da  $\omega$  implizit durch die Dichteänderung über die effektiven Spannungen in das thermodynamische Potential eingeht.

Wie gesagt, sollen hier nur Prozesse betrachtet werden, bei denen elastische Entlastungen stattfinden können, aber keine gegensinnigen plastischen Deformationen auftreten. Dies ermöglicht den Verzicht auf einen kinematischen Verfestigungsanteil, der insbesondere zur Modellierung des Bauschinger-Effektes bei zyklischen Prozessen Verwendung findet und mit der tensoriellen, internen Variablen  $\boldsymbol{\alpha}$  beschrieben wird.

Mit den angesprochenen Vereinfachungen ergibt sich die zeitliche Änderung der spezifischen freien Enthalpie  $\psi(\mathbf{S}, T, a)$  aus (2.53) zu

$$\dot{\psi} = \dot{u} - \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\mathbf{S} \cdot \overset{\nabla}{\boldsymbol{\varepsilon}}_r) - \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\overset{\nabla}{\mathbf{S}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r) - T \dot{s} - \dot{T} s \quad (2.56)$$

Löst man diesen Ausdruck nach  $\dot{u}$  auf und setzt ihn in (2.47) unter Berücksichtigung von (2.49) ein, so hebt sich die reversible Formänderungsleistung  $\dot{w}_r$  heraus und es entsteht

$$\begin{aligned} \dot{w}_p + \dot{w}_v - \frac{1}{\rho} \text{div}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\overset{\nabla}{\mathbf{S}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_r) + T \dot{s} + \dot{T} s + \dot{\psi} \\ &= \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\mathbf{S} \cdot \overset{\nabla}{\boldsymbol{\varepsilon}}_r) + T \dot{s} + \dot{T} s + \text{Sp}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{S}} \cdot \overset{\nabla}{\mathbf{S}}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial a} \dot{a} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Mit der thermischen und der kalorischen Zustandsgleichung folgt die Gibbs'sche Gleichung

$$T \dot{s} = \dot{w}_p + \dot{w}_v - \frac{1}{\rho} \text{div}(\mathbf{q}) - \frac{\partial \psi}{\partial a} \dot{a} \quad (2.58)$$

Um eine Beziehung zwischen der in (2.58) auftretenden Entropieänderung  $\dot{s}$  und der im zweiten Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{s}_d \geq 0 \quad (2.59)$$

auftretenden Entropieproduktion  $\dot{s}_d$  herzustellen, ist zu beachten, daß die inelastische Formänderungsleistung  $\dot{w}_i$  nicht vollständig dissipiert wird. Der Anteil  $\dot{w}_h$  bewirkt die zum Teil reversiblen internen Strukturänderungen des Materials und wird zunächst in der Mikrostruktur gespeichert

$$\dot{w}_i = \dot{w}_p + \dot{w}_v = \dot{w}_d + \dot{w}_h \quad (2.60)$$

In der Literatur wird  $\dot{w}_h$  auch "latente Energie" oder "cold work" genannt, da dieser Anteil nicht unmittelbar in Wärme umgesetzt wird (vgl. Kapitel 6).

Bezeichnet man die bei den internen Prozessen auftretende Entropieproduktion mit  $\dot{\eta}$ , so lautet die Beziehung zwischen der zugeführten Formänderungsleistung und den dadurch bewirkten internen Zustandsänderungen in folgender Weise

$$\dot{w}_h = \frac{\partial \psi}{\partial a} \dot{a} + T \dot{\eta} \quad (2.61)$$

Mit Gleichung (2.61) läßt sich unter anderem die thermodynamische Zulässigkeit der Materialfunktionen überprüfen (vgl. Kapitel 2.3.7).

Beachtet man, daß ein Teil der in der Gibbs'schen Gleichung (2.58) vorkommenden Entropieänderung  $\dot{s}$  als reversibler Entropietransport

$$T \dot{s}_r = - \frac{T}{\rho} \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \quad (2.62)$$

auftritt, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.59) bis (2.62) aus (2.58) die Gleichung für die stets positive Entropieproduktion

$$T \dot{s}_d = \dot{w}_d - \frac{1}{\rho T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad} (T) + T \dot{\eta} \geq 0 \quad (2.63)$$

Betrachtet man den Schädigungsprozeß als vollständig dissipativ, so folgt mit der Dissipationsfunktion  $\xi$ , die den dissipierten Anteil der plastischen Formänderungsleistung  $\dot{w}_p$  angibt,

$$\dot{w}_d = \xi \dot{w}_p + \dot{w}_v \quad (2.64)$$

und

$$\dot{w}_h = (1 - \xi) \dot{w}_p, \quad (2.65)$$

so daß (2.63) die folgende Form annimmt

$$T \dot{s}_d = \xi \dot{w}_p + \dot{w}_v - \frac{1}{\rho T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad} (T) + T \dot{\eta} \geq 0 \quad (2.66)$$

Die auftretenden Temperaturänderungen lassen sich berechnen, indem man in (2.58) die Änderung der Entropie  $\dot{s}$  durch die zeitliche Ableitung der kalorischen Zustandsgleichung (2.55) ersetzt, und dann die Bilanz (2.61) verwendet

$$\begin{aligned} - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} &= \dot{w}_d - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\mathbf{q}) + T \dot{\eta} \\ &+ T \operatorname{Sp} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{S} \partial T} \cdot \nabla \right) + T \frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial T} \dot{a} \quad (2.67) \end{aligned}$$

Mit der spezifischen Wärmekapazität

$$c_p = - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \quad (2.68)$$

und der Dissipationsleistung nach (2.64) folgt aus (2.67)

$$\begin{aligned} c_p \dot{T} &= \xi \dot{w}_p + \dot{w}_v - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\mathbf{q}) + T \dot{\eta} \\ &+ T \operatorname{Sp} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{S} \partial T} \cdot \nabla \right) + T \frac{\partial^2 \psi}{\partial a \partial T} \dot{a} \quad (2.69) \end{aligned}$$

Geht man davon aus, daß die Umwandlung von mechanischer Arbeit in latente Energie im wesentlichen reversibel ist, so sind die internen Prozesse

nicht mit Entropieproduktion verbunden ( $\dot{\eta}=0$ ). Vernachlässigt man weiterhin die letzten beiden Terme von (2.69), die auch als Koppelterme bezeichnet werden, so ergibt sich für die Temperaturerhöhung

$$c_p \dot{T} = \xi \dot{w}_p + \dot{w}_v - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mathbf{q}) \quad . \quad (2.70)$$

Der thermoelastische Effekt, der durch den ersten Koppelterm beschrieben wird, ist in dieser Gleichung nicht mehr berücksichtigt, da er im Vergleich mit dem Wärmefluß und der bei großen plastischen Formänderungen auftretenden Dissipationsleistung klein ist.

Der zweite, im allgemeinen ebenfalls als klein anzusehende Koppelterm verschwindet mit den in dieser Arbeit verwendeten Ansätzen für  $\dot{a}$  und  $\xi$  exakt.

Im Zusammenhang mit den FE-Rechnungen wird, wie bei Bathe in [29], als Wärmeleitungsgleichung das Fourier'sche Gesetz

$$\mathbf{q} = - \lambda_f \operatorname{grad}(T) \quad (2.71)$$

verwendet. Die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_f$  ist bei den hier betrachteten Problemen richtungsunabhängig. Eine Erweiterung des Fourier'schen Gesetzes, die Maxwell-Cattaneo-Gleichung, wird von Diehl in [10] angegeben. Mit (2.71) folgt aus (2.70)

$$c_p \dot{T} = \xi \dot{w}_p + \dot{w}_v + \frac{1}{\rho} \lambda_f \operatorname{div}(\operatorname{grad}(T)) \quad . \quad (2.72)$$

### 2.3.4 Elastische Deformationen

Die thermische Zustandsgleichung (2.54) gibt an, wie sich der Hencky-Tensor der elastischen Verzerrungen aus der spezifischen freien Enthalpie  $\psi$  berechnen läßt. Um im Rahmen eines inkrementellen Stoffgesetzes Verwendung zu finden, muß (2.54) objektiv nach der Zeit abgeleitet werden. Da die elastischen Formänderungen gegenüber den auftretenden plastischen Verzerrungen klein bleiben, lassen sich die elastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten aber auch mit guter Näherung durch das hypo-elastische Stoffgesetz

$$\mathbf{D}_r = \frac{1}{2G} \left( \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \operatorname{Sp}(\dot{\mathbf{S}}) \mathbf{1} \right) + \alpha \dot{T} \mathbf{1} \quad , \quad (2.73)$$

mit dem Schubmodul  $G$ , der Querkontraktionszahl  $\nu$  und dem thermischen Ausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  beschreiben.

### 2.3.5 Plastische Deformationen

Wie im Abschnitt 2.3.2 erläutert, wird der Tensor der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeit in einen mit der Schädigung korrespondierenden Anteil  $\mathbf{D}_v$ , der die Volumenänderung enthält, und in einen volumentreuen plastischen Anteil  $\mathbf{D}_p$  aufgespalten. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zu anderen Schädigungsmodellen, die diese Trennung nicht vorsehen (vgl. Kapitel 3). Mit diesem Ansatz werden die auftretenden Deformationsmechanismen separiert, um zur Beschreibung des geschädigten Materials auf bereits vorhandene Erkenntnisse der klassischen Plastizitätstheorie zurückgreifen zu können.

Geht man davon aus, daß das Verfestigungsvermögen des Matrixmaterials von der Schädigung in erster Näherung nicht beeinflusst wird, läßt sich die von Mises' sche Fließbedingung mit den effektiven Spannungen  $\mathbf{S}$  formulieren

$$F = \text{Sp}(\mathbf{T}^2) - k^2(a, T) = 0 \quad . \quad (2.74)$$

Die Fließbedingung (2.74) muß im Fall eines zusätzlichen kinematischen Verfestigungsanteils erweitert werden [18].

Verwendet man zur Beschreibung der plastischen Deformationsgeschwindigkeiten die sogenannte Normalenregel

$$\mathbf{D}_p = \left\langle \lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \right\rangle , \quad (2.75)$$

so gilt mit (2.74)

$$\mathbf{D}_p = \left\langle 2 \lambda \mathbf{T} \right\rangle . \quad (2.76)$$

Der Vergleich mit experimentellen Ergebnissen hat gezeigt, daß viele Prozesse mit diesem der Fließbedingung  $F$  assoziierten Formänderungsgesetz mit guter Genauigkeit beschrieben werden können. Bei nichtproportionalen Belastungsvorgängen, die mit starken Spannungsumlagerungen verbunden sind, führt eine Erweiterung von (2.75) zu besseren Ergebnissen. Die bei derartigen Prozessen deutlichen Vorteile einer von Lehmann vorgeschlagenen "Abweichung von der Normalenregel", sind in den Arbeiten [16] und [18] dargestellt. Die Berechnungen von Blix [17] weisen aber darauf hin, daß diese Abweichung beim Einschnürvorgang, bei dem keine abrupten Spannungsumlagerungen auftreten, vernachlässigbar sind.

Die spitzen Klammern in (2.75) bedeuten, daß diese Beziehung mit Nebenbedingungen verbunden ist. Plastische Deformationen treten nur auf, wenn die Fließbedingung (2.74) und die Konsistenzbedingung (2.77) erfüllt sind

$$\dot{F} = \text{Sp} \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \cdot \dot{\mathbf{S}} \right) + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial F}{\partial a} \dot{a} = 0 \quad . \quad (2.77)$$

Die mit den plastischen Deformationen verbundene Materialverfestigung wird mit einer Evolutionsgleichung für die interne Variable  $a$  beschrieben. Im Rahmen der in dieser Arbeit vorgenommenen Einschränkung auf nicht-zyklische Prozesse wird hier der Ansatz

$$\dot{a} = \text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_p) \quad (2.78)$$

verwendet. Bei komplexeren Belastungen ist neben der Einführung eines kinematischen Verfestigungsanteils gegebenenfalls auch eine Verallgemeinerung von (2.78) zu berücksichtigen [30].

Mit der Konsistenzbedingung (2.77), der Fließbedingung (2.74) und der Evolutionsgleichung (2.78) läßt sich der bislang unbestimmte Faktor  $\lambda$  der Normalenregel ermitteln

$$\lambda = \left\langle \frac{2 \text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \overset{\nabla}{\mathbf{T}}) - \frac{\partial k^2}{\partial \mathbf{T}} \dot{\mathbf{T}}}{2 k^2 \frac{\partial k^2}{\partial a}} \right\rangle \quad (2.79)$$

Berücksichtigt man  $\lambda$  in dieser Weise, so ist die Kontinuität der plastischen Deformationen gewährleistet, solange die Fließbedingung  $F=0$  und die Belastungsbedingung

$$\lambda \geq 0 \quad (2.80)$$

erfüllt sind.

### 2.3.6 Schädigungsinduzierte Deformationen

Volumenänderungen lassen sich mit der ersten Invarianten des Hencky-Dehnungstensors  $\epsilon$  berechnen

$$\text{Sp}(\epsilon) = \ln \left( \frac{dV}{dV^o} \right) \quad (2.81)$$

Dieser Ausdruck kann in einen im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigbaren Beitrag der elastischen Deformationen und in einen auf das Anwachsen der Mikroporen zurückgehenden Anteil additiv aufgespalten werden

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\epsilon) &= \text{Sp}(\epsilon_r) + \text{Sp}(\epsilon_v) = \ln \left( \frac{dV}{dV^*} \frac{dV^*}{dV^o} \right) \\ &= \ln \left( \frac{dV}{dV^*} \right) + \ln \left( \frac{dV^*}{dV^o} \right) \end{aligned} \quad (2.82)$$

Damit ergibt sich für die schädigungsinduzierte Volumendehnungsrate

$$\text{Sp}(\mathbf{D}_v) = (\text{Sp}(\dot{\epsilon}_v)) = - \frac{\dot{\rho}^*}{\rho^*} \quad (2.83)$$

Löst man die Definitionsgleichung (2.38) der skalaren Schädigungsvariablen  $\omega$  nach  $\rho^*$  auf, leitet diesen Ausdruck nach der Zeit ab und setzt beides in (2.83) ein, so folgt zunächst

$$\text{Sp}(\mathbf{D}_v) = \frac{\dot{\omega}}{(1-\omega)} \quad (2.84)$$

und mit (2.42)

$$\mathbf{D}_v = \frac{\dot{\omega}}{3(1-\omega)} \mathbf{1} \quad (2.85)$$

Da eine Schädigung durch Mikroporen bei Druckbeanspruchungen des Materials nicht auftritt, wird als Schädigungsbedingung

$$\bar{S} > \bar{S}_c \geq 0 \quad (2.86)$$

verwendet. Die nichtnegative Größe  $\bar{S}_c$  ist als Maß für einen kritischen Zugspannungszustand anzusehen, bei dem Materialschädigung auftreten kann. Bei allen in dieser Arbeit gezeigten Berechnungen wurde angenommen, daß bereits ein geringer hydrostatischer Zug ausreicht, um in Verbindung mit plastischen Deformationen Mikroporen entstehen zu lassen ( $\bar{S}_c = 0$ ). Als Evolutionsgleichung für das Anwachsen der Schädigungsvariablen  $\omega$  wird

$$\dot{\omega} = \llcorner \llbracket [\vartheta_k(T) + \vartheta_l(T)\omega] \sqrt{\mathbf{D}_p \cdot \mathbf{D}_p} \gg \gg \quad (2.87)$$

eingeführt. Das Symbol  $\llcorner \llbracket \dots \gg \gg$  weist auf die Nebenbedingung (2.86) hin. Im Gegensatz zu anderen Arbeiten (vgl. Kapitel 3) wird in diesem Stoffgesetz nicht zwischen den Begriffen Porenentstehung und Porenwachstum unterschieden, da es im Zusammenhang mit der hier verwendeten Definition von  $\omega$  unwesentlich ist, ob eine Vergrößerung des Porenvolumenanteils durch die Entstehung zusätzlicher oder durch ein Wachsen bereits vorhandener Poren hervorgerufen wird. Aus diesem Grund werden beide Vorgänge gemeinsam mit der phänomenologischen Evolutionsgleichung (2.87) modelliert. Dieser liegt die Einschätzung zugrunde, daß ein Anwachsen des Porenanteils im wesentlichen durch die großen plastischen Deformationen gekennzeichnet ist.

Ein als kritische Schädigung  $\omega_c$  bezeichneter Wert gibt im Rahmen dieses Stoffgesetzes die Grenze der Materialbelastbarkeit an, die durch ein lokales Versagen des Werkstoffs gekennzeichnet ist. Das mit diesem Zustand verbundene Entstehen eines Makrorisses beendet lokal die Gültigkeit der hier beschriebenen Kontinuum-Damage-Theorie und erfordert im allgemeinen umfangreiche Überlegungen zur weiteren Erfassung dieser Makroschädigung [10]. In Kapitel 7 wird die Möglichkeit einer stark vereinfachten numerischen Behandlung des auftretenden Makrorisses erläutert.

### 2.3.7 Thermodynamische Restriktionen

Betrachtet man die Gleichung (2.61), die die internen Zustandsänderungen mit dem zugeordneten Anteil der spezifischen Formänderungsleistung bilanziert, und berücksichtigt man (2.65), (2.51) und (2.78), sowie  $\dot{\eta} = 0$ , so folgt daraus

$$0 = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial a} - (1-\xi) \frac{1}{\rho} \right] \text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_p) \quad , \quad (2.88)$$

bzw.

$$\frac{\partial \psi}{\partial a} = \frac{(1-\xi)}{\rho} \quad . \quad (2.89)$$

Ohne eine Aussage über das Potential  $\psi$  selbst zu machen, lassen sich durch einen Vergleich der gemischten partiellen Ableitungen von  $\psi$  Restriktionen ermitteln, die von Lehmann [8] als Integrabilitätsbedingungen bezeichnet werden. Im allgemeinen ergibt sich daraus ein System komplexer Beziehungen zwischen den Evolutionsgesetzen der internen Variablen [8]. Im Rahmen dieser Arbeit folgt mit (2.68) und (2.89) die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial^3 \psi}{\partial T^2 \partial a} = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left( \frac{(1-\xi)}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial a} \left( - \frac{c_p}{T} \right) \quad . \quad (2.90)$$

Ist die spezifische Wärmekapazität eines Materials als Funktion  $c_p(T)$  bekannt und unabhängig von der den Verfestigungszustand bestimmenden internen Variable  $a$ , so verschwindet der rechte Term von (2.90). Gleiches muß dann auch für den mittleren Term der Gleichung gelten, was bei einem Ansatz für  $\xi$ , der eine Temperaturabhängigkeit  $\xi = \xi(T)$  beinhaltet, zu berücksichtigen ist.

Neben dieser Integrabilitätsbedingung ist zu überprüfen, ob die vom 2. Hauptsatz der Thermodynamik geforderte Bedingung stets positiver Entropieproduktion erfüllt ist. Eine Untersuchung der Gleichung (2.63) zeigt, daß keiner der auftretenden Terme im Rahmen des hier vorgestellten Stoffgesetzes negativ werden kann, so daß die aus ihnen gebildete Summe ebenfalls stets größer oder gleich Null ist.

### 3. Vergleich mit anderen Schädigungsmodellen

Anhand eines Vergleiches mit anderen Schädigungsmodellen sollen im folgenden wesentliche Aspekte des im Kapitel 2 beschriebenen Stoffgesetzes verdeutlicht werden.

Es gibt unterschiedliche Zugangsweisen zur Modellierung von Schädigungsvorgängen. Grundsätzlich besteht wie bei der Beschreibung der Verfestigungsmechanismen polykristalliner Werkstoffe auch hier die Möglichkeit einer mikroskopischen oder makroskopischen Betrachtungsweise. Der erste Ansatz beruht auf der mikromechanischen Untersuchung einer speziellen, idealisierten Materialschädigung. Im Gegensatz dazu läßt die makroskopische Modellierung die mikromechanischen Zusammenhänge im Umfeld einer einzelnen Pore unbetrachtet und versucht nur das globale Verhalten des geschädigten Werkstoffs zu beschreiben. Dies schließt nicht aus, daß die eingeführten Gleichungen mikromechanisch motiviert oder interpretierbar sein können. Diese kontinuumsmechanische Betrachtungsweise, die auch dem im Kapitel 2 dargestellten Stoffgesetz zugrunde liegt, wurde von Kachanov [1] und Rabotnov [2] durch die Definition einer makroskopischen Schädigungsvariablen bei Kriechvorgängen initiiert und von Lemaitre und Chaboche [3-5] zur sogenannten "Kontinuum-Damage-Mechanik" weiterentwickelt.

Ein mikroskopischer Ansatz findet sich bei Gurson, der in [31] unter der vereinfachenden Annahme eines idealplastischen Matrixmaterials mit kugelförmigen oder zylindrischen Poren eine Näherung für die Fließbedingung des betrachteten geschädigten Teilkörpers angibt. Im Zusammenhang mit der Methode der Finiten Elemente folgten entsprechende numerische Studien an mikroskopischen Modellkörpern, die als Grundbaustein des durch Poren geschädigten Materials betrachtet werden. Aus derartigen Untersuchungen ergaben sich unter anderem Modifikationen der Gurson'schen Fließbedingung, wie sie in [25, 26, 32, 33] Verwendung finden.

Solche Studien können in vielfältigster Weise durchgeführt werden. Dies wird deutlich, wenn man bedenkt, welche unterschiedlichen Möglichkeiten es gibt, einen Quader mit einer meist kugelförmigen Schädigung zu versehen und das Verhalten dieser Struktur zu berechnen. Neben den verschiedenen plastischen oder viskoplastischen Stoffgesetzen, die für die Matrix verwendet werden, unterscheiden sich die Anordnungen und Größen der Poren, so daß differierende Porenvolumenanteile entstehen [34, 35]. Darüberhinaus werden die Effekte der Porenverteilung [36] oder der Einfluß des in den Poren befindlichen Einschlussteilchens betrachtet [37].

Im Zusammenhang mit derartigen Studien ist die grundsätzliche Frage zu stellen, ob für das zwischen den Poren befindliche Matrixmaterial die im Rahmen der Kontinuumstheorie abgeleiteten Stoffgesetze Gültigkeit haben. Es kann kaum ausgeschlossen werden, daß die Inhomogenitäten des Werkstoffs und andere Effekte der Mikrostruktur, die in diesen Berechnungen nicht erfaßt werden, dazu führen, daß die betrachteten Bausteine auch ein anderes globales Verhalten zeigen als der reale geschädigte Körper. Dies führt dazu, daß auch die von Gurson abgeleiteten Beziehungen beispielsweise in [36] als phänomenologisch bezeichnet werden.

Obwohl mit der Gurson'schen Fließbedingung bzw. mit ihren Modifikationen [26, 38, 39] durchaus gute Ergebnisse erzielt wurden, wird in dieser Arbeit ein anderer Weg beschritten. Dieser ist insbesondere durch den Wunsch motiviert, daß die verwendete Schädigungsvariable  $\omega$  immer als Porenvolumenanteil interpretierbar bleibt. Aus diesem Grund verbietet sich unter anderem das Vorgehen von Tvergaard und Needleman, die in [26] ihre Schädigungsvariable zunächst als Porenvolumenanteil einführen und im Verlauf des Prozesses modifizieren. Dies führt dazu, daß sich die in den wahren (nicht "effektiven") Spannungen formulierte Fließfläche bis zum Eintreten des Bruches auf einen Punkt zusammenzieht. In der kritischen Phase reduziert das Material seine Tragfähigkeit stetig, so daß beim Versagen des Elementes die anliegende Spannung gegen Null geht. Dieser Ansatz führt zu dem Verlust der physikalischen Interpretierbarkeit der Damagevariablen, da der Bruch bei dem modifizierten Schädigungswert von 0,67 eintritt, der nicht mit dem zunächst betrachteten Porenvolumenanteil übereinstimmt.

Der oben angesprochene Wunsch nach einer eindeutigen Definition von  $\omega$  zielt auch auf eine direkte Meßbarkeit dieser Schädigungsvariablen. Aus diesem Grund wird in Gleichung (2.24) dieser Arbeit auch die meßbare Fläche des Matrixmaterials mit dem Tensor der effektiven Spannungen verknüpft, wobei der Einfluß von Mikro-Spannungskonzentrationen, die durch die Schädigung hervorgerufen werden können, nicht berücksichtigt wird. Diese werden von Lemaitre in [4] insofern berücksichtigt, als er dem effektiven Spannungstensor eine nicht näher definierte effektive Fläche zuordnet, von der er angibt, daß sie kleiner als die um den Porenanteil reduzierte Gesamtfläche ist. Diese Argumentation läßt sich nachvollziehen und ist auch bei der von ihm verwendeten, im Kapitel 4.5.2 besprochenen indirekten Schädigungsmessung nicht relevant, widerspricht aber der hier geforderten direkten physikalischen Interpretierbarkeit von  $\omega$ . Alle über die Querschnittsverminderung hinausgehenden Effekte werden mit der in dieser Arbeit betrachteten Schädigungsvariablen nicht berücksichtigt, können aber mit zusätzlichen skalaren oder tensoriellen internen Variablen berücksichtigt werden [24].

Der dieser Arbeit zugrundeliegenden, vereinfachten Anschauung folgend, daß das Verhalten des Matrixmaterials weitgehend von der Schädigung ungestört ist, wird mit (2.74) eine Fließbedingung verwendet, die auch bei plastischen Formänderungen ungeschädigter Körper eingesetzt wird. Es ist in diesem Zusammenhang wesentlich, daß diese Fließbedingung durch die Verwendung der effektiven Spannungen direkt auf das Matrixmaterial zugeschnitten ist. Das hier verwendete Konzept der Abspaltung des auf die Schädigung zurückgehenden Anwachsens des Volumens ermöglicht es, daß Teile des Stoffgesetzes unabhängig voneinander ergänzt und erweiterten Anforderungen angepaßt werden können. Die Berücksichtigung eines kinematischen Verfestigungsanteils ist ebenso möglich wie die Beschreibung des Matrixmaterials mit einem viskosen Werkstoffgesetz. Grundsätzlich ist dabei zu beachten, daß der entsprechende mit dem Matrixmaterial verbundene Deformationsanteil keine Volumenänderungen hervorruft. Dies steht im Gegensatz zu den angesprochenen Schädigungsmodellen, die diese Aufteilung der Deformationen nicht vorsehen und die beiden inelastischen Anteile gemeinsam beschreiben.

Mit dem Anwachsen des Porenvolumenanteils verbindet man im allgemeinen verschiedene Mechanismen. Neben der Vergrößerung der einzelnen Poren besteht die Möglichkeit der Neubildung, das heißt des Aufbrechens des Matrixmaterials an weiteren Stellen, so daß zusätzliche Mikroporen entstehen. Insbesondere in einem späten Stadium des Prozesses, wenn bereits eine deutliche Materialschädigung vorliegt, tritt als weiterer Vorgang die Vereinigung von Mikroporen auf. Diese führt in der Folge zum Versagen des Körpers bzw. Körperteils.

Um insbesondere die ersten beiden Mechanismen getrennt erfassen zu können, besteht die Evolutionsgleichung der Schädigungsvariablen in der Regel aus mehreren additiven Termen [26, 27]. Die von den jeweiligen Anteilen hervorgerufene materialschwächende Wirkung ist aber unabhängig davon, ob der Porenvolumenanteil durch Wachstum oder Neubildung von Mikroporen gestiegen ist. Der Grund dafür ist, daß die zitierten Werkstoffmodelle ebenso wie das vorliegende Stoffgesetz mit nur einer skalaren Damagevariablen arbeiten. Die Differenzierung der genannten Schädigungsmechanismen kann deshalb nur das Ziel haben, bei der Formulierung einer phänomenologischen Evolutionsgleichung für  $\omega$  behilflich zu sein. Die experimentelle Absicherung dieser Ansätze und die Ermittlung der auftretenden Materialfunktionen ist sehr problematisch und steigt mit der Komplexität der Evolutionsgleichung. Aus diesem Grund wurden in [40] gesinterte Proben verwendet, bei denen durch den bereits vorhandenen Anfangsporenanteil der Einfluß von Porenneubildung zu vernachlässigen ist. Das im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Material kann im Gegensatz

dazu als anfänglich porenfrei angesehen werden, so daß eine entsprechende Annahme hier nicht möglich ist.

Wie schon bei der Modellierung der Verfestigungsfunktion wird auch für die Schädigungsevolution in Kapitel 2 ein relativ einfacher phänomenologischer Ansatz gemacht, der nicht zwischen den oben angesprochenen Mechanismen differenziert. Ebenso wie die Erweiterung des Materialmodells auf einen kinematischen Verfestigungsanteil angesprochen wurde, ist an dieser Stelle anzumerken, daß auch die Differenzierung einzelner Schädigungsmechanismen im Rahmen des hier vorgestellten Schädigungskonzeptes möglich ist. Die in dieser Arbeit verwendete Evolutionsgleichung (2.87) ist dann entsprechend zu modifizieren.

Besonders kritisch ist im Zusammenhang mit dem Begriff "isotrope Schädigung" der bereits angesprochene Mechanismus der Vereinigung von Poren zu sehen. Die den genannten Materialmodellen zugrundeliegende Isotropie der Schädigung ist grundsätzlich nur näherungsweise erfüllt; in diesem fortgeschrittenen Stadium der Schädigung wird diese vereinfachende Beschreibung des Schädigungszustands fraglich. Basista stellt in [41] fest, daß abgesehen von der bei sehr duktilen Materialien auftretenden Schädigung durch kugelförmige Poren in der Regel alle Schädigungsvorgänge eine starke Anisotropie aufweisen. Dies gilt in besonderer Weise für die in spröden Materialien unter Druckbelastung auftretenden Mikrorisse, aber auch für die bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen in Stahl auftretenden Mikroscherbänder. Um eine in diesen Fällen erforderliche Richtungsabhängigkeit der Schädigung zu modellieren, wird auf tensorielle Schädigungsvariablen zurückgegriffen. Die dazu verwendeten Definitionen, die sich zum Teil stark unterscheiden, sollen hier nicht weiter betrachtet werden. Sie können in den Veröffentlichungen [5, 6, 8, 9] nachgelesen werden.

In der bereits angesprochenen Arbeit von Basista wird allgemein im Zusammenhang mit dem Entstehen und Anwachsen von Mikrodefekten der Zeitpunkt der Vereinigung dieser Mikroschädigungen als Entstehung eines Makrorisses verstanden. Dieses Verständnis liegt auch den im Kapitel 8 dargestellten Berechnungen zugrunde. Die oben formulierte Frage nach der Gültigkeit der Verwendung einer isotropen Schädigungsvariablen zur näherungsweisen Beschreibung des als anisotrop anzusehenden Vorgangs der Porenvereinigung wird so hinfällig. Der Grund dafür ist, daß durch den mit dem Zusammenwachsen von Poren entstehenden Makroriß die verwendete Kontinuum-Damage-Theorie lokal ihre Gültigkeit verliert. Dies bedeutet, daß in der Folge ein Körper mit einem Riß zu betrachten ist.

Der zuletzt angesprochene Fragenkomplex der Zulässigkeit von Kontinuum-Damage-Theorien und der dabei vorgenommenen Vereinfachungen

wird weiter untersucht werden müssen, da diesbezüglich zur Zeit keine klaren Aussagen gemacht werden können. Es ist davon auszugehen, daß die Grenzen zwischen Mikro- und Makroschädigung fließend sind und daß sie vom Material und dem jeweils betrachteten Prozeß abhängen.

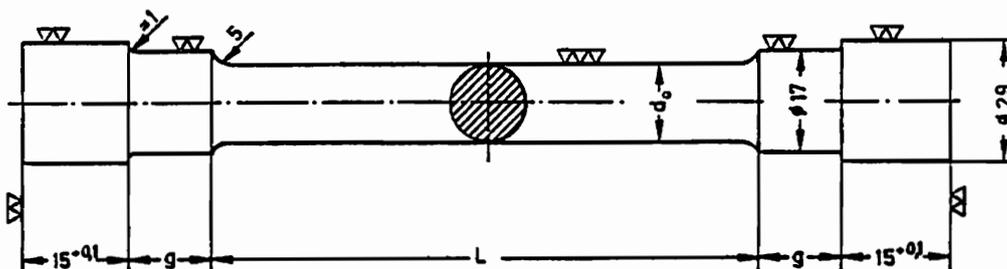
Ergänzend soll hier erwähnt werden, daß die Mikroschädigungen, die mit Kontinuum-Damage-Theorien erfaßt werden können, von manchen Autoren (z.B. [41]) der sogenannten Mesoebene zugeordnet werden. Dies soll andeuten, daß die betrachtete Größenordnung zwischen der Mikroebene der Atome und der Makroebene der Proben- bzw. Strukturabmessungen angesiedelt ist.

## 4 Experimente

### 4.1 Material, Form und Wärmebehandlung der Proben

Für die Experimente wurde der bereits im Rahmen anderer Projekte [15, 18] verwendete Stahl Ck15 ausgewählt. Dieses Material mit der Werkstoffnummer 1.1141 enthält etwa 0,15 Gewichtsprozent Kohlenstoff und zählt zu den in DIN 17210 angegebenen Einsatzstählen. Eine chemische Analyse der hier untersuchten Charge ist im Kapitel 5 wiedergegeben.

In Anlehnung an die in DIN 50125 vorgegebene Form C wurden zylindrische Vollproben in drei verschiedenen Größen hergestellt. Die Abmaße der im folgenden mit Typ I bis III bezeichneten Proben sind der Abbildung 4.1 zu entnehmen.



Typ	$d_0$ (mm)	$L$ (mm)	$g$ (mm)
I	10	120	20
II	14	164	10
III	14	94	20

Abbildung 4.1: Zugproben aus Ck15

Die in der DIN vorgegebene Form mußte geändert werden, um die Gesamtlänge aller Probentypen so zu gestalten, daß mit der vorhandenen Einspannung und dem Klappofen Warmversuche durchgeführt werden konnten.

Nach der spanenden Fertigung folgte eine Wärmebehandlung der Proben bei der Härterei VTN GmbH. Die Versuchskörper wurden im Vakuum auf  $900^{\circ}\text{C}$  aufgeheizt, zwei Stunden auf dieser Temperatur gehalten und dann mit  $100^{\circ}\text{C}$  pro Stunde langsam abgekühlt. Abbildung 4.2 zeigt die durch diese Behandlung entstandene Materialstruktur. Auf dieser lichtmikroskopischen Aufnahme ist das durch Ätzung sichtbar gemachte Ferrit-Perlit-Gefüge und der Verlauf der Korngrenzen erkennbar.

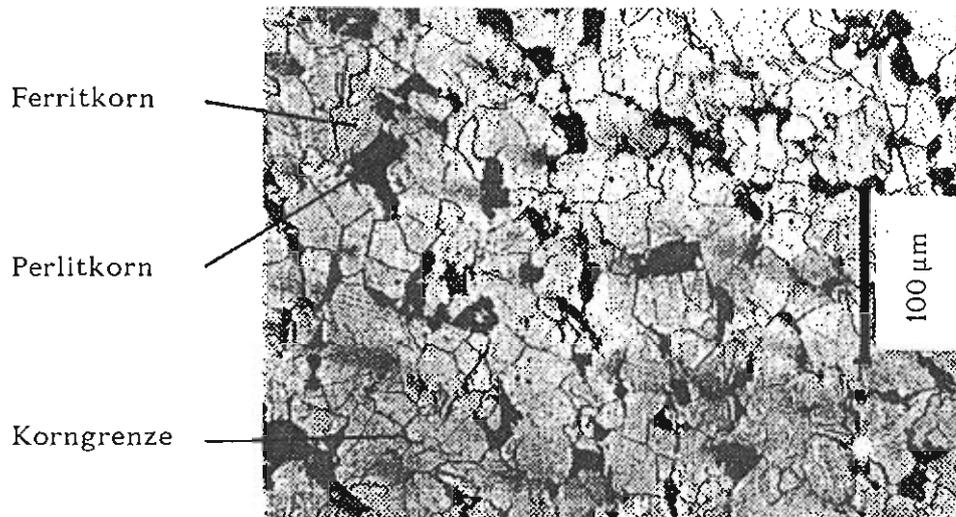


Abbildung 4.2: Ferrit-Perlit-Gefüge

Die maximale Korngröße ist kleiner als  $100\ \mu\text{m}$ , was zur Folge hat, daß die Probenquerschnitte aus einer Vielzahl von Körnern bestehen. Dies ist wesentlich, da insbesondere Einkristalle, aber auch Versuchskörper, die aus nur wenigen großen Körnern aufgebaut sind, völlig andere Eigenschaften aufweisen als die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Polykristalle. Dieser Aspekt ist in besonderer Weise bei experimentellen Untersuchungen mit dünnwandigen Rohrproben zu beachten.

#### 4.2 Versuchseinrichtung

Die Experimente wurden mit der hydraulischen Universalwerkstoffprüfmaschine (Firma Schenck, Modell POZ 505) des Lehrstuhls für Mechanik I der Ruhr-Universität durchgeführt. Die hier nur für Zugversuche verwendete Maschine besitzt einen maximalen Kolbenweg von  $100\text{mm}$  und erzeugt eine Kraft von maximal  $160\text{ kN}$ . Im größten  $\pm 10\text{V}$  umfassenden Meßbereich beträgt die Auflösung  $5\text{ mV}$ , was  $0,025\text{mm}$  bzw.  $80\text{N}$  entspricht. Die Aufzeichnung der Meßwerte erfolgte mit einem Prozeßrechner HP1000 und ist, ebenso wie die Maschinenregelung, in [15] von Pape ausführlich beschrieben.

Der zur Aufheizung der Proben verwendete Klappofen ist mit einer 3-Zonen-Regelung ausgestattet und ermöglicht Temperaturen bis  $600^\circ\text{C}$ .

Das Temperaturprofil der bei Raumtemperatur durchgeführten Versuche

mit Verzerrungsgeschwindigkeiten von  $5 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$  bis  $2 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$  wurde mit einer Thermokamera der Firma Inframetrics (Modell 525) beobachtet und mit einem Videorecorder der Firma Grundig (Modell VCR621) aufgezeichnet.

Die Geometrie der Versuche wurde zunächst mit einer Kleinbild- und bei späteren Versuchen mit einer Mittelformat-Kamera festgehalten.

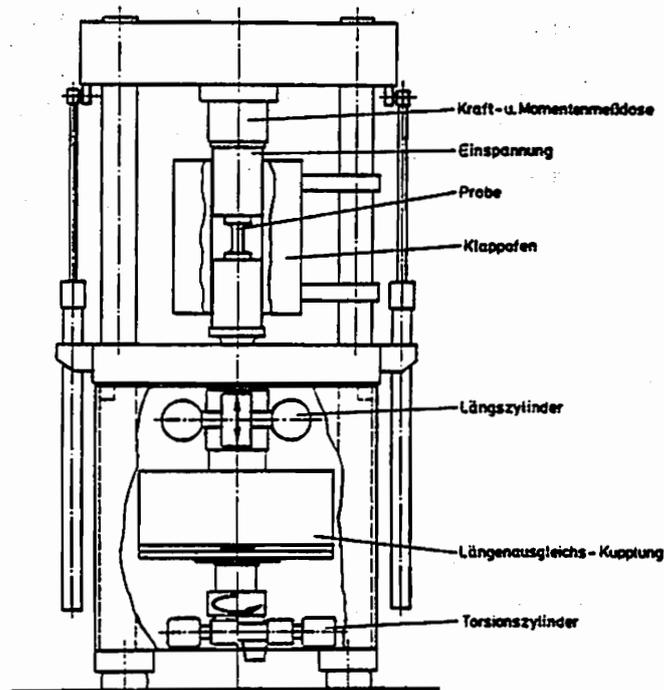


Abbildung 4.3: Hydraulische Zug-Torsion-Prüfmaschine

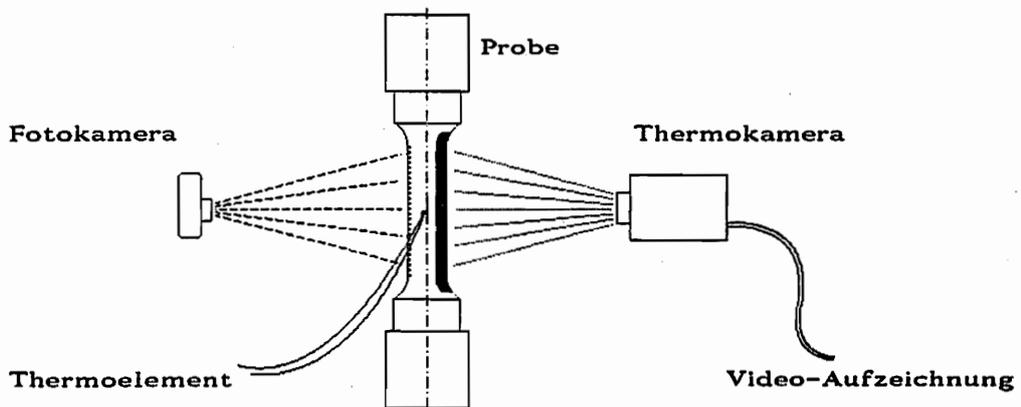


Abbildung 4.4: Aufzeichnung von Temperatur und Geometrie

### 4.3 Versuchsvorbereitungen und Kalibrierversuche

#### 4.3.1 Längenmessung

Die Wegaufnehmer des Längszylinders der Prüfmaschine eignen sich nicht zu einer hochgenauen Ermittlung der Deformationen des Versuchskörpers. Zur Messung elastischer oder kleiner elastoplastischer Verformungen werden deshalb im Normalfall externe Wegaufnehmer an der Probe angebracht, um in ausreichendem Abstand von der Einspannung den Zuwachs der Meßlänge zu bestimmen. Dies wurde bei den im folgenden beschriebenen Versuchen nicht durchgeführt, da dieser erhöhte Aufwand bei großen elastoplastischen Deformationen nicht erforderlich ist. Bei den Versuchen, die auf einem höheren Temperaturniveau durchgeführt wurden, war eine externe, kapazitive oder induktive Messung ohnehin durch den Klappofen nicht möglich.

Um mit den von der Maschine gelieferten Daten die gesuchten Formänderungen der Meßlänge zu berechnen, bedarf es zweier grundlegender Korrekturen. Die erste betrifft die Beeinflussung der Meßwerte durch die Elastizität der Prüfvorrichtung. Diese tritt auf, da sich sowohl der Rahmen der Maschine als auch die Probenhalterungen geringfügig elastisch verformen, sobald die Probe belastet wird. Die Korrektur dieses Fehlers beruht auf der Ermittlung einer Maschinenfederkonstanten und kann bei Zdebel [18] nachgelesen werden.

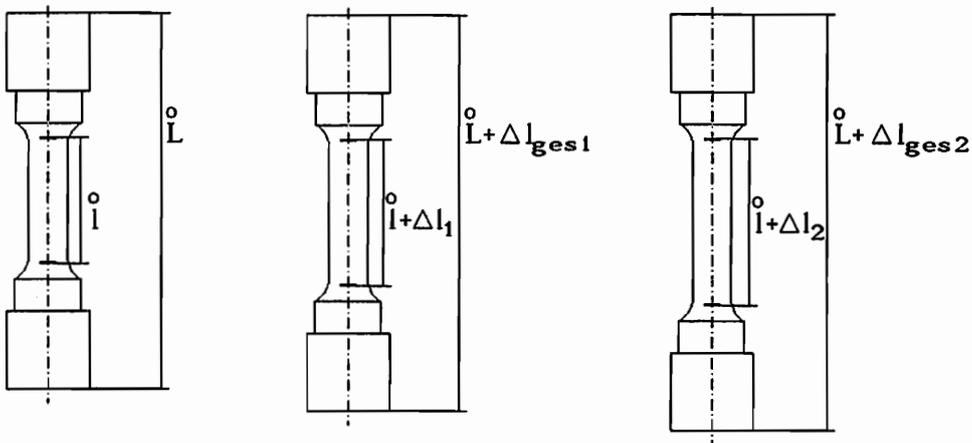


Abbildung 4.5: Messung der Probenlänge  $l = \bar{l} + \Delta l$

Wesentlich wichtiger als dieser bei großen plastischen Deformationen vernachlässigbare elastische Einfluß sind die plastischen Verformungen, die außerhalb der betrachteten Meßlänge auftreten. Dies geschieht in den Übergangsradien zwischen dem Meßbereich und den elastisch bleibenden Einspannköpfen der Proben. Die plastische Gesamtverformung  $\Delta l_{ges}$  ist deshalb um den Anteil zu verringern, der in diesen teilweise plastischen

Radien entsteht. Die gesuchte Änderung der Meßlänge  $\Delta l$  läßt sich mit dem Korrekturfaktor  $f_r$  näherungsweise angeben als

$$\Delta l = f_r \Delta l_{\text{ges}} \quad . \quad (4.1)$$

Der Korrekturfaktor wurde durch die optische Vermessung der durch zwei Markierungen begrenzten Meßlänge und den Vergleich mit den von der Prüfmaschine gemessenen Längenänderungen ermittelt. Wie in Abbildung 4.5 dargestellt, wurden die Versuche bei unterschiedlich großen Deformationen unterbrochen, so daß die Proben entlastet und vermessen werden konnten.

Der so bestimmte Korrekturfaktor ist stark von der Probengeometrie beeinflusst und hatte bei den verwendeten Probentypen die Werte

$$f_{r\text{I}} = 0,975 \quad , \quad f_{r\text{II}} = 0,960 \quad \text{und} \quad f_{r\text{III}} = 0,900 \quad . \quad (4.2)$$

Ein Vergleich dieser Zahlen quantifiziert den auch ohne Messung unstrittigen Sachverhalt, daß Randeinflüsse mit größerer Probenlänge und verringertem Durchmesser kleiner werden. Aus diesem Grund ist für Zugversuche eine möglichst schlanke Probe anzustreben, die aber völlig ungeeignet für Druckversuche ist. Als zusätzliche Einschränkung ist der Kolbenweg der Maschine zu berücksichtigen, der mit wachsender Probenlänge die maximalen Dehnungen des Versuchskörpers limitiert.

#### 4.3.2 Temperaturmessung

Die Versuchstemperaturen wurden mit Thermoelementen und, falls möglich, mit der Infrarot-Kamera gemessen. Die verwendeten Eisen-Konstantan-Thermoelemente (Fe-CuNi) aus 0,2 mm isoliertem Thermodraht wurden bei den Warmversuchen zusätzlich zur Regelung des 3-Zonen-Klappofens eingesetzt. Die zunächst durchgeführten Messungen mit einem Referenzthermoelement in einem Eis-Wasser-Gemisch ergaben bei einer Kalibrierung mit einem NiCr-Ni Temperaturfühler (Firma H & B, Modell K 3000) eine Spannung von 0,05423 mV pro 1 °C Temperaturdifferenz. Bei späteren Versuchen wurde das Referenz-Thermoelement durch eine elektronische Vergleichsstelle ersetzt, die bereits auf ca. 0,01 V/°C verstärkt ist und im wesentlichen aus dem integrierten Schaltkreis (IC AD594 C) besteht. Der Vergleich mit einem Quecksilberthermometer lieferte die in Abbildung 4.7 dargestellten Kalibrierwerte, die mit der Geraden 0,01029 V/°C approximiert wurden. Ein wesentlicher Vorteil dieser elektronischen Vergleichsstelle ist die Möglichkeit, die anliegenden Spannungswerte gemeinsam mit den Kraft- und Wegmeßwerten der Prüfmaschine als Datensatz zu erfassen und mit dem Prozeßrechner zu speichern.

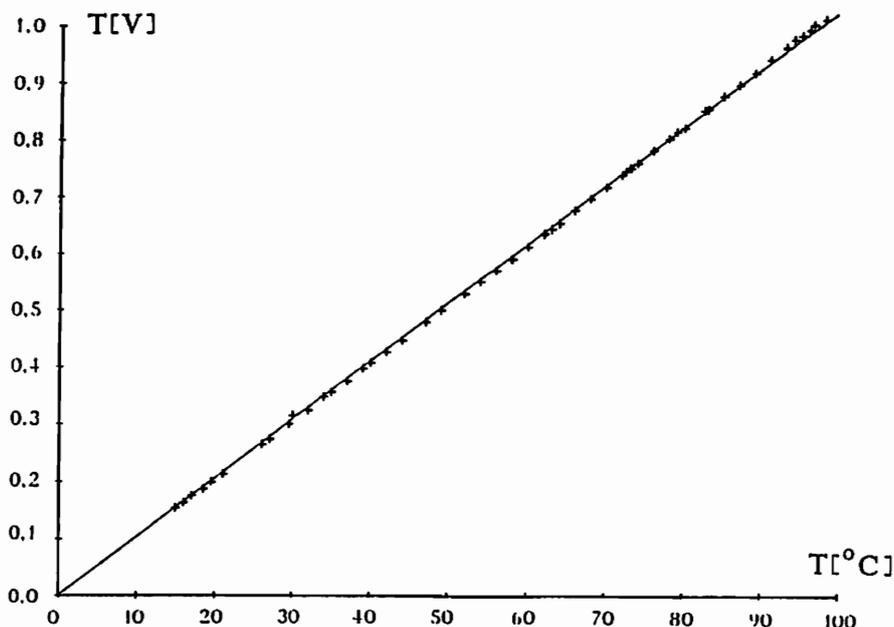


Abbildung 4.6: Kalibriermessung der Fe-CuNi-Thermoelemente

Die Temperaturmessungen mit der Infrarotkamera sind im Vergleich dazu wesentlich aufwendiger. Die von der Thermokamera gelieferten Informationen werden gemeinsam mit einem Zeitsignal (Panasonic Time Generator WJ 810) auf Videobañd aufgezeichnet und sind nachträglich auszuwerten. Da zu Messungen mit der Kamera eine ausreichende Menge flüssigen Stickstoffs erforderlich ist, ist sie nur bei den Versuchen mit erhöhter Dehngeschwindigkeit einsetzbar. Auf eine Kontrolle des Temperaturfelds der nahezu isothermen Experimente mußte bedingt durch die Dauer der Versuche verzichtet werden. Die vorhandenen Meßwerte der Thermoelemente und die in Kapitel 8.3 wiedergegebene Rechnung zeigen aber, daß die Temperaturen bei den Versuchen mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  nur unwesentlich ansteigen.

Der Zusammenhang zwischen der in das Videosignal eingeblendeten Skalierung und den entsprechenden Temperaturerhöhungen wird aus einer Kalibriermessung gewonnen. Im Gegensatz zu der in [42] geschilderten dynamischen Kalibrierung, die durch ein geschlossenes Kamera-Rechner-Prüfmaschine-System ermöglicht wird, wurde hier eine statische Vergleichskurve aufgenommen, bei der die untersuchte Probe nicht deformiert wurde. Der mit Thermoelementen bestückte Versuchskörper wurde mit einem Ofen aufgeheizt und anschließend in die Einspannvorrichtung gestellt. Dies bewirkt, daß die Störeinflüsse, die gegebenenfalls bei den Versuchen

durch Reflexionen im Bereich der Prüfmaschine entstehen, in gleicher Weise auch bei der Kalibrierung auftreten.

Um die geringe Emissionszahl der Probenoberflächen zu steigern, wurden bei allen Messungen mit der Thermokamera die beobachtete Seite der Proben mit einem matten Speziallack der Firma Degussa bestrichen, der sich auch bei großen Deformationen in der Einschnürung nicht von der Probe löst. Abbildung 4.7 zeigt die Kalibrierkurve im Temperaturbereich TR100 für geschwärzte Proben.

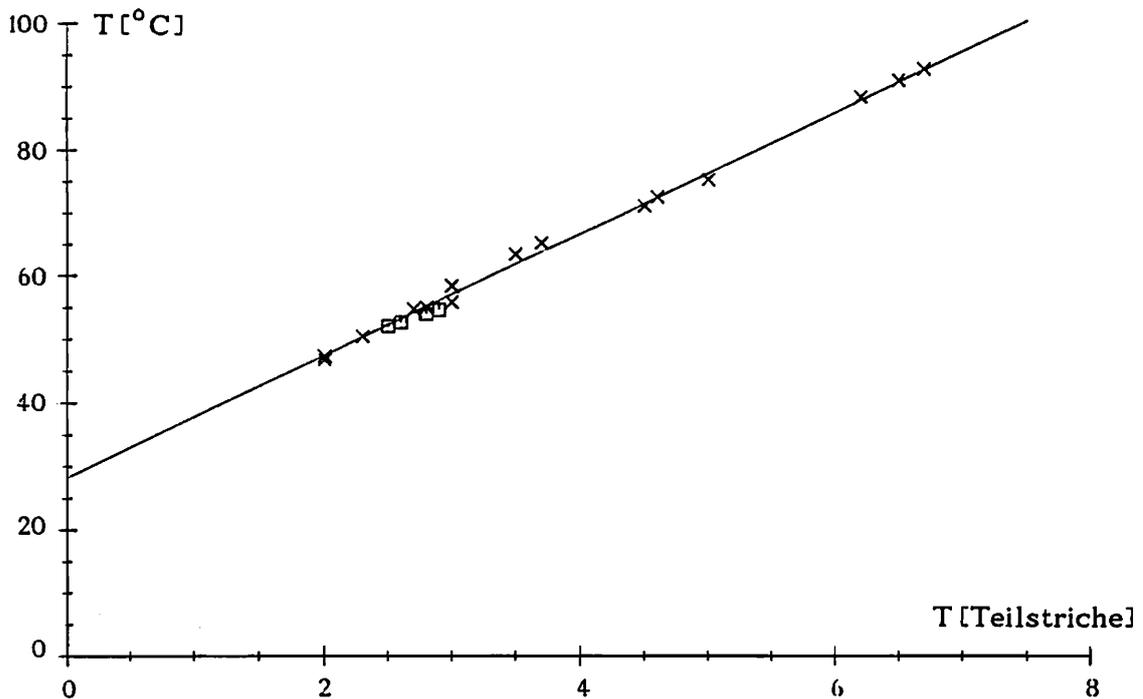


Abbildung 4.7: Kalibriermessung Infrarotkamera (Meßbereich TR 100)

Die aus zwei Meßreihen stammenden Werte ergaben einen im betrachteten Temperaturbereich weitgehend linearen Zusammenhang. Der Temperaturdifferenz von 9,61  $^{\circ}\text{C}$  entspricht ein Teilstrich der Infrarotkamera.

Die nur bei Versuchen ohne Klappofen gegebene Möglichkeit, den Verlauf der Außentemperatur entlang der Probenachse mit der Thermokamera aufzuzeichnen, ist insbesondere beim Einschnürvorgang der Probe wichtig, da dann die Thermolemente keine verlässlichen Werte liefern können. Es läßt sich aber ein absoluter Fehler von bis zu 5  $^{\circ}\text{C}$  in der Temperaturmessung nicht ausschließen, da die von einem deutlichen Rauschen überlagerten Informationen der Thermokamera nicht wie in [42] automatisch ausgewertet werden können.

#### 4.4 Darstellung von Spannungen, Dehnungen und Temperaturen

Bei der Darstellung der experimentellen Ergebnisse wird zwischen globalen und lokalen Werten unterschieden. Mit dem Begriff "global" werden Größen bezeichnet, die mit den Meßwerten des Weg- bzw. Kraftaufnehmers der Prüfmaschine ermittelt wurden. Die Umrechnung in Spannungen und Dehnungen ist deshalb nur in der als homogen anzusehenden Phase des Versuches klar definiert.

"Lokale" Meßwerte wurden unter Ausnutzung der Fotos der aktuellen Probengeometrie aus dem jeweils engsten Querschnitt gewonnen. Die Versuchszeit wurde mittels einer neben den Proben angebrachten Uhr festgehalten, so daß mit dieser Information die zugehörige Kraft der globalen Meßdatei entnommen werden konnte. Um die Lokalisierung in der Probenmitte zu erzwingen, wurde dort bei einigen Proben der Radius um  $\Delta R$  reduziert. Dieses Maß ist, falls eine Schwächung vorgenommen wurde, in den Abbildungen vermerkt.

Die Ermittlung und Darstellung der Schädigungsvariablen  $\omega$  wird im Kapitel 4.5 behandelt.

##### 4.4.1 Globale Meßwerte

Die Anzahl der aufgezeichneten Meßwerte ist beeinflußt von der Deformationsgeschwindigkeit der Versuche und von der Tatsache, daß die zusätzliche Speicherung der am Thermoelement anliegenden Spannung die maximale Frequenz der Aufzeichnung deutlich reduziert. Für weite Bereiche der im folgenden dargestellten Spannungs-Dehnungs-Kurven ist diese Einschränkung unwesentlich, starke Spannungsschwankungen werden jedoch verfälscht wiedergegeben. Insbesondere bei den schnellsten, nur noch mit ca. 60 Meßwerten festgehaltenen Versuchen betrifft dies die elastische Gerade und den Lastabfall der Probe sowie den instabilen Bereich der Lüders-Bänder.

Die Abbildung 4.8 zeigt die axiale Spannung  $\sigma$  über der axialen Dehnung  $\varepsilon$  für langsame, nahezu isotherme Versuche bei Versuchstemperaturen zwischen  $25^{\circ}\text{C}$  und  $364^{\circ}\text{C}$ . Extrem hohe Spannungen treten bei  $T = 110^{\circ}\text{C}$  und  $T = 188^{\circ}\text{C}$  auf, verbunden mit einem instabilen Verhalten der Verfestigungskurve. Diese zunächst überraschenden Ergebnisse sind charakteristisch für das als dynamische Reckalterung bezeichnete Phänomen, das in Kapitel 5 näher beschrieben ist. Die Abbildungen 4.9 und 4.10 zeigen, daß trotz der Instabilitäten der Versuche der prinzipielle Verlauf der Meßwerte vor Beginn der Einschnürung reproduzierbar ist.

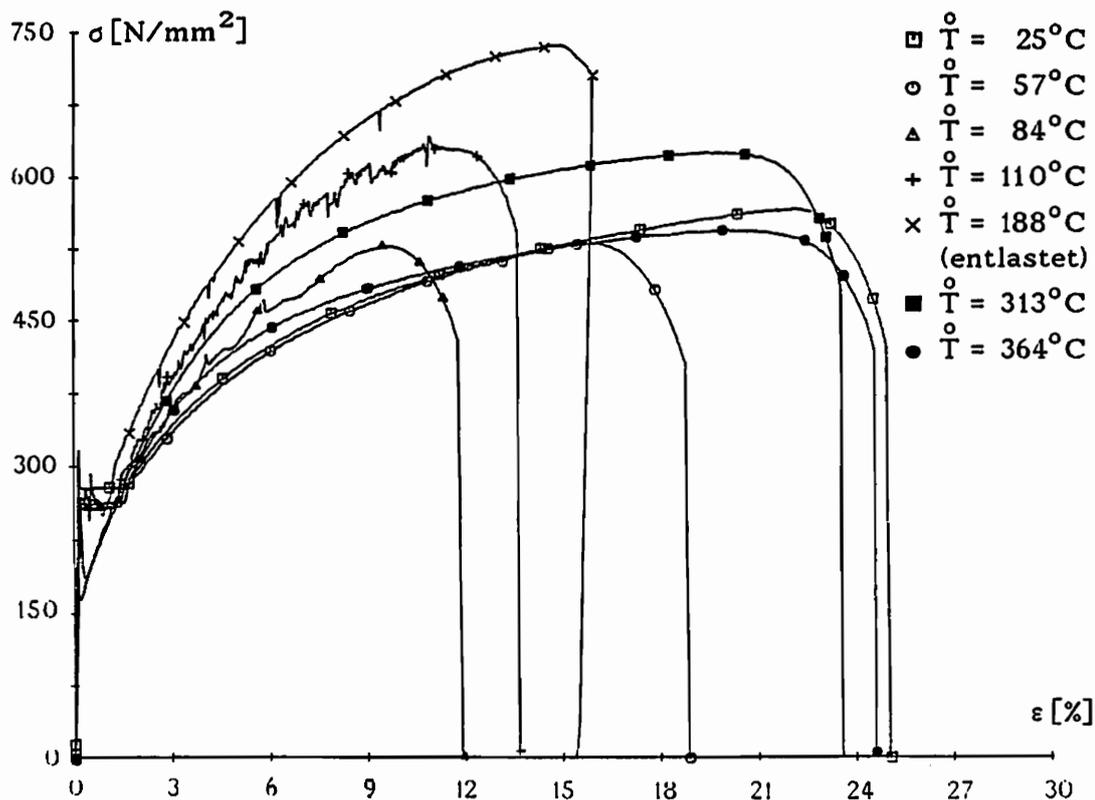


Abbildung 4.8: Zugversuche mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4}\text{s}^{-1}$ , Probenotyp I

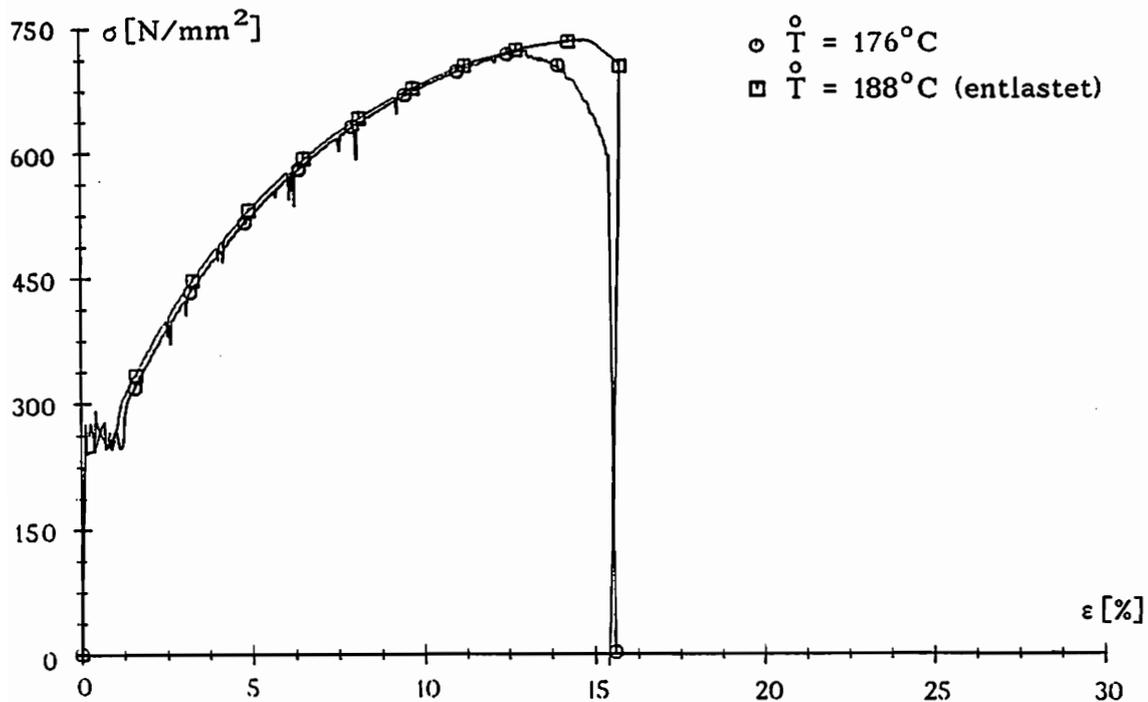


Abbildung 4.9: Zugversuche mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4}\text{s}^{-1}$ , Probenotyp I

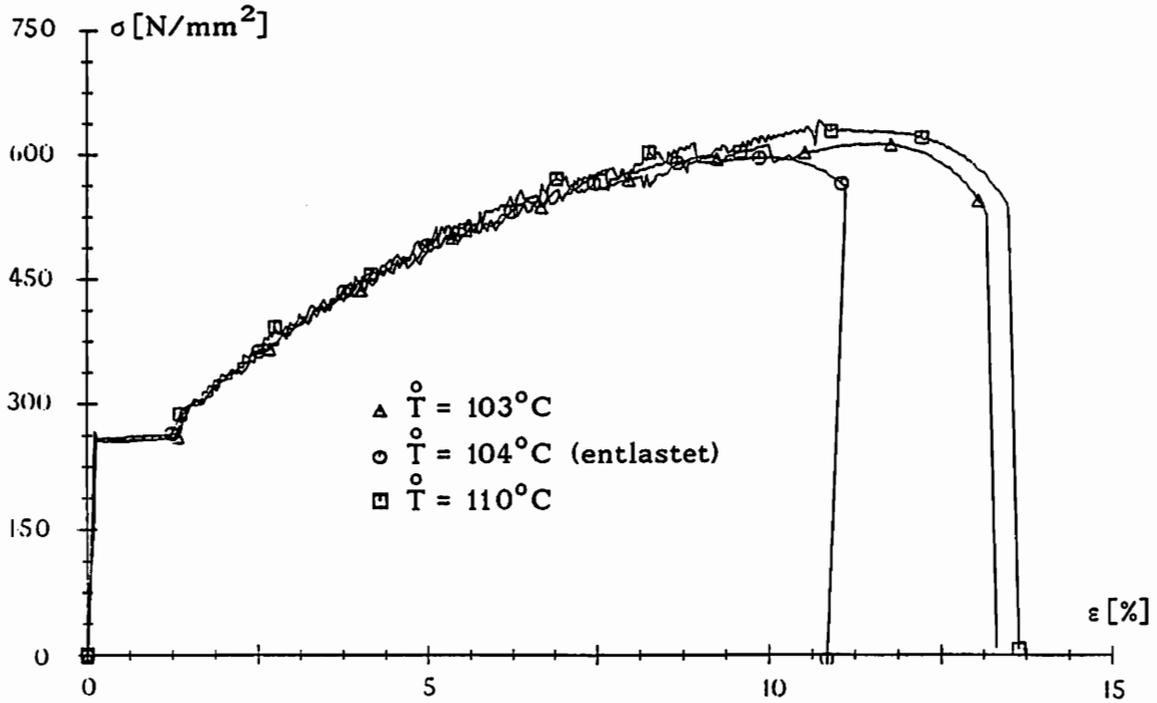


Abbildung 4.10: Zugversuche mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$ , Probenotyp I

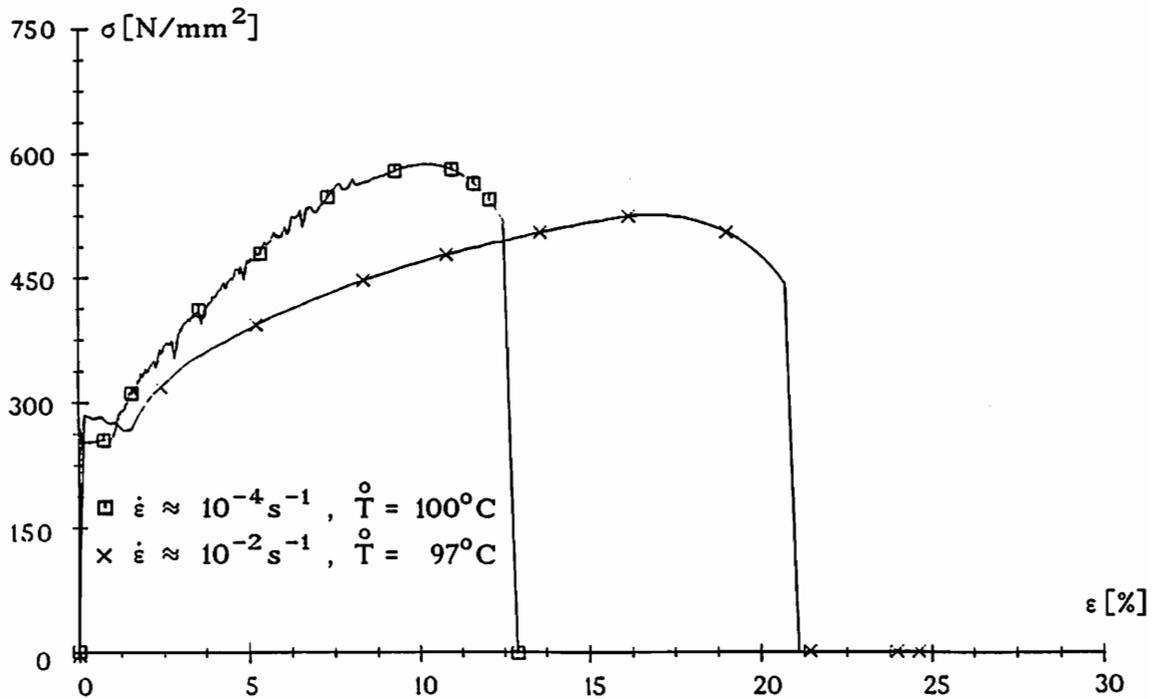


Abbildung 4.11: Zugversuche bei  $\bar{T} \approx 100^\circ\text{C}$ , Probenotyp III

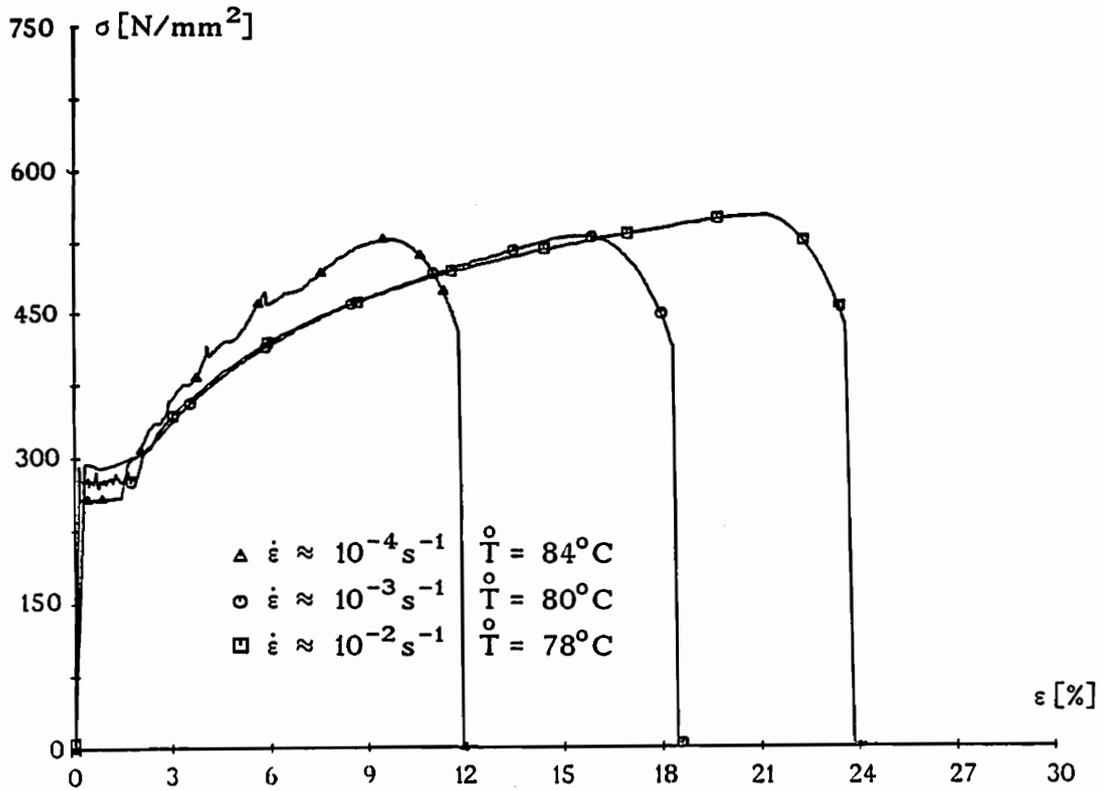


Abbildung 4.12: Zugversuche bei  $\bar{T} \approx 80^\circ\text{C}$ , Probentyp I

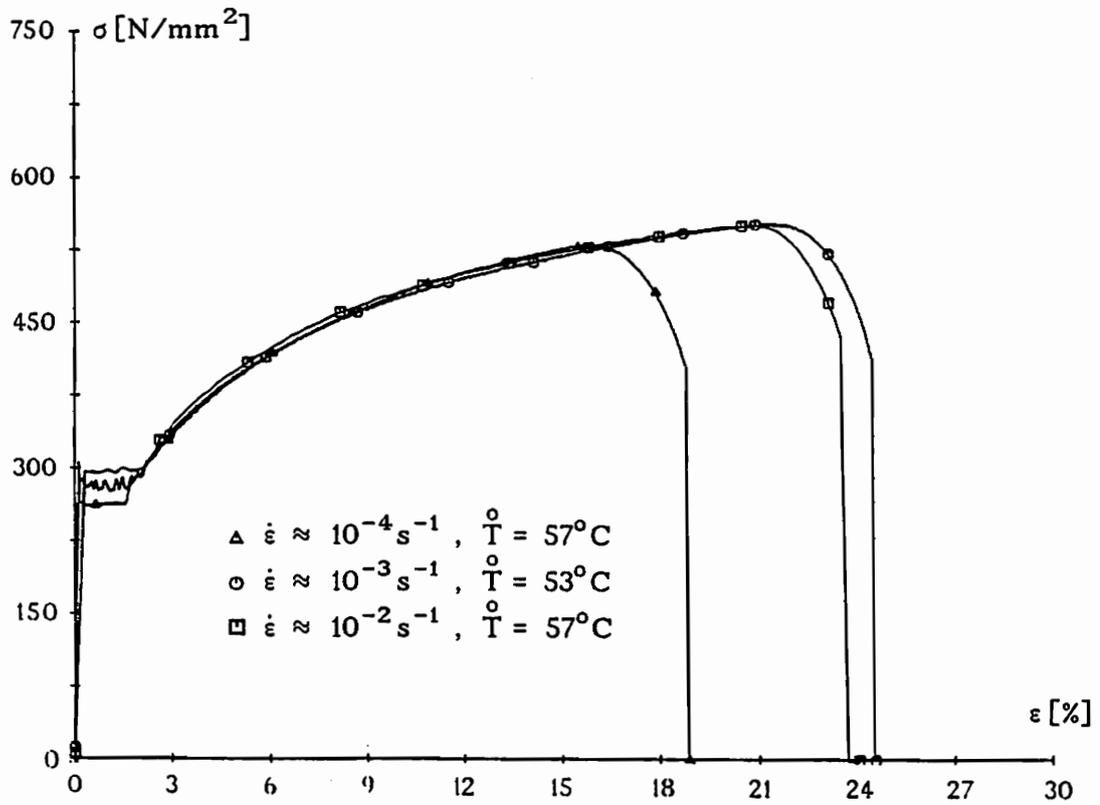


Abbildung 4.13: Zugversuche bei  $\bar{T} \approx 55^\circ\text{C}$ , Probentyp I

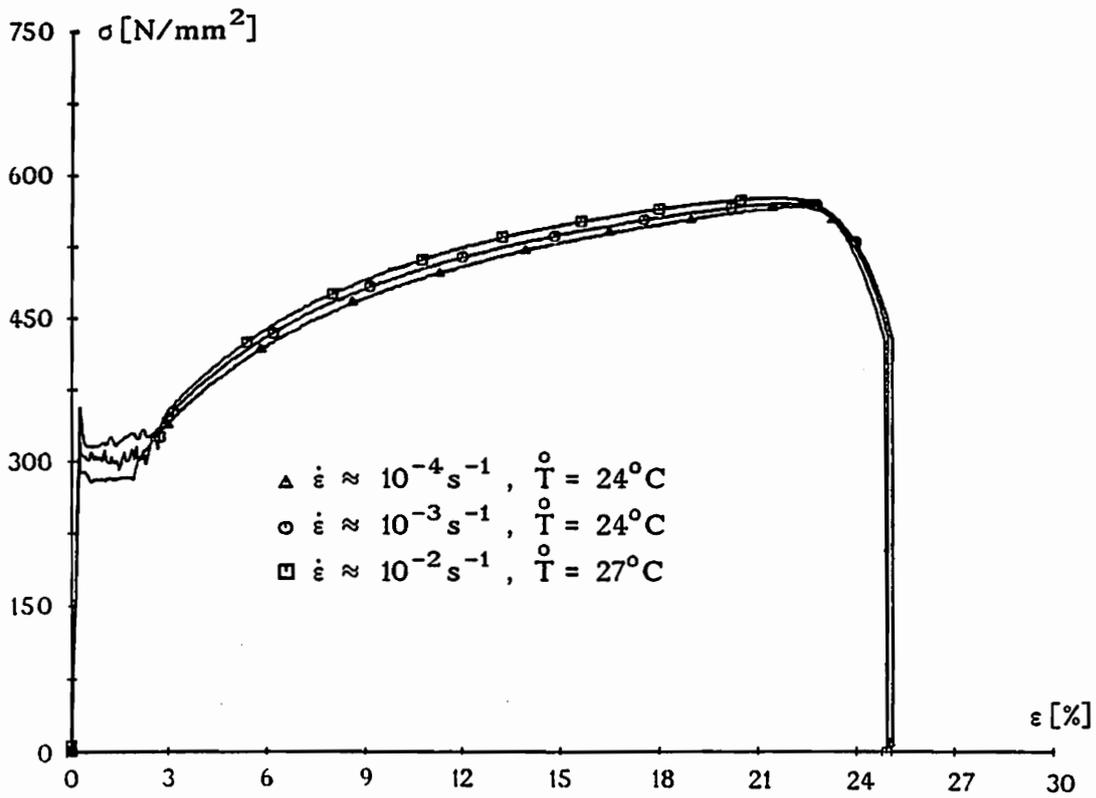


Abbildung 4.14: Zugversuche bei  $\overset{\circ}{T} \approx 25^\circ \text{C}$ , Probentyp I

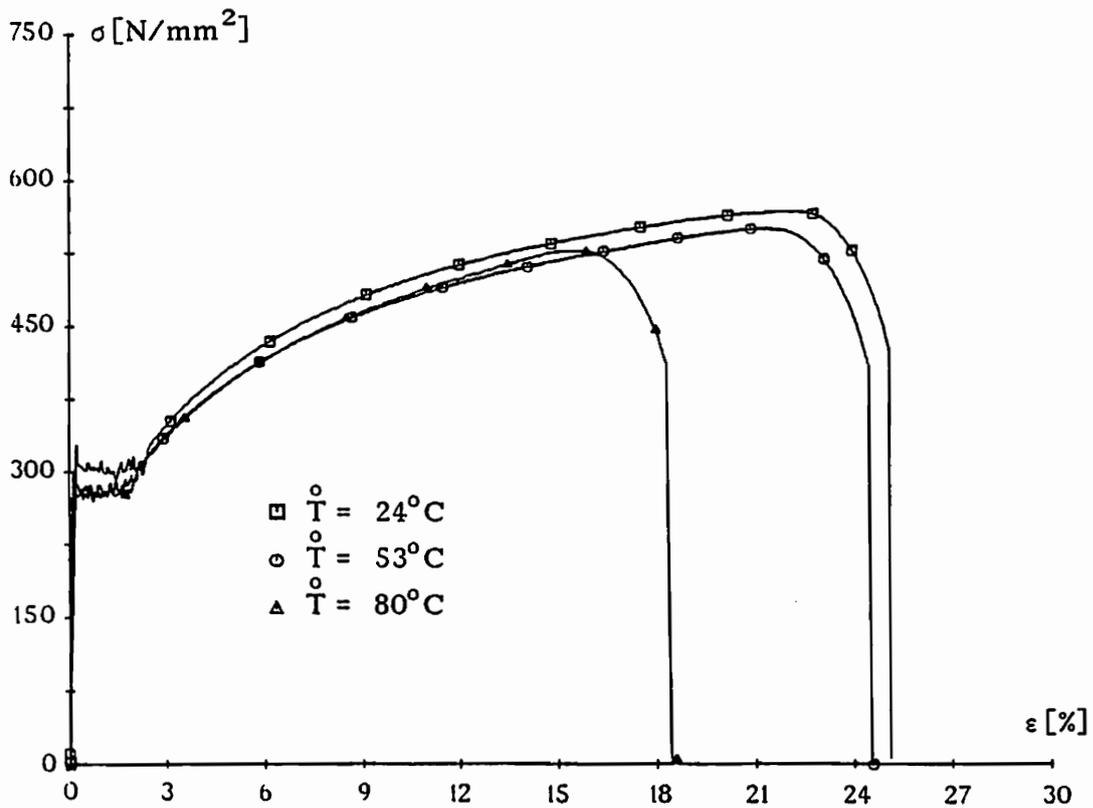


Abbildung 4.15: Zugversuche mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , Probentyp I

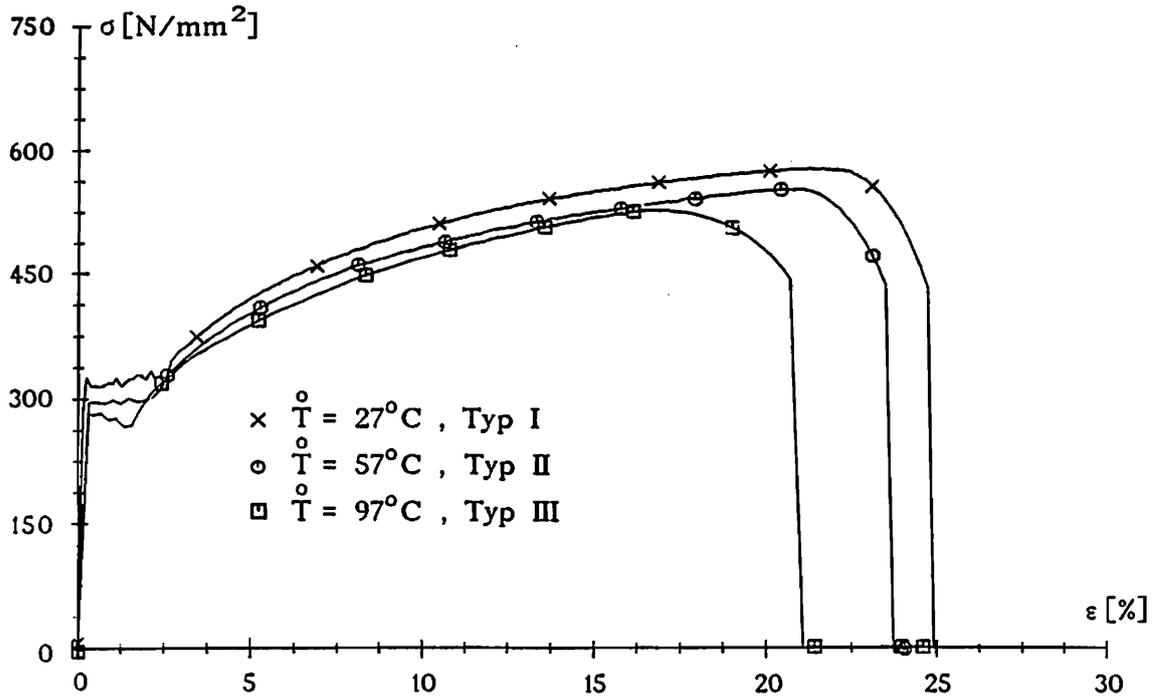


Abbildung 4.16: Zugversuche mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$

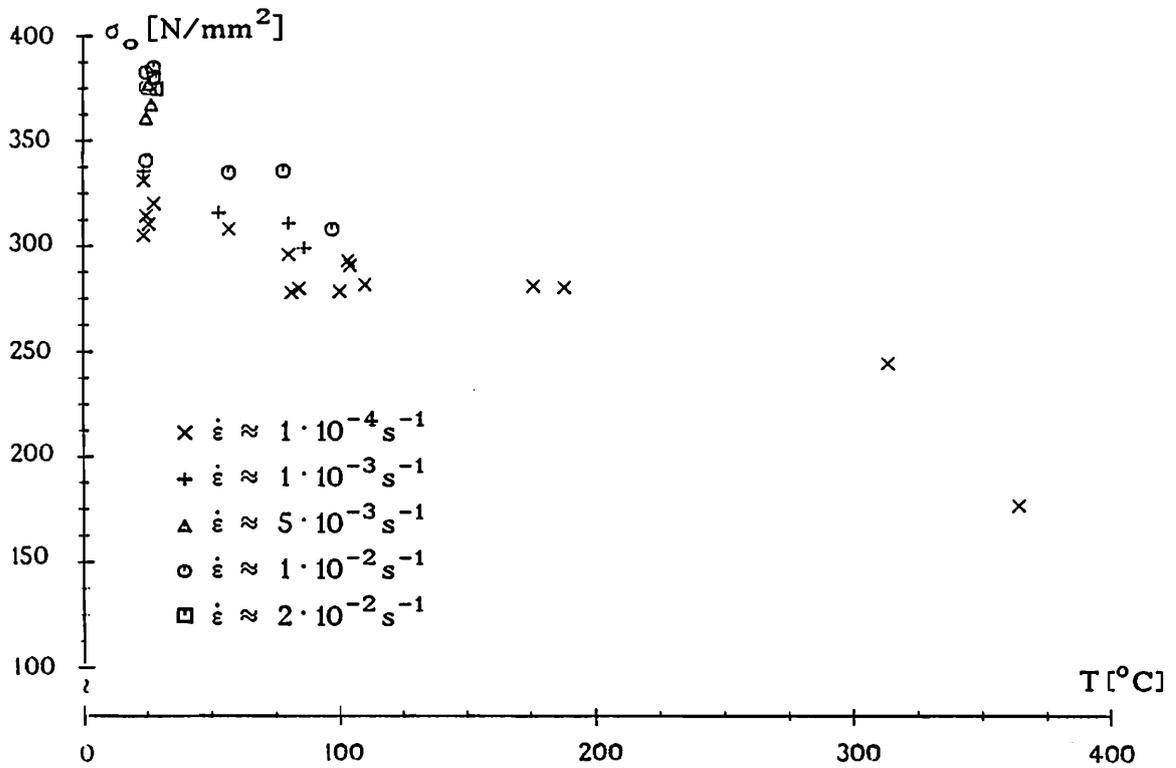


Abbildung 4.17: Obere Fließspannung  $\sigma_o$

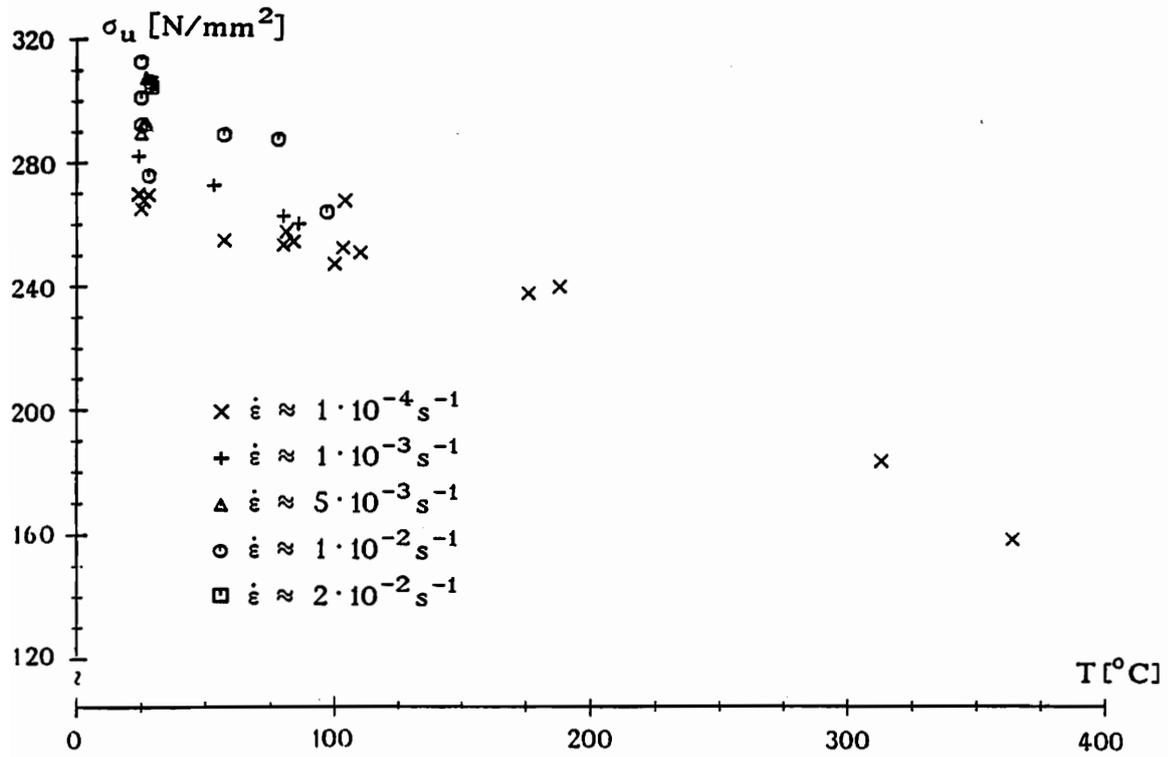


Abbildung 4.18: Untere Fließspannung  $\sigma_u$

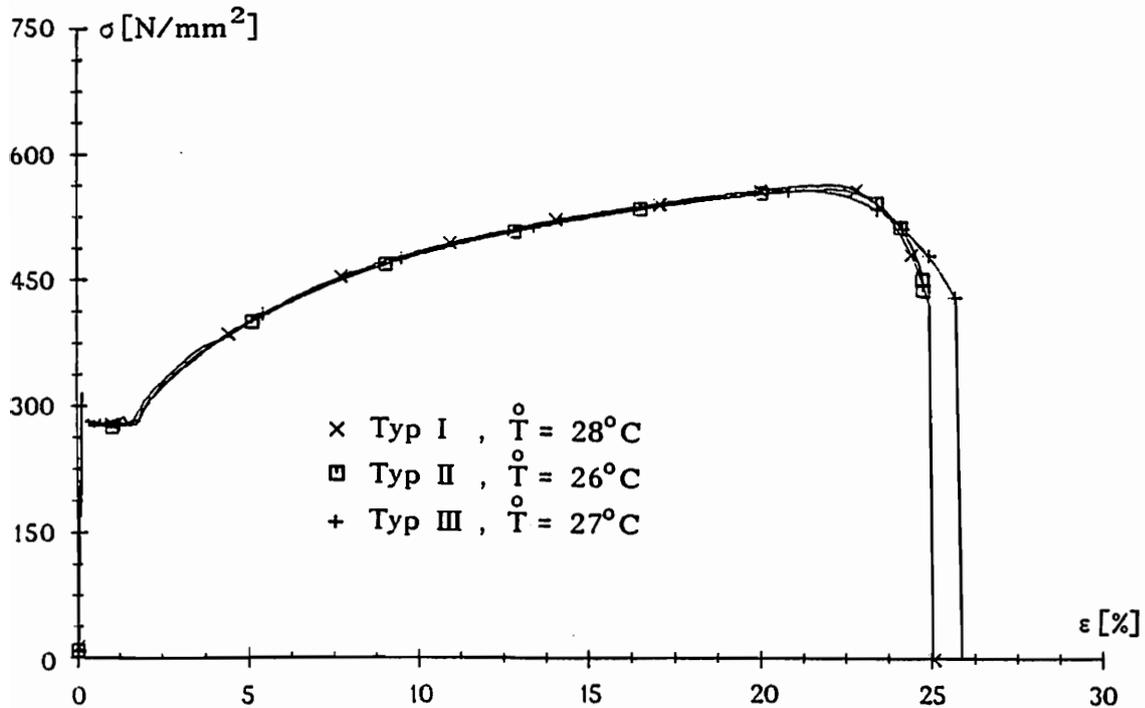


Abbildung 4.19: Einfluß der Probengeometrie bei  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

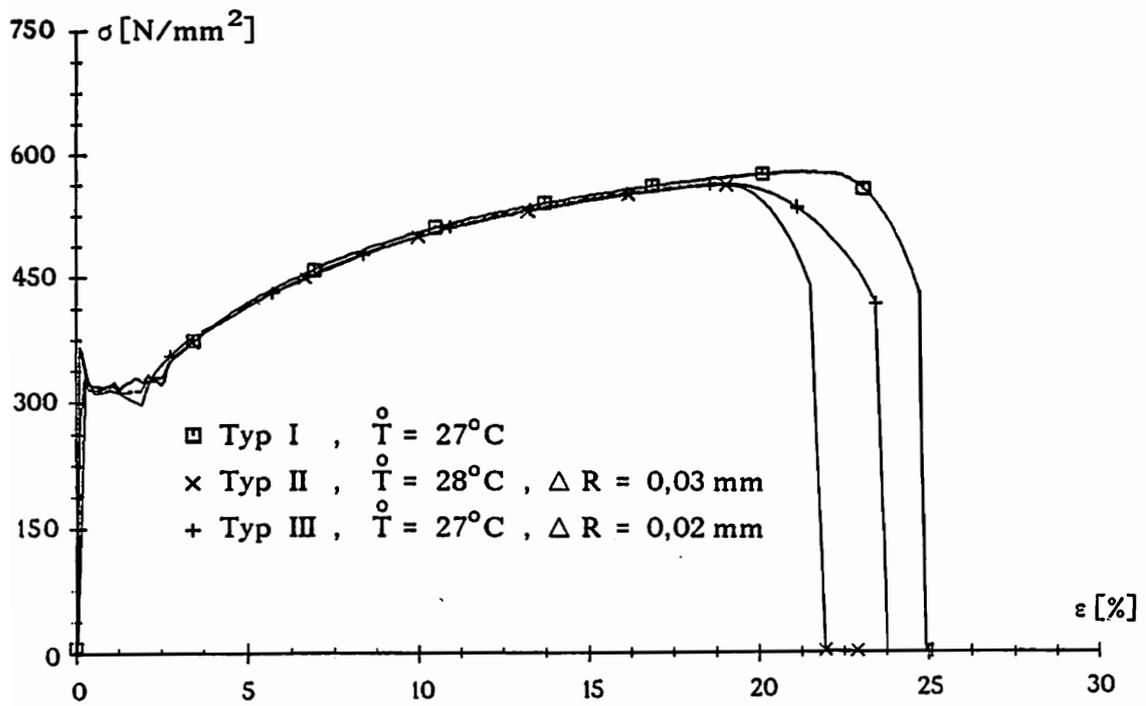


Abbildung 4.20: Einfluß der Probengeometrie bei  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

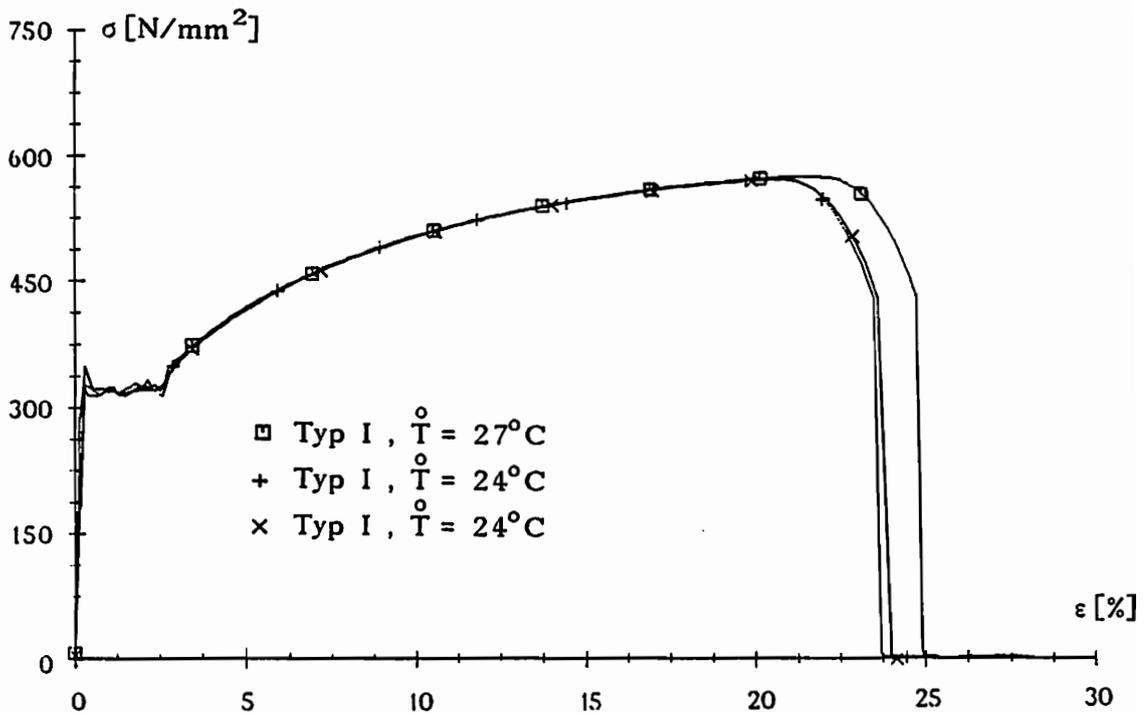


Abbildung 4.21: Reproduzierbarkeit bei  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

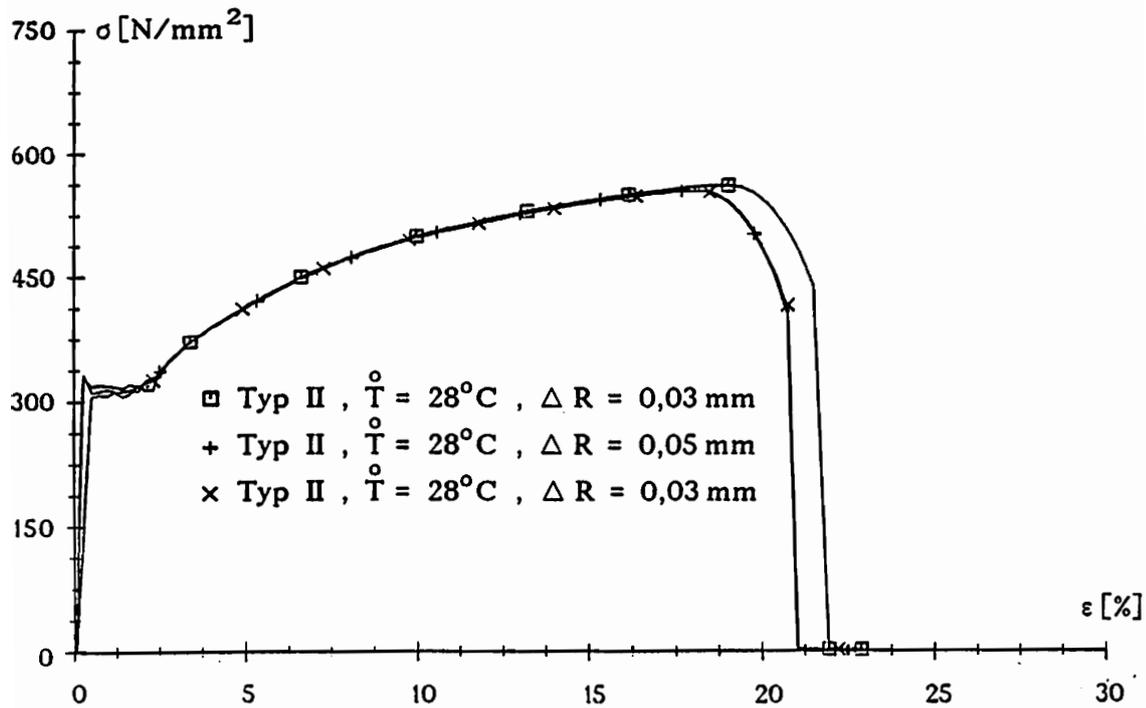


Abbildung 4.22: Reproduzierbarkeit bei  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2}\text{s}^{-1}$

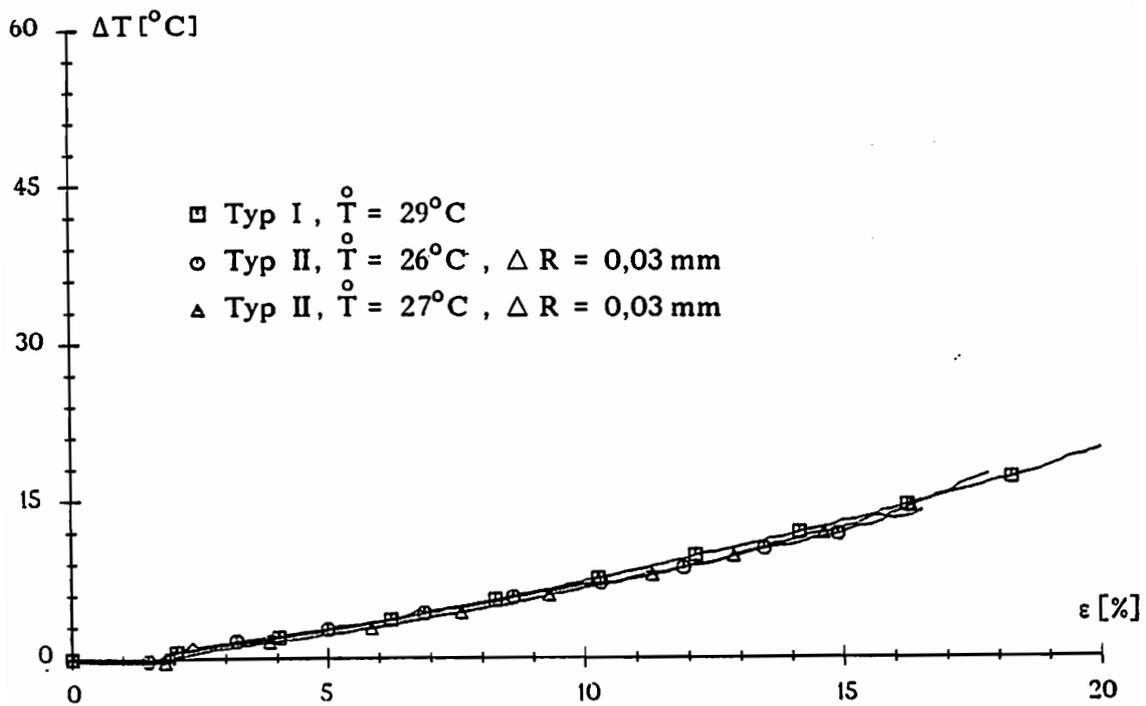


Abbildung 4.23: Temperaturzuwachs bei  $\dot{\epsilon} \approx 5 \cdot 10^{-3}\text{s}^{-1}$

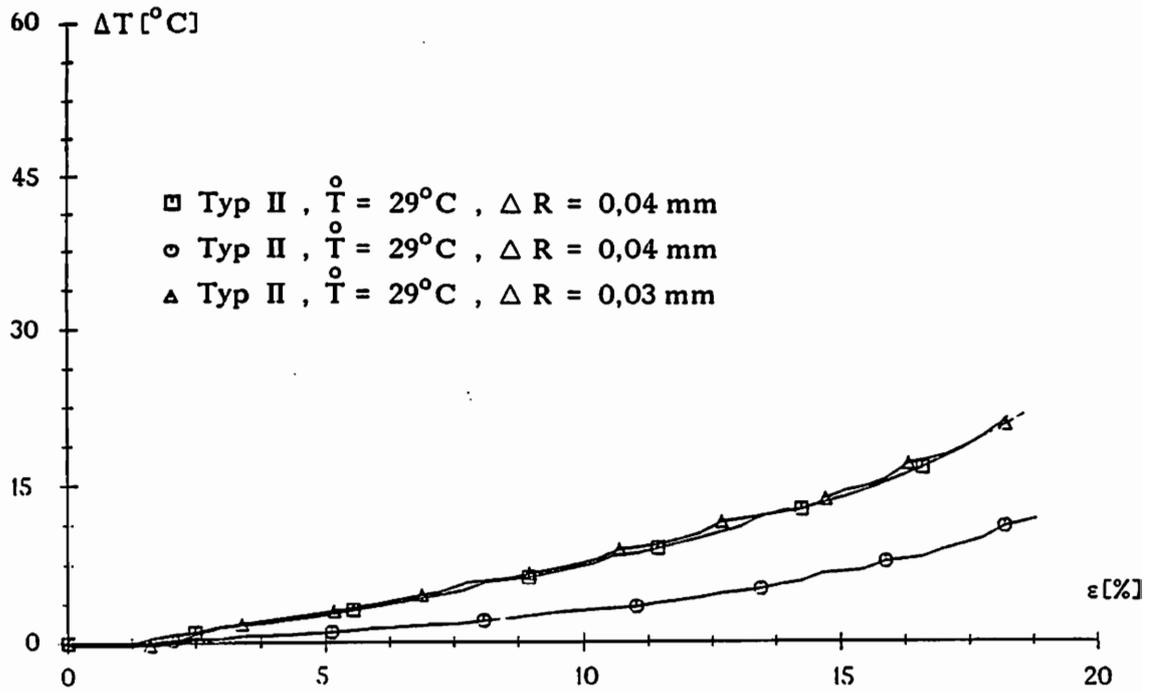


Abbildung 4.24: Temperaturzuwachs bei  $\dot{\epsilon} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

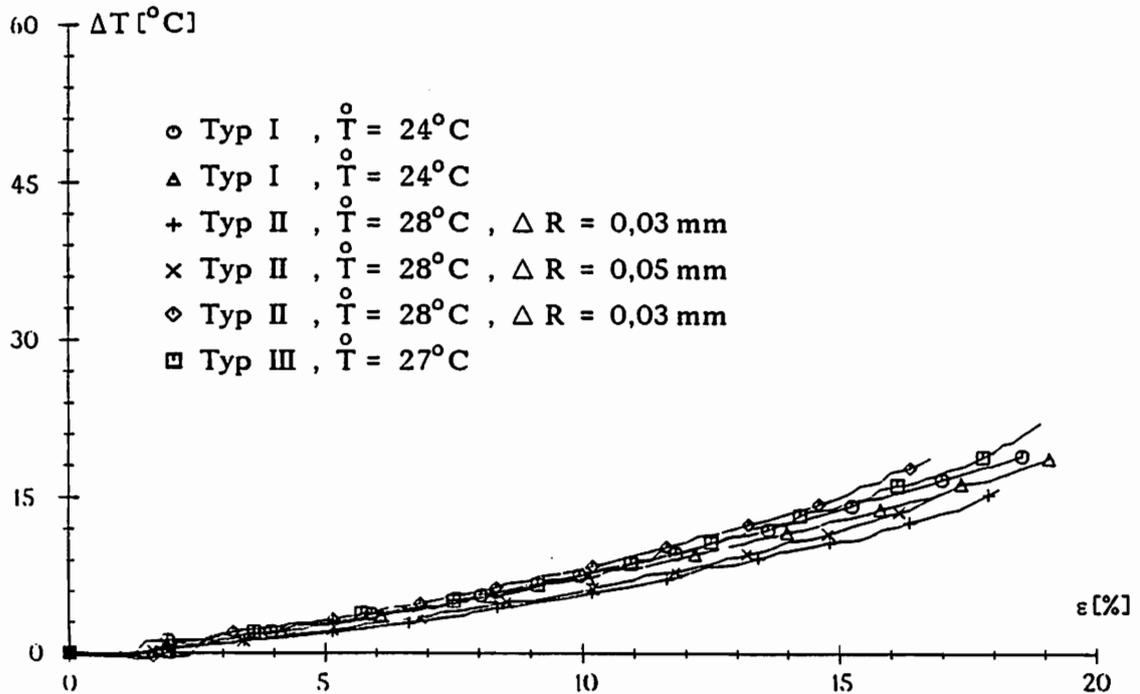


Abbildung 4.25: Temperaturzuwachs bei  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

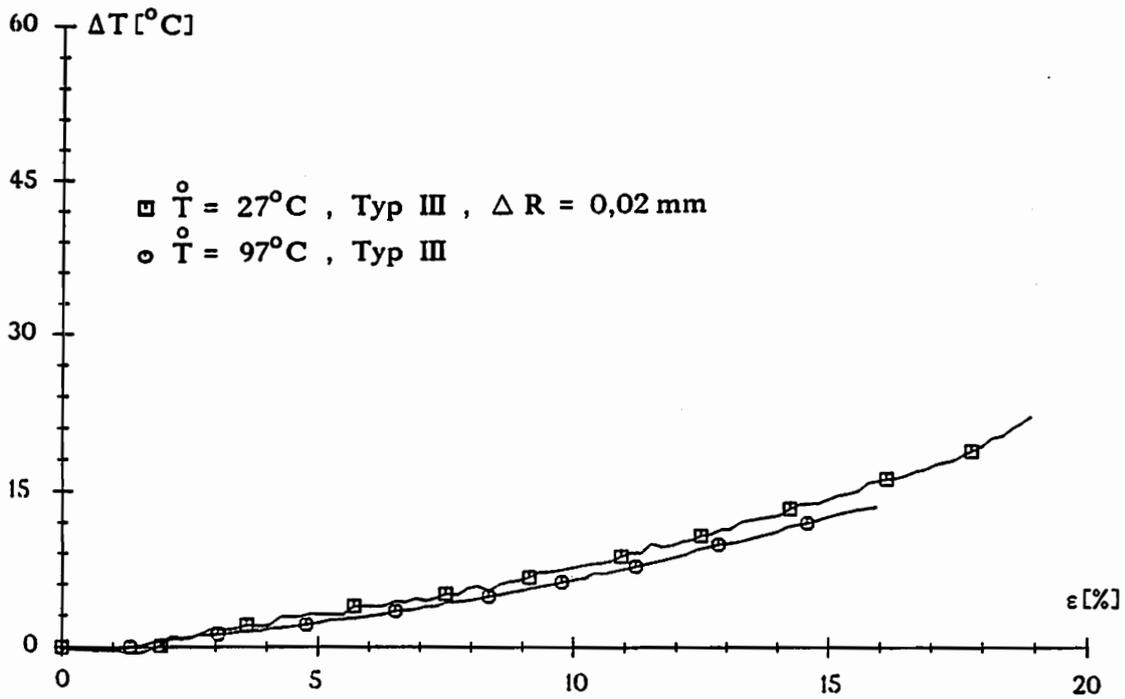


Abbildung 4.26: Temperaturzuwachs bei  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2}\text{s}^{-1}$

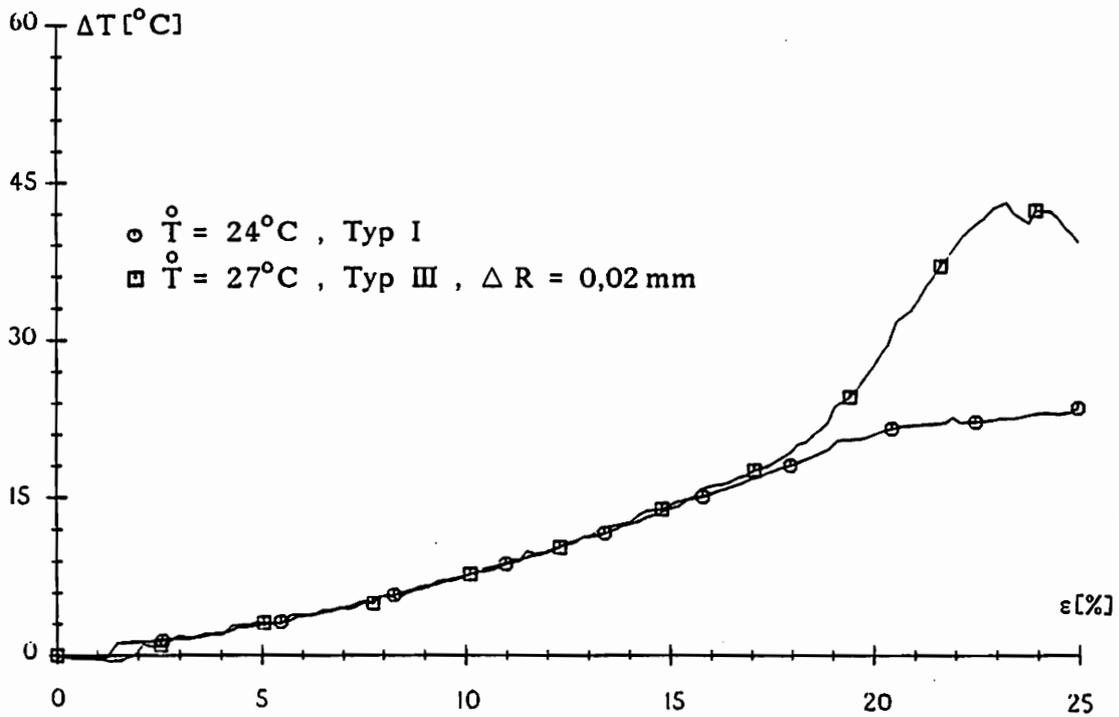


Abbildung 4.27: Temperaturzuwachs bei  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2}\text{s}^{-1}$

Die Abbildungen 4.11 bis 4.14 verdeutlichen die Abhängigkeit der Spannungs-Dehnungs-Kurven von der Deformationsgeschwindigkeit bei etwa konstanten Anfangstemperaturen 100°C, 80°C, 55°C und 25°C. Das sich mit zunehmender Temperatur von positiver zu negativer Geschwindigkeitsabhängigkeit wandelnde Verhalten wird in Kapitel 5 diskutiert und läßt sich als Überlagerung von zwei gegensätzlichen, zeitabhängigen Mechanismen erklären. Diese kompensieren sich im Bereich stabiler, homogener Deformationen weitgehend bei einer Temperatur von etwa 55°C.

Um die auftretenden Effekte noch umfassender beurteilen zu können, enthalten die Abbildungen 4.15 und 4.16 die Ergebnisse von Experimenten mit verschiedenen Anfangstemperaturen, aber jeweils gleicher Geschwindigkeit. Betrachtet man sie im Zusammenhang mit Abbildung 4.8, so wird auch hier das gegenläufige Verhalten deutlich.

Ergänzend sind in den Abbildungen 4.17 und 4.18 die obere bzw. untere Fließspannung über der Temperatur aufgetragen. Sie entsprechen der maximalen ( $\sigma_o$ ) und minimalen ( $\sigma_u$ ) Spannung im Bereich der Lüdersbänder und wurden aus den Aufzeichnungen eines analogen Meßschreibers ermittelt, da in den diskreten Datensätzen der rechnergesteuerten Meßwerterfassung diese Informationen nicht enthalten sind. Betrachtet man diese Darstellungen, so erkennt man trotz der starken Streuung der Werte eine deutliche Geschwindigkeitsabhängigkeit und ein Abfallen der Spannungen mit wachsender Temperatur.

Im Gegensatz zu den verschiedensten in der Praxis verwendeten empirischen Formeln basieren Stoffgesetze auf Zusammenhängen, die nicht von der Form des betrachteten Körpers abhängen. Diese Unabhängigkeit kann unter anderem dann verloren gehen, wenn die Abmessungen so klein werden, daß die Mikrostruktur des Materials bedeutsam wird. Um zu überprüfen, wie stark die mit unterschiedlichen Korrekturfaktoren ermittelten Spannungs-Dehnungs-Kurven von der Probengeometrie abhängen, wurden die Abbildungen 4.19 und 4.20 angefertigt. Beide zeigen im Bereich homogener Deformationen nur einen vernachlässigbaren Unterschied der Meßwerte. Die Abweichungen bei den schnelleren Versuchen sind geringfügig größer und sind vermutlich auf die leichte mittige Querschnittsreduzierung zweier Proben zurückzuführen. Die Abbildungen zeigen deutlich, daß die Werte vor dem Einschnüren weitgehend unbeeinflusst sind vom Probentyp und auch von der Schwächung  $\Delta R$ . Diese gewinnt erst bei der Lokalisierung größere Bedeutung, da sie dazu führt, daß die Proben in der Mitte brechen, im Gegensatz zu den anderen Experimenten, die an einer beliebigen Stelle einschnüren.

Der Bruch geschieht unabhängig davon, ob die Proben geschwächt wurden oder nicht, auch bei gleichartigen Versuchen nach unterschiedlicher Zeit.

Dies verdeutlichen die Abbildungen 4.21 und 4.22, die - von diesem Umstand abgesehen - eine sehr gute Reproduzierbarkeit der Spannungs-Dehnungs-Kurven belegen. Jeweils drei nicht dargestellte Versuche mit Proben des Typs II und Deformationsgeschwindigkeiten von  $\dot{\epsilon} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$  und  $\dot{\epsilon} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$  waren ebenfalls im homogenen Bereich gut reproduzierbar. Auch bei diesen Versuchsreihen setzte die Lokalisierung unterschiedlich früh ein, was im Kapitel 4.4.2 bei den lokalen Temperaturerhöhungen zu beachten ist.

Ein Vergleich dieser Versuchsreihen mit den in Abbildung 4.22 dargestellten Experimenten ( $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$ ) zeigt nur kleine Abweichungen, die in der Größenordnung der durch den Probenotyp bedingten Ungenauigkeiten der Abbildung 4.20 liegen. Dies verdeutlicht den geringen Einfluß einer Verdoppelung der Prozeßgeschwindigkeit bei Raumtemperatur-Versuchen.

Die Aussage einer guten Reproduzierbarkeit muß bezüglich der mit den Thermoelementen durchgeführten Temperaturmessung auch für den Bereich homogener Deformationen relativiert werden. Die Messungen sind, wie die Abbildungen 4.23 bis 4.25 zeigen, kritischer, auch wenn die mit  $\dot{\epsilon} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$  durchgeführten Versuche eine gute Übereinstimmung zeigen. Die Fehleranfälligkeit wird besonders deutlich, betrachtet man die gleichartigen Experimente der Abbildung 4.24 mit  $\dot{\epsilon} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$ , bei denen einer der Temperaturverläufe deutlich nach unten abweicht. Da die oberen Kurven gut übereinstimmen und die im Kapitel 4.4.2 wiedergegebenen Infrarot-Kamera-Messungen noch größere Werte ergeben, liegt die Vermutung nahe, daß bei der unteren Kurve das mit der Probe verschweißte Thermoelement keinen ausreichenden Kontakt zur Probenoberfläche hatte, so daß die Temperatur des Elementes nicht der der Probe entsprach.

Die Abbildung 4.25 enthält sechs Temperaturverläufe von Versuchen, die mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$  und verschiedenen Probenotypen durchgeführt wurden. Eine deutliche Auffächerung der Meßkurven, die aber alle erheblich über dem zuvor diskutierten unteren Verlauf der Abbildung 4.24 liegen, ist offensichtlich. Diese ist nicht auf die unterschiedlichen Probenformen zurückzuführen, weil Versuche mit Proben des Typs II sowohl am unteren als auch am oberen Rand des Fächers vertreten sind. Wie bereits angesprochen, können Kontaktprobleme nicht ausgeschlossen werden. Deshalb kommt den weiter oben verlaufenden Meßkurven die größere Bedeutung zu. Insgesamt zeigt diese Problematik, daß sehr genaue Informationen über den Temperaturverlauf nur mit vielfach wiederholten Versuchen oder einer präziseren Meßtechnik möglich sind. Es ist allerdings hinzuzufügen, daß ein der maximalen Streuung entsprechender Temperaturunterschied von  $5^\circ\text{C}$  auf die Materialfunktionen des in dieser Arbeit verwendeten Stoffgesetzes keinen gravierenden Einfluß hat. In dieser Größenordnung

lagen auch die durch die Ofenregelung bedingten Temperaturschwankungen der nahezu isothermen Warmversuche.

Die Abbildung 4.26 zeigt, daß auch der Temperaturzuwachs von Versuchen mit einer höheren Anfangstemperatur sich von den bislang dargestellten Kurven nicht wesentlich unterscheidet.

Alle bislang angesprochenen Temperaturverläufe sind nur für den Bereich homogener Deformationen dargestellt, da die weitere Entwicklung der Meßwerte stark von der Entfernung zwischen der Einschnürung und dem in der Probenmitte aufgeschweißten Thermoelement bestimmt wird. Ein besonders deutliches Beispiel dafür ist in Abbildung 4.27 zu sehen. Sie zeigt vergleichend die Temperaturzuwächse einer angeschliffenen, mittig einschnürenden Probe und einer entfernt einschnürenden Probe. Die Experimente mit geschwächten Versuchskörpern waren durch den Wunsch motiviert, die Maximaltemperaturen im Zentrum der Lokalisierung aufzuzeichnen. Ein Vergleich mit den im Kapitel 4.4.2 wiedergegebenen Werten der Infrarot-Kamera zeigt, daß dies nur bedingt möglich ist, da sich die Thermoelemente bei den extremen Deformationen in der Schlußphase des Versuchs in der Regel von der Probe lösen oder sich nicht exakt im Zentrum der Einschnürung befinden.

#### **4.4.2 Lokale Meßwerte**

Wie bereits im Kapitel 4.4 angesprochen, sind die in 4.4.1 dargestellten globalen Ergebnisse nur bis zum Beginn der Einschnürung aussagekräftig. Besonders deutlich wird dies, wenn man die Dehnungen betrachtet, bei denen der Bruch der Probe eintritt. Ergeben die Maschinendaten beim Bruch eine mittlere Dehnung von etwa 0,25 an, so liegen die lokalen Dehnungen im Bruchbereich der Probe in der Größenordnung von 1,0. Um diese Werte zu ermitteln, wurden die lokalen Längenänderungen der Probe fotografisch festgehalten, was eine Markierung der Probe in axialer Richtung erfordert. Dazu wurde eine einfache Möglichkeit gefunden, die es erlaubt, die Probe in 1mm lange Bereiche aufzuteilen. Die unter der Bezeichnung Tg1108 erhältlichen Punktreihen der Firma Letraset ließen sich ohne große Probleme auf die Proben übertragen und hafteten auch bei den großen Deformationen im Einschnürbereich und bei erhöhten Temperaturen auf den Proben. Erst bei den Versuchen über 300°C war die Grenze des Einsatzbereiches dieser Klebepunkte erreicht und eine fotografische Auswertung nicht mehr möglich. Abbildung 4.28 zeigt die Markierungen auf einer unterhalb der Mitte gebrochenen Probe. In der Detailaufnahme der Einschnürung ist deutlich der unterschiedliche Abstand der im Ausgangszustand fast gleichmäßig verteilten Punkte zu erkennen. Die bereits zu Versuchsbeginn unterschiedlichen Entfernungen der Markierungen entstehen

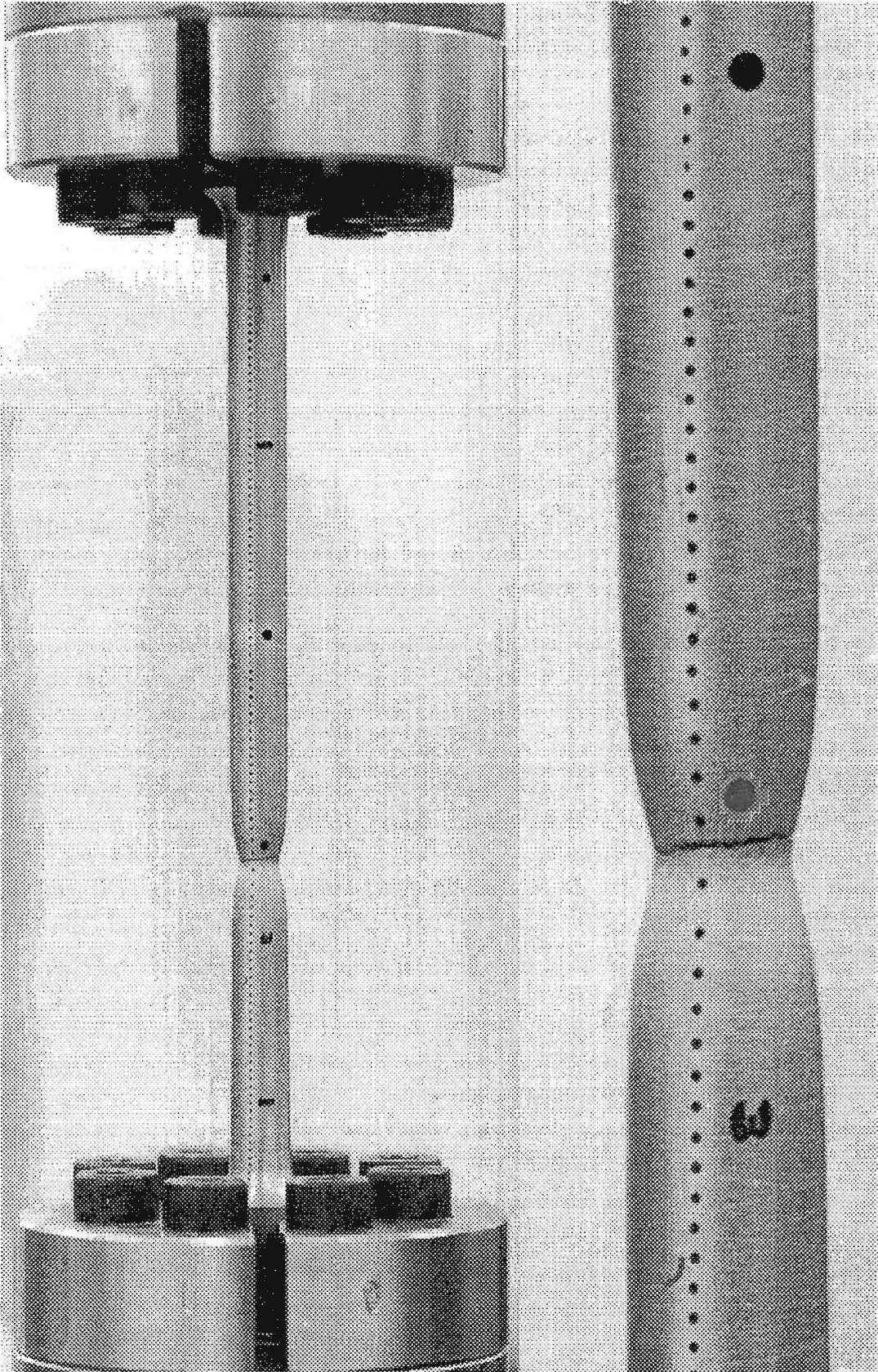


Abbildung 4.28: Zugprobe mit Markierungspunkten nach dem Bruch

bei der Befestigung auf den Proben. Da die lokalen Dehnungen aus dem Vergleich der Fotos während der Versuche mit dem jeweiligen Ausgangsfoto gewonnen werden, haben diese Unterschiede aber keinen Einfluß auf die Meßwerte. Trotzdem entstehen Probleme, die im folgenden aufgezeigt werden sollen.

Das Ausmessen der Fotos erfolgte mit einer Auflösung von 0,1mm auf einem Digitalisiertisch der Firma TDS. Da trotz fotografischer Vergrößerung der zu messende Abstand der Punkte im Anfangszustand nur etwa 3mm betrug, entstanden bei der Ermittlung der Ausgangs- bzw. aktuellen Längen der einzelnen Probenelemente deutliche Fehler. Diese führten bei der Dehnungsberechnung selbst dann zu starken Schwankungen von etwa  $\pm 0,05$ , wenn Mittelwerte von zehn oder mehr Messungen verwendet wurden. Dies wird bei der Betrachtung von Abbildung 4.29 offensichtlich. Sie zeigt den zeitlichen Verlauf der lokalen Dehnungen von 33 Elementen im Bereich der Einschnürung einer Probe. Diese Abbildung, die auch in der nahezu homogenen Phase dieses Versuches ( $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$ ,  $T = 24^\circ \text{C}$ , Typ I) unregelmäßige Ausreißer der als konstant anzusehenden Dehnungswerte enthält, macht trotz der auftretenden Meßfehler die Dynamik deutlich, mit der die Verformungen sich während der Einschnürung entwickeln.

Den Belastungszustand der einzelnen Elemente veranschaulicht die Abbildung 4.30. Die im vorderen Bereich dargestellte durchgezogene Kurve wurde mit den vom Rechner aufgezeichneten globalen Werten erzeugt. Die zusätzlich eingetragenen lokalen Messungen der einzelnen Elemente entstanden mit den Fotos und der zuzuordnenden Kraft. Es zeigt sich dabei deutlich das unterschiedliche Verhalten der Elemente, die am Rand bzw. im Zentrum der Einschnürung lagen. Die Entlastung immer weiterer Elemente ist beachtenswert, da sie bei der Berechnung derartiger Prozesse zu numerischen Problemen führt, die im Kapitel 8.2 beschrieben sind. Ein der Abbildung 4.30 vergleichbares Diagramm wurde von Gupta und Ambasht in [43] veröffentlicht. Die von ihnen verwendeten Proben waren mittig geschwächt, so daß die Möglichkeit bestand, mit zwei Wegaufnehmern die Durchmesser an der Einschnürstelle und in großer Entfernung davon zu messen. Die so ermittelten Meßwerte sind wesentlich genauer als die hier vorgestellten. Die Abbildung 4.30 ist aber eine interessante Ergänzung, da sie auch Werte im Randbereich der Einschnürung erfaßt. Es ist anzumerken, daß die dargestellten Elemente unter dem Gesichtspunkt möglichst glatter Meßwertverläufe ausgesucht wurden, und daß sich die anderen Elemente, von Meßungenauigkeiten abgesehen, schlüssig in diese Darstellung einfügen.

Die auf der geschilderten Entfernungsmessung der Markierungspunkte beruhenden Dehnungsmeßwerte sind genau genug, um das mit den Abbildungen 4.29 und 4.30 dargestellte prinzipielle Verhalten zu erläutern. Für

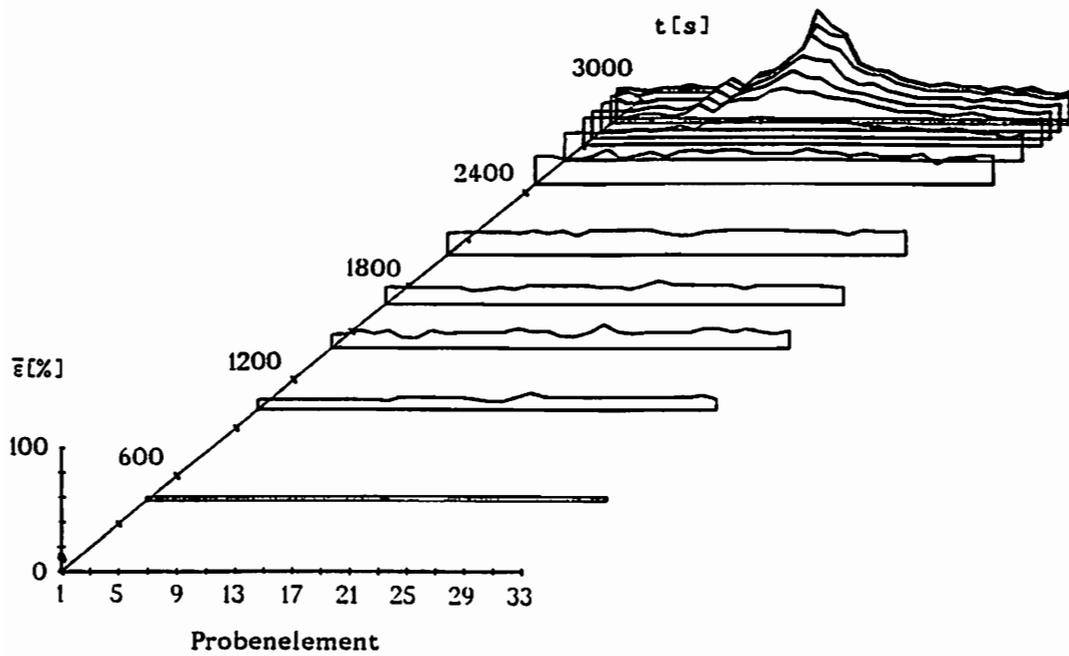


Abbildung 4.29: Lokale Dehnungsverteilung im Einschnürbereich

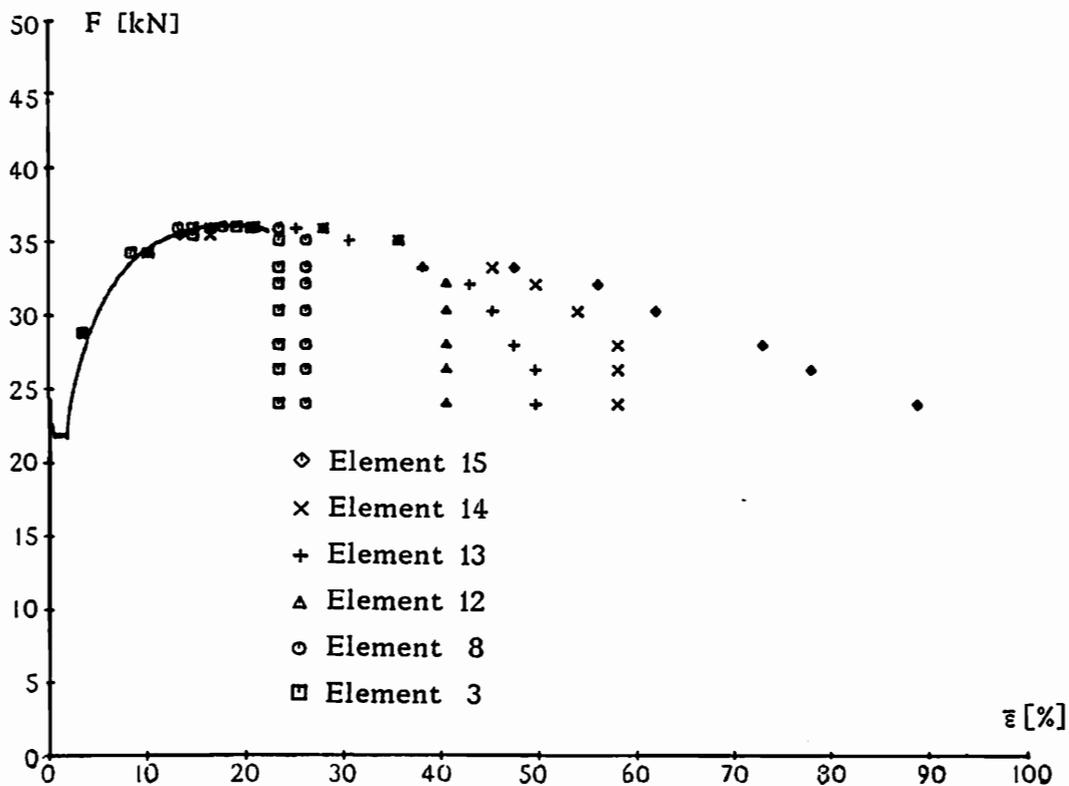


Abbildung 4.30: Lokale Kraft-Dehnungs-Meßwerte

exakte quantitative Aussagen sind sie aber nicht zu verwerten, da sie neben den Meßfehlern auch noch systematische Ungenauigkeiten enthalten. Dies liegt daran, daß mit den auf der Probe angebrachten Punkten nur die Oberflächen-Dehnungen erfaßt werden können, die sich von den gesuchten mittleren Dehnungen der betrachteten Körperelemente unterscheiden. Dies gilt insbesondere im engsten Querschnitt der Probe, der wesentlich kleinere Dehnungen an der Oberfläche erfährt als an der Symmetrieachse des Versuchskörpers.

Ein weiterer Grund dafür, daß die ermittelten Dehnungswerte des engsten Querschnitts zu klein sind, liegt an den großen Abständen der Markierungspunkte im Bereich der Einschnürung (vgl. Abbildung 4.28). Dies führt dazu, daß die maximale Oberflächendehnung nicht ermittelt werden kann. Es läßt sich nur ein Mittelwert der lokalen, in axialer Richtung stark veränderlichen Dehnung mit den beiden entsprechenden Markierungspunkten berechnen.

Die genannten Gründe führten dazu, daß im folgenden lokale Formänderungen nur noch wie bei Gupta und Ambasht [43] und Blix [17] durch Radiusänderungen gemessen werden. Die in [17] zur Umrechnung auf axiale logarithmische Dehnungen bei näherungsweise konstantem Volumen verwendete Gleichung

$$\varepsilon = \ln \left( \frac{l}{l_0} \right) = 2 \ln \left( \frac{R}{R_0} \right) \quad (4.3)$$

geht bei den hier betrachteten, isotrop geschädigten Körpern über in

$$\varepsilon = \ln \left( \frac{l}{l_0} \right) = 2 \ln \left( \frac{R}{R_0} \right) + \ln \left( \frac{V}{V_0} \right) \quad (4.4)$$

Vernachlässigt man die elastischen Volumenveränderungen, so entspricht der letzte Term der Gleichung (4.4) dem durch Schädigung hervorgerufenen Volumendehnungsanteil  $\varepsilon_v$ . Da dieser nicht bekannt ist, werden im folgenden die um diesen Anteil reduzierten Dehnungen dargestellt

$$\varepsilon_r = 2 \ln \left( \frac{R}{R_0} \right) \quad (4.5)$$

Das in dieser Weise im engsten Querschnitt ermittelte Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist in Abbildung 4.31 dargestellt und enthält zum Vergleich auch die Meßpunkte, die sich mit den oben angesprochenen Messungen der Punktabstände ergeben. Berücksichtigt man, daß  $\varepsilon_r$  laut Definition kleiner ist als  $\varepsilon$ , so ist die bereits diskutierte, zu geringe Erfassung der mittleren lokalen Dehnungen  $\varepsilon$  offensichtlich. Auch Gleichung (4.5) kann die entlang des Radius veränderlichen Schädigungs- und Dehnungswerte nicht exakt erfassen. Da der gemessene Radius aber eine integrale

Größe ist, werden diese Veränderungen bei der Berechnung der Spannungs-Dehnungs-Kurve mit (4.5) näherungsweise berücksichtigt. Dies ist bei der Messung der Oberflächendehnung nicht der Fall.

Zusätzlich ist die Ermittlung der Durchmesser mit dem Digitalisiertisch weniger fehleranfällig, da sie größer sind und mit der gleichen Auflösung gemessen werden wie die geringen Abstände der Punkte.

Die in den Abbildungen 4.31 bis 4.34 dargestellten mittleren lokalen Spannungen in axialer Richtung  $\bar{\sigma}$  sind Cauchy-Spannungen und berechnen sich mit dem aktuellen Radius R des engsten Querschnitts und der Kraft F

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\pi R^2} \quad . \quad (4.6)$$

Auch die angesprochenen lokalen Dehnungen werden in den Darstellungen zur Kennzeichnung, daß es sich um Mittelwerte handelt, überstrichen. Da die Verläufe der globalen Spannungs-Dehnungs-Kurven dem Kapitel 4.4.1 entnommen werden können, wurde in den Abbildungen 4.32 und 4.34 auf eine Unterscheidung der durchgezogenen Meßwerte verzichtet. Abbildung 4.34 enthält darüberhinaus nur zwei der insgesamt sieben globalen Meßkurven. Die lokalen Ergebnisse zeigen deutlich eine mit fortschreitendem Prozeß anwachsende Spannung, streuen jedoch wesentlich stärker als die globalen Meßwerte.

Neben den genannten Problemen verhindert bei den Warmversuchen der Klappofen eine fotografische Aufzeichnung der Probengeometrie während des Deformationsvorgangs. Dies führt dazu, daß nur das Foto der gebrochenen Probe einen lokalen Meßwert liefert. Dieser ist zusätzlich noch unzuverlässig, da die Kraft beim Einsetzen des Bruchs ermittelt werden muß. Weil diese in der Regel der Meßwertdatei nicht entnommen werden kann, wurde sie aus dem Knickpunkt der analogen F(s)-Aufzeichnung des Meßschreibers bestimmt. Problematisch ist, daß dieser Knick bei manchen Versuchen nicht deutlich ausgeprägt ist. Aus diesem Grund wäre eine technisch kompliziertere Innenwärmung der Proben wünschenswert, da dann auch bei Warmversuchen weitere lokale Meßpunkte zur Verfügung stehen würden. Unter der Annahme, daß die Spannungen kontinuierlich und ohne Krümmungswechsel der Funktion ansteigen, lassen sich die Spannungsverläufe verschiedener Versuche näherungsweise mit den globalen Daten und einem lokalen Meßpunkt rekonstruieren. Dies gelang beispielsweise bei den Versuchstemperaturen 313°C und 364°C gut, bei Experimenten, die stark der dynamischen Reckalterung unterworfen sind, ist jedoch keine befriedigende Darstellung möglich. Dies gilt insbesondere im Temperaturbereich um 100°C und ist in Abbildung 4.35 gezeigt.

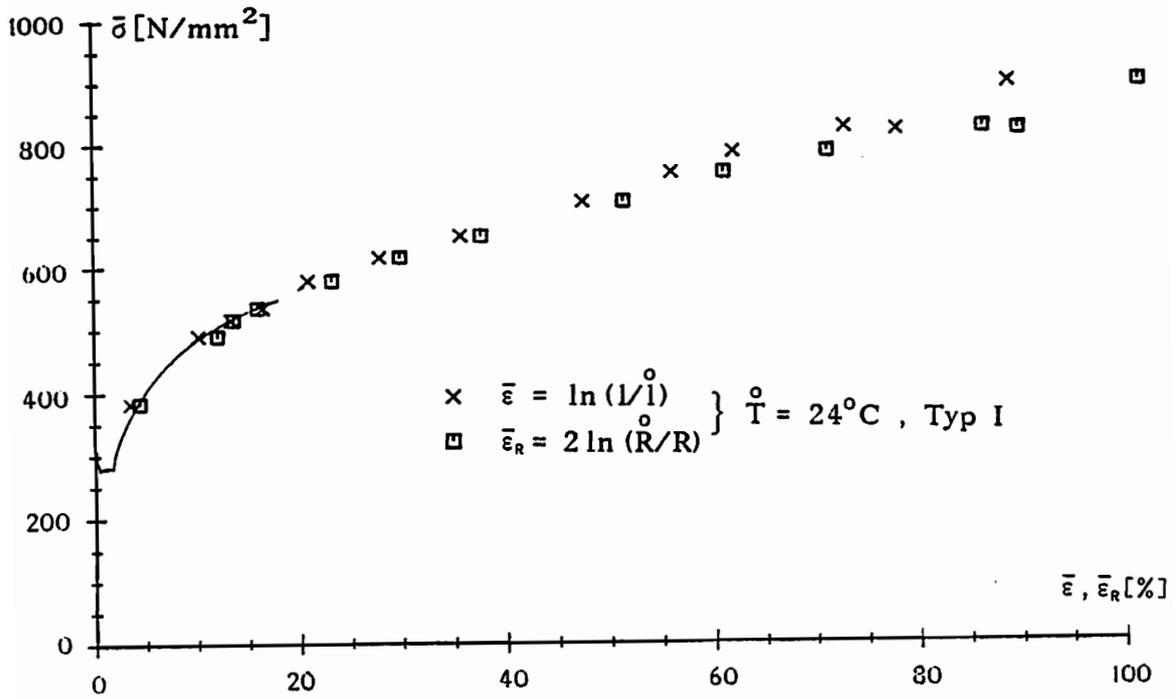


Abbildung 4.31: Vergleich lokaler Spannungs-Dehnungs-Werte

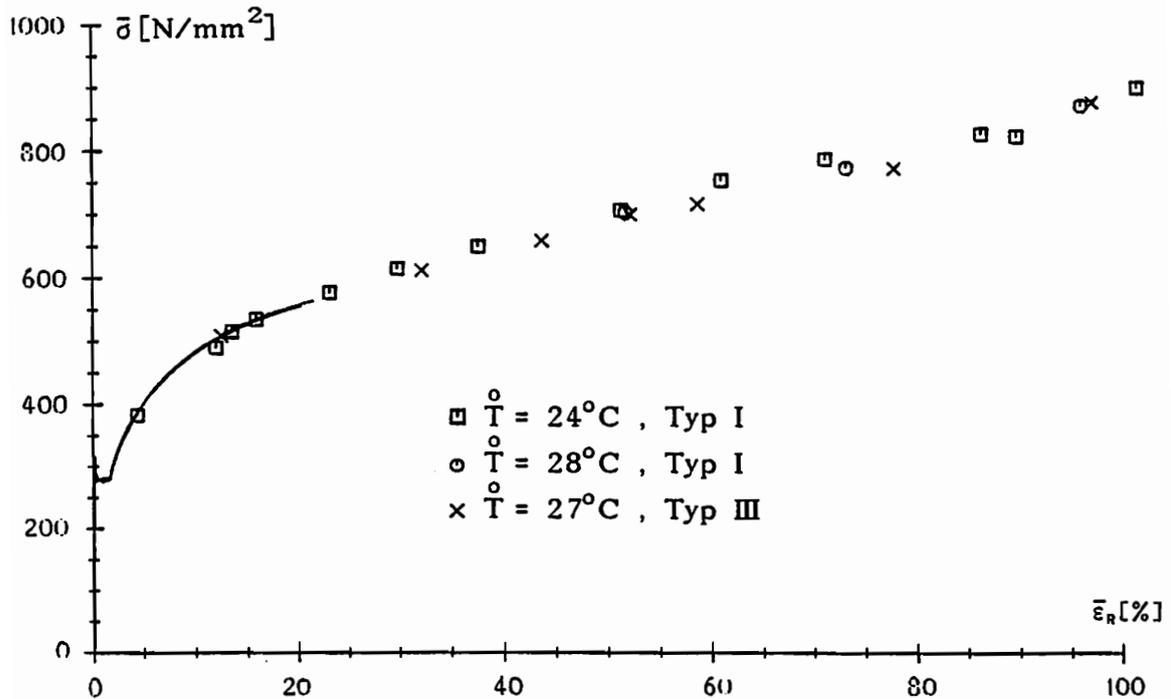


Abbildung 4.32: Lokale Spannungs-Dehnungs-Werte,  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$

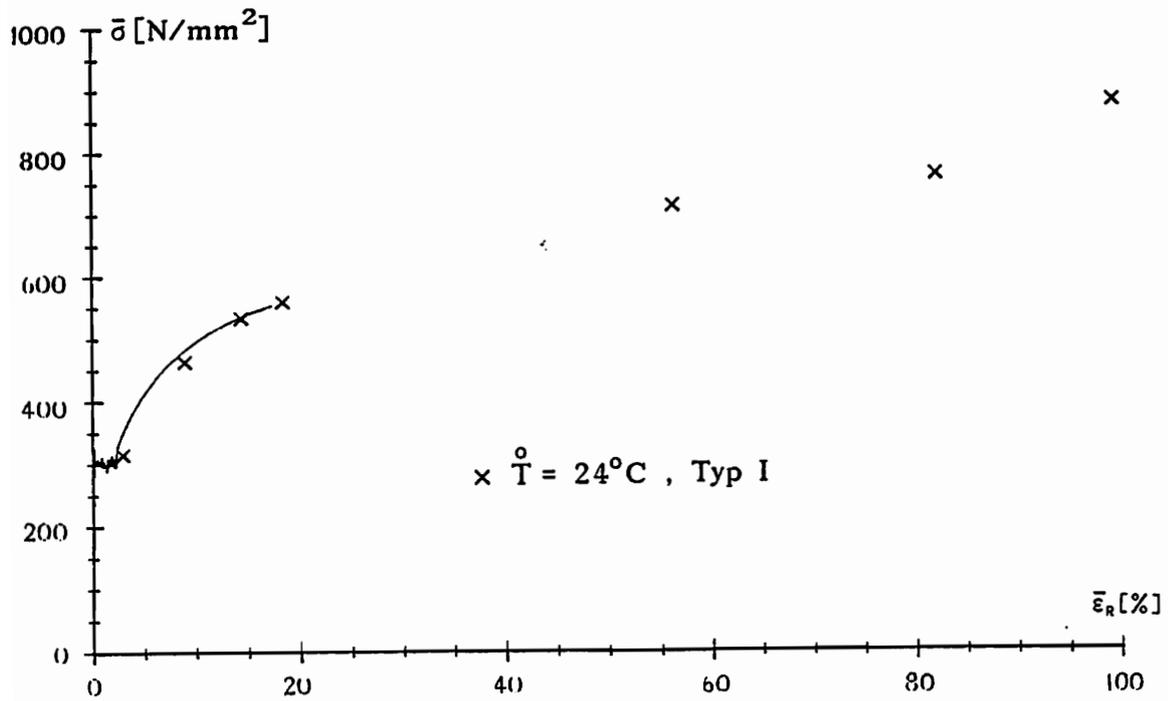


Abbildung 4.33: Lokale Spannungs-Dehnungs-Werte,  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-3} \text{s}^{-1}$

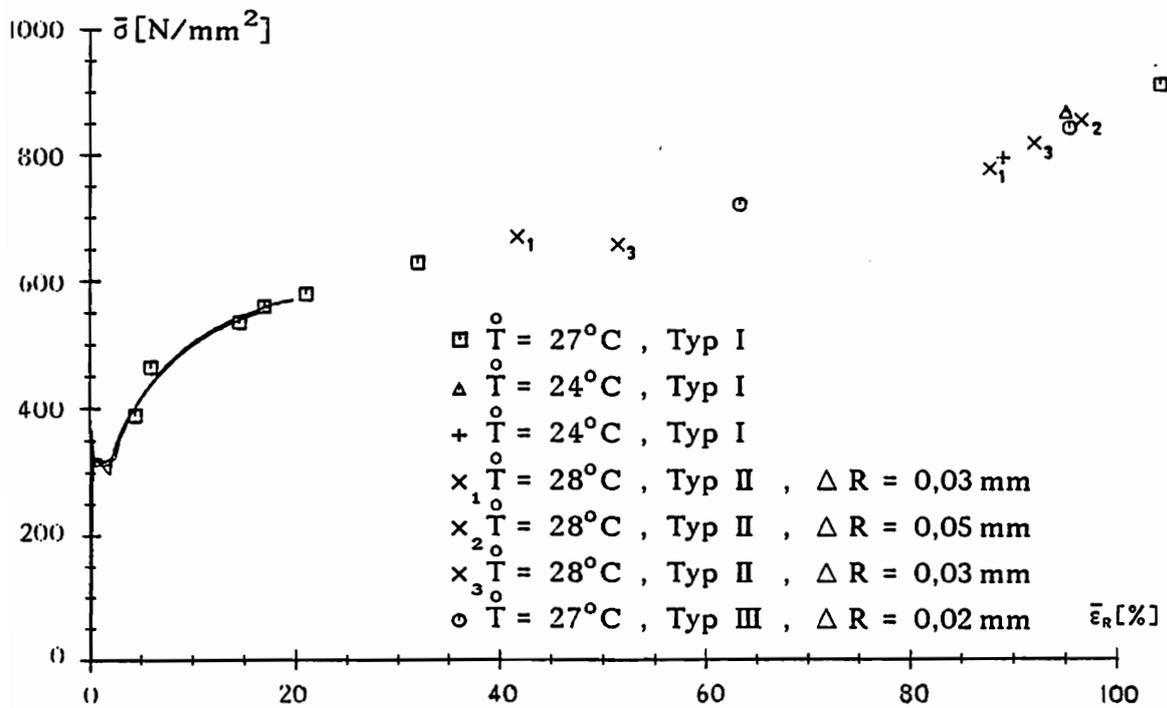


Abbildung 4.34: Lokale Spannungs-Dehnungs-Werte,  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$

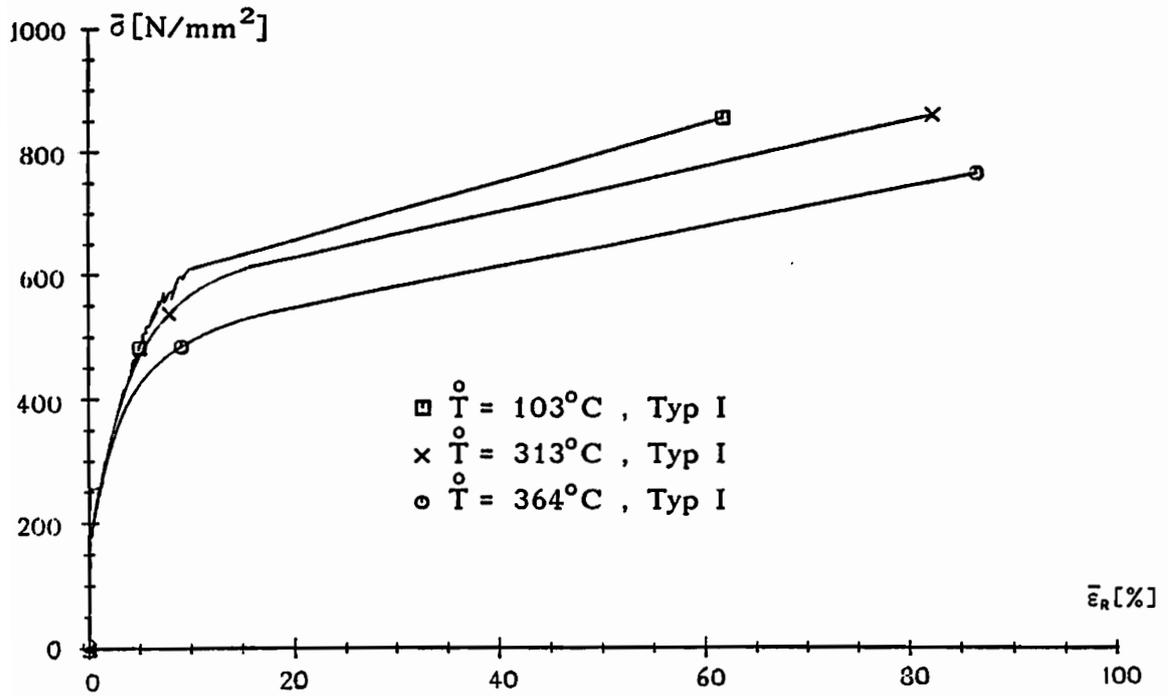


Abbildung 4.35: Lokale Spannungs-Dehnungs-Werte,  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$

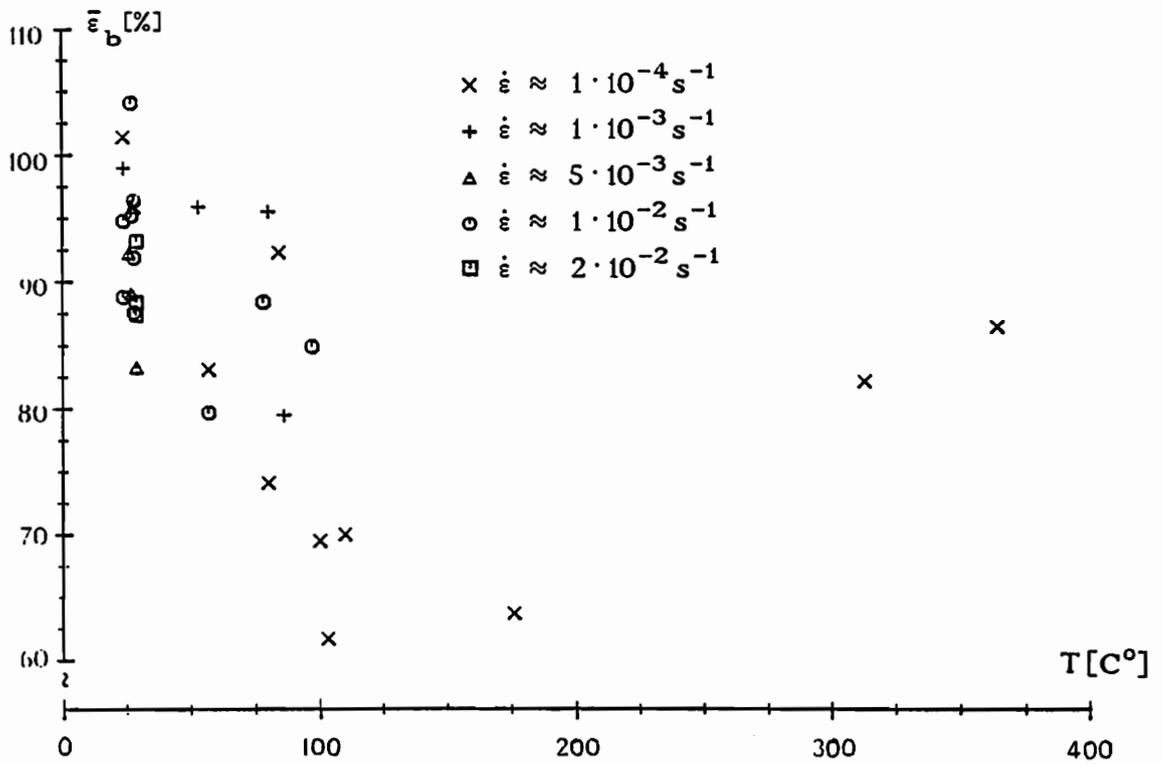


Abbildung 4.36: Bruchdehnungen  $\bar{\epsilon}_b$

Betrachtet man die globalen Spannungs-Dehnungs-Kurven des Kapitels 4.4.1, so beginnt die Einschnürung bei Versuchen mit starker Reckalterung bereits sehr früh. Um zu überprüfen, ob auch der Bruch bei vergleichsweise geringen lokalen Dehnungen auftritt, sind in der Abbildung 4.36 die Bruchdehnungen von Versuchen mit allen Probenotypen über der Temperatur dargestellt. Eine starke Abnahme der Bruchdehnung im Bereich zwischen  $100^{\circ}\text{C}$  und  $200^{\circ}\text{C}$  ist zu erkennen. Trotz einer extrem geringen globalen Probenverlängerung zeigte ein Versuch mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$  bei einer Temperatur von  $84^{\circ}\text{C}$  ein abweichendes Verhalten, da lokale Dehnungen bis ca. 92% gemessen wurden.

Als Ergänzung der im Abschnitt 4.4.1 gezeigten Temperaturerhöhungen vor Beginn der Einschnürung zeigen die folgenden Abbildungen die mit der Thermokamera aufgezeichneten Temperaturen im Zentrum der Einschnürung und den örtlichen Verlauf der Temperatur entlang der Probenachse.

Die zeitliche Entwicklung der Maximaltemperaturen der Versuche der Abbildung 4.37 zeigt eine gute Übereinstimmung. Die Temperaturen spiegeln die geringfügig frühere Lokalisierung des mit  $\circ$  gekennzeichneten Experiments wieder. Wesentlich deutlicher ist dieser Zusammenhang in Abbildung 4.38 zu erkennen, die mit der Abbildung 4.22 korrespondiert. Die Temperaturen und Spannungen des mit  $\square$  markierten Versuchs weichen von den beiden anderen, nahezu deckungsgleichen Experimenten ab.

Auch die etwa gleichzeitig lokalisierenden Versuche  $\square$  und  $\circ$  der Abbildung 4.39 zeigen eine gute Übereinstimmung der Temperaturmeßwerte. Die später mit der Einschnürung beginnende Probe mit der Kennzeichnung  $\times$  wurde mit einem höheren Temperaturmeßbereich der Thermokamera (TR 200) untersucht. Durch die geringere Auflösung von ca.  $25^{\circ}\text{C}$  pro Teilstrich konnten nur wenige, ungenaue Meßpunkte der Aufzeichnung entnommen werden.

Die Abbildungen 4.40 bis 4.45 zeigen die Meßwerte von jeweils zwei Versuchen der drei betrachteten Versuchsgeschwindigkeiten erneut, um sie mit den Angaben der Thermoelemente zu vergleichen.

Die in der Abbildung wiedergegebene Messung wurde bereits im Abschnitt 4.24 anhand der globalen Meßwerte als fehlerhaft erkannt, was sich hier bestätigt. Darüberhinaus ist festzustellen, daß auch in den anderen Abbildungen die Messungen der Thermokamera über denen der Thermoelemente liegen. In der inhomogenen Phase des Versuchs liegt dies unter anderem daran, daß die Thermoelemente trotz der mittigen Schwächung der Proben nicht immer genau im Zentrum der Einschnürung befestigt waren. Besonders gut gelang dies bei dem in Abbildung 4.44 abgebildeten Experiment. Es zeigt sich aber auch da, daß die Möglichkeiten, mit Thermoelementen lokale Temperaturmaxima zu ermitteln, beschränkt sind.

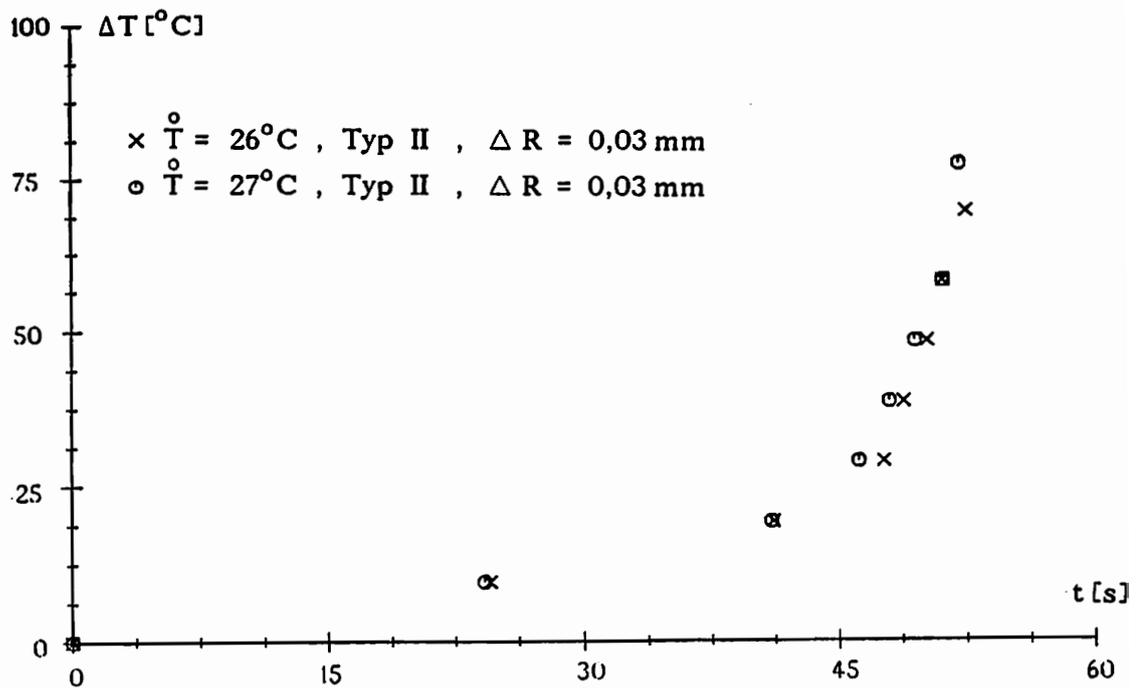


Abbildung 4.37: Maximaltemperatur-Verlauf,  $\dot{\varepsilon} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

Neben den diesbezüglichen Vorteilen der Infrarot-Kamera ermöglicht sie zusätzlich eine Aufzeichnung des Temperaturprofils entlang der Probenachse. Der Verlauf der Oberflächentemperatur der oberen Probenhälfte ist in den Abbildungen 4.46 bis 4.51 zu verschiedenen Versuchszeiten dargestellt. Die Ortskoordinate wurde jeweils von der Probenmitte berechnet, so daß die Temperaturmaxima der einzelnen Kurven übereinander liegen. Um die Abbildungen übersichtlicher zu gestalten, wurden die einzelnen Meßpunkte linear verbunden. Die sich kreuzenden Geraden weisen auf die auftretenden Meßungenauigkeiten hin. Pro Geschwindigkeit sind von jeweils zwei Experimenten die Verläufe wiedergegeben.

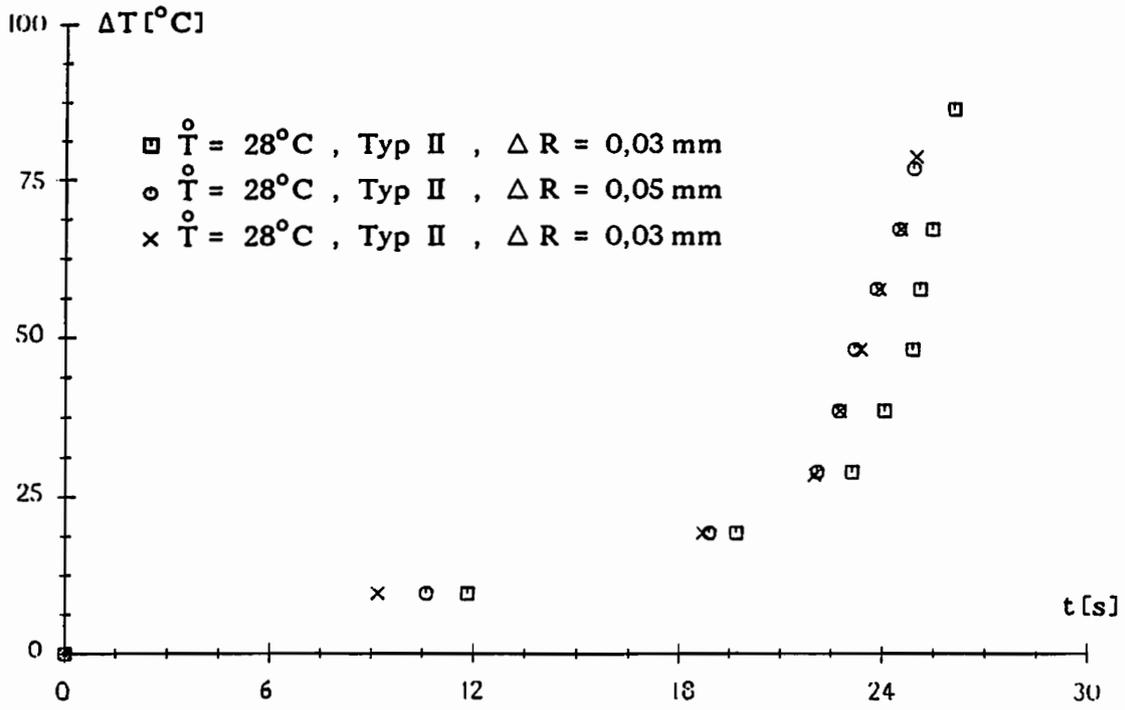


Abbildung 4.38: Maximaltemperatur-Verlauf,  $\dot{\varepsilon} \approx 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

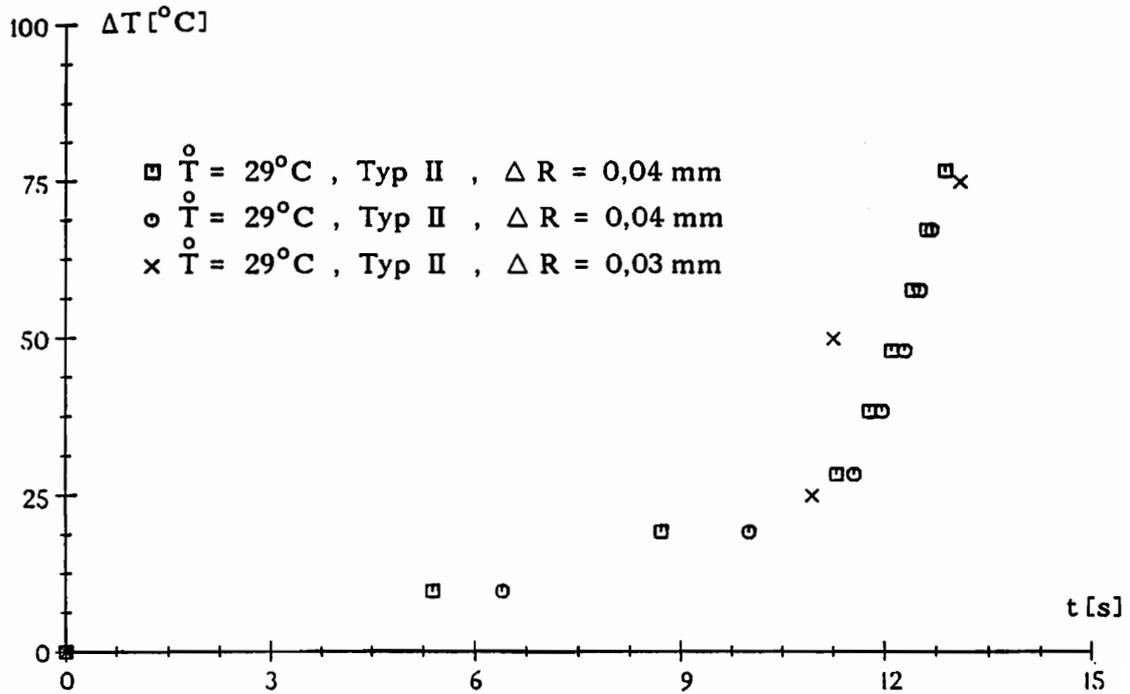


Abbildung 4.39: Maximaltemperatur-Verlauf,  $\dot{\varepsilon} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

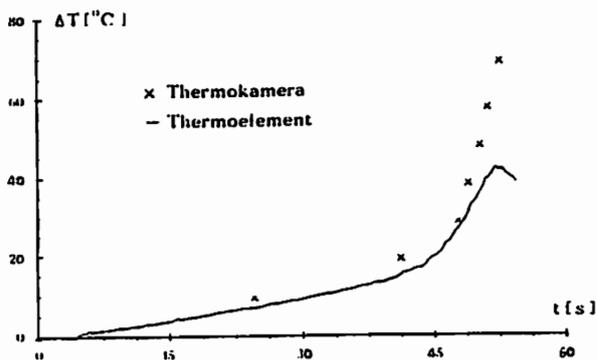


Abbildung 4.40:  
Maximaltemperatur-Verlauf, Probenotyp II,  
( $\Delta R=0,03\text{mm}$ )

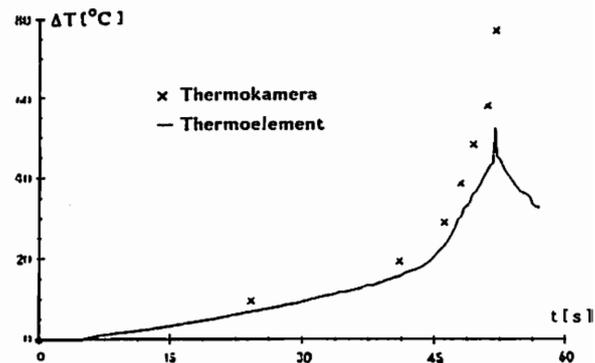


Abbildung 4.41:  
Maximaltemperatur-Verlauf, Probenotyp II,  
 $\overset{\circ}{T} = 27^\circ\text{C}$ ,  $\dot{\epsilon} \approx 5 \cdot 10^{-3}\text{s}^{-1}$   
( $\Delta R=0,03\text{mm}$ )

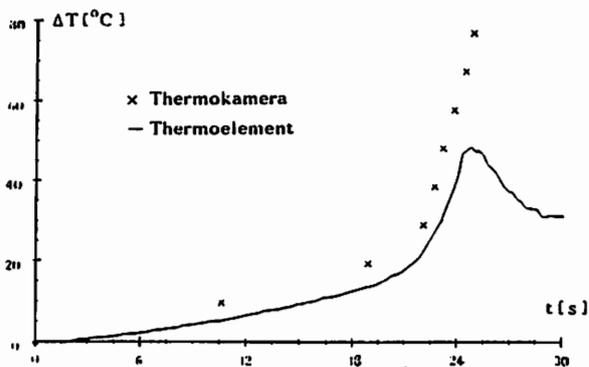


Abbildung 4.42:  
Maximaltemperatur-Verlauf, Probenotyp II,  
( $\Delta R=0,05\text{mm}$ )

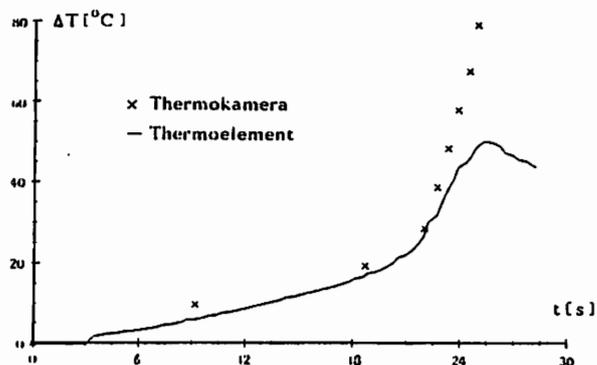


Abbildung 4.43:  
Maximaltemperatur-Verlauf, Probenotyp II,  
 $\overset{\circ}{T} = 28^\circ\text{C}$ ,  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2}\text{s}^{-1}$   
( $\Delta R=0,03\text{mm}$ )

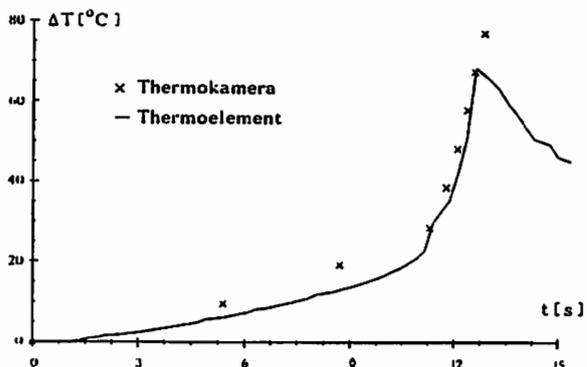


Abbildung 4.44:  
Maximaltemperatur-Verlauf, Probenotyp II,  
( $\Delta R=0,04\text{mm}$ )

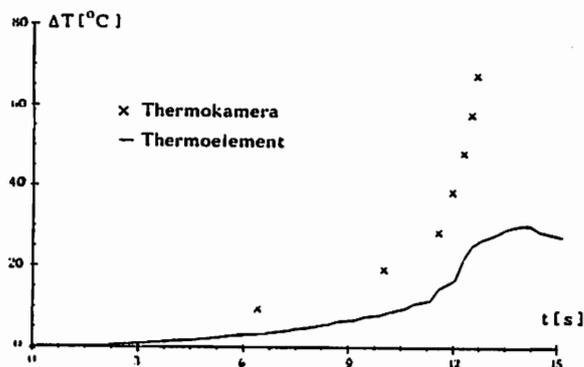


Abbildung 4.45:  
Maximaltemperatur-Verlauf, Probenotyp II,  
 $\overset{\circ}{T} = 29^\circ\text{C}$ ,  $\dot{\epsilon} \approx 2 \cdot 10^{-2}\text{s}^{-1}$   
( $\Delta R=0,04\text{mm}$ )

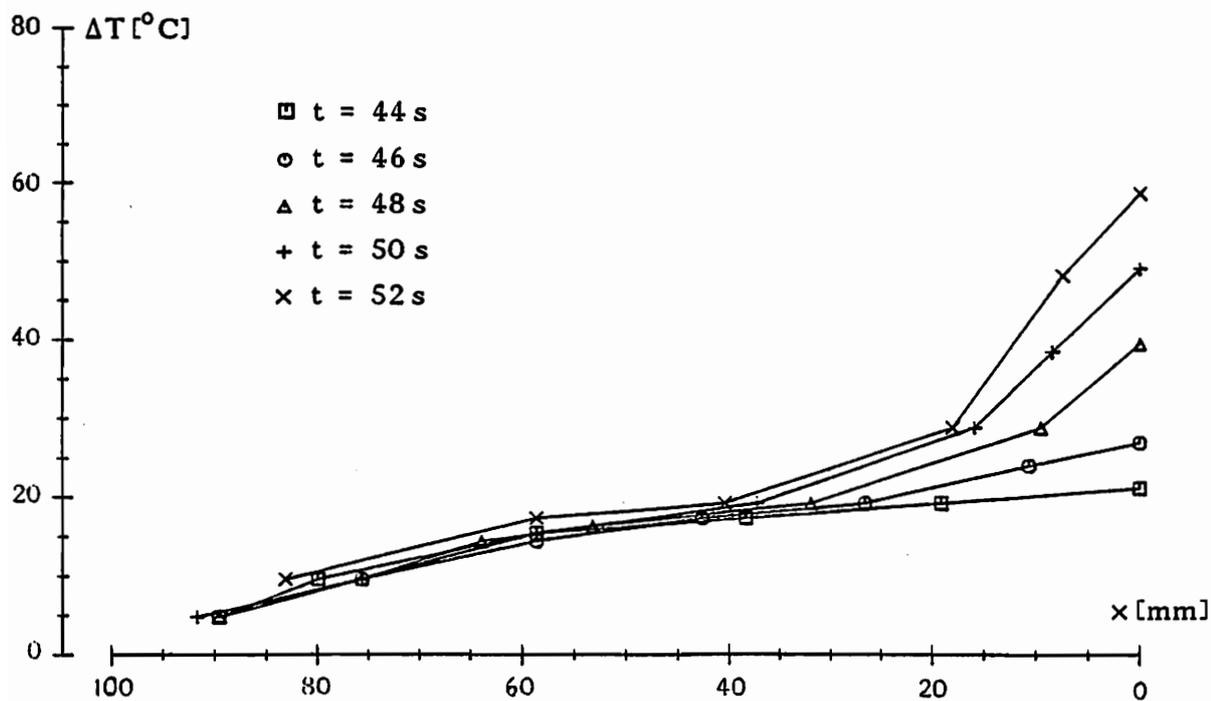


Abbildung 4.46:  
 Temperaturprofil,  $\dot{\epsilon} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ,  $\bar{T} = 27^\circ \text{ C}$ , Typ II,  $\Delta R = 0,03 \text{ mm}$

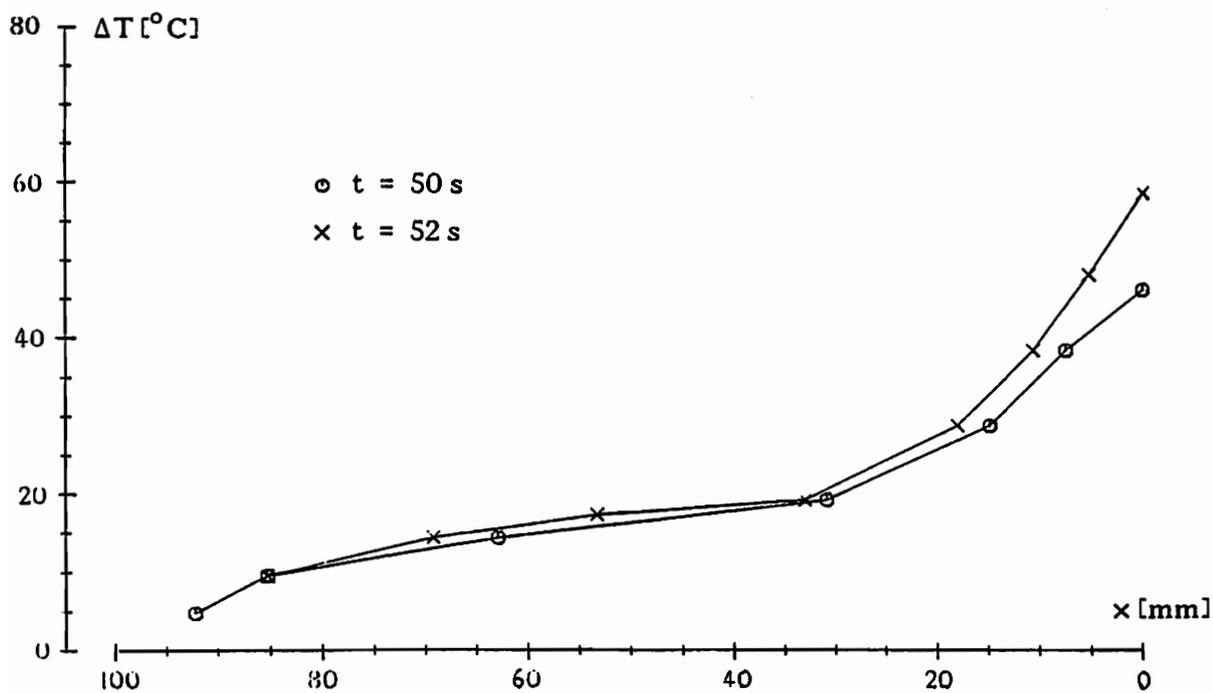


Abbildung 4.47:  
 Temperaturprofil,  $\dot{\epsilon} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ,  $\bar{T} = 26^\circ \text{ C}$ , Typ II,  $\Delta R = 0,03 \text{ mm}$

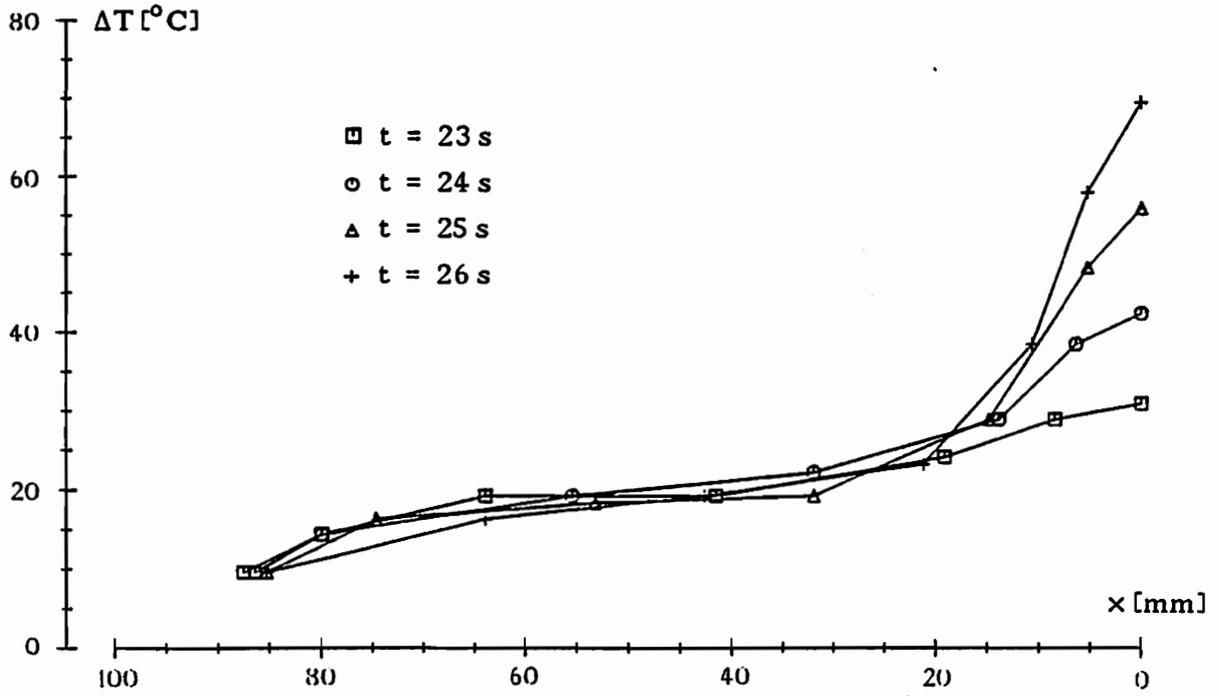


Abbildung 4.48:  
Temperaturprofil,  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$ ,  $\bar{T} = 28^\circ \text{C}$ , Typ II,  $\Delta R = 0,03 \text{mm}$

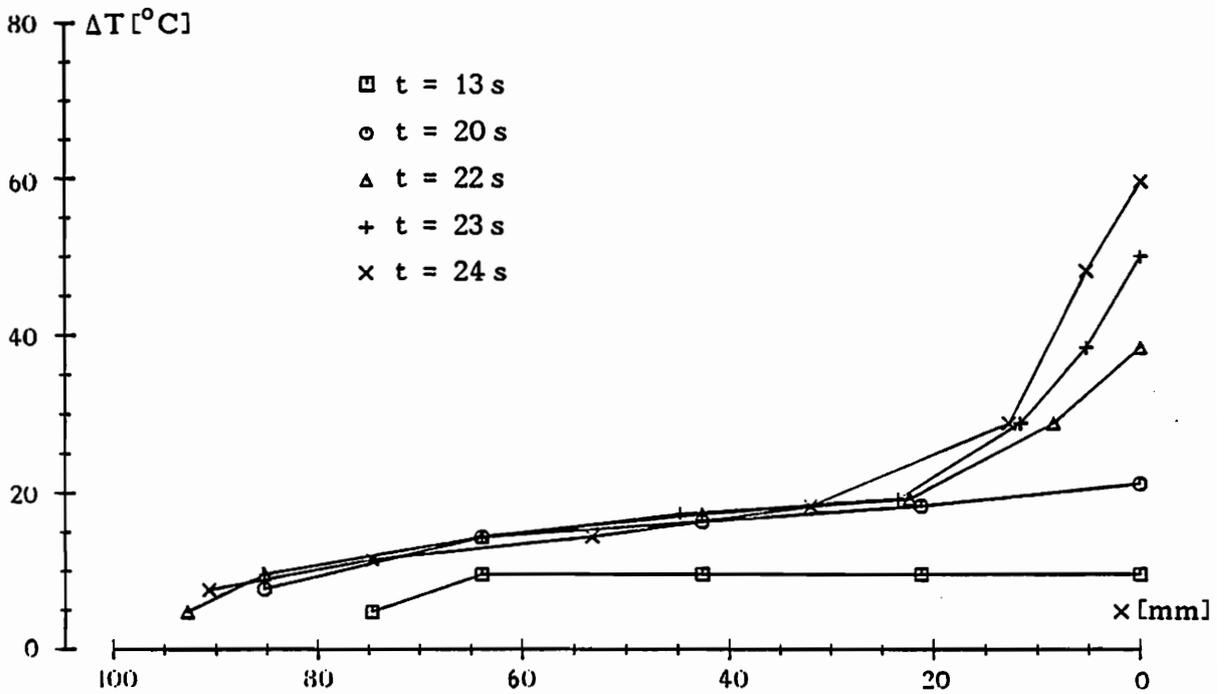


Abbildung 4.49:  
Temperaturprofil,  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$ ,  $\bar{T} = 28^\circ \text{C}$ , Typ II,  $\Delta R = 0,05 \text{mm}$

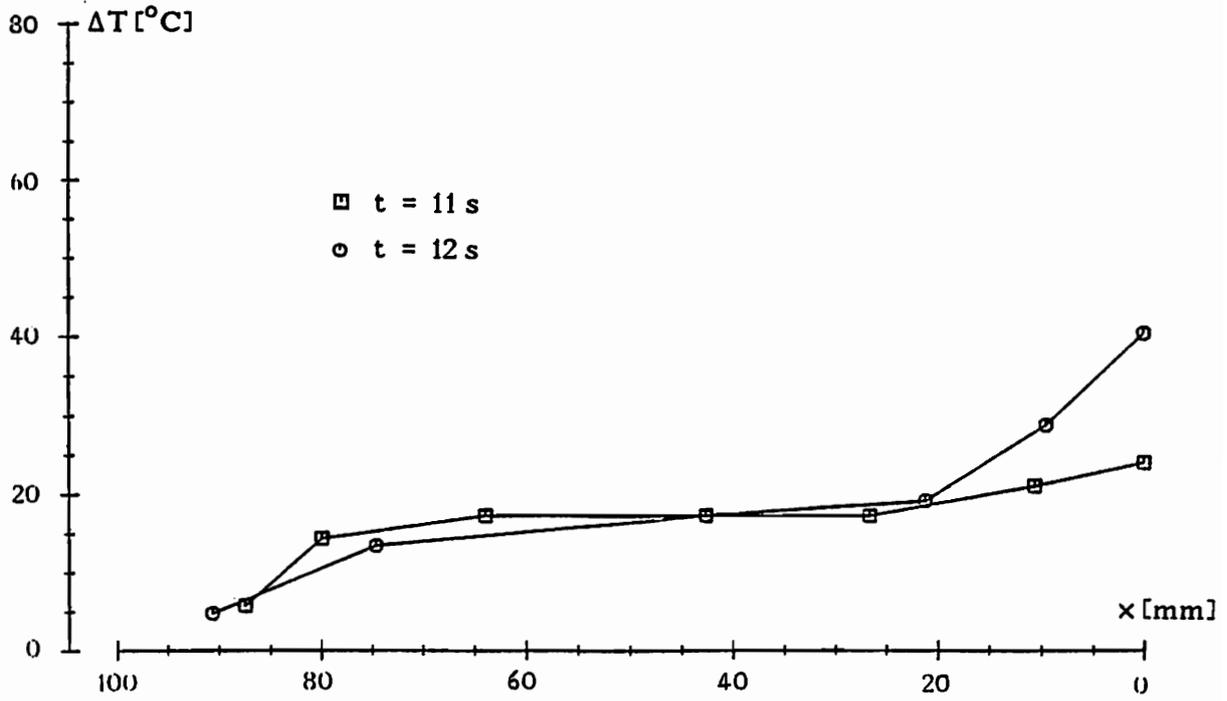


Abbildung 4.50:  
Temperaturprofil,  $\dot{\epsilon} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ,  $\bar{T} = 29^\circ \text{C}$ , Typ II,  $\Delta R = 0,04 \text{ mm}$

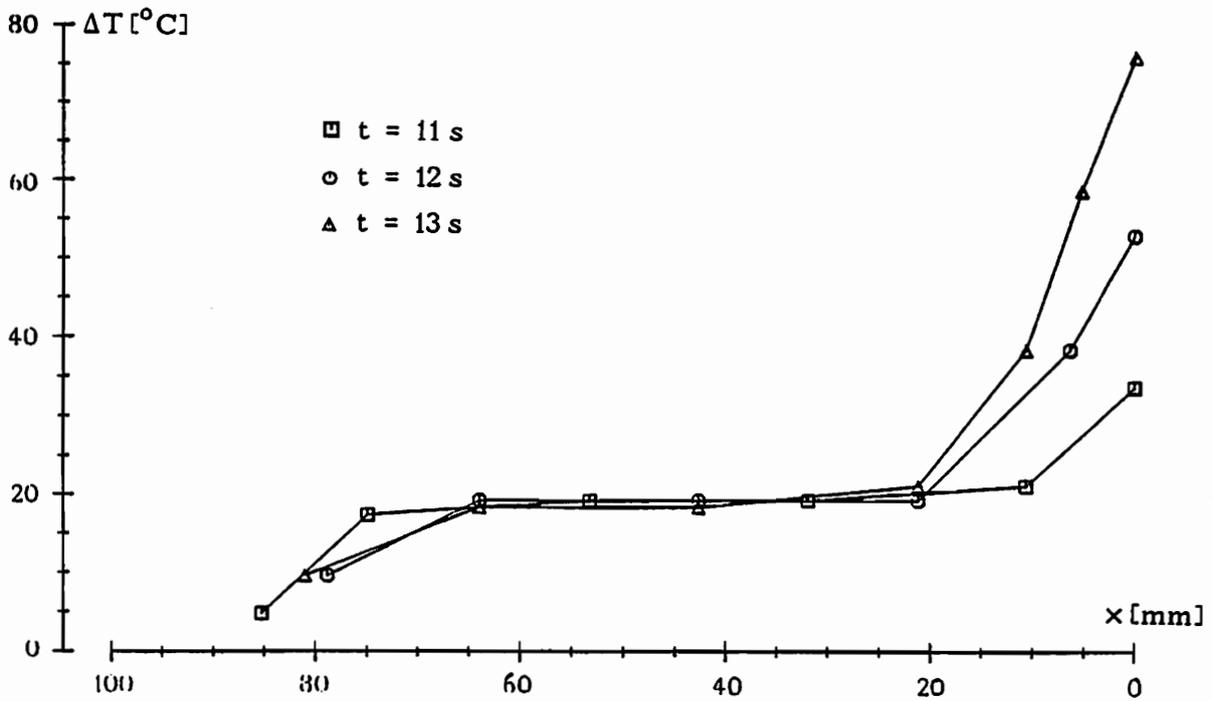


Abbildung 4.51:  
Temperaturprofil,  $\dot{\epsilon} \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ ,  $\bar{T} = 29^\circ \text{C}$ , Typ II,  $\Delta R = 0,04 \text{ mm}$

## 4.5 Materialschädigung

### 4.5.1 Schädigungsermittlung mit Schliffbildern

Die im Materialgesetz zur Beschreibung isotroper Schädigung verwendete skalare Variable  $\omega$  wird mit Gleichung (2.38) als Porenvolumenanteil eingeführt. Die experimentelle Ermittlung dieser Größe läßt sich mit (2.29) auf die Bestimmung der in Schliffbildern auftretenden Porenflächenanteile zurückführen.

Da die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Schädigungsvorgänge durch die großen Deformationen des Materials hervorgerufen werden, sind Untersuchungen erforderlich, die diesen Zusammenhang quantitativ erfassen können. Es tritt hier, wie bereits im Abschnitt 4.2.2, das Problem auf, daß die homogenen Dehnungen von einaxialen Zugversuchen durch die Lokalisierung beschränkt sind. Das unter dem Gesichtspunkt der Materialschädigung interessantere, stärker gedehnte Material kann deshalb nur dem Bereich der Einschnürung entnommen werden. Um weitgehend gleiche Verhältnisse in den betrachteten Querschnitten zu erreichen, besteht die Möglichkeit, die Materialschädigung mit einer Serie von Schliffen im jeweils engsten Querschnitt der Probe zu ermitteln.

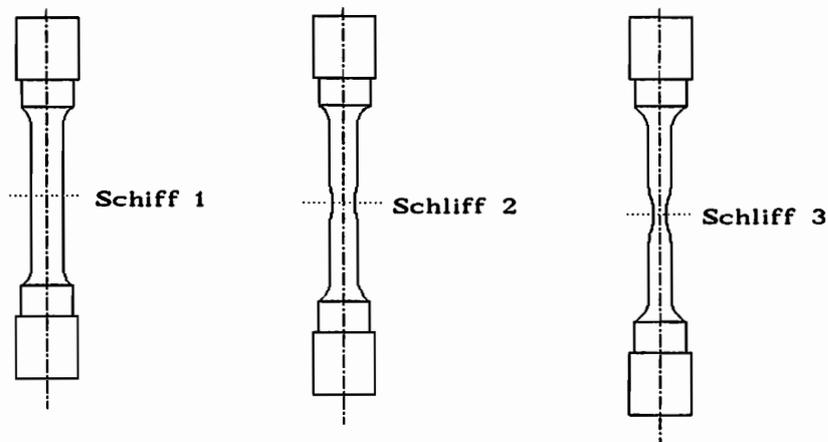


Abbildung 4.52: Schliffe der engsten Querschnitte

Dies in Abbildung 4.52 angedeutete Verfahren ist mit einem erheblichen zeitlichen und finanziellen Aufwand verbunden, da jedes Schliffbild einen neuen Versuch erfordert. Es gibt aber auch technische Probleme, die dazu führten, daß diese Methode hier nicht eingesetzt wurde. Da nach dem Beginn der Einschnürung die lokalen Dehnungen bei den mit konstanter Maschinengeschwindigkeit durchgeführten Versuchen rapide zunehmen, ist die Beendigung des Experimentes vor dem Bruch bei einer möglichst großen Dehnung sehr problematisch. Durch die bereits im Kapitel 4.3.1 angesprochene Elastizität der Prüfvorrichtung werden die Proben auch

nach dem Anhalten der beweglichen Einspannung noch zerrissen, wenn die Einschnürung sehr weit entwickelt ist und die Probe nicht unmittelbar entlastet wird.

Die geschilderten Gründe führten dazu, daß im Rahmen dieser Arbeit die Proben vollständig gebrochen wurden, um dann in der in Abbildung 4.53 dargestellten Weise die Materialschädigung zu untersuchen. Dies Verfahren ermöglicht es, mit einem Versuch die Mittelwerte des Porenanteils mehrerer Querschnitte zu bestimmen, die allerdings aus verschiedenen Bereichen der Einschnürung stammen. Die metallographischen Arbeitsgänge wurden mit der technischen Ausstattung des Instituts für Werkstoffe der Ruhr-Universität Bochum von Graf durchgeführt.

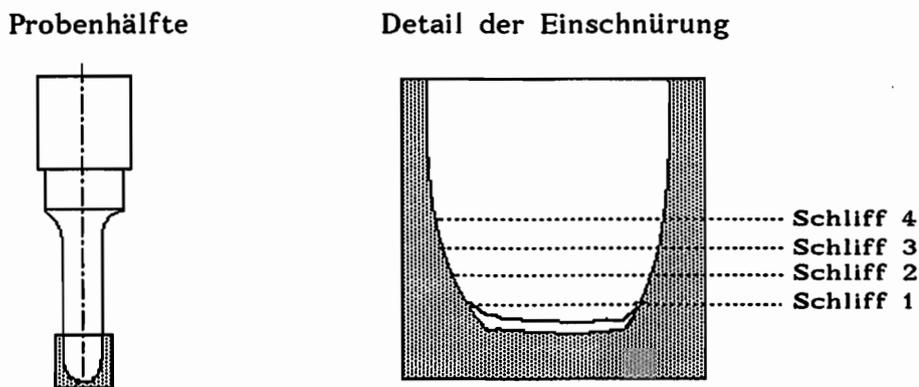


Abbildung 4.53: Schliffe im Einschnürbereich

Die Schliffbilderstellung umfaßte die folgenden Teilarbeiten:

- Trennen des Materials mit einer 0,3 bzw. 0,4mm Diamantscheibe bei Verwendung einer Trennemulsion
- Einbetten der Querschnitte
- Schleifen der eingebetteten Querschnitte unter ständiger Wasserkühlung mit den Schleifscheiben der Körnung 180, 320, 600 und 1000
- Beschallen der Schliffe in Äthylalkohol (ca. 5 Minuten)
- Polieren der Schliffe auf einer Diamantpolierscheibe mit  $7\mu\text{m}$  Diamantkorn
- Beschallen der Schliffe in Äthylalkohol (ca. 5 Minuten)
- Polieren der Schliffe auf einer Diamantpolierscheibe mit  $3\mu\text{m}$  Diamantkorn
- Beschallen der Schliffe in Äthylalkohol (ca. 5 Minuten)

- Fotografieren der Schlitze unter dem Mikroskop
- Entwicklung des Films und Hell-Dunkel-Auswertung der Negative

Bei der lichtmikroskopischen Betrachtung der geschädigten Querschnitte war ursprünglich an die Auswertung einer repräsentativen Serie von Kleinformat-Negativen gedacht, was in Abbildung 4.54 dargestellt ist. Bei einem rotationssymmetrischen Objekt läßt sich so der gesamte Querschnitt erfassen.

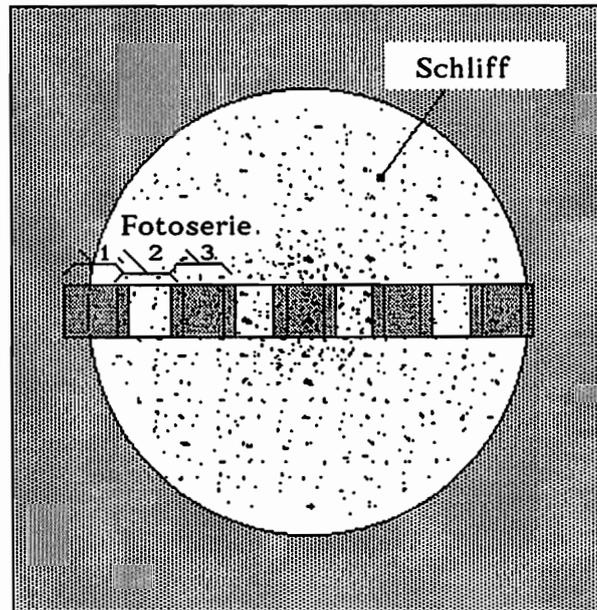


Abbildung 4.54: Schlitzauswertung mit Fotoserie

Wie sich im Verlauf der Auswertung zeigte, ist bezüglich der Porenanteile die Annahme von Rotationssymmetrie nicht gerechtfertigt, da sich bei jeweils gleichen Radien zum Teil sehr unterschiedliche Werte ermitteln lassen. Um nicht je nach Wahl der Fotoserie unterschiedliche Ergebnisse zu erhalten, wurde diese Methode durch eine vollständige Auswertung der Querschnitte mit einem 13x18cm großen Negativ ersetzt. Diese Negative werden, wie in Abbildung 4.55 skizziert, segmentweise bearbeitet. Die Ergebnisse der einzelnen Segmente lassen sich dann zu den im folgenden dargestellten Mittelwerten zusammenfassen.

Die bereits angesprochene Auswertung der Negative hat den Grund, daß so mit der Erstellung von Abzügen ein weiterer Arbeitsgang eingespart wird. Zusätzlich treten bei der Hell-Dunkel-Auswertung von Fotos große Probleme durch das von der Oberfläche reflektierte Streulicht auf. Die Negative wurden im Gegensatz dazu in der in Abbildung 4.56 dargestellten Weise durchleuchtet und direkt mit einer CCD-Videokamera der Firma

Sony (Modell AVC-D5CE) beobachtet. Die Weiterverarbeitung erfolgte mit einem digitalen Bildauswertungs-System der Firma Datalog, basierend auf der Karte Oculus-200 mit einer 7 Bit Auflösung bei 480x512 Pixeln. Die Segmentierung des Negativs wurde mit einer lichtundurchlässigen Folie vorgenommen. Der gesamte Aufbau war mittels eines Balges vom Umgebungslicht abgeschlossen.

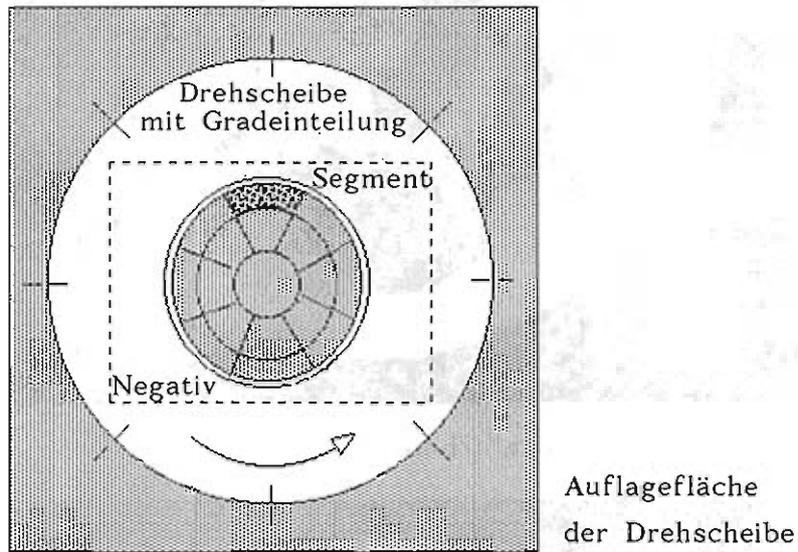


Abbildung 4.55: Schliffauswertung mit 13x18 cm Negativ

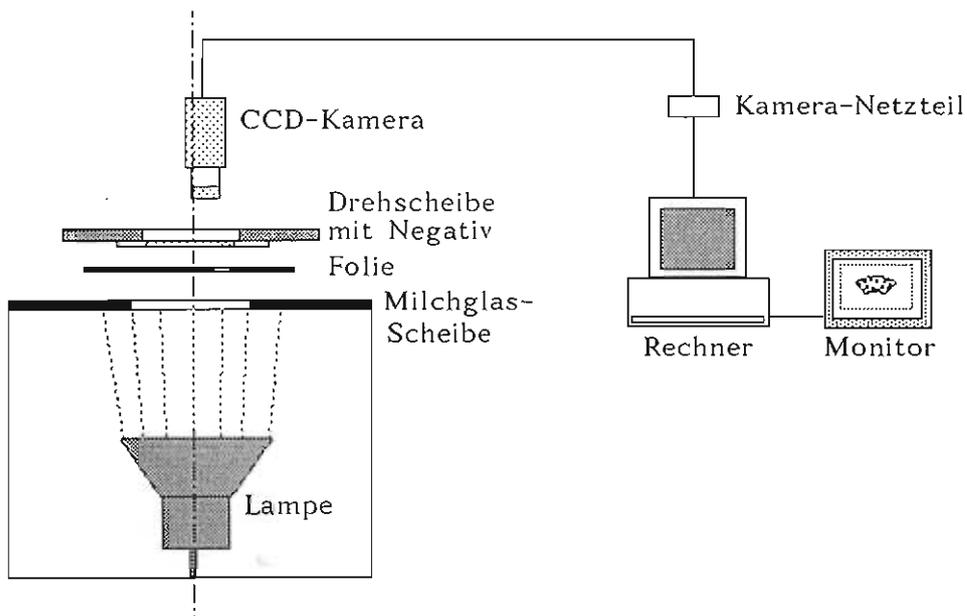


Abbildung 4.56: Digitale Bildauswertung der Schliffnegative

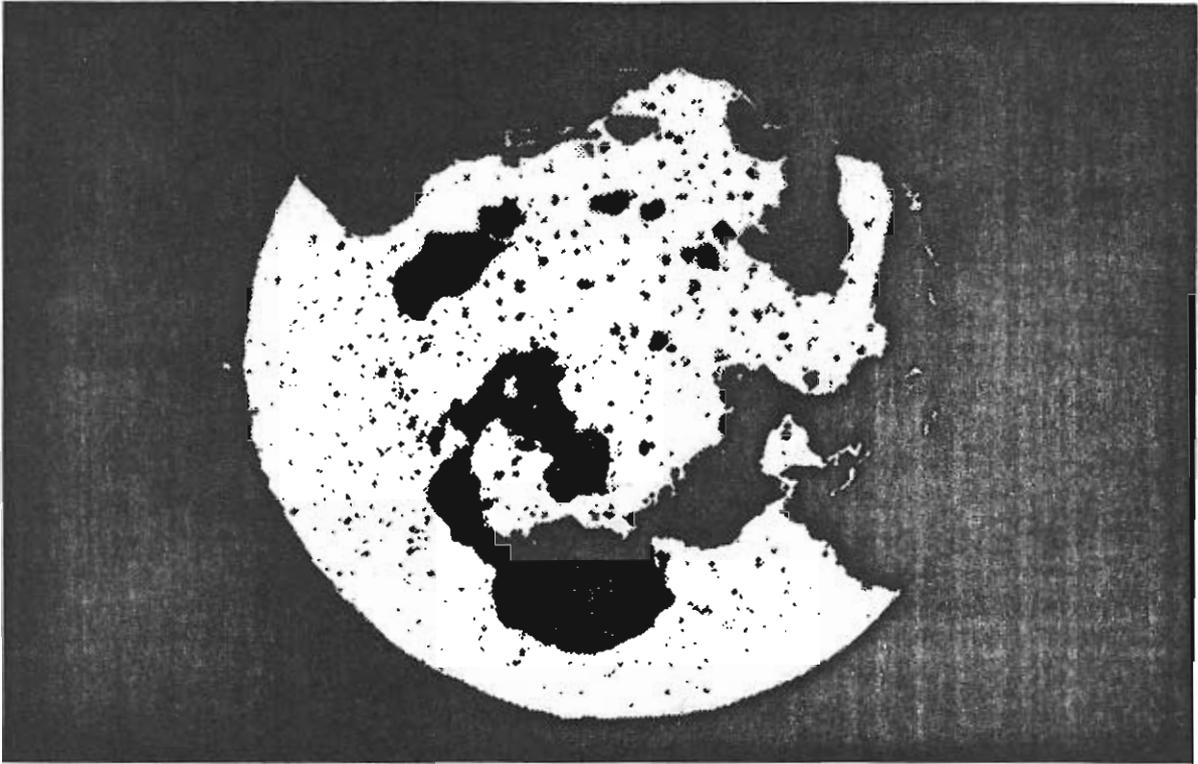


Abbildung 4.57a: Schliffbild,  $\bar{\epsilon}_R = 102\%$

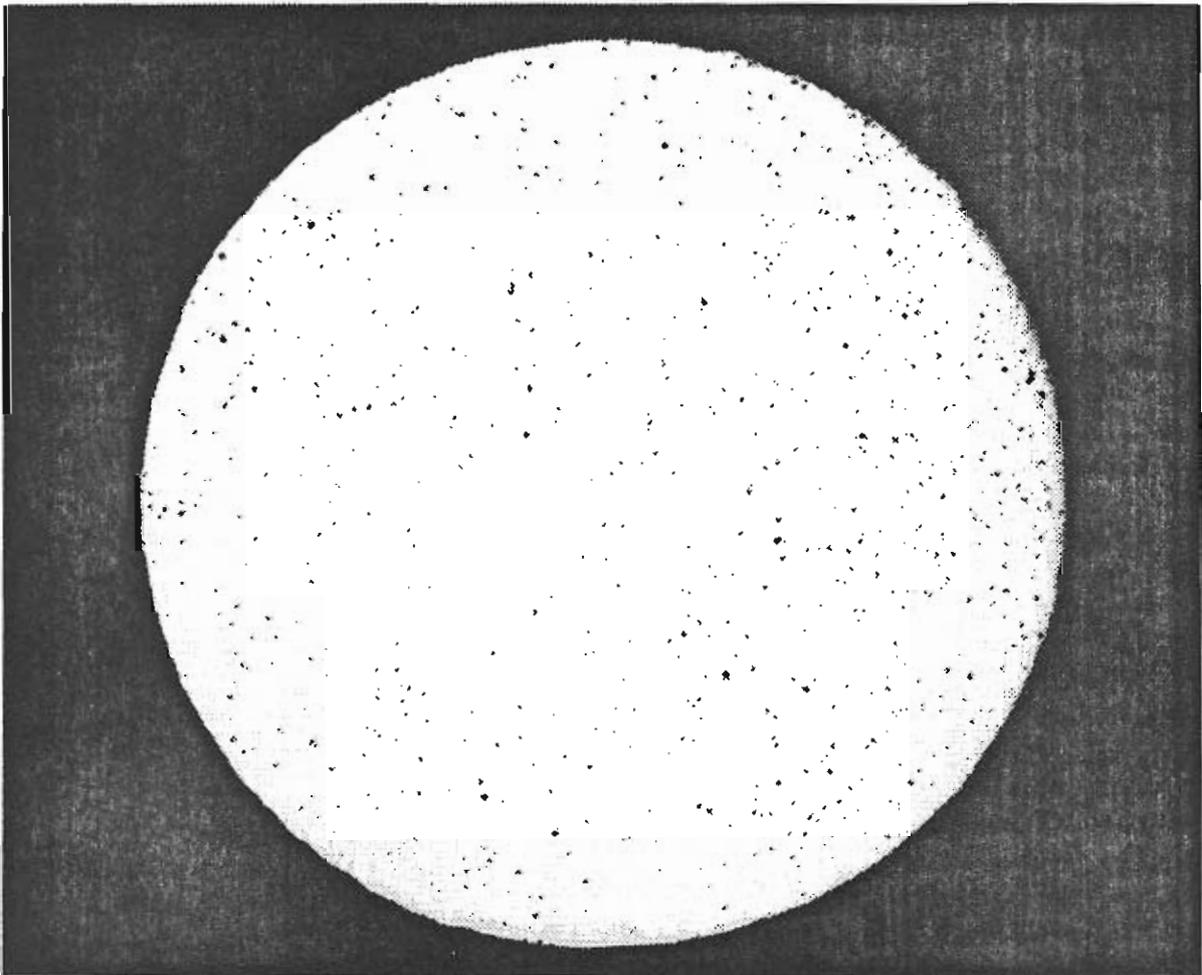


Abbildung 4.57d: Schliffbild,  $\bar{\epsilon}_R = 56\%$ ,  $\bar{\omega} = 0,97\%$

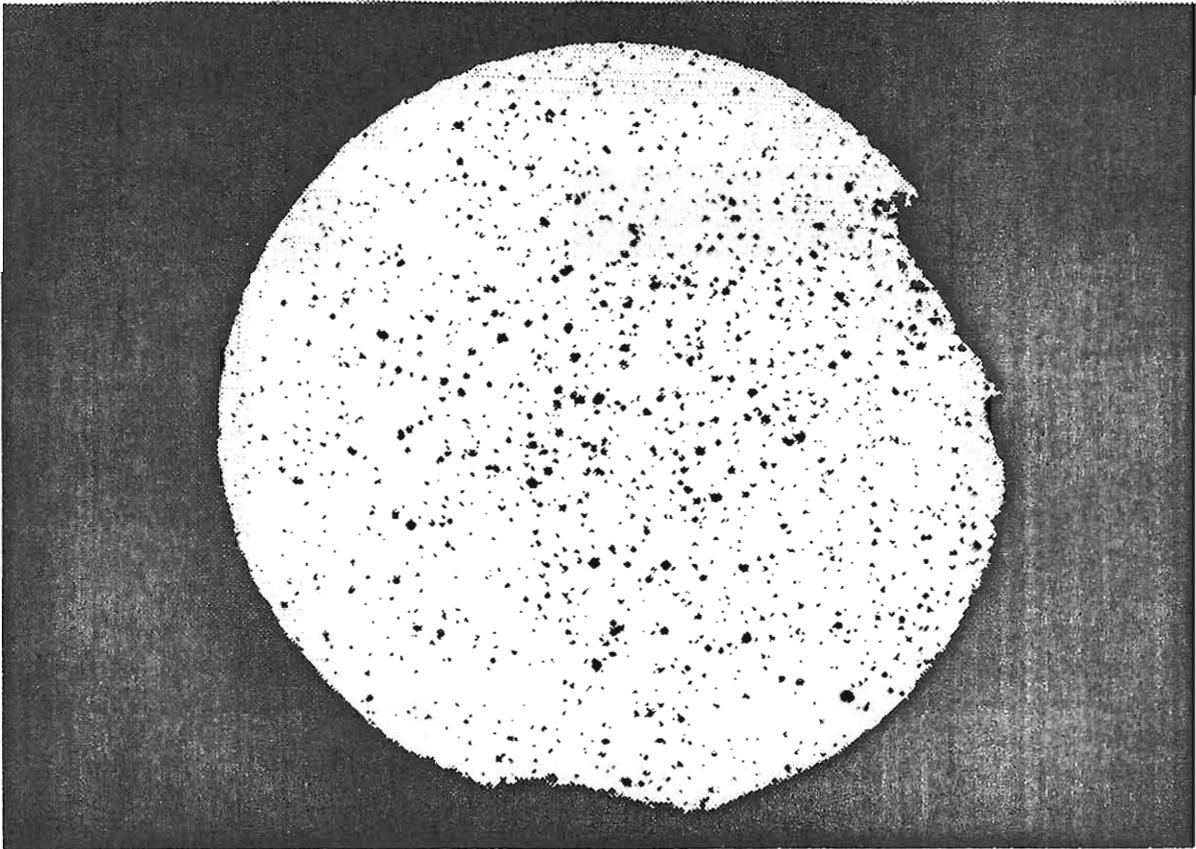


Abbildung 4.57b: Schliffbild,  $\bar{\epsilon}_R = 88\%$ ,  $\bar{\omega} = 9,61\%$

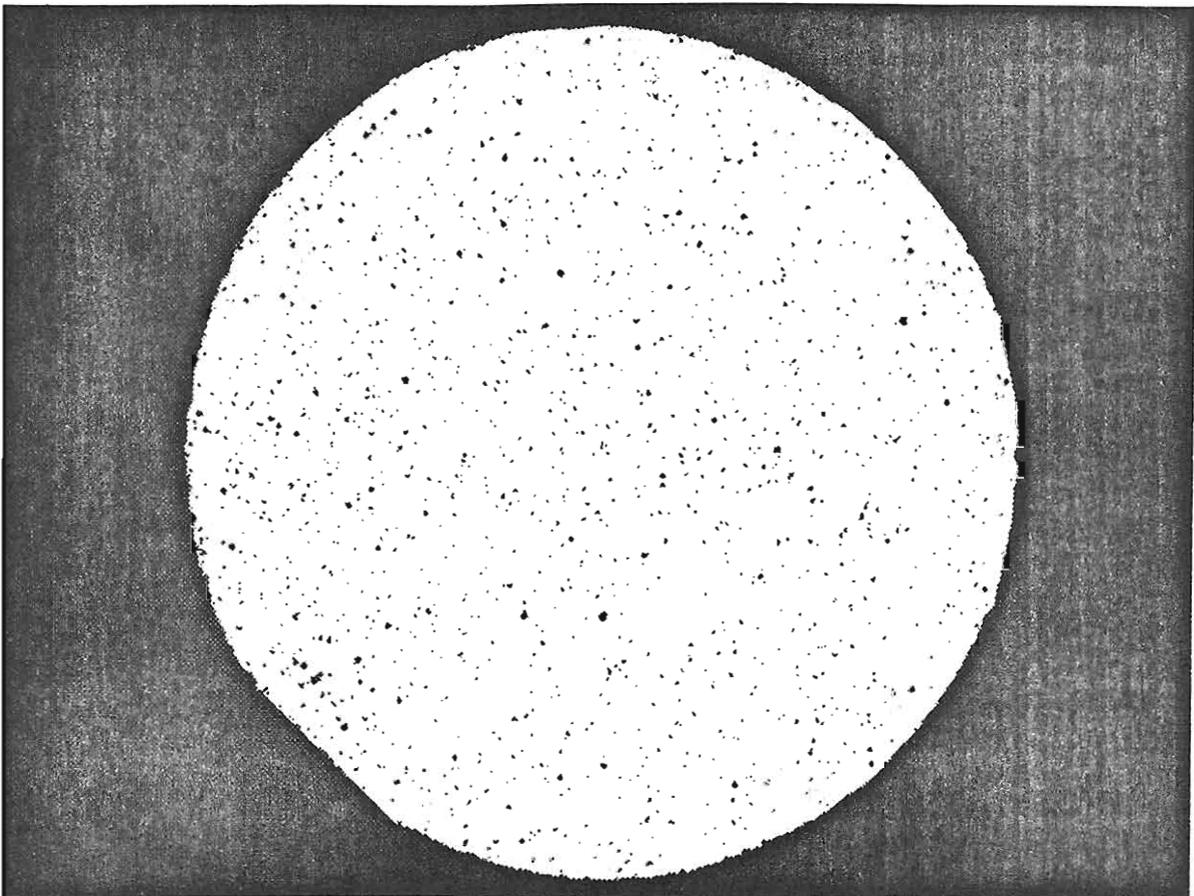


Abbildung 4.57c: Schliffbild,  $\bar{\epsilon}_R = 72\%$ ,  $\bar{\omega} = 3,20\%$

Die Abbildungen 4.57 a bis d zeigen vier Schliffe aus dem Einschnürbereich einer Probe mit der Anfangstemperatur  $78^{\circ}\text{C}$ , die mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$  zerrissen wurde. Abbildung 4.57a ist typisch für Schliffe, die in unmittelbarer Nähe des Bruchquerschnitts gemacht wurden. Dies hat zur Folge, daß einige der dunklen Bereiche durch die Unebenheit der Bruchfläche hervorgerufen werden. Die mit Poren durchsetzte Materie dieser Querschnitte befindet sich sowohl im abgebildeten oberen Teil der Probe als auch im unteren Bruchstück. Im Gegensatz zu den Schliffen b bis d entsprechen hier die dunklen Flächen nur zum kleineren Teil den zu ermittelnden Poren, da in den großen schwarzen Bereichen die materiellen Gegenstücke der zweiten Probenhälfte fehlen. Eine quantitative Auswertung der Hell-Dunkel-Anteile dieses Querschnitts wurde deshalb unterlassen.

Schliff b ist bis auf kleine Bereiche am Außenradius, die Teil der Scherlippen des zweiten Bruchstücks sind, vollständig, so daß eine Auswertung des Porenanteils möglich ist. Gleiches gilt für die Schliffe c und d.

Betrachtet man die Porenverteilung in den einzelnen Schliffen, so wird ein wesentlicher Unterschied zwischen den Schliffen im Zentrum und denen im Ansatz der Einschnürung deutlich. Im Zentrum der Lokalisierung (Abbildung 4.57 a und b) ist der Porenanteil in der Mitte der Schliffe am größten. Im Gegensatz dazu ist in dem weniger deformierten Querschnitt d der Randbereich stärker mit Poren durchsetzt als das Material in der Nähe der Probenachse. Dieses auffällige, bei nahezu allen untersuchten Proben ausgeprägte Verhalten wird im Kapitel 8.3 im Zusammenhang mit den FE-Berechnungen erneut angesprochen.

In Abbildung 4.48 sind die mittleren Porenanteile aller Schliffe dargestellt, die von bei Raumtemperatur deformierten Proben angefertigt wurden. Ein Anstieg der Schädigung mit wachsender Prozeßgeschwindigkeit läßt sich vermuten, jedoch aufgrund der Streubreite der Meßwerte nicht belegen, so daß im folgenden auf diesen Einfluß nicht näher eingegangen wird.

Eine Gesamtdarstellung aller Meßpunkte findet sich in Abbildung 4.59. Deutlich ist zu erkennen, daß die mittlere Schädigung einen Wert von ein Prozent erst bei relativ großen Deformationen von etwa 50 bis 60 Prozent erreicht. Betrachtet man den skizzierten Bereich, so stellt sich heraus, daß außerhalb bzw. am oberen Rand dieses Bandes Meßpunkte liegen, die bei Versuchsbedingungen entstanden sind, bei denen die Reckalterung verstärkt auftrat. Die gegebenenfalls vorhandenen Wechselwirkungen von Schädigung und Alterung können im Rahmen dieser Arbeit nicht näher untersucht werden. Es ist in diesem Zusammenhang anzumerken, daß die hier dargestellten Ergebnisse nicht den Anspruch erheben können, eine vollständige metallographische Untersuchung zu sein, die alle möglichen

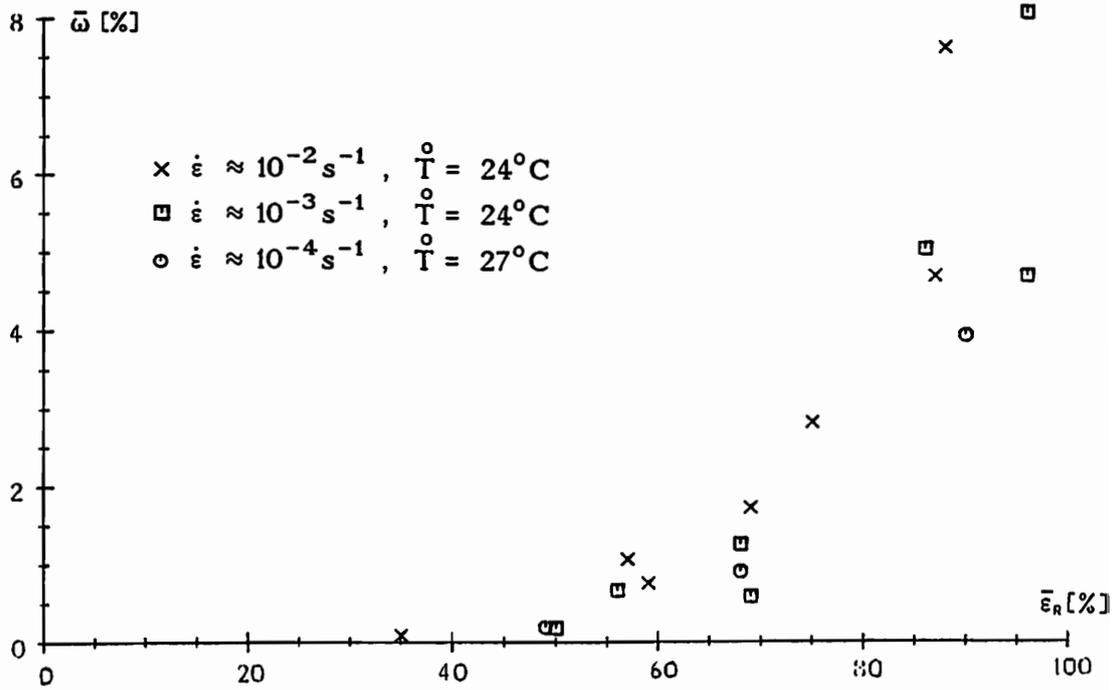


Abbildung 4.58: Schädigung von Versuchen mit  $\bar{T} \approx 25^\circ \text{C}$ , Probentyp I

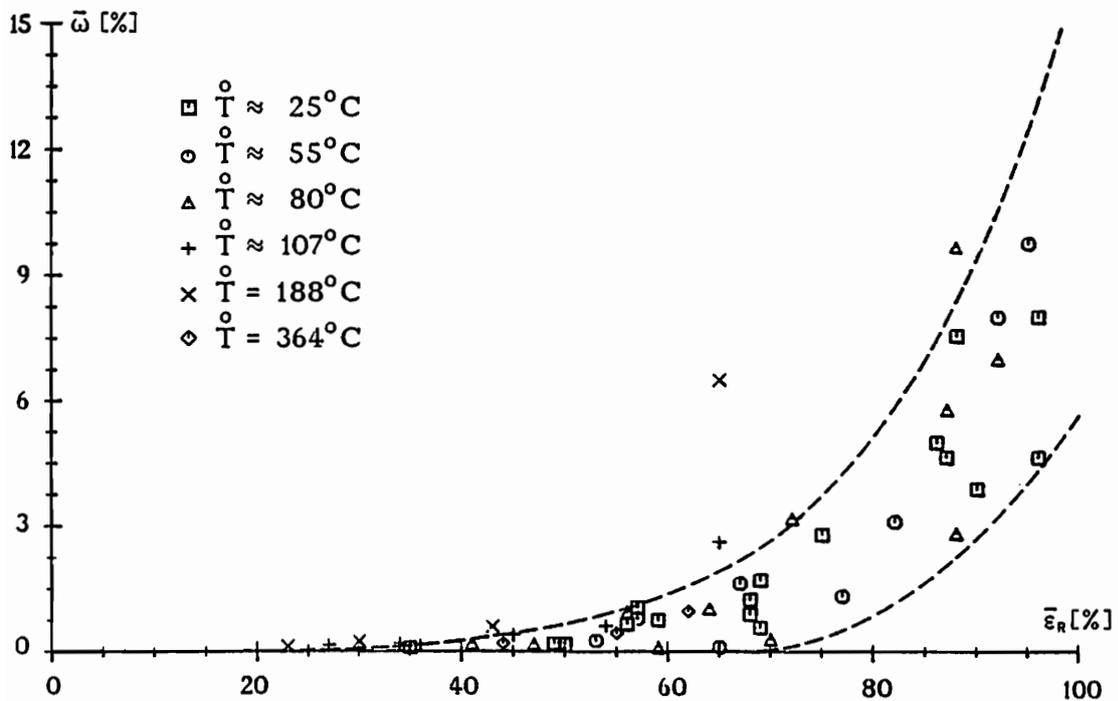


Abbildung 4.59: Schädigung von Versuchen mit Probentyp I

Beeinflussungen untersucht. Es mußte in Anbetracht des hohen Aufwands darauf verzichtet werden, bei allen Versuchstemperaturen mehrere Versuche mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten zu betrachten, wie dies bei Raumtemperatur geschehen ist. Weiterhin wurde darauf verzichtet zu prüfen, mit welcher Genauigkeit die Ergebnisse reproduzierbar sind, insbesondere bei der Verwendung der anderen Proben typen. Um einen Einfluß der Probengeometrie auf die Messungen auszuschließen, wurden nur Proben des Typs I metallographisch untersucht.

Trotz dieser Einschränkungen ist die Bedeutung dieser Messungen nicht zu unterschätzen. Sie zeigen qualitativ das gleiche Verhalten wie die von Perzyna und Drabik in [ 44 ] zitierten Werte von Fischer und von Le Roy, Embury, Edward und Ashby. Quantitativ sind sie für die hier vorliegende Arbeit wertvoller als die genannten Veröffentlichungen, da sie mit Proben des zu betrachtenden Stahls ermittelt wurden und dem Temperatureinfluß besondere Beachtung geschenkt wurde.

Detailliertere Aussagen über die Durchführung und Ergebnisse der einzelnen Messungen sowie über die hier nur kurz erläuterte Versuchsanordnung können bei Graf nachgelesen werden, der die Konstruktion des Meßaufbaus und die Messungen durchgeführt hat [ 45 ].

#### **4.5.2 Schädigungsermittlung durch Messung des E-Moduls**

In Anbetracht der geschilderten aufwendigen Arbeitsschritte zur Ermittlung der Schädigungsvariablen stellt sich die Frage nach effizienteren Methoden. Lemaitre [ 4 ] favorisiert die Bestimmung der Materialschädigung durch die Messung des sich verändernden Elastizitäts-Moduls des geschädigten Körpers. Betrachtet man die Gleichung (2.73), so sind die elastischen Deformationen abhängig von den effektiven Spannungen. Die elastischen Kenngrößen sind die Werte des Matrixmaterials, die von der Schädigung näherungsweise unbeeinflußt bleiben. Trotzdem ändert sich der Elastizitätsmodul des geschädigten Materials, wenn man die Beziehung zwischen den Cauchy-Spannungen und den elastischen Dehnungen betrachtet. Durch das Verhältnis der effektiven zu den Cauchy-Spannungen (Gleichung (2.45)) ergibt sich die Größe des E-Moduls des geschädigten Materials

$$\tilde{E} = E(1 - \omega) \quad . \quad (4.7)$$

Durch die Messung der Änderung dieses scheinbaren E-Moduls  $\tilde{E}$  ermittelt Lemaitre mit (4.7) die Werte der Materialschädigung  $\omega$ . Im Rahmen dieser Arbeit wurden basierend auf diesem Konzept ebenfalls zwei Versuche durchgeführt, deren Belastungskurve zur Ermittlung des jeweils aktuellen E-Moduls durch Entlastungen unterbrochen wurde. Einer dieser Versuche ist in Abbildung 4.60 im Vergleich mit einem monotonen Experiment

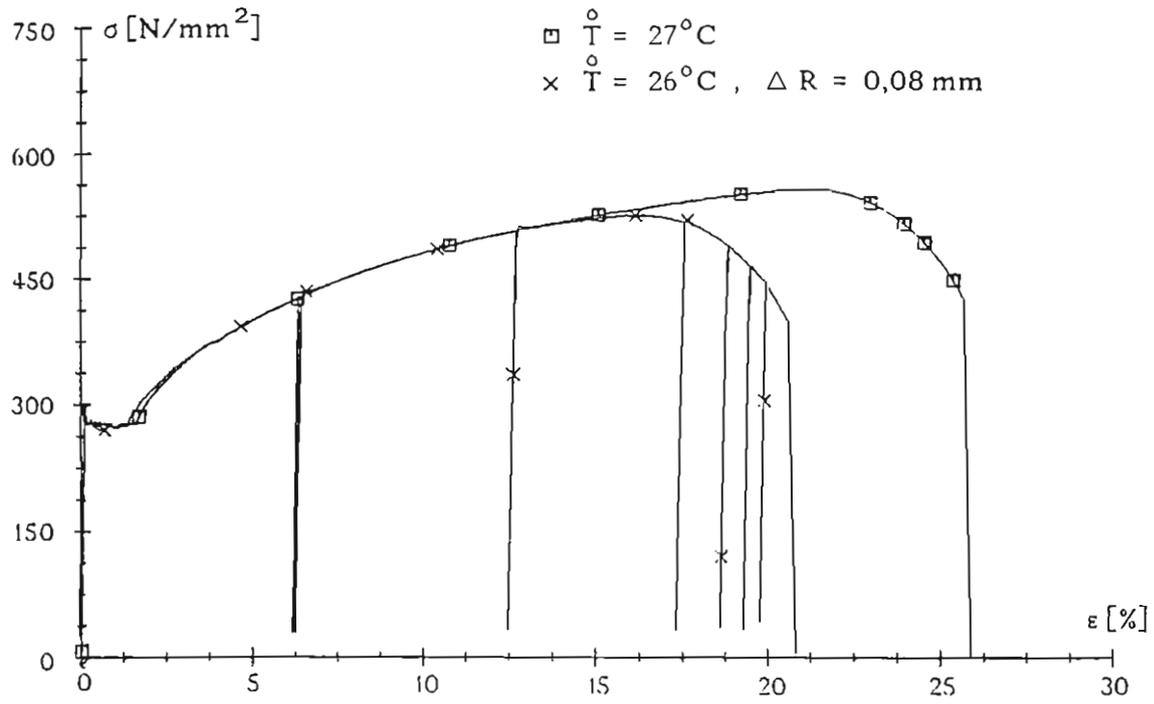


Abbildung 4.60: Experiment mit Entlastungen, Typ III ,  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$

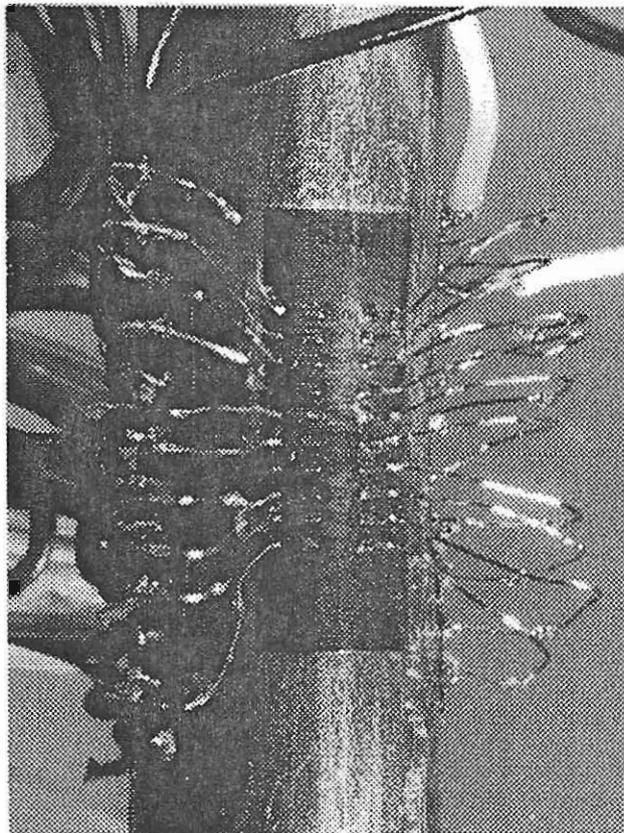


Abbildung 4.61: DMS-Kette

dargestellt. Das deutlich frühere Einschnüren nach zwischenzeitlich nahezu identischem Verlauf der beiden Spannungs-Dehnungs-Kurven ist vermutlich auf die deutliche mittige Querschnittsreduzierung von  $\Delta R = 0,08 \text{ mm}$  zurückzuführen. Ein Einfluß der Zwischenentlastungen und der damit verbundenen Versuchspausen kann zusätzlich dazu beigetragen haben. Daß diese Pausen Veränderungen des Verfestigungszustands bewirken können, zeigen die kurzen Spannungssteigerungen nach den Entlastungen. Dieser Alterungs-Effekt trat im zweiten Versuch, der über Nacht unterbrochen wurde, noch wesentlich deutlicher auf.

Die Schwächung der Proben bei diesen Experimenten war deshalb erforderlich, weil die schädigungsbedingten Änderungen des E-Moduls nur lokal auftreten und zur Durchführung von lokalen Messungen der Ort der Lokalisierung vorgegeben sein muß. Wie bei Lemaitre wurden auch hier Messungen mit Dehnungs-Meßstreifen durchgeführt. Da durch die Experimente mit Thermoelementen bekannt war, daß der exakte Ort der Lokalisierung sehr schwer vorherzusagen ist, wurden zunächst Messungen mit den in Abbildung 4.61 dargestellten DMS-Ketten der Firma HBM (Typ 1/120 KY11) durchgeführt. Dies geschah, um mehrere Meßpunkte im Bereich des engsten Querschnitts aufzeichnen zu können und so das Zentrum der Einschnürung zu lokalisieren. Diese Möglichkeit besteht aber nur in der Anfangsphase des Versuchs, da die DMS-Ketten bei einer stärkeren, mit der Einschnürung verbundenen Krümmung der Probenoberfläche nicht mehr eingesetzt werden können. Aus diesem Grund wurden im weiteren Verlauf des Experiments einzelne DMS der genannten Ketten und parallel dazu DMS des Typs 0,6/120 LY11 verwendet.

Der geringe Meßbereich von Dehnungs-Meßstreifen hatte zur Folge, daß die DMS durch die plastischen Deformationen jeweils zerstört wurden. Deshalb mußten bei jeder Zwischenentlastung neue DMS aufgeklebt werden, so daß sich immer wieder das Problem der exakten Fixierung des Meßstreifens am engsten Querschnitt stellte. Danach wurde die Probe mit unterschiedlichen Spannungsdifferenzen elastisch be- und entlastet, um mehrere Messungen des E-Moduls durchzuführen.

Trotz der beschriebenen Bemühungen war das Ergebnis ernüchternd, da die Meßwerte bei unterschiedlichen Spannungsamplituden einer Meßfolge in der Größenordnung schwankten, in der auch die durch die fortschreitende Schädigung bedingten Änderungen des E-Moduls auftraten. Auf eine Zusammenstellung dieser Meßwerte wird deshalb hier verzichtet.

Mit der Dokumentation dieser unbefriedigenden Ergebnisse soll nicht die Möglichkeit angezweifelt werden, den Schädigungszustand des Materials mit E-Modul-Messungen ermitteln zu können. Die umfangreichen von Lemaitre veröffentlichten Messungen belegen, daß dies möglich ist. Es

soll hier aber deutlich gemacht werden, daß auch bei dieser Methode erhebliche Probleme auftreten, die nur mit entsprechender Erfahrung und einem beträchtlichen Aufwand gelöst werden können.

Da diese Methode, im Gegensatz zur Schädigungsermittlung mit Schliffbildern, den eigentlichen Versuchsablauf unterbricht und darüberhinaus bei Warmversuchen mit dem Klappofen weitere noch nicht überschaubare Probleme (Temperaturabgleich, DMS-Klebstoff, Abkühlpausen zur Befestigung der DMS, etc.) erzeugt, wurden im Rahmen dieser Arbeit keine weiteren Versuche dieser Art durchgeführt.

An dieser Stelle möchte ich all denen herzlich danken, die mit ihren Erfahrungen und ihrem Einsatz dazu beigetragen haben, den experimentellen Teil dieser Arbeit zu verwirklichen!

## 5. Reckalterung

Das bei den im Kapitel 4 dargestellten Experimenten aufgetretene Phänomen der Reck- oder Verformungsalterung beruht auf dem Zusammenwirken von Versetzungen, die bei plastischen Deformationen erzeugt werden, mit den ab einer gewissen Temperatur mobilen, auf Zwischengitterplätzen eingelagerten Kohlenstoff- und Stickstoff-Atomen. Man unterscheidet bei diesem, den Werkstoff verfestigenden Mechanismus statische und dynamische Alterungsvorgänge.

Im Fall der statischen Reckalterung findet zunächst ein Prozeß mit plastischen Formänderungen, beispielsweise ein Zugversuch bei Raumtemperatur, statt. Wird die Probe nach der Entlastung bei einer Temperatur ausgelagert, die eine ausreichende Mobilität der C- und N-Atome im  $\alpha$ -Eisen ermöglicht, so tritt Reckalterung auf. Bei der Wiederbelastung dieser Probe zeigt sich eine erhöhte Fließspannung, und es kann zur erneuten Ausbildung eines instabilen Fließbereiches kommen [46]. Die Größe des durch die Alterung hervorgerufenen Spannungszuwachses hängt sowohl von der Temperatur als auch von der Dauer der Auslagerung ab.

Wird anstelle der Raumtemperaturversuche mit zwischengeschalteter Auslagerung ein Deformationsprozess bei erhöhter Temperatur durchgeführt, so spricht man von dynamischer Reckalterung, da in diesem Fall der Reck- und der Alterungsvorgang gleichzeitig auftreten. Der so hervorgerufene Verfestigungszuwachs hängt nun von der Versuchstemperatur und von der Deformationsgeschwindigkeit ab, die die Alterungszeit limitiert.

Neben dem bereits angesprochenen Verfestigungszuwachs sind auch andere Charakteristika der im Kapitel 4 dargestellten Versuche typisch für das Auftreten von dynamischer Reckalterung. Sie werden von verschiedenen Autoren (z.B.: Li und Leslie [47] oder Sachdev [48]) beschrieben und sind im folgenden unter Angabe der den entsprechenden Effekt aufweisenden Abbildungen aufgeführt.

Die Fließkurven in einem speziellen Temperaturbereich sind gezackt und verlaufen zum Teil deutlich über denen der Raumtemperaturversuche (Abbildungen 4.8 bis 4.10).

Die maximale Verformbarkeit des Werkstoffes wird stark eingeschränkt (Abbildungen 4.8 bis 4.10). Die entsprechende Aussage bei Sachdev bezieht sich auf die bei Umformprozessen wesentliche Verformbarkeit vor dem Einsetzen der Lokalisierung. Abbildung 4.36 belegt ergänzend dazu, daß auch die maximalen lokalen Deformationen in der Regel ein entsprechendes Verhalten zeigen.

Die Abhängigkeit der Versuche mit gleicher Anfangstemperatur von der Deformationsgeschwindigkeit ist gering (Abbildung 4.13) oder negativ (Abbildungen 4.11 und 4.12).

Die Experimente von Sachdev [48] zeigen, daß das Auftreten von dynamischer Reckalterung an das Vorhandensein von freien Zwischengitteratomen gebunden ist, und daß der Effekt mit der Anzahl dieser ungebunden im Gitter gelösten Atome wächst. Der Grund dafür liegt darin, daß die im  $\alpha$ -Eisen eingelagerten C- und N-Atome durch das Atomgitter diffundieren und sich bevorzugt an Versetzungen aufhalten. Dies führt dazu, daß diese Versetzungen ihre Beweglichkeit verlieren. Der Deformationsprozeß kann dann nur fortschreiten, wenn entweder immer neue Versetzungen gebildet werden, oder die blockierten Versetzungen sich mit den Fremdatomen bewegen, bzw. von diesen losgerissen werden. Allen Fällen ist gemeinsam, daß dies nur unter Erhöhung der anliegenden Spannung möglich ist, was die starke Verfestigung des Materials bei auftretender Reckalterung erklärt. Auch die Zacken der Fließkurven sind so verständlich, da jeweils nach dem Losreißen oder der Neubildung von Versetzungen ein Gleiten bei geringeren Spannungen möglich ist, bis erneut die C- und N-Atome zu den beweglichen Versetzungen diffundiert sind und sie blockieren.

Von den unterschiedlichen in [48] untersuchten Stahlsorten zeigten die Proben aus AISI1008 (entspricht laut [49] der deutschen Werkstoff-Nummer 1.0204 bzw. UQSt 36) mit vielen freien Zwischengitteratomen den größten Verfestigungszuwachs durch Reckalterung, während ein sogenannter "IF-Stahl" (interstitial free) mit dem geringen Kohlenstoffanteil von 0,012% keine Anzeichen von Reckalterung aufwies. Der Vergleich weiterer Stähle verdeutlicht, daß nicht der Kohlenstoff- und Stickstoffgehalt selbst, sondern nur die frei im Gitter beweglichen C- und N-Atome die Alterungsanfälligkeit des Werkstoffs bewirken. Entsprechende Untersuchungen wurden auch von Li und Leslie [47] mit AISI-Stählen durchgeführt, die die DIN-Bezeichnungen UQSt 36, Ck 10, C 22, C 35 und 20 Mn 5 tragen. Es zeigt sich, daß das bei diesen Stählen bedeutendste Legierungselement Mangan die Stärke der Reckalterung verringert, da sich Mn-C und Mn-N Paare bilden und so die Mobilität der C- und N-Atome reduziert wird.

Da auch bei verschiedenen Chargen einer Stahlsorte im Rahmen der genormten Toleranzen Abweichungen der chemischen Zusammensetzung auftreten können, wurden sowohl die von Zdebel in [18] verwendeten als auch die in dieser Arbeit untersuchten Ck 15-Proben einer Richtanalyse unterzogen.

	Ck 15 - Proben von Zdebel	Ck 15 - Proben von Feldmüller	Toleranzen von Ck 15 [ 49 ]
<b>C</b>	0,138	<b>0,177</b>	0,12 - 0,18
<b>Si</b>	0,249	<b>0,260</b>	0,15 - 0,35
<b>Mn</b>	0,482	<b>0,417</b>	0,30 - 0,60
<b>P</b>	0,012	<b>0,014</b>	≤ 0,035
<b>S</b>	0,033	<b>0,014</b>	≤ 0,035
<b>Cr</b>	0,061	<b>0,052</b>	
<b>Ni</b>	0,057	<b>0,100</b>	
<b>Mo</b>	0,0079	<b>0,012</b>	
<b>Cu</b>	0,112	<b>0,250</b>	
<b>Ti</b>	0,0023	<b>0,0024</b>	
<b>Al</b>	0,032	<b>0,0069</b>	
<b>V</b>	0,0007	<b>0,0007</b>	
<b>Sn</b>	0,025	<b>0,037</b>	
<b>W</b>	0,012	<b>0,012</b>	
<b>Fe</b>	98,78	<b>98,64</b>	

Chemische Zusammensetzung von Ck15 (Werkstoff 1.1141) in Gewichtprozent

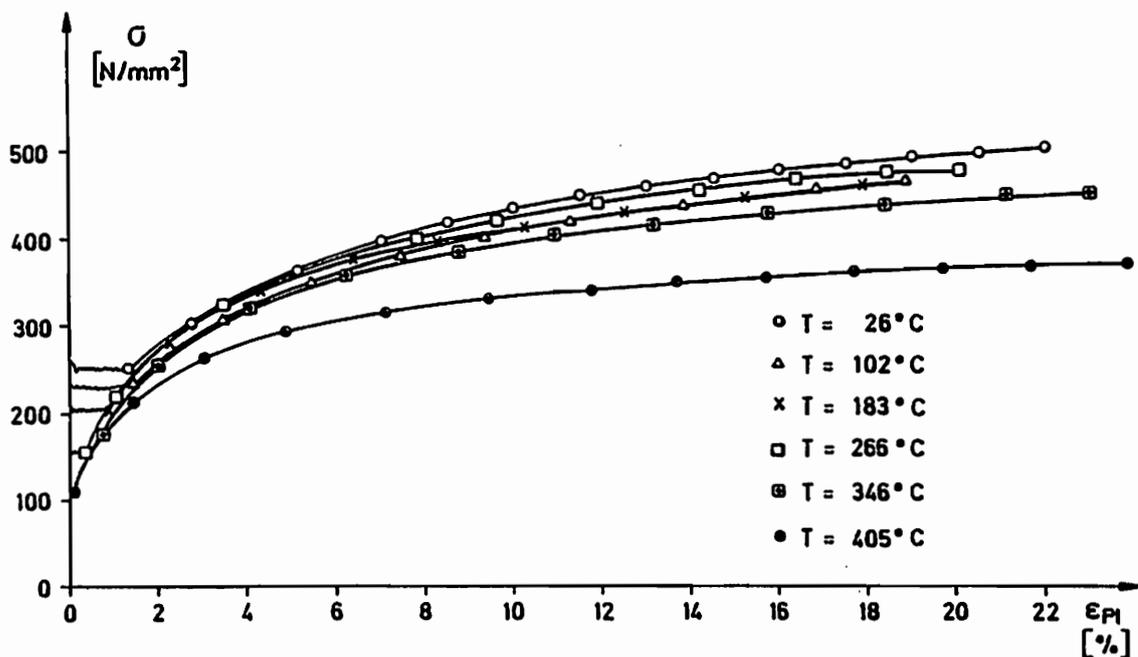


Abbildung 5.1: Zugversuche mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} s^{-1}$  aus [ 18 ]

Die in der Tabelle angegebenen Werte zeigen, daß in beiden Fällen der untersuchte Stahl in den für Ck 15 angegebenen Toleranzen liegt, daß sich aber die Zusammensetzungen deutlich unterscheiden. Im Hinblick auf die angeprochenen Zusammenhänge ist es besonders interessant, daß die von Zdebel verwendeten Proben wesentlich weniger Kohlenstoff, aber mehr Mangan enthalten. Die von Zdebel gemessene Temperaturabhängigkeit der Spannungs-Dehnungs-Kurven ist in Abbildung 5.1 wiedergegeben und zeigt nur einen geringen Reckalterungseinfluß durch die bei 266 °C wieder ansteigende Verfestigung. Dieser deutliche Unterschied zu dem Verhalten der in dieser Arbeit untersuchten Proben (vgl. Abbildung 4.8) wird verständlich durch die differierenden Kohlenstoff- und Mangangehalte und deren die Alterung fördernde bzw. hemmende Wirkung.

Im folgenden soll noch angesprochen werden, warum insbesondere der bei 364 °C durchgeführte Versuch trotz erhöhter Temperatur einen glatten Verlauf und große Duktilität zeigt. Das sehr frühe Einschnüren der Versuche bei 84 °C und 110 °C steht in direktem Zusammenhang mit den instabilen, stark gezackten Verfestigungskurven, die phänomenologisch betrachtet von der negativen Geschwindigkeitsabhängigkeit der Spannungs-Dehnungs-Kurven bei diesen Temperaturen hervorgerufen werden. Wenn Deformationen bei größeren Geschwindigkeiten nur kleinere Spannungen benötigen, führt dies zu inhomogenen Verformungen entlang der Probenachse und letztlich zu einer frühen Lokalisierung, die aber bei stark streuenden Dehnungen eintritt (Abbildung 4.10). Im Gegensatz dazu besitzen die Versuche bei Temperaturen, die eine positive Geschwindigkeitsabhängigkeit der Spannungsverläufe gewährleisten, glatte Kurven. Deshalb ist davon auszugehen, daß auch die Experimente bei 313 °C und 364 °C keine negative Abhängigkeit von den Verzerrungsgeschwindigkeiten mehr aufweisen, auch wenn dies ohne entsprechende Versuche nicht belegt werden kann. Gestützt wird diese Aussage durch die Tatsache, daß sich die Beweglichkeit von Zwischengitteratomen mit steigender Temperatur wesentlich vergrößert. Dies bewirkt, daß sich bei ausreichend hohen Temperaturen selbst bei großen Deformationsgeschwindigkeiten ein thermodynamisches Gleichgewicht zwischen den mit Atomen umlagerten Versetzungen und dem restlichen Kristall einstellt. Das bedeutet, daß ein Sättigungswert erreicht ist und keine weiteren Atome zu den Versetzungen streben. Dies führt dazu, daß der Deformationsvorgang wesentlich homogener ablaufen kann als bei geringeren Temperaturen, was zu glatteren Verfestigungskurven und wieder ansteigender Duktilität führt.

Bei einer phänomenologischen Modellierung dieses Phänomens sollte deshalb unterschieden werden zwischen einer Basisverfestigung, die nicht von der Zeit bzw. Deformationsgeschwindigkeit abhängt, und den Geschwindigkeitseinflüssen, die sich aus viskosen Effekten und Alterung zusammensetzen.

## 6 Ermittlung der Materialfunktionen

### 6.1 Verfestigungsfunktion

An dieser Stelle muß gesagt werden, daß das in Kapitel 5 angesprochene Phänomen der dynamischen Reckalterung mit der im Rahmen dieser Arbeit behandelten zeitunabhängigen plastischen Theorie grundsätzlich nicht beschrieben werden kann. Deshalb ist die Gültigkeit der im folgenden ermittelten Parameter auf Umformvorgänge beschränkt, bei denen keine Zeitabhängigkeit durch diesen Verfestigungsmechanismus entsteht. Dies bedeutet, daß entweder eine ausreichende Prozeßgeschwindigkeit die Alterungszeiten so stark reduziert, daß der Effekt zu vernachlässigen ist, oder daß die Deformation in einem Temperaturbereich durchgeführt wird, in dem die Reckalterung eine untergeordnete Rolle spielt. Dies gilt insbesondere für die Experimente mit der Anfangstemperatur von etwa 25°C, die nur mit größeren Deformationsgeschwindigkeiten ( $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$ ) in den kritischen Temperaturbereich vorstoßen. Derartige, von der Reckalterung weitgehend unbeeinflusste Prozesse können mit der hier betrachteten Theorie berechnet werden. Im Kapitel 8 sind entsprechende experimentelle und numerische Ergebnisse vergleichend dargestellt.

Die mit der Versuchsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$  verbundene Temperaturerhöhung hat zur Konsequenz, daß derartige Experimente zur Ermittlung der Temperaturabhängigkeit der Verfestigungsfunktion  $k^2$  ungeeignet sind. Zu diesem Zweck werden vorzugsweise [16, 18] nahezu isotherme Versuche mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$  betrachtet. In den genannten Arbeiten wird mit der Auswertung dieser langsamen Versuche das Ziel verfolgt, den Einfluß der Temperatur auf die Verfestigungsfunktion zu ermitteln, um diese Werte als Grundlage zur Bestimmung viskoser Effekte verwenden zu können. Diese sind im allgemeinen mit deutlichen Temperaturerhöhungen gekoppelt, so daß sie sich experimentell nicht von den Temperatureinflüssen trennen lassen.

Die geschilderte, separierte Ermittlung der Temperaturabhängigkeit von  $k^2$  setzt voraus, daß diese Beziehung eindeutig ist und nicht von der Versuchsgeschwindigkeit abhängt. Diese Voraussetzung verliert mit dem Auftreten von dynamischer Reckalterung ihre Berechtigung, da gerade die isothermen Versuche mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$  durch ihre langsame Prozeßführung diesem Alterungsmechanismus extrem unterworfen sind. Aus diesem Grund stützt sich die folgende Auswertung im wesentlichen auf die Meßwerte der Versuche mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-3} \text{s}^{-1}$ . Diese Entscheidung ist als Kompromiß zwischen den beiden sich widersprechenden Forderungen zu verstehen, daß zum einen die auszuwertenden Experimente keine zusätzliche Verfestigung durch Reckalterung enthalten sollen, und zum anderen weitgehend konstante Versuchstemperaturen verlangt sind.

Aus dem Temperaturbereich, der in besonders starker Weise von der Reckalterung betroffen ist, wurden keine Versuche zur Ermittlung von  $k^2$  berücksichtigt. Die Auswertung stützt sich auf die lokalen und globalen Meßwerte der Experimente mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  bei  $25^\circ\text{C}$ ,  $55^\circ\text{C}$  und  $80^\circ\text{C}$  (nur globale Meßwerte). Ergänzend werden die Messungen des Versuchs bei  $364^\circ\text{C}$  mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  in die Ermittlung von  $k^2$  mit einbezogen, da sich dies Experiment durch große Duktilität und durch einen vollständig glatten Meßkurvenverlauf auszeichnet (vgl. Kapitel 5).

Da das im Kapitel 2 vorgestellte Stoffgesetz keinen kinematischen Verfestigungsanteil enthält, läßt sich für die homogene Phase des Zugversuchs der Zusammenhang

$$k^2 = \frac{2}{3} (s_3^3)^2 \approx \frac{2}{3} \sigma^2 \quad (6.1)$$

angeben, so daß  $k^2$  direkt aus den globalen Meßwerten der axialen Spannung  $\sigma$  ermittelt werden kann. Der Unterschied zwischen den effektiven und den Cauchy-Spannungen ist hier vernachlässigbar, da vor der Lokalisierung keine nennenswerte Materialschädigung auftritt.

Der nichtlineare Verlauf der Meßdaten läßt sich mit dem folgenden Ansatz für die Verfestigungsfunktion gut erfassen

$$k^2(a, T) = a_k(T) [1 - \exp [b_k(T) a]] + c_k(T) a + d_k(T). \quad (6.2)$$

Die darin auftretenden temperaturabhängigen Parameter  $a_k(T)$  bis  $d_k(T)$  werden in einem ersten Arbeitsschritt aus den Spannungs-Dehnungs-Kurven der Zugversuche bei verschiedenen Versuchstemperaturen ermittelt und in einem weiteren Schritt als Funktion der Temperatur ausgedrückt.

Grundsätzlich stellt sich bei allen Stoffgesetzen die Frage nach einer Strategie zur Anpassung der Materialfunktionen. Diese sind selbst bei relativ einfachen Theorien in der Regel gekoppelt, so daß eine sukzessive Ermittlung der einzelnen Größen und Funktionen nicht möglich ist. In solchen Fällen lassen sich Optimierungsmethoden wie das bei Scholz [50] beschriebene Gradientenverfahren oder die von Fornefeld [11] erläuterte Evolutionsstrategie mit Erfolg einsetzen. Im Gegensatz zu einer sofortigen Verwendung eines derartigen, oft sehr rechenzeitaufwendigen Verfahrens wird hier versucht, durch Vereinfachungen und analytische Betrachtungen die Verfestigungsfunktion näherungsweise anzugeben. Dieses Vorgehen ist deshalb attraktiv, weil es ohne großen numerischen Aufwand eine erste Approximation der gesuchten Materialfunktion liefert. Zusätzlich können aus den so ermittelten Zusammenhängen für eine gegebenenfalls nachgeschaltete Optimierung Anfangswerte und Hinweise zur Formulierung der Zielfunktion gewonnen werden.

Die im folgenden angesprochene Ermittlung der Materialfunktionen ist im Bereich der homogenen Deformationen sehr genau, verwendet aber die stark vereinfachende Annahme, daß auch die lokalen Spannungs-Dehnungs-Messungen im engsten Querschnitt der Einschnürung mit (6.1) in Werte von  $k^2$  umgerechnet werden können, und daß auch für die lokalen Mittelwerte die Beziehungen des homogenen Zugs näherungsweise anwendbar sind.

Die diskreten Wertepaare  $(\sigma, \varepsilon)$  werden zunächst mit der Funktion

$$\sigma(\varepsilon) = a_\sigma [1 - \exp[b_\sigma \varepsilon]] + c_\sigma \varepsilon + d_\sigma \quad (6.3)$$

approximiert. Für den Versuch mit der Anfangstemperatur  $53^\circ\text{C}$  ist dies beispielhaft in Abbildung 6.1 mit den Werten  $a_\sigma = 252 \text{ N/mm}^2$ ,  $b_\sigma = -17$ ,  $c_\sigma = 350 \text{ N/mm}^2$  und  $d_\sigma = 265 \text{ N/mm}^2$  dargestellt.

Mit der Evolutionsgleichung (2.78) und  $\sigma \approx s_3^3$  ergibt sich die interne Variable  $a$  in Abhängigkeit von den plastischen Dehnungen

$$a = \int \sigma \, d\varepsilon_p \quad , \quad a(\varepsilon_p = 0) = 0 \quad . \quad (6.4)$$

Verwendet man (6.3) als Näherung für die Funktion  $\sigma(\varepsilon_p)$ , so läßt sich (6.4) analytisch integrieren. Berechnet man mit der dann bekannten Funktion  $a(\varepsilon_p)$  für beliebige plastische Dehnungen den Wert von  $a$ , und für die selben Dehnungen mit den Gleichungen (6.3) und (6.1) auch die zugehörigen Werte von  $k^2$ , so ist die Funktion  $k^2(a)$  bekannt und kann mit dem Ansatz (6.2) approximiert werden.

Dieses Verfahren liefert die Parameter  $a_k(T)$  bis  $d_k(T)$  für die jeweilige Temperatur des betrachteten Versuchs. Diese lassen sich mit Polynomen 3. Grades als Temperaturfunktionen darstellen

$$a_k(T) = x_k^0 + x_k^1 \left(\frac{T}{^\circ\text{C}}\right)^1 + x_k^2 \left(\frac{T}{^\circ\text{C}}\right)^2 + x_k^3 \left(\frac{T}{^\circ\text{C}}\right)^3 \quad , \quad (6.5)$$

$b_k(T)$ ,  $c_k(T)$  und  $d_k(T)$  entsprechend.

	$x_k^0$	$x_k^1$	$x_k^2$	$x_k^3$
$a_k [\text{N}^2/\text{mm}^4]$	$+1.38372 \cdot 10^5$	$-1.88554 \cdot 10^2$	$+1.01214 \cdot 10^0$	$-1.21006 \cdot 10^{-3}$
$b_k [\text{mm}^2/\text{N}]$	$-4.41853 \cdot 10^{-2}$	$+1.11929 \cdot 10^{-4}$	$-7.81370 \cdot 10^{-7}$	$+8.28617 \cdot 10^{-10}$
$c_k [\text{N}/\text{mm}^2]$	$+5.36326 \cdot 10^2$	$-1.54249 \cdot 10^0$	$+6.17450 \cdot 10^{-3}$	$-8.13315 \cdot 10^{-6}$
$d_k [\text{N}^2/\text{mm}^4]$	$+3.55067 \cdot 10^4$	$-2.81476 \cdot 10^1$	$+6.41417 \cdot 10^{-3}$	$-2.30519 \cdot 10^{-4}$

Tabelle der Polynom-Koeffizienten für  $25^\circ\text{C} < T < 365^\circ\text{C}$

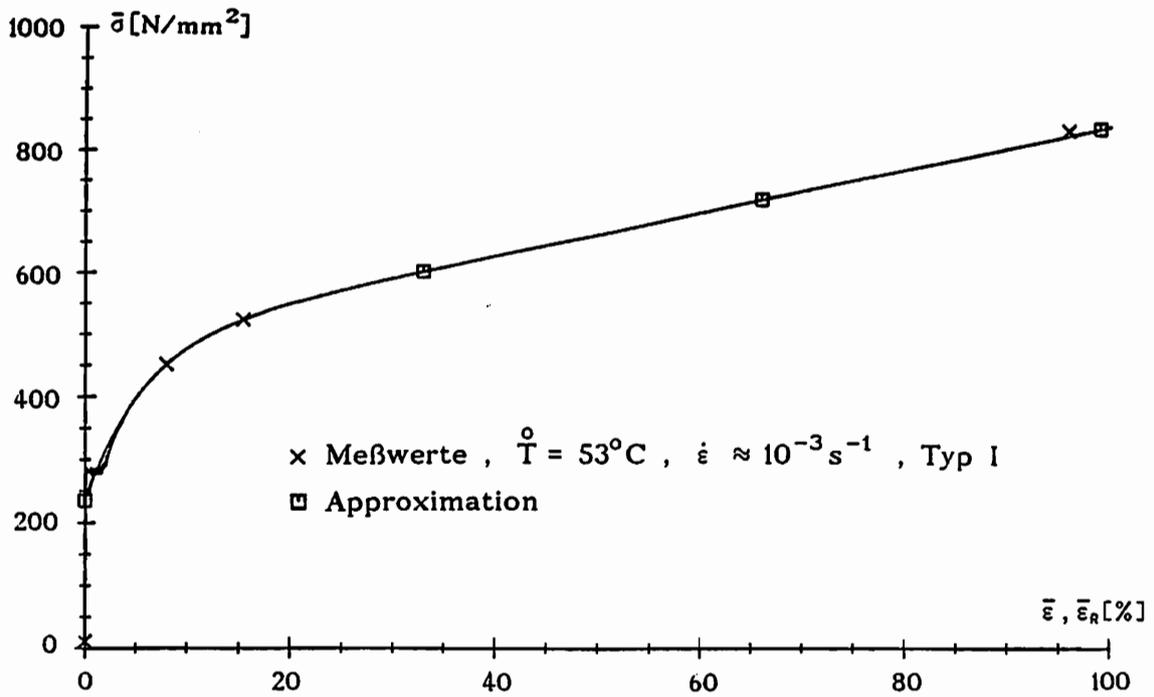


Abbildung 6.1: Approximation mit Gleichung (6.3)

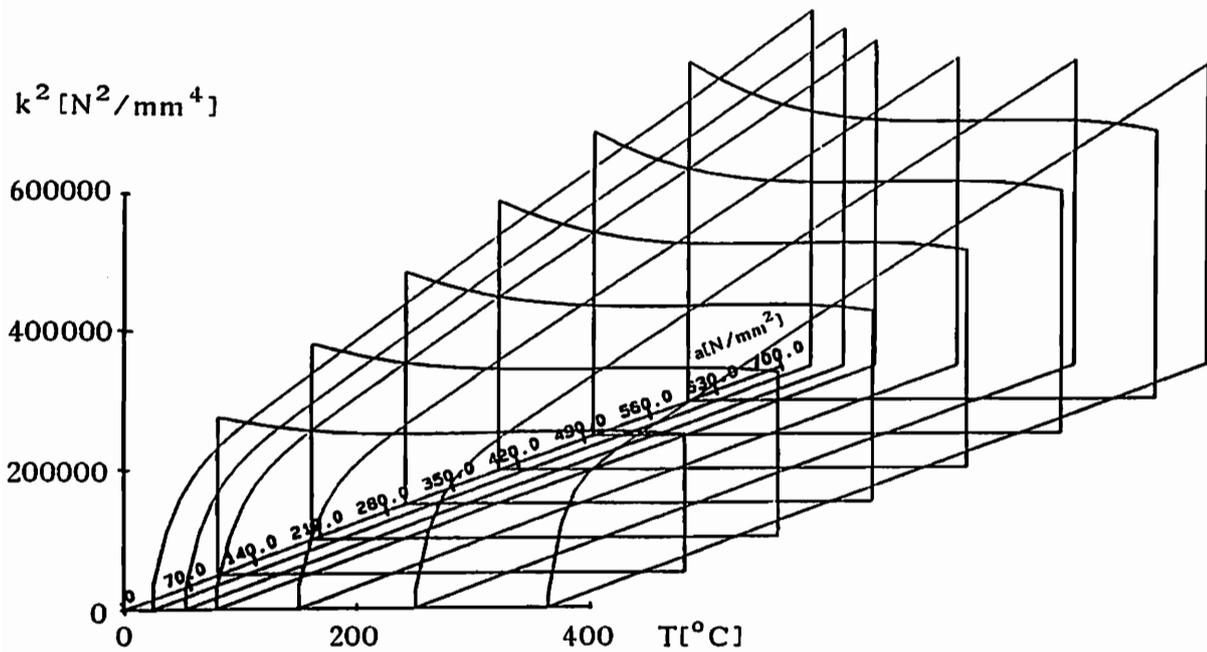


Abbildung 6.2: Verfestigungsfunktion  $k^2(a, T)$

Mit diesen Werten erhält die Funktion  $k^2(a, T)$  den in Abbildung 6.2 gezeigten Verlauf. Wie bei allen Approximationen auf der Basis von Polynomansätzen, sollten auch die hier angegebenen Funktionen nicht außerhalb des Definitionsbereiches verwendet werden, da dort gegebenenfalls große Gradienten auftreten, die völlig irrealen Ergebnisse hervorrufen können.

Die Abbildungen 6.3 bis 6.5 zeigen jeweils Experimente, die zur Anpassung verwendet wurden, und isotherme Rechnungen eines ungeschädigten Zugstabs auf der Grundlage der Temperaturpolynome. Die im Vergleich mit Abbildung 6.1 geringere Qualität der Anpassung des Versuchs bei 53°C entstand durch eine weitere negative Eigenschaft von Polynomansätzen. Um das Auftreten von Extremwerten der kubischen Funktionen zwischen kontinuierlich abfallenden Werten zu verhindern, ergibt sich mit der in Abbildung 6.2 dargestellten Interpolation der angesprochene geringe Qualitätsverlust. Diese soll nur den zeit- bzw. geschwindigkeitsunabhängigen Anteil der Verfestigung repräsentieren. Da im mittleren Temperaturbereich keine entsprechenden Meßwerte vorlagen, wurde, wie oben angesprochen, der Verlauf zwischen den bekannten Kurven möglichst glatt gewählt. Dies führt zu einem Abfallen der Verfestigungs-Funktion mit anwachsender Temperatur, was auch durch das entsprechende Verhalten der gemessenen Fließspannungen (Abbildungen 4.17 und 4.18) untermauert wird.

Unabhängig vom Temperatureinfluß ist ein weiteres, bereits angedeutetes Problem, welches bei der Ermittlung von  $k^2$  im Zusammenhang mit der Verwendung der lokalen Meßwerte auftritt. Diese Werte wurden näherungsweise als Teil einer Spannungs-Dehnungs-Kurve eines homogenen Zugversuchs verwendet, sie stammen aber aus der Einschnürung, in der ein dreidimensionaler Spannungszustand wirkt, so daß  $k^2$  in keiner eindeutigen Beziehung zu der gemessenen mittleren Axialspannung steht. Aus diesem Grund wurden von Siebel und Bridgman Näherungsformeln zur Berücksichtigung der Mehrachsigkeit im Einschnürbereich angegeben, die sich in der Tendenz gleichen, jedoch quantitativ unterscheiden. Dahl und Rees vergleichen beide Formeln in [51]. Die Korrekturfaktoren hängen jeweils vom kleinsten Durchmesser in der Einschnürung und dem Krümmungsradius der Probenoberfläche an dieser Stelle ab. Um den Verfestigungszustand des Materials nach Siebel bzw. Bridgman anzugeben, muß der ermittelte lokale Spannungswert mit dem jeweiligen Korrekturfaktor reduziert werden.

Neben dem zusätzlichen Aufwand der Ermittlung der besagten Krümmungsradien und den damit verbundenen Fehlerquellen ist festzustellen, daß beide Formeln nicht auf dem hier verwendeten Stoffgesetz basieren

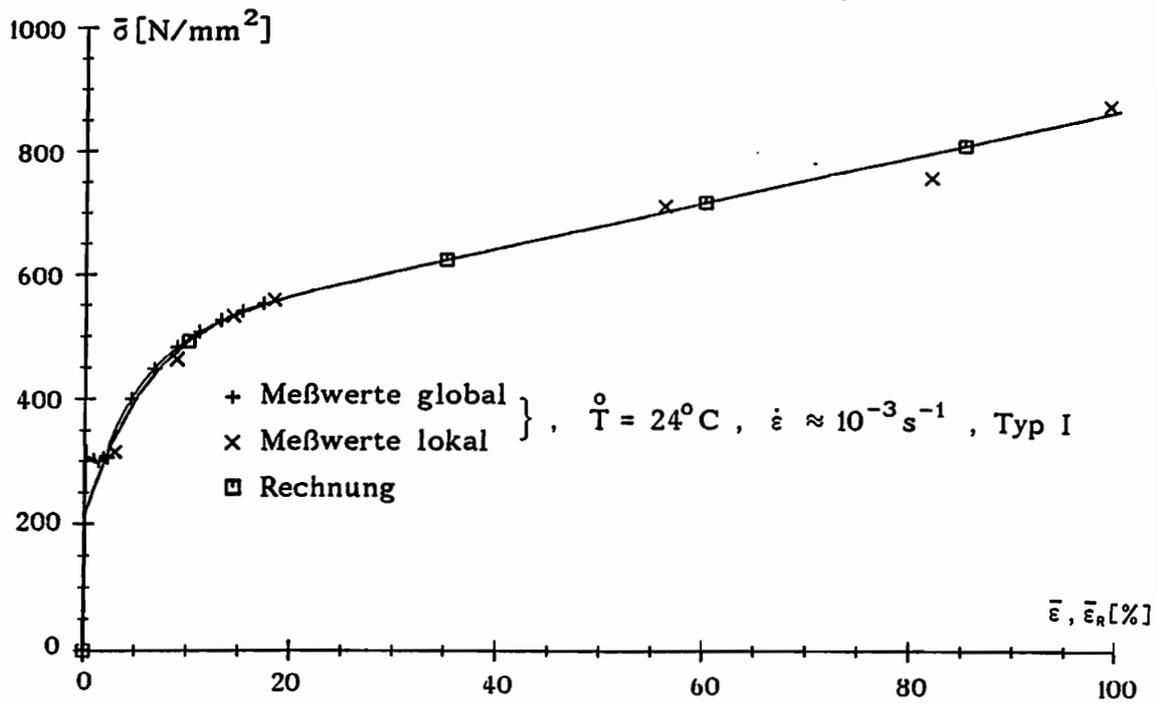


Abbildung 6.3: Homogene Rechnung und Meßwerte

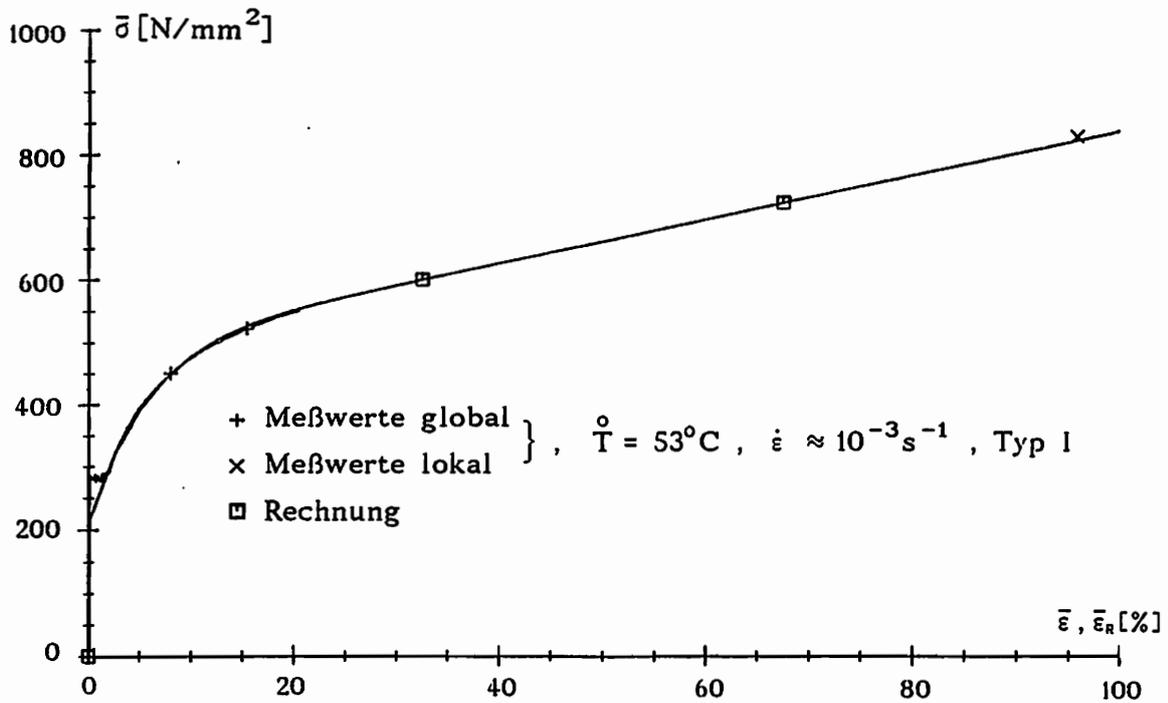


Abbildung 6.4: Homogene Rechnung und Meßwerte

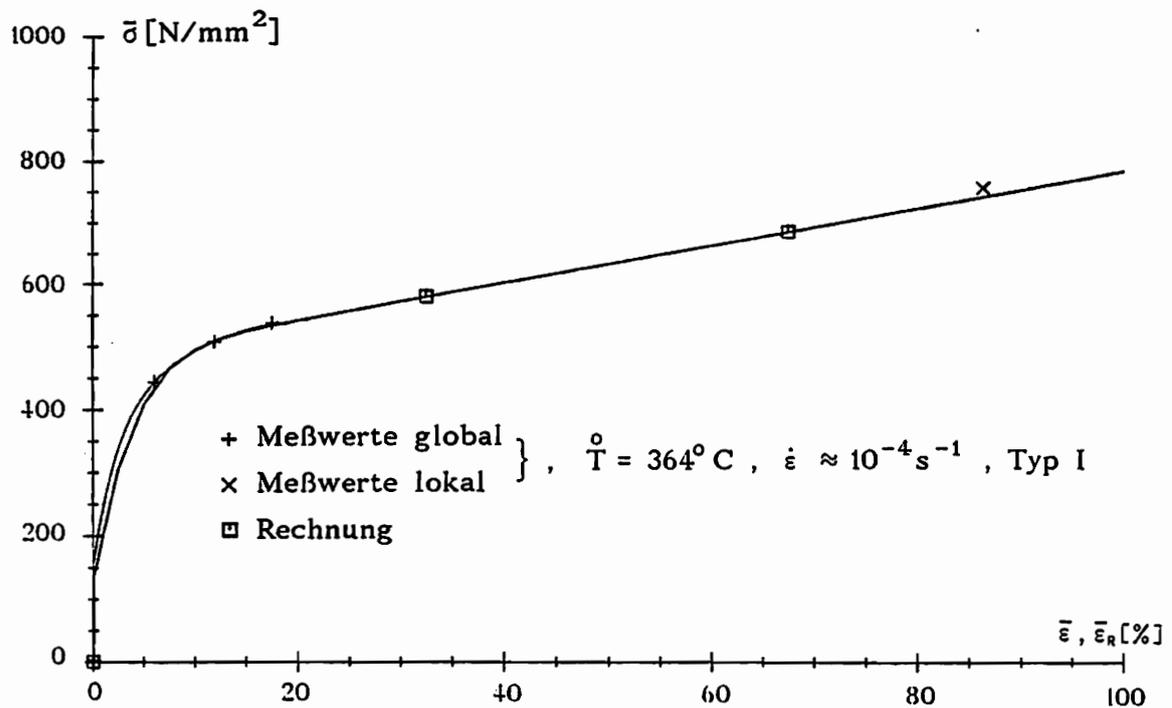


Abbildung 6.5: Homogene Rechnung und Meßwerte

und die Existenz von Mikroporen nicht berücksichtigen. Da im Rahmen des hier verwendeten Stoffgesetzes die Verfestigungsfunktion des ungeschädigten Materials gesucht ist, muß in entgegengesetzter Weise eine  $k^2$  vergrößernde Korrektur vorgenommen werden, da die durch Poren reduzierte tragende Fläche eine größere Verfestigung des Matrixmaterials bedeutet.

Weil die angesprochenen, fehleranfälligen Korrekturen eine entgegengesetzte Wirkung haben, wurde hier, unter dem Gesichtspunkt einer möglichst einfachen, näherungsweise Ermittlung der Verfestigungsfunktion auf beide verzichtet.

Um aufzuzeigen, wie komplex die Zusammenhänge im Bereich der Einschnürung sind, wird darauf hingewiesen, daß bei der Ermittlung viskoplastischer Materialparameter zusätzliche Probleme durch die zeitlich und örtlich veränderliche Deformationsgeschwindigkeit entstehen, die im engsten Querschnitt stark anwachsen. Dieser, bei der Betrachtung der Geschwindigkeits-Abhängigkeit kritische Aspekt wird ebenfalls in [51] diskutiert, ist aber für das hier verwendete plastische Materialgesetz ohne Belang.

## 6.2 Schädigungsfunktion

Analog zur Ermittlung der Verfestigungsfunktion  $k^2(a, T)$  soll auch die Temperaturabhängigkeit der die Evolution der Schädigung bestimmenden Größen  $\vartheta_1(T)$  und  $\vartheta_k(T)$  in der Form (6.5) beschrieben werden. Die im folgenden angegebene Interpolation kann, ebenso wie die Verfestigungsparameter des letzten Kapitels, nur als erste Approximation angesehen werden, die mit FE-Berechnungen kontrolliert und gegebenenfalls verbessert werden muß. Um aus den wenigen vorhandenen Messungen Anhaltswerte für  $\vartheta_1(T)$  und  $\vartheta_k(T)$  zu erhalten, werden diese mit homogenen, isothermen Rechnungen mit variierenden  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_k$  verglichen. Bei diesen Vergleichen stellt sich heraus, daß  $\vartheta_k = 0,0005$  für alle betrachteten Temperaturen ein geeigneter Wert ist. Im Gegensatz dazu ergibt sich für  $\vartheta_1$  ein stark von der Temperatur abhängiger Verlauf, der sich mit dem folgenden Polynom erfassen läßt:

$$\begin{aligned} \vartheta_1(T) = & 6.41117 \cdot 10^0 - 2.12246 \cdot 10^{-2} \left( \frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^1 + \\ & + 3.50033 \cdot 10^{-4} \left( \frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^2 - 7.93400 \cdot 10^{-7} \left( \frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^3 \quad . \quad (6.6) \end{aligned}$$

In den Abbildungen 6.6 bis 6.11 sind die auf diesem Polynom basierenden, homogen und isotherm berechneten Schädigungs-Dehnungs-Kurven im Vergleich mit den bereits im Kapitel 4 dargestellten experimentellen Werten gezeigt. Betrachtet man die in Abbildung 6.12 zusammengestellten Rechnungen, so liegt die 188°C-Kurve deutlich über den anderen Verläufen. Zusätzlich zu der geringen Duktilität der entsprechenden Versuche bestärkt dies die Vermutung, daß die Evolution der Schädigung von der Reckalterung beeinflusst wird. Dieser Zusammenhang liegt außerhalb der Möglichkeiten des hier verwendeten Stoffgesetzes und bedarf weiterer Untersuchungen. Es ist aber wichtig zu beachten, daß durch diesen nicht genau bekannten Einfluß und die Fehler, die durch den Vergleich der homogenen Rechnungen mit den Meßwerten aus dem Bereich der Einschnürung entstehen, die Gleichung (6.6) mit einer starken Unsicherheit behaftet ist.

Ebenfalls problematisch ist die Ermittlung des kritischen Werts der Schädigungsvariablen  $\omega_c$ , der das Entstehen eines Makro-Risses kennzeichnet. Mit den vorhandenen Messungen läßt sich für den betrachteten Stahl nur die Einschränkung

$$\omega_c \geq 0,15 \quad (6.7)$$

angeben, da die im direkten Einflußbereich des Bruches liegenden Schliffe nicht ausgewertet werden können (vgl. Abbildung 4.57a). Vergleichbare Werte lassen sich auch bei Tvergaard und Needleman [26] sowie Perzyna [27] finden, die davon ausgehen, daß bei einem Porenvolumenanteil von

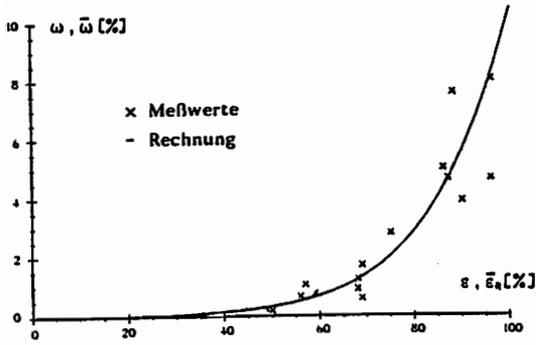


Abbildung 6.6:  $\bar{T} \approx 25^\circ\text{C}$

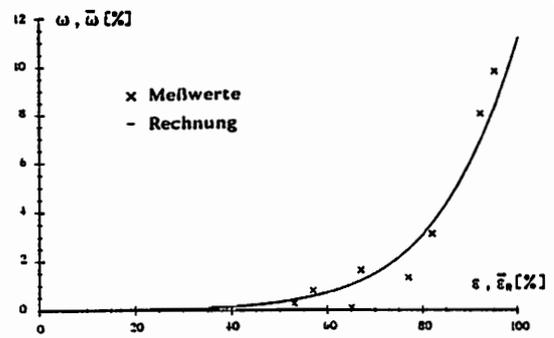


Abbildung 6.7:  $\bar{T} \approx 55^\circ\text{C}$

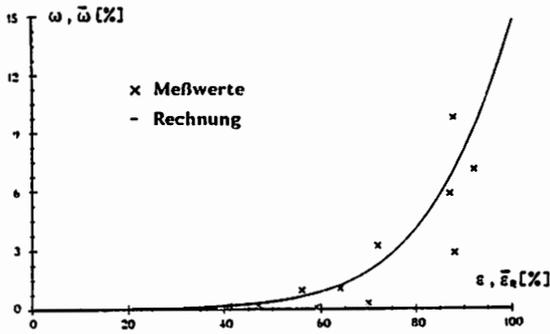


Abbildung 6.8:  $\bar{T} \approx 80^\circ\text{C}$

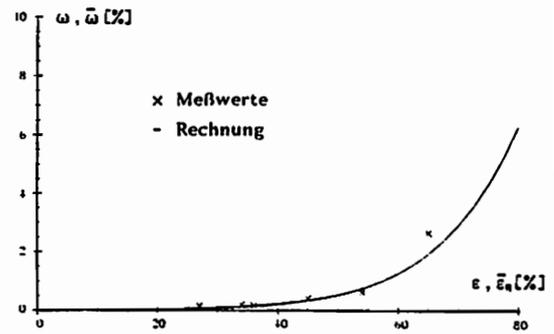


Abbildung 6.9:  $\bar{T} \approx 107^\circ\text{C}$

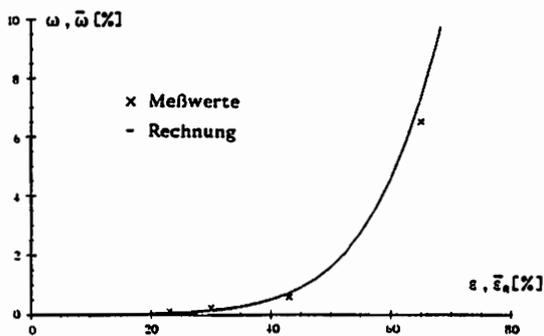


Abbildung 6.10:  $\bar{T} \approx 188^\circ\text{C}$

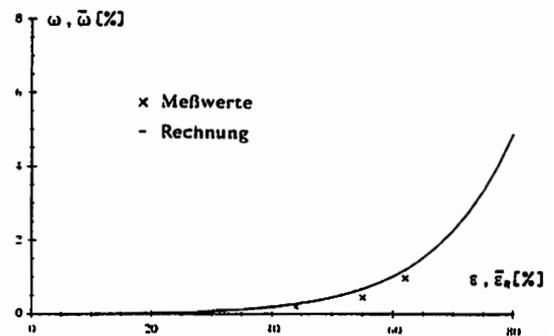


Abbildung 6.11:  $\bar{T} \approx 364^\circ\text{C}$

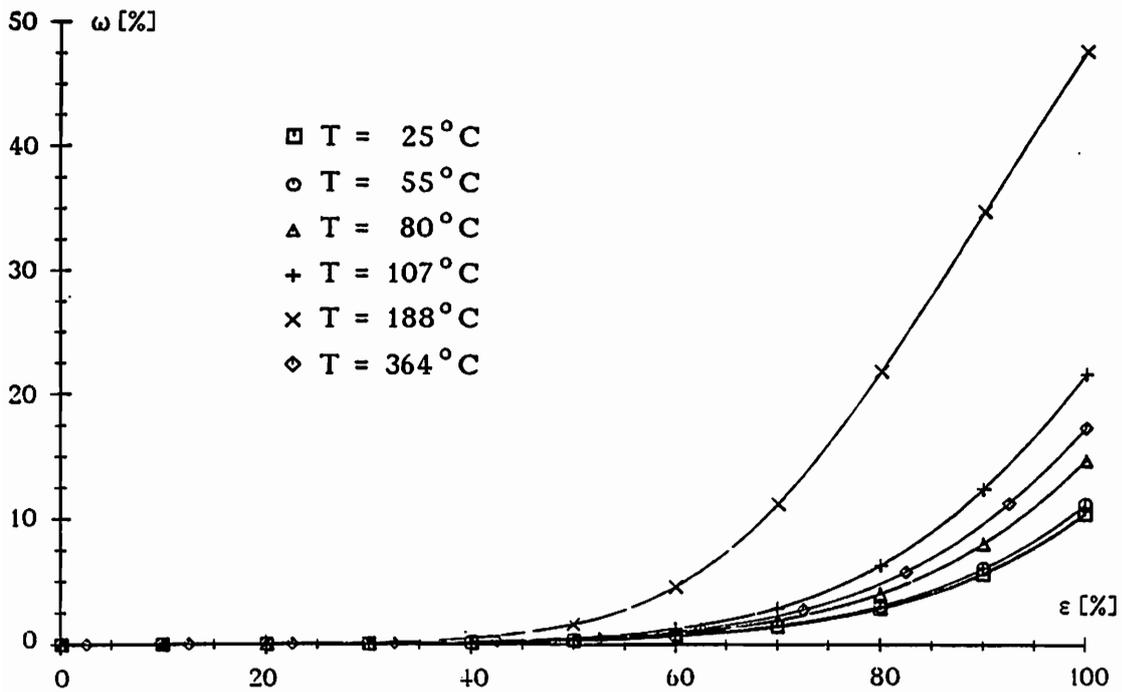


Abbildung 6.12: Homogene, isotherme Rechnungen

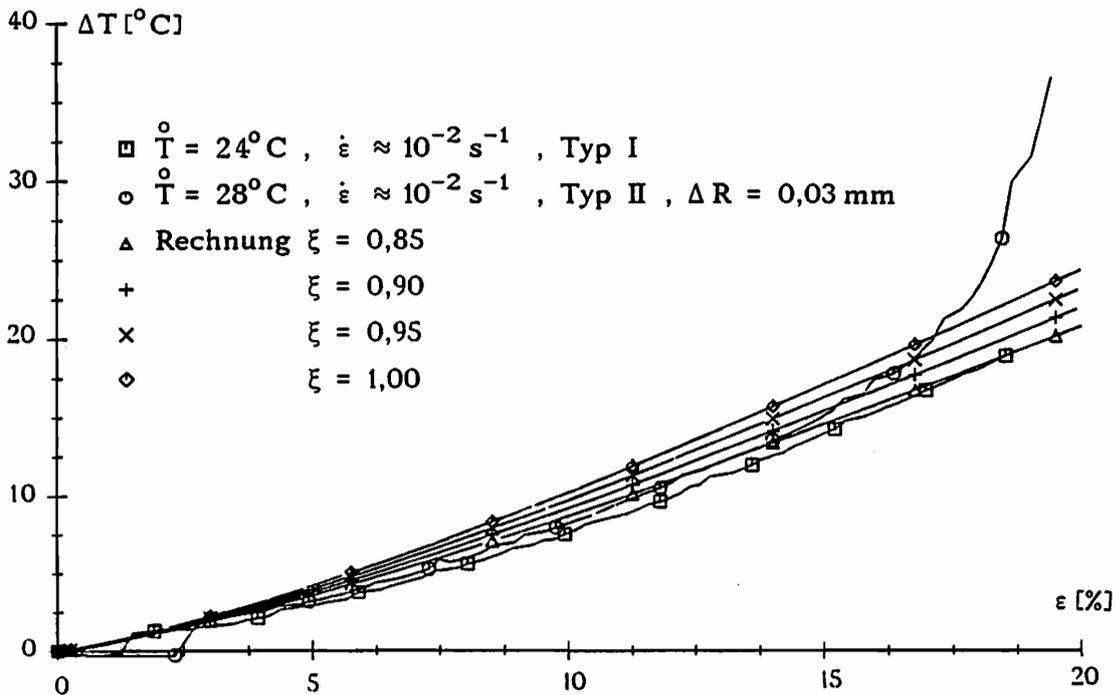


Abbildung 6.13: Temperaturzuwachs,  $\bar{T} \approx 25^{\circ}\text{C}$

etwa 15% die Vereinigung von Poren beginnt. Das endgültige Versagen tritt nach den oben genannten Autoren erst bei  $\omega = 25\%$  ein. Chaboche gibt in [5] an, daß die Schädigungswerte beim Einsetzen des Bruchs bei Metallen zwischen 20% und 80% liegen. Die in Kapitel 4.5.2 angesprochenen Messungen von Lemaitre [4] zeigen, daß derartig hohe Werte bei Kupfer möglich sind, daß bei Stählen aber deutlich kleinere kritische Schädigungen von 17% bis 24% auftreten. Es stellt sich in diesem Zusammenhang die Frage, ob bereits das Zusammenwachsen von Poren als Beginn einer Makroschädigung zu betrachten ist oder erst das oben angesprochene "endgültige Versagen" (vgl. Kapitel 3). Die im Kapitel 8 dargestellten Rechnungen basieren auf dem der ersten Interpretation entsprechenden Wert  $\omega_c = 15\%$ .

### 6.3 Weitere Materialfunktionen

Ergänzend zu den in den Kapiteln 6.1 und 6.2 betrachteten Materialfunktionen müssen weitere temperaturabhängige Größen angegeben werden, die in dem im Kapitel 2 angegebenen Stoffgesetz auftreten. Diese wurden im Rahmen dieser Arbeit nicht experimentell ermittelt, da sie entweder bei den großen plastischen Deformationen von untergeordneter Bedeutung sind (E, G), oder weil sie mit den zur Verfügung stehenden Möglichkeiten nicht gemessen werden können ( $c_p$ ,  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\lambda_f$ ,  $\xi$ ). Richter gibt in [52] die Temperaturabhängigkeiten der wichtigsten physikalischen Eigenschaften von 52 Eisenwerkstoffen an. Da Ck15 Stahl nicht untersucht wurde, werden in dieser Arbeit ersatzweise die von Richter veröffentlichten Meßkurven von St37.8 verwendet. Diese lassen sich im Bereich von  $25^\circ\text{C} \leq T \leq 400^\circ\text{C}$  durch die folgenden Funktionen erfassen:

$$E(T) = \left( 216700 - 73,34 \cdot \left( \frac{T}{^\circ\text{C}} \right) \right) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (6.8)$$

$$G(T) = \left( 84000 - 30,69 \cdot \left( \frac{T}{^\circ\text{C}} \right) \right) \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (6.9)$$

$$\rho(T) = \left( 7,85 \cdot 10^{-6} - 3,33 \cdot 10^{-10} \cdot \left( \frac{T}{^\circ\text{C}} \right) \right) \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3} \quad (6.10)$$

$$c_p(T) = \left( 0,459 \cdot 10^6 + 3,025 \cdot 10^2 \cdot \left( \frac{T}{^\circ\text{C}} \right) + 1,875 \cdot 10^{-1} \cdot \left( \frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^2 \right) \frac{\text{N mm}}{\text{kg K}} \quad (6.11)$$

$$\alpha(T) = \left( 11,3 \cdot 10^{-6} + 9,0 \cdot 10^{-9} \cdot \left( \frac{T}{^\circ\text{C}} \right) - 5,556 \cdot 10^{-12} \cdot \left( \frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^2 \right) \frac{1}{\text{K}} \quad (6.12)$$

$$\lambda_f(T) = \left( 54,11 - 7,05 \cdot 10^{-3} \cdot \left( \frac{T}{^\circ\text{C}} \right) - 4,975 \cdot 10^{-5} \cdot \left( \frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^2 \right) \frac{\text{N}}{\text{s K}} \quad (6.13)$$

Problematisch ist die Bestimmung der Materialfunktion  $\xi$ , die den Anteil der plastischen Arbeit angibt, der unmittelbar dissipiert wird. Umfassende und im Rahmen der Möglichkeiten auch vergleichende Darstellungen der veröffentlichten experimentellen Ergebnisse finden sich in [53] und [54]. Die gemessenen Werte sind allerdings nur bedingt vergleichbar, da sich die Versuche in vielfacher Weise unterscheiden. Das untersuchte Material, die Art des durchgeführten Formänderungsprozesses, seine Geschwindigkeit und die maximal betrachteten Deformationen variieren stark.

Mit Stahlproben ermittelte Meßwerte sind bedauerlicherweise nur wenige bekannt. Insbesondere die alte Arbeit von Farren und Taylor [55] zeigt, daß der mit "cold work" bezeichnete, im Material gespeicherte Arbeitsanteil bei Kohlenstoff-Stahl größer ist als bei Kupfer oder Aluminium.

Ein Vergleich der Meßwerte verschiedenster Autoren für den Werkstoff Kupfer ist in [54] dargestellt und zeigt, daß die von Farren und Taylor verwendete Einschnitt-Meßmethode generell größere Werte ermittelt als die sogenannten Zweischritt-Methoden.

Die Einschnitt-Methoden zeichnen sich dadurch aus, daß die im Werkstoff gespeicherte Arbeit aus der Differenz der zugeführten plastischen Arbeit und der erzeugten Wärmemenge ermittelt wird. Dazu werden entweder während des Versuches die Temperaturverläufe aufgezeichnet, oder die Probe wird unmittelbar nach der Deformation in ein Kalorimeter eingebracht. In [56] wird die zweite Variante mit einer speziellen Probenhalterung durchgeführt, die es ermöglicht, den Zeitraum zwischen dem Ende des Deformationsvorgangs und der Kalorimetermessung auf eine Sekunde zu reduzieren.

Die Zweischritt-Methoden ermitteln die gespeicherte Arbeit nicht aus der Bilanz von Arbeit und Wärme des Belastungsprozesses, sondern aus dem unterschiedlichen Verhalten einer deformierten Probe mit erhöhter innerer Energie im Vergleich mit einer unverformten Probe. Dazu werden diese beispielsweise geglüht, um die bei den dann auftretenden Erholungs- und Rekristallisationsvorgängen wieder frei werdende Energie zu messen.

Die wenigen auf Stahl bezogenen Meßwerte, die in [53] und [54] angegeben sind, lassen eine Aussage über Einflüsse von Versuchstemperatur und Geschwindigkeit, sowie der chemischen Zusammensetzung der Werkstoffe und ihrer Mikrostruktur nicht zu. Aus diesem Grund wird im folgenden, wie auch in [57] und [58] angenommen, daß die Materialfunktion  $\xi$  mit einer Konstanten angenähert werden kann. Diese Modellierung vernachlässigt das von verschiedenen Autoren beobachtete Anwachsen von  $\xi$  bei zunehmenden Deformationen.

Die in Abbildung 6.13 dargestellten Experimente zählen zu den Versuchen mit den größten im Rahmen dieser Arbeit gemessenen Temperaturerhöhungen in der homogenen Deformationsphase (vgl. Abbildung 4.25). Von Randeinflüssen abgesehen, können diese Versuche vor der Lokalisierung als näherungsweise adiabat angesehen werden, so daß der in Abbildung 6.13 gezeigte Vergleich mit homogenen adiabaten Rechnungen zulässig ist. Diese Gegenüberstellung zeigt, daß mit dem von Sluzalec in [57] veröffentlichten Wert  $\xi = 0,84$  auch die eigenen Messungen zufriedenstellend wiedergegeben werden können, so daß auch die FE-Rechnungen darauf basieren. Daß der so ermittelte gespeicherte Anteil der plastischen Arbeit relativ groß ist, bestätigt die in [54] angesprochene Beobachtung, daß bei Einschnitt-Messungen in der Regel größere Werte ermittelt werden als bei den Zweischritt-Methoden. Um diesen Sachverhalt zu erhellen, ist es wünschenswert, daß Institute mit den entsprechenden technischen Möglichkeiten Deformationsprozesse mit beiden Verfahren untersuchen, um so direkt vergleichbare Messungen zu erhalten.

Anzumerken bleibt, daß die Integrabilitätsbedingung (2.90) mit dem konstanten Wert  $\xi = 0,84$  und der Funktion (6.11) erfüllt ist.

## 7. Gleichungen zur Berechnung axialsymmetrischer Probleme

### 7.1 Stoffgesetzaufbereitung für weggesteuerte Prozesse

Addiert man die einzelnen aus den Aufspaltungen (2.39) und (2.40) hervorgehenden Anteile des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten und berücksichtigt dabei die Gleichungen (2.73), (2.76) und (2.85), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}_r + \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_v & (7.1) \\ &= \frac{1}{2G} \left[ \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \text{Sp}(\dot{\mathbf{S}}) \mathbf{1} \right] + \alpha \dot{\mathbf{T}} \mathbf{1} + \langle 2\lambda \mathbf{T} \rangle + \frac{\dot{\omega}}{3(1-\omega)} \mathbf{1} \end{aligned}$$

Für die FE-Rechnungen ist es erforderlich, diese Gleichung nach den Spannungsgeschwindigkeiten aufzulösen. Als erster Schritt wird dazu die Spur von (7.1) gebildet, wobei zu beachten ist, daß die Spur der deviatorischen Größen verschwindet

$$\text{Sp}(\dot{\mathbf{S}}) = \left[ \text{Sp}(\mathbf{D}) - 3\alpha \dot{\mathbf{T}} - \frac{\dot{\omega}}{(1-\omega)} \right] 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \quad (7.2)$$

Ersetzt man mit (2.34) die objektive Zeitableitung von  $\mathbf{T}$  in (7.1) durch die Rate von  $\mathbf{S}$ , so folgt mit (7.2)

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\mathbf{S}} &= 2G \left[ \mathbf{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Sp}(\mathbf{D}) \mathbf{1} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \dot{\mathbf{T}} \mathbf{1} \right. \\ &\quad \left. - \langle 2\lambda \mathbf{T} \rangle - \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \frac{\dot{\omega}}{(1-\omega)} \mathbf{1} \right] \quad (7.3) \end{aligned}$$

Verwendet man die Abkürzung

$$\vartheta = \vartheta_k(\mathbf{T}) + \vartheta_l(\mathbf{T}) \omega \quad (7.4)$$

so ergibt (2.87) durch Einsetzen von (2.76) und (2.74)

$$\dot{\omega} = \langle\langle \vartheta \langle 2\lambda \mathbf{k} \rangle \rangle\rangle \quad (7.5)$$

Die für  $\lambda$  in Kapitel 2.3.5 angegebene Gleichung (2.79) enthält die objektive Zeitableitung des Spannungsdeviators. Um diese zu ersetzen, wird (7.1) mit  $\mathbf{T}$  verjüngend multipliziert und dann die Spur  $\text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D})$  gebildet. Durch

Umformen und Einsetzen in (2.79) erhält man

$$\lambda = \left\langle \frac{2 \operatorname{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) - \frac{1}{2G} \frac{\partial k^2}{\partial \mathbf{T}} \dot{\mathbf{T}}}{k^2 \left( \frac{1}{G} \frac{\partial k^2}{\partial a} + 4 \right)} \right\rangle \quad (7.6)$$

Mit (7.6) und (7.5) in (7.3) folgt die gesuchte Beziehung für die Spannungsgeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{S}} = & 2G \left[ \mathbf{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{Sp}(\mathbf{D}) \mathbf{1} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \dot{\mathbf{T}} \mathbf{1} \right. \\ & \left. - 2 \left\langle \frac{2 \operatorname{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) - \frac{1}{2G} \frac{\partial k^2}{\partial \mathbf{T}} \dot{\mathbf{T}}}{k^2 \left( \frac{1}{G} \frac{\partial k^2}{\partial a} + 4 \right)} \right\rangle \left( \mathbf{T} + \left\langle \left\langle \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \frac{\partial k}{\partial \omega} \mathbf{1} \right\rangle \right\rangle \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

## 7.2 Axialsymmetrische Probleme in Zylinderkoordinaten

Bei der Beschreibung rotationssymmetrischer Probleme ist die Verwendung eines Zylinderkoordinatensystems  $(x^1, x^2, x^3) = (r, \varphi, z)$  zweckmäßig. Der Zusammenhang zwischen den raumfesten krummlinigen Koordinaten  $x^\alpha$  und den raumfesten kartesischen Koordinaten  $z^\alpha$  (vgl. Kapitel 2.1) ist Abbildung 7.1 zu entnehmen und lautet

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 \cos x^2 \\ z^2 &= x^1 \sin x^2 \\ z^3 &= x^3 \end{aligned} \quad (7.8)$$

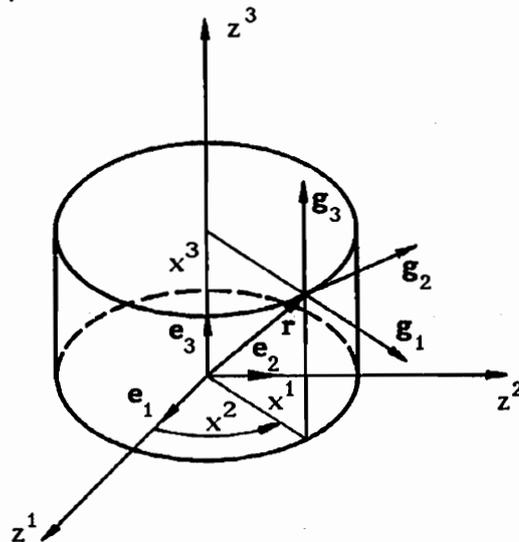


Abbildung 7.1 Zylinderkoordinaten  $(x^1, x^2, x^3)$

Der Ortsvektor eines Körperpunktes läßt sich mit (7.8) in folgender Weise angeben

$$\mathbf{r} = z^1 \mathbf{e}_1 + z^2 \mathbf{e}_2 + z^3 \mathbf{e}_3 = x^1 \cos x^2 \mathbf{e}_1 + x^1 \sin x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 \quad (7.9)$$

Mit (2.3) berechnen sich daraus die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{g}_\alpha$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \cos x^2 \mathbf{e}_1 + \sin x^2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_2 &= -x^1 \sin x^2 \mathbf{e}_1 + x^1 \cos x^2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.10)$$

Die dazu reziproken Basisvektoren und die ko- bzw. kontravarianten Komponenten des Metriktensors lassen sich mit (2.4) bis (2.6) ermitteln

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^1 &= \cos x^2 \mathbf{e}_1 + \sin x^2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}^2 &= -\frac{1}{x^1} \sin x^2 \mathbf{e}_1 + \frac{1}{x^1} \cos x^2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}^3 &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta}(x^p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

$$\mathbf{g}^{\alpha\beta}(x^p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{x^1})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

Verwendet man (2.13), so folgt mit (7.12) und (7.13), daß nur drei Christoffelsymbole von null verschieden sind

$$\Gamma_{22}^1 = -x^1, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{x^1} \quad (7.14)$$

Die Gleichungen (7.8) bis (7.14) gelten bei der Beschreibung beliebiger Prozesse. Die im folgenden betrachtete Beschränkung auf bezüglich der  $x^3$ -Achse rotationssymmetrische Probleme bedeutet, daß die partiellen Ableitungen nach  $x^2$  entfallen. Tritt zusätzlich keine Torsion um die  $x^3$ -Achse auf, so entstehen auch keine Verschiebungen bzw. Geschwindigkeiten in  $x^2$ -Richtung. Mit diesen Vereinfachungen existieren nur die

folgenden partiellen Ableitungen des Geschwindigkeitsvektors

$$v^{\alpha}_{,\beta} = \begin{bmatrix} v^1_{,1} & 0 & v^1_{,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ v^3_{,1} & 0 & v^3_{,3} \end{bmatrix} . \quad (7.15)$$

Berücksichtigt man (2.16), so ergibt sich aus (2.19) der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} v^1_{,1} & 0 & \frac{1}{2}(v^1_{,3} + v^3_{,1}) \\ 0 & \frac{1}{x^1}v^1 & 0 \\ \frac{1}{2}(v^3_{,1} + v^1_{,3}) & 0 & v_{3,3} \end{bmatrix} \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta \quad (7.16)$$

und aus (2.20) der Tensor der Rotationsgeschwindigkeit

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(v^1_{,3} - v^3_{,1}) \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(v^3_{,1} - v^1_{,3}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta . \quad (7.17)$$

Die vollständigen Beziehungen, die sich ohne die hier angesprochenen Einschränkungen ergeben, können beispielsweise in [16] nachgelesen werden.

Bei Axialsymmetrie und Ausschluß von Torsion reduziert sich der Tensor der gewichteten Cauchy-Spannungen auf

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s^1_{,1} & 0 & s^1_{,3} \\ 0 & s^2_{,2} & 0 \\ s^3_{,1} & 0 & s^3_{,3} \end{bmatrix} \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta = \begin{bmatrix} s^{11} & 0 & s^{13} \\ 0 & s^{22}(x^1)^2 & 0 \\ s^{31} & 0 & s^{33} \end{bmatrix} \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta . \quad (7.18)$$

Unter der Annahme des Boltzmann-Axioms ist  $\mathbf{S}$  symmetrisch, so daß bei Berücksichtigung von (7.12) und (7.13)  $s^3_{,1} = s^1_{,3}$  gilt. Der zweite Teil der Gleichung (7.18) verdeutlicht die aus der Metrik (7.12) folgende Beziehung zwischen den gemischtvarianten und den kontravarianten Maßzahlen von  $\mathbf{S}$ . Letztere werden im Zusammenhang mit der FE-Rechnung benötigt.

### 7.3 Homogener Zug

Da homogene Vergleichsrechnungen die Grundlage bilden für die im Kapitel 6 beschriebene Anpassung der Materialfunktionen, soll hier das zugehörige Differentialgleichungssystem angegeben werden. Der homogene Zug ist dadurch gekennzeichnet, daß nur die Spannungskomponente  $s^3_{,3}$  von null verschieden ist. Die Radialgeschwindigkeit  $v^1$  ist unabhängig von  $x^3$ ,

und die Axialgeschwindigkeit  $v^3$  ist unabhängig von  $x^1$ , so daß die jeweiligen Ableitungen entfallen und keine Rotationen auftreten ( $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ ). Weiterhin folgt aus (7.16), daß der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  nur auf der Hauptdiagonalen besetzt ist.

Die Berechnung eines vollständig homogenen Falls setzt auch eine über die gesamte Probe konstante Temperatur voraus. Wärmeleitungseffekte, die eine unterschiedliche Erwärmung des Versuchskörpers zur Folge haben, sind deshalb auszuschließen.

Eine näherungsweise konstante Temperatur ergibt sich bei sehr langsamen, nahezu isothermen Prozessen, bei denen die dissipierte Energie fast vollständig abgeleitet wird. Die rechte Seite der den Temperaturzuwachs bestimmenden Gleichung (2.72) verschwindet in diesem Fall.

Im Gegensatz dazu bleibt bei sehr schnellen Deformationen die Wärme im wesentlichen am Ort ihrer Entstehung, so daß der Prozeß als näherungsweise adiabat betrachtet werden kann. Die Temperaturerhöhung wird unter Vernachlässigung des Wärmeleitungsterms mit Gleichung (2.72) berechnet.

Den Ausgangspunkt der Herleitung des Differentialgleichungssystems für weggesteuerte Prozesse bildet die Gleichung (7.7). Der homogene Zugversuch einer zylindrischen Vollprobe der Länge  $l$  läßt sich im Rahmen des vorgestellten Stoffgesetzes vollständig beschreiben durch die Angabe des Außenradius  $R$ , der Temperatur  $T$ , der effektiven Axialspannung  $s_{.3}^3$ , des Porenvolumenanteils  $\omega$  und der internen Variable  $a$ . Als Belastung wird die axiale Geschwindigkeit des Probenendes  $v^3(x^3=l)$  vorgegeben.

Nach einigen Umformungen, die insbesondere bewirken, daß die zunächst nicht bekannte Veränderung des Radius durch die Längenänderung der Probe ausgedrückt wird, ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen.

Elastisches Differentialgleichungssystem und Anfangsbedingungen:

$$\dot{l} = v^3(x^3=l) \quad , \quad l(t=0) = l^0 \quad (7.19)$$

$$\dot{R} = -R v \frac{\dot{l}}{l} \quad , \quad R(t=0) = R^0 \quad (7.20)$$

$$\dot{T} = 0 \quad , \quad T(t=0) = T^0 \quad (7.21)$$

$$\dot{\omega} = 0 \quad , \quad \omega(t=0) = 0 \quad (7.22)$$

$$\dot{s}_{.3}^3 = E \frac{\dot{l}}{l} \quad , \quad s_{.3}^3(t=0) = 0 \quad (7.23)$$

$$\dot{a} = 0 \quad , \quad a(t=0) = 0 \quad (7.24)$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, daß der thermoelastische Effekt vernachlässigt wurde, und daß sich der Porenvolumenanteil  $\omega$  bei elastischen Deformationen ebensowenig verändert wie der durch a beschriebene Verfestigungszustand des Materials.

Elastoplastisches Differentialgleichungssystem:

$$\dot{i} = v^3 (x^3 = 1) \quad (7.25)$$

$$\dot{R} = -R \left( \frac{c_4 c_5 + c_7}{1 - c_4 c_5 + c_6} \right) \frac{\dot{i}}{I} \quad (7.26)$$

$$\dot{T} = \begin{cases} 0 & \text{isothermer Proze\ss} \\ 2 c_1 \left( \frac{\dot{i}}{I} - \frac{\dot{R}}{R} \right) & \text{adiabater Proze\ss} \end{cases} \quad (7.27)$$

$$\dot{\omega} = \left\langle \left\langle \frac{4 \vartheta}{k c_3} \left( \frac{2}{3} s_{.3}^3 - c_1 c_2 \right) \left( \frac{\dot{i}}{I} - \frac{\dot{R}}{R} \right) \right\rangle \right\rangle \quad (7.28)$$

$$\dot{s}_{.3}^3 = 2G \left( \frac{\dot{i}}{I} (1 + c_8 + c_7) + \frac{\dot{R}}{R} (c_6 - c_8) \right) \quad (7.29)$$

$$\dot{a} = \frac{4}{c_3} \left( \frac{2}{3} s_{.3}^3 - c_1 c_2 \right) \left( \frac{\dot{i}}{I} - \frac{\dot{R}}{R} \right) \quad (7.30)$$

mit

$$c_1 = \frac{2}{3} \frac{s_{.3}^3 c_9}{3 \rho^0 c_p (1-\omega) k c_3 + c_9 c_2} \quad (7.31)$$

$$c_2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial k^2}{\partial T} \quad (7.32)$$

$$c_3 = \frac{1}{G} \frac{\partial k^2}{\partial a} + 4 \quad (7.33)$$

$$c_4 = \frac{2}{3} s_{.3}^3 - \left\langle \left\langle \frac{2 \vartheta k}{(1-\omega)} \frac{(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \right\rangle \right\rangle \quad (7.34)$$

$$c_5 = \frac{2}{k^2 c_3} \left( \frac{2}{3} s_{.3}^3 - c_1 c_2 \right) \quad (7.35)$$

$$c_6 = \left( 2\nu + 2 c_1 \alpha (1+\nu) \right) \frac{1}{(1-2\nu)} \quad (7.36)$$

$$c_7 = \left( \nu - 2 c_1 \alpha (1+\nu) \right) \frac{1}{(1-2\nu)} \quad (7.37)$$

$$c_8 = \left( c_4 - 2 s_{.3}^3 \right) c_5 \quad (7.38)$$

$$c_9 = 6 \xi (1-\omega) k + \left\langle \left\langle 2 s_{.3}^3 \vartheta \right\rangle \right\rangle \quad (7.39)$$

$$\nu = \frac{E}{2G} - 1 \quad (7.40)$$

Zur Integration der angegebenen Differentialgleichungssysteme wurde ein Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung mit einer automatischen Schrittweitensteuerung verwendet.

## **7.4 Berechnung inhomogener Prozesse mit Finiten Elementen**

### **7.4.1 Vorbemerkungen**

Die im Kapitel 7.3 beschriebene Stoffgesetzintegration liefert nur bei den wenigen homogenen bzw. näherungsweise als homogen angesehenen Prozessen eine direkte Beziehung zwischen den Spannungen und den Deformationen. Neben dem Zugversuch mit Vollproben gilt dies auch für dünnwandige Rohrproben unter Zug-, Torsions- und Innendruckbelastung. Mit dieser Aufzählung erschöpft sich aber bereits der Anwendungsbereich einer einmaligen Stoffgesetzintegration, die stellvertretend für den gesamten Versuchskörper durchgeführt werden kann. Da dies bei nahezu allen technisch interessanten Prozessen nicht möglich ist, entsteht ein um ein Vielfaches gesteigerter theoretischer und programmtechnischer Aufwand. In diesem Zusammenhang haben in besonderer Weise verschiedene Finite-Elemente-Methoden (FEM) große Bedeutung erlangt. Die Integration eines inkrementellen Stoffgesetzes bildet nur einen kleinen, wenn auch sehr rechenzeitintensiven Teil der zur Berechnung inhomogener Strukturen erforderlichen Programmsysteme.

Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete FE-Programm stellt eine Erweiterung des von Fornefeld und Rott am Lehrstuhl für Mechanik I der Ruhr-Universität konzipierten Grundprogramms dar. In dieser Arbeit soll daher nur auf diejenigen Aspekte der FE-Formulierung näher eingegangen werden, die in den Arbeiten von Fornefeld [11] und Rott [59] nicht angesprochen sind. Insbesondere wird im Rahmen dieser Arbeit kein theoretischer Vergleich mit anderen kommerziellen oder wissenschaftlichen FE-Programmen durchgeführt.

Das Grundprogramm wurde zur Berechnung isothermer, statischer, rotations-symmetrischer Probleme konzipiert und erfaßt nichtlineares Materialverhalten mit einem viskoplastischen Stoffgesetz von Bruhns [60]. In der Arbeit von Rott wird eine Erweiterung auf Torsionsvorgänge durchgeführt, während Fornefeld die bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen auftretenden Trägheitseinflüsse und Schädigung durch Scherbänder berücksichtigt.

Neben der Verankerung des in Kapitel 2 beschriebenen Stoffgesetzes wird in dieser Arbeit das Grundprogramm durch eine zusätzliche Berechnung der Temperaturverteilung ergänzt, so daß auch nichtisotherme Prozesse

mit Wärmeleitung in die Betrachtung einbezogen werden können. Der durch diese Erweiterung komplexer gewordene Programmablauf wird im folgenden Kapitel 7.4.2 erläutert.

#### **7.4.2 Programmablauf**

Die Abbildung 7.2 zeigt nur die wesentlichen Strukturen des Programms ohne dabei auf Einzelheiten einzugehen. Das grundlegende Konzept basiert wie bei Blix [17] auf einer Entkopplung des thermomechanischen Prozesses in mechanische und thermische Berechnungsschritte. Die durch plastische Deformationen und Schädigung dissipierte Energie wird im thermischen Schritt als Energiequelle berücksichtigt. Das sich damit ergebende Temperaturfeld beeinflusst die Materialparameter der mechanischen Berechnung. Im Gegensatz zu [17] wird hier über den Gesamtschritt iteriert, um die von einer Temperaturänderung hervorgerufenen elastischen Dehnungsanteile und die Temperaturabhängigkeit der Materialparameter während des mechanischen Schritts erfassen zu können.

Die Möglichkeit einer gekoppelten thermomechanischen FE-Analyse, bei der diese aufwendigen Iterationen nicht erforderlich sind, ist bei Miehe [61] nachzulesen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde davon kein Gebrauch gemacht, um die bestehende mechanische Berechnung des Grundprogramms weitestgehend unverändert zu lassen, so daß die am Lehrstuhl erarbeiteten FE-Programme in ihrer Formulierung übereinstimmen. Durch die Eingabe eines Steuerparameters kann auf eine thermische Rechnung verzichtet werden. Dies führt bei nahezu isothermen Prozessen zu einer deutlichen Einsparung von Rechenzeit, da dann nur der mechanische Vorgang berechnet wird und die mechanisch-thermische Iteration entfällt.

Um das Programm vielseitig einsetzen zu können, besteht die Möglichkeit, mit einem weiteren Steuerparameter die Ermittlung von stationären oder instationären Temperaturfeldern vorzugeben.

Die einzelnen in der Abbildung 7.2 dargestellten Elemente sind Themen der nächsten Kapitel. Der mechanische Schritt wird in 7.4.3, der thermische Schritt in 7.4.4 erläutert. Die Notwendigkeit der Berechnung von Teilschritten wird in Kapitel 7.4.5 verdeutlicht.

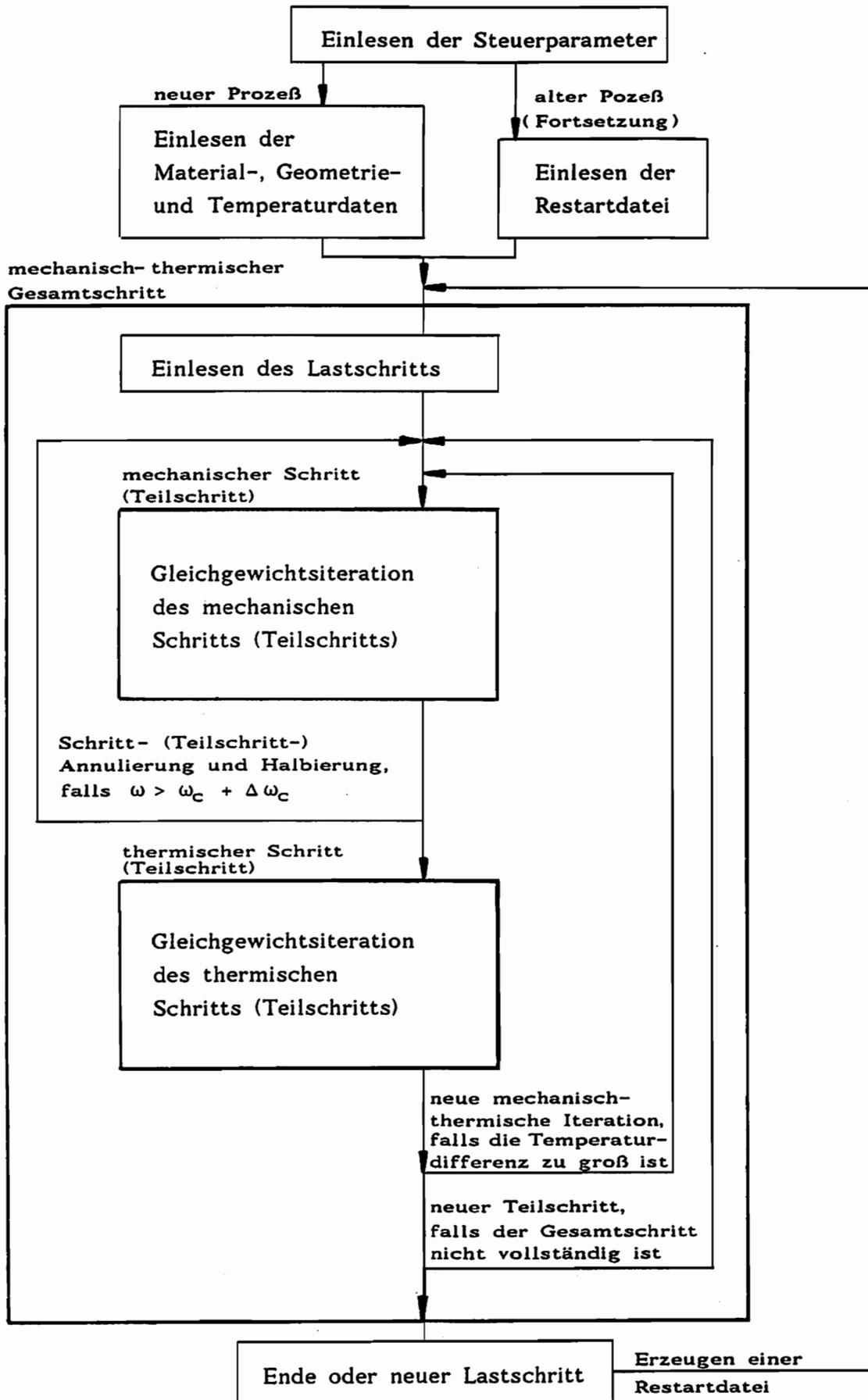


Abbildung 7.2 Programmstruktur

### 7.4.3 Mechanischer Prozeß

Wie bereits angesprochen, geht dieser Teil der Arbeit wesentlich auf Fornefeld und Rott zurück. Die theoretischen Grundlagen des mechanischen FE-Schritts werden deshalb hier nur kurz erwähnt und sind in [11] und [59] ausführlich nachzulesen. Als wesentliche Stichworte zur Beschreibung der verwendeten FE-Methode sind zu nennen:

- Prozeßbeschreibung mittels einer Update-Lagrange-Formulierung
- geometrisch nichtlineares Verhalten durch große Deformationen
- physikalisch nichtlineares Verhalten durch das Materialgesetz
- Verschiebungsmethode
- Prinzip der virtuellen Arbeit
- inkrementelle Formulierung
- isoparametrische 4-, 8- oder 12-Knotenelemente
- Volumenintegration mittels Gauß-Quadratur
- Gleichgewichtsiteration mit modifiziertem Newton-Raphson-Verfahren

Aufbauend auf dem bestehenden FE-Programm mußten für den mechanischen Schritt die beiden folgenden, grundsätzlichen Veränderungen vorgenommen werden:

- Berechnung der dem Stoffgesetz entsprechenden Steifigkeitsmatrix
- Angabe des Differentialgleichungssystems zur Spannungsermittlung

Um die damit verbundenen Gleichungen sinnvoll wiedergeben zu können, müssen einige mit der Konzeption des FE-Programms zusammenhängende Beziehungen und Begriffe eingeführt werden. Unter einer Update-Lagrange-Formulierung versteht man die Beschreibung eines Prozesses durch eine Reihe von Teilschritten, wenn jeweils nach der Vollendung eines Schrittes die dann vorliegende Konfiguration B als neue, aktualisierte Anfangskonfiguration  $B^0$  definiert wird. Auf sie bezieht sich dann der nächste Schritt. Falls die Bezugskonfiguration nicht eindeutig aus dem Kontext hervorgeht wird die folgende Indizierung vorgenommen: Der linke obere Index steht für die Konfiguration, in der die betreffende Größe auftritt, während der linke untere Index ihre Bezugskonfiguration angibt. Ausgenommen von dieser Indizierung sind Größen, die bereits im Kapitel 2 auf andere Art gekennzeichnet wurden (z.B.  $B^0$  oder  $\overset{0}{\rho}$ ). Der in Gleichung (2.32) definierte, auf die Ausgangskonfiguration bezogene 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor  $\overset{2}{\mathbb{S}}$  wird entsprechend dieser Bezeichnungsweise  $\overset{t}{\underset{0}{\mathbb{S}}}$  geschrieben. Als Konsequenz der Update-Lagrange Formulierung verwendet die FE-Rechnung den 2. Piola-Kirchhoff Tensor  $\overset{t+\Delta t}{\underset{t}{\mathbb{S}}}$ , der zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$  auftritt und sich auf die Konfiguration des Zeitpunkts  $t$  bezieht

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{S} &= \frac{\rho}{\rho} ( {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{F}^{-1} ) \cdot ( {}^{t+\Delta t}_t \boldsymbol{\sigma} ) \cdot ( {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{F}^{-1} )^T \\ &= \frac{\rho}{\rho} ( {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{F}^{-1} ) \cdot ( {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{S} ) \cdot ( {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{F}^{-1} )^T \end{aligned} \quad (7.41)$$

Spaltet man die gesuchten Spannungen des Zeitpunkts  $t+\Delta t$  in den bekannten Anteil und einen Zuwachs

$${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{S} = {}^t_t \mathbf{S} + \Delta_t \mathbf{S} \quad (7.42)$$

auf, so läßt sich näherungsweise ansetzen

$$\Delta_t \mathbf{S} \approx {}^t_t \dot{\mathbf{S}} \Delta t \quad (7.43)$$

Die substantielle Zeitableitung von

$${}^\tau_\tau \boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho}{\rho} \mathbf{F} \cdot {}^t_t \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T, \quad t \leq \tau \leq t+\Delta t \quad (7.44)$$

und die Berücksichtigung der Jaumann'schen Zeitableitung (2.35) ergibt im Fall  $\tau=t$

$${}^t_t \dot{\mathbf{S}} = {}^t_t \nabla \boldsymbol{\sigma} - \frac{\dot{\rho}}{\rho} {}^t_t \boldsymbol{\sigma} - {}^t_t \mathbf{D} \cdot {}^t_t \boldsymbol{\sigma} - {}^t_t \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^t_t \mathbf{D}^T \quad (7.45)$$

Da im Gegensatz zu Fornfeld und Rott das in dieser Arbeit verwendete Stoffgesetz mit gewichteten Cauchy-Spannungen  $\mathbf{S}$  formuliert ist, ist für die Auswertung der Gleichung (7.45) die Beziehung

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} = \left( \frac{\rho}{\rho} \nabla \mathbf{S} \right) = \frac{\rho}{\rho} \nabla \mathbf{S} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \mathbf{S} = \frac{\rho}{\rho} \nabla \mathbf{S} + \frac{\dot{\rho}}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \quad (7.46)$$

erforderlich. Weil in dieser und in den folgenden Gleichungen alle auftretenden Größen zum Zeitpunkt  $t$  betrachtet werden, wird auf die Indizierung verzichtet. Mit dem Stoffgesetz in der Form (7.7) und der Näherung (2.44) für das Dichteverhältnis erhält man

$$\dot{\mathbf{S}} = (1-\omega) \nabla \mathbf{S} - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}^T = \mathbf{C}^{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{C}^{\ominus}, \quad (7.47)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{D} &= (1-\omega) 2G \left[ \mathbf{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Sp}(\mathbf{D}) \mathbf{1} - 2 \left\langle \frac{2 \text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D})}{k^2 \left( \frac{1}{G} \frac{\partial k^2}{\partial a} + 4 \right)} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( \mathbf{T} + \left\langle \left\langle \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \frac{\partial k}{(1-\omega)} \mathbf{1} \right\rangle \right\rangle \right) \right] - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}^T \end{aligned} \quad (7.48)$$

und

$$\mathbf{C}^{\ominus} = (1-\omega) 2G \left[ - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \dot{\mathbf{T}} \mathbf{1} + 2 \left\langle \frac{\frac{1}{2G} \frac{\partial k^2}{\partial \mathbf{T}} \dot{\mathbf{T}}}{k^2 \left( \frac{1}{G} \frac{\partial k^2}{\partial \mathbf{a}} + 4 \right)} \right\rangle \cdot \left( \mathbf{T} + \left\langle \left\langle \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \frac{\partial k}{(1-\omega)} \mathbf{1} \right\rangle \right) \right]. \quad (7.49)$$

Die in (7.47) vorgenommene Aufspaltung trennt die Terme, in denen die Verzerrungsgeschwindigkeiten linear auftreten, von denen, die  $\mathbf{D}$  nicht enthalten und die unter der Bezeichnung  $\mathbf{C}^{\ominus}$  zusammengefaßt sind. Letztere sind von der Temperaturänderung beeinflusst und korrespondieren mit dem Temperaturlastvektor  $[\mathbf{R}_{\ominus}]$ . Der Anteil der inkrementellen Steifigkeitsmatrix  $[\mathbf{K}_1]$ , der im Zusammenhang mit der linearen Verzerrung auftritt, ergibt sich aus der Gleichung (7.48).

Die von Fornefeld und Rott verwendete Lösungsstrategie basiert auf einer Gleichgewichtssiteration, der eine inkrementelle Betrachtungsweise des Zeitschritts  $\Delta t$  zugrunde liegt. Diese wird mit Abbildung 7.3 verdeutlicht.

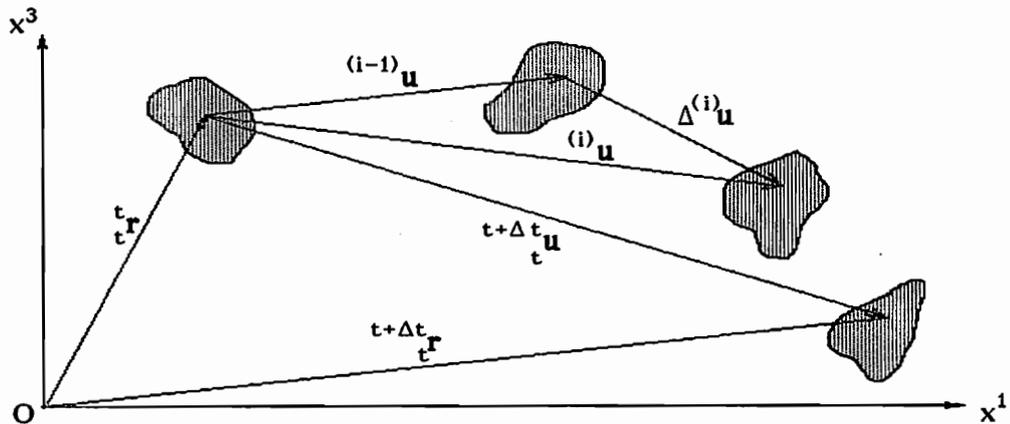


Abbildung 7.3 Inkrementelle Betrachtung der Verschiebung  ${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{u}$

Die unbekanntenen Knotenpunktverschiebungen des Zeitschritts  $\Delta t$

$${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}_t \mathbf{r} - {}^t_t \mathbf{r}, \quad (7.50)$$

werden durch die Folge  ${}^{(i)}\mathbf{u}$

$${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{u} \approx {}^{(i)}\mathbf{u} = {}^{(i-1)}\mathbf{u} + \Delta {}^{(i)}\mathbf{u} \quad i=1, \dots \quad (7.51)$$

angenähert.  ${}^{(i)}\mathbf{u}$  ist das Ergebnis des Iterationsschritts  $i$  für die Verschiebung  ${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{u}$  und unterscheidet sich von der vorausgehenden Näherung

$^{(i-1)}\mathbf{u}$  durch den Zuwachs  $\Delta^{(i)}\mathbf{u}$ .

Die mit diesen Verschiebungen verbundenen Verzerrungen werden variiert und mit dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor  ${}^{t+\Delta t}{}_{t}\boldsymbol{\varepsilon}_g$  beschrieben, der das dem 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor konjugierte Verzerrungsmaß darstellt. Die Variation wird in den linear von  $\Delta^{(i)}\mathbf{u}$  abhängenden Anteil  $\delta \Delta^{(i)}_{t}\mathbf{e}$  und in den Anteil der in  $\Delta^{(i)}\mathbf{u}$  quadratischen Terme  $\delta \Delta^{(i)}_{t}\boldsymbol{\eta}$  aufgeteilt

$$\delta {}^{(i)}_{t}\boldsymbol{\varepsilon}_g = \delta \Delta^{(i)}_{t}\mathbf{e} + \delta \Delta^{(i)}_{t}\boldsymbol{\eta} \quad (7.52)$$

Die vorausgehenden, verkürzt dargestellten Betrachtungen führen zu der von Fornefeld und Rott verwendeten Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_{tV} \Delta^{(i)}\tilde{\mathbf{S}} \cdot \delta \Delta^{(i)}_{t}\mathbf{e} \, {}^t dV + \int_{tV} \Delta^{(i)}\tilde{\mathbf{S}} \cdot \delta \Delta^{(i)}_{t}\boldsymbol{\eta} \, {}^t dV \\ & + \int_{tV} {}^{(i-1)}\tilde{\mathbf{S}} \cdot \delta \Delta^{(i)}_{t}\boldsymbol{\eta} \, {}^t dV = \delta A_V + \delta A_A - \int_{tV} {}^{(i-1)}\tilde{\mathbf{S}} \cdot \delta \Delta^{(i)}_{t}\mathbf{e} \, {}^t dV \quad , \quad (7.53) \end{aligned}$$

die eine inkrementelle Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit ist. Die Größen  $\delta A_V$  und  $\delta A_A$  bezeichnen die virtuelle Arbeit der volumenhaft angreifenden bzw. äußeren flächenhaft angreifenden Kräfte. Die inkrementellen Spannungszuwächse  $\Delta^{(i)}\tilde{\mathbf{S}}$  ergeben sich aus der Aufspaltung

$$\Delta^{(i)}\tilde{\mathbf{S}} = {}^{(i)}\tilde{\mathbf{S}} - {}^{(i-1)}\tilde{\mathbf{S}} \quad (7.54)$$

Bei der Iteration wird das zweite Integral auf der linken Seite der Gleichung (7.53) nicht berücksichtigt, da es Größen enthält, die, verglichen mit den anderen Integralausdrücken, von höherer Ordnung klein sind.

Eine Diskretisierung des Körpers mit isoparametrischen finiten Elementen besagt, daß zur Beschreibung der Element-Geometrie

$$\mathbf{x}^\alpha = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \hat{\mathbf{x}}_i^\alpha \quad (7.55)$$

und der Element-Verschiebungen

$$\mathbf{u}^\alpha = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \hat{\mathbf{u}}_i^\alpha \quad (7.56)$$

gleiche Ansatzfunktionen  $h_i(\xi, \eta)$  verwendet werden. Bei axialsymmetrischen Elementen entfällt die Verschiebung in  $x^2$ -Richtung, so daß  $\alpha$  nur die Werte 1 und 3 annimmt. Die Anzahl der Elementknoten  $N$  hängt ab

vom Elementtyp und ist bei den im Programm implementierten Elementen 4, 8 oder 12. Mit den ihnen entsprechenden Ansätzen  $h_i(\xi, \eta)$  ergibt sich letztlich aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit das linearisierte Gleichungssystem auf Elementebene

$$\left( \int_{\mathcal{V}_e} [{}^{(1)}\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{C}] [{}^{(1)}\mathbf{B}_1] {}^t dV_e + \int_{\mathcal{V}_e} [\mathbf{B}_{nl}]^T [{}^{(0)}\tilde{\mathbf{S}}^*] [\mathbf{B}_{nl}] {}^t dV_e \right) [\Delta^{(i)} \hat{\mathbf{u}}] = \int_{\mathcal{A}_e} [\mathbf{H}]^T [\mathbf{p}] {}^o dA_e - \int_{\mathcal{V}_e} [{}^{(i)}\mathbf{B}_1]^T [{}^{(i-1)}\tilde{\mathbf{S}}] {}^t dV_e - \left\{ \Delta t \int_{\mathcal{V}_e} [{}^{(1)}\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{q}_\ominus] {}^t dV_e \right\}. \quad (7.57)$$

Im Unterschied zu der analogen Beziehung bei Fornefeld wurden in (7.57) alle volumenhaft angreifenden Kräfte vernachlässigt, da hier Trägheitseinflüsse unbedeutend sind. Die eckigen Klammern weisen auf eine vektorisierende Darstellung der tensoriellen Größen hin. So gilt beispielsweise

$$[\Delta^{(i)} \tilde{\mathbf{S}}] = \begin{bmatrix} \Delta^{(i)} \tilde{\mathbf{S}}_{11} \\ \Delta^{(i)} \tilde{\mathbf{S}}_{22} \\ \Delta^{(i)} \tilde{\mathbf{S}}_{33} \\ \Delta^{(i)} \tilde{\mathbf{S}}_{13} \end{bmatrix}. \quad (7.58)$$

Alle in Gleichung (7.57) auftauchenden Größen, die nicht im folgenden angegeben werden, treten identisch bei Fornefeld auf und können dort nachgelesen werden. Es ist beim Vergleich mit [11] allerdings zu beachten, daß der 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{S}}$  dort mit  $\mathbf{S}$  bezeichnet ist (nicht zu verwechseln mit dem hier  $\mathbf{S}$  genannten gewichteten Cauchy-Spannungstensor).

Kürzt man die Integralterme der Gleichung (7.57) ab, und bezeichnet sie als

inkrementelle Element-Steifigkeitsmatrix bei linearer Verzerrung

$$[\mathbf{k}_1] = \int_{\mathcal{V}_e} [{}^{(1)}\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{C}] [{}^{(1)}\mathbf{B}_1] {}^t dV_e, \quad (7.59)$$

inkrementelle Element-Steifigkeitsmatrix bei nichtlinearer Verzerrung

$$[\mathbf{k}_{nl}] = \int_{\mathcal{V}_e} [\mathbf{B}_{nl}]^T [{}^{(0)}\tilde{\mathbf{S}}^*] [\mathbf{B}_{nl}] {}^t dV_e, \quad (7.60)$$

äußerer Element-Lastvektor

$$[r_p] = \int_{A_e} [H]^T [p] \circ dA_e \quad , \quad (7.61)$$

Lastvektor der Element-Spannungen

$$[{}^{(i-1)}f] = \int_{V_e} [{}^{(i)}B_1]^T [{}^{(i-1)}\tilde{\sigma}] {}^t dV_e \quad (7.62)$$

und Element-Temperaturlastvektor

$$[r_\Theta] = \Delta t \int_{V_e} [{}^{(1)}B_1]^T [q_\Theta] {}^t dV_e \quad , \quad (7.63)$$

so liefert der Zusammenbau der Element-Steifigkeitsmatrizen und Element-Lastvektoren

$$[K_l + K_{nl}] \Delta^{(i)} \hat{u} = [R_p] - [{}^{(i-1)}F] - \{ [R_\Theta] \} \quad . \quad (7.64)$$

Die geschweiften Klammern zeigen an, daß dieser Ausdruck nur im ersten Iterationsschritt zu berücksichtigen ist. Um die geometrischen Randbedingungen zu erfassen, wird die System-Steifigkeitsmatrix kondensiert.

Die bereits angesprochenen Unterschiede zu den bei Fornefeld auftretenden Größen beruhen auf dem veränderten Stoffgesetz und lassen sich mit den Gleichungen (7.48) und (7.49) ermitteln.

Der die "Temperaturlast" hervorrufende Vektor  $[q_\Theta]$  folgt aus (7.49)

$$[q_\Theta] = \begin{bmatrix} c_{\Theta 1} & + \frac{c_{\Theta 2}}{3} (2\sigma^{11} - \sigma^{22}({}^t x^1)^2 - \sigma^{33} + c_{\Theta 3}) \\ c_{\Theta 1} \left(\frac{1}{{}^t x^1}\right)^2 + \frac{c_{\Theta 2}}{3({}^t x^1)^2} (-\sigma^{11} + 2\sigma^{22}({}^t x^1)^2 - \sigma^{33} + c_{\Theta 3}) \\ c_{\Theta 1} & + \frac{c_{\Theta 2}}{3} (-\sigma^{11} - \sigma^{22}({}^t x^1)^2 + 2\sigma^{33} + c_{\Theta 3}) \\ & c_{\Theta 2} \sigma^{13} \end{bmatrix} \quad (7.65)$$

mit

$$c_{\Theta 1} = -2G(1-\omega) \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha \dot{T} \quad (7.66)$$

$$c_{\Theta 2} = 4G \frac{c_2}{k c_3} \dot{T} \quad (7.67)$$

$$c_{\Theta 3} = \vartheta k \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \quad (7.68)$$

und  $c_2$  aus (7.32),  $c_3$  aus (7.33).

Zur Berechnung von  $[k_1]$  muß die Spannungs-Verzerrungsmatrix  $[C]$  angegeben werden. Dies geschieht durch die Umformung der Gleichung (7.48), was allerdings eine unsymmetrische Matrix  $[C^*]$  erzeugt. Da die Steifigkeitsmatrix zwar einen wesentlichen Einfluß auf das Konvergenzverhalten der Rechnung, nicht aber auf das Ergebnis hat, führen Näherungen bei der Erstellung der Steifigkeitsmatrix im ungünstigsten Fall dazu, daß die geforderte Genauigkeit nicht erreicht werden kann und das Programm die Rechnung abbricht. Da eine Berücksichtigung von  $[C^*]$  wesentlichen größeren Speicherplatz und Aufwand bei der Lösung des Gleichungssystems bedeuten würde, werden hier die unsymmetrischen Anteile, die im wesentlichen auf den Schädigungszuwachs zurückgehen, vernachlässigt. Zusätzlich können auch die in  $[C^*]$  auftretenden  $\sigma_{\beta}^{\alpha}$  Terme entfallen, da  $\sigma_{\beta}^{\alpha} \ll G(1-\omega)$  gilt. Mit diesen Vereinfachungen ergibt sich die symmetrische Spannungs-Verzerrungsmatrix  $[C]$

$$[C] = \quad (7.69)$$

$$\left[ \begin{array}{ccc} (c_{k1} - c_{k3} \tau^{11} \tau^{11}) \left( \frac{c_{k2}}{(t_X^1)^2} - c_{k3} \tau^{11} \tau^{22} \right) (c_{k2} - c_{k3} \tau^{11} \tau^{33}) (-c_{k3} \tau^{11} \sigma^{13}) & & \\ & \left( \frac{c_{k1}}{(t_X^1)^4} - c_{k3} \tau^{22} \tau^{22} \right) (c_{k2} - c_{k3} \tau^{22} \tau^{33}) (-c_{k3} \tau^{22} \sigma^{13}) & \\ & & (c_{k1} - c_{k3} \tau^{33} \tau^{33}) (-c_{k3} \tau^{33} \sigma^{13}) \\ \text{symmetrisch} & & \\ & & (G(1-\omega) - c_{k3} \sigma^{13} \sigma^{13}) \end{array} \right]$$

mit

$$c_{k1} = 2G(1-\omega) \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \quad (7.70)$$

$$c_{k2} = 2G(1-\omega) \frac{\nu}{(1-2\nu)} \quad (7.71)$$

$$c_{k3} = \left\langle \frac{8G}{k^2 c_3 (1-\omega)} \right\rangle \quad (7.72)$$

und dem Deviator  $\tau$  des Cauchy-Spannungstensors  $\sigma$ .

Mit  $[q_\ominus]$ ,  $[C]$  und den weiteren in [11] angegebenen Größen lassen sich (7.59) bis (7.63) berechnen. Die Volumenintegration wird nach einer Transformation auf die lokalen Koordinaten des jeweiligen Elementes mit Gauß-Quadratur durchgeführt. Nach dem Zusammenbau zu den Gesamtmatrizen und Vektoren liefert (7.64) das Verschiebungsinkrement  $\Delta^{(i)}\hat{u}$ . Mit den dann bekannten Verschiebungen  $^{(i)}\hat{u}$  der Knotenpunkte, den Ansatzfunktionen  $h_i$  und der Annahme konstanter Maßzahlen  $v^\alpha$  des Geschwindigkeitsvektors während eines Zeitschritts lassen sich die Koordinaten eines Punktes im Zeitintervall  $t \leq \tau \leq t + \Delta t$  berechnen

$$\tau_{x^\alpha} = (\tau - t) v^\alpha + {}^t x^\alpha \quad (7.73)$$

Die Kenntnis dieser Koordinaten ist erforderlich bei der Integration des Stoffgesetzes zur Ermittlung der Spannungen an den Gauß-Punkten. Die hier übernommene Formulierung des Grundprogramms verwendet kontravariante Spannungskomponenten und kovariante Komponenten des Geschwindigkeitsvektors

$$v = v^\alpha g_\alpha = v_\alpha g^\alpha \quad (7.74)$$

Ein Vergleich von (7.10) und (7.11) zeigt, daß im hier betrachteten Fall gilt

$$v^1 = v_1, \quad v^2 = 0 = v_2, \quad v^3 = v_3 \quad (7.75)$$

Die Umrechnung zwischen den Spannungskomponenten der Tensoren  $S$  und  $\sigma$  erfolgt mit dem Porenvolumenanteil  $\omega$  des jeweils betrachteten Zeitpunkts nach (2.45). Die Zeitintegration wird wie beim homogenen Zug (Kapitel 3.3) mit einem Runge-Kutta Algorithmus 4. Ordnung durchgeführt. Das zu integrierende Differentialgleichungssystem hat die folgende Form

$$\dot{s}^{11} = 2G \left( v_{1,1} + c_{s1} - \frac{2}{3} \lambda (2s^{11} - s^{22}(x^1)^2 - s^{33}) \right) + (v_{1,3} - v_{3,1}) s^{13} \quad (7.76)$$

$$\dot{s}^{22} = \frac{2G}{(x^1)^2} \left( \frac{v_1}{x^1} + c_{s1} - \frac{2}{3} \lambda (-s^{11} + 2s^{22}(x^1)^2 - s^{33}) \right) - 2 \frac{v_1}{x^1} s^{22} \quad (7.77)$$

$$\dot{s}^{33} = 2G \left( v_{3,3} + c_{s1} - \frac{2}{3} \lambda (-s^{11} - s^{22}(x^1)^2 + 2s^{33}) \right) - (v_{1,3} - v_{3,1}) s^{13} \quad (7.78)$$

$$\dot{s}^{13} = 2G \left( \frac{1}{2} (v_{1,3} + v_{3,1}) - 2\lambda s^{13} \right) + \frac{1}{2} (v_{1,3} - v_{3,1}) (s^{33} - s^{11}) \quad (7.79)$$

$$\dot{\omega} = \langle\langle 2(\vartheta_k + \omega \vartheta_1) \lambda k \rangle\rangle \quad (7.80)$$

$$\dot{a} = 2\lambda k^2 \quad (7.81)$$

$$\dot{T} = \begin{cases} 0 & , \text{ 1. mechanisch-thermischer Iterationsschritt} \\ \frac{t + \Delta t_T - t_T}{\Delta t} & , \text{ 2., 3., ... i. mech.-therm. Iterationsschritt} \\ & \text{ mit } t + \Delta t_T \text{ des (i-1). thermischen Schritts} \end{cases} \quad (7.82)$$

mit

$$\lambda = \left\langle \frac{2c_{s2} - c_2 \dot{T}}{k^2 c_3} \right\rangle \quad (7.83)$$

$$c_{s1} = \frac{1}{(1-2\nu)} \left( \nu (v_{1,1} + \frac{v_1}{x^1} + v_{3,3}) - (1+\nu) \alpha \dot{T} - \langle\langle \frac{2(1+\nu) \vartheta \lambda k}{3(1-\omega)} \rangle\rangle \right) \quad (7.84)$$

$$c_{s2} = \frac{1}{3} \left( s^{11} (2v_{1,1} - \frac{v_1}{x^1} - v_{3,3}) + s^{22} (x^1)^2 (-v_{1,1} + 2\frac{v_1}{x^1} - v_{3,3}) + s^{33} (-v_{1,1} - \frac{v_1}{x^1} + 2v_{3,3}) \right) + s^{13} (v_{1,3} + v_{3,1}) \quad (7.85)$$

und  $c_2$  aus (7.32),  $c_3$  aus (7.33). Als Anfangsbedingungen sind jeweils die Ergebnisse des vorausgegangenen Schrittes zu berücksichtigen.

Die Integration der Temperatur im Differentialgleichungssystem des mechanischen Schrittes hat anders als bei der adiabaten homogenen Rechnung hier nicht das Ziel, eine unbekannte Temperatur am Ende des Zeitschrittes zu ermitteln. Sie wird nur durchgeführt, um die temperaturabhängigen Materialfunktionen während des Zeitschrittes möglichst genau zu erfassen. Der zeitlich linear angenommene Temperaturanstieg stellt bei ausreichend kleinen Zeitschritten eine gute Approximation des realen Temperaturverlaufs dar. Die Berechnung des mit dem mechanischen Prozeß gekoppelten Temperaturfelds ist Thema des folgenden Kapitels.

#### 7.4.4 Thermischer Prozeß

Noch mehr als der von Rott und Fornefeld konzipierte mechanische Schritt bezieht sich auch die hier durchgeführte thermische Rechnung auf Bathe [29]. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird hier anstelle von  $t+\Delta t T^{(i-1)}$  nur die Bezeichnung  $^{(i-1)}T$  verwendet, um die  $(i-1)$ . Approximation der Temperatur zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$  zu kennzeichnen.

Der im Rahmen dieser Arbeit zu betrachtende thermische Prozeß ist nichtlinear und zeitveränderlich - nichtlinear deshalb, weil die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_f$  und die spezifische Wärmekapazität  $c_p$  Funktionen der Temperatur sind.

Da das sich im Prozeßverlauf einstellende Temperaturprofil durch die im Material dissipierte Energie hervorgerufen wird, ist es instationär und verändert sich während eines Zeitschritts in Abhängigkeit von der Größe der lokalen Energiedissipation und der Schrittdauer  $\Delta t$ . Trotz der Vernachlässigung der zeitabhängigen mechanischen Effekte wird bei Berücksichtigung von Wärmeleitung und Wärmespeicherung der thermo-mechanische Gesamtprozeß geschwindigkeitsabhängig.

In einer der Verschiebungsberechnung analogen Weise läßt sich mit einer inkrementellen Betrachtungsweise auch der Systemvektor der Knotenpunkttemperaturen  $^{t+\Delta t}T_s$  durch die Folge der Approximationen  $^{(i)}T_s$  annähern

$$^{t+\Delta t}T_s \approx ^{(i)}T_s = ^{(i-1)}T_s + \Delta ^{(i)}T_s \quad i = 1, \dots \quad (7.86)$$

Berücksichtigt man die oben beschriebenen thermischen Vorgänge und verwendet eine implizite Eulersche Rückwärts-Zeitintegration, so läßt sich der thermische Prozeß mit der in [29] abgeleiteten Gleichung

$$[^{(i)}C^w] \dot{^{(i)}T_s} + [^tK^k] \Delta ^{(i)}T_s = [^{t+\Delta t}Q^B] - [^{(i-1)}Q^k] \quad (7.87)$$

erfassen, die hier unter Verzicht auf Strahlungs- und Konvektionsrandbedingungen wiedergegeben ist. Die darin auftretenden Größen bezeichnen die Wärmekapazitätsmatrix  $[^{(i)}C^w]$ , die Leitfähigkeitsmatrix  $[^tK^k]$ , den Vektor der zugeführten Knotenpunktswärmeströme  $[^{t+\Delta t}Q^B]$  und den Vektor der der  $(i-1)$ . Iteration entsprechenden Knotenpunktswärmeströme  $[^{(i-1)}Q^k]$ .

Linearisiert man den Wärmespeicherungseffekt durch die Annahme zeitlich konstanter Temperaturzuwächse

$$\dot{^{(i)}T_s} = \frac{^{(i)}T_s - ^tT_s}{\Delta t} = \frac{^{(i-1)}T_s + \Delta ^{(i)}T_s - ^tT_s}{\Delta t}, \quad (7.88)$$

so folgt aus (7.87) bei Verwendung der modifizierten Newton-Raphson Iteration

$$\left( \frac{[{}^t\mathbf{C}^w]}{\Delta t} + [{}^t\mathbf{K}^k] \right) \Delta^{(i)} \mathbf{T}_s = [{}^{t+\Delta t}\mathbf{Q}^B] - [{}^{(i-1)}\mathbf{Q}^k] - [{}^{(i-1)}\mathbf{C}^w] {}^{(i-1)} \dot{\mathbf{T}}_s. \quad (7.89)$$

Die Auswertung dieser System-Matrizen und Vektoren geschieht durch Summation der entsprechenden Element-Matrizen bzw. Vektoren. Die zur Erfassung der Elementgrößen erforderlichen Beziehungen werden im weiteren angegeben.

Das isoparametrische Konzept beibehaltend, werden auch die Element-Temperaturen und die Element-Temperaturänderungen mit den gleichen Ansatzfunktionen interpoliert wie die Geometrie (7.55) und die Verschiebungen (7.56)

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \hat{T}_i, \quad (7.90)$$

$$\dot{\mathbf{T}} = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \dot{\hat{T}}_i. \quad (7.91)$$

Damit folgt für die Element-Temperatur-Interpolationsmatrix

$$[H^w] = [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad \dots \quad h_N], \quad (7.92)$$

und für die Element-Temperaturgradienten-Interpolationsmatrix

$$[B^w] = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} & h_{3,1} & \dots & h_{N,1} \\ h_{1,3} & h_{2,3} & h_{3,3} & \dots & h_{N,3} \end{bmatrix}. \quad (7.93)$$

Auf Element-Ebene berechnen sich die in Gleichung (7.89) auftretenden Größen als Integrale über das Elementvolumen. Diese Integration wird, wie schon im mechanischen Schritt, in lokalen Element-Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  durchgeführt, so daß auch die oben angegebenen Matrizen  $[B^w]$  und  $[H^w]$  entsprechend zu transformieren sind. Durch die Integration erhält man

die Element-Leitfähigkeitsmatrix

$$[{}^t\mathbf{k}^k] = \int_{t+\Delta t} \left( [B^w]^T \begin{bmatrix} {}^t\lambda_f & 0 \\ 0 & {}^t\lambda_f \end{bmatrix} [B^w] \right) {}^{t+\Delta t} dV_e, \quad (7.94)$$

die Element-Wärmekapazitätsmatrix

$$[{}^t c^w] = \int_{t+\Delta t V_e} ([H^w]^T t c_p \rho (1-t\omega) [H^w]) {}^{t+\Delta t} dV_e, \quad (7.95)$$

den Elementvektor der zugeführten Knotenpunktwärmeströme

$$[{}^{t+\Delta t} q^B] = \int_{t+\Delta t V_e} ([H^w]^T {}^{t+\Delta t} \dot{w}_d \rho (1-t+\Delta t\omega)) {}^{t+\Delta t} dV_e, \quad (7.96)$$

den Elementvektor der Knotenpunktwärmeströme der (i-1). Iteration

$$[{}^{(i-1)} q^k] = \int_{t+\Delta t V_e} ([B^w]^T \left( \begin{bmatrix} {}^{(i-1)}\lambda_f & 0 \\ 0 & {}^{(i-1)}\lambda_f \end{bmatrix} [B^w] [{}^{(i-1)} T] \right)) {}^{t+\Delta t} dV_e, \quad (7.97)$$

mit dem Element-Knotenpunktstemperaturvektor der (i-1). Iteration

$$[{}^{(i-1)} T]^T = [{}^{(i-1)} \hat{T}_1 \quad {}^{(i-1)} \hat{T}_2 \quad {}^{(i-1)} \hat{T}_3 \quad \dots \quad {}^{(i-1)} \hat{T}_N]. \quad (7.98)$$

Die für die Gleichung (7.89) benötigte Element-Wärmekapazitätsmatrix  $[{}^{(i-1)} c^w]$  berechnet sich entsprechend (7.95) mit den von  $[{}^{(i-1)} T]$  abhängenden Werten  ${}^{(i-1)} c_p$  und  ${}^{(i-1)} \omega$ . In dieser Beziehung ist die bei Bathe verwendete, auf das Volumen bezogene Wärmekapazität durch das Produkt der spezifischen Wärmekapazität  $c_p$  mit der Dichte  $\rho$  ersetzt worden.

Die gleiche Umrechnung ist in (7.96) durchgeführt, um den im Inneren des Körpers erzeugten Wärmestrom pro Volumeneinheit durch den dissipierten Anteil der spezifischen Formänderungsleistung  $\dot{w}_d$  auszudrücken. Mit den Gleichungen des Kapitels 2 ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{w}_d &= \xi \dot{w}_p + \dot{w}_v = \xi \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_p) + \frac{1}{3\rho} \text{Sp}(\mathbf{S}) \text{Sp}(\mathbf{D}_v) \quad (7.99) \\ &= 2\lambda \frac{1}{\rho} \left( \xi k^2 + (s^{11} + s^{22} (x^1)^2 + s^{33}) \left\langle \left\langle \frac{1}{3} (\vartheta_k + \omega \vartheta_1) \frac{k}{1-\omega} \right\rangle \right\rangle \right). \end{aligned}$$

Um die Veränderung von  $\dot{w}_d$  während des mechanischen Zeitschritts besser in der thermischen Rechnung berücksichtigen zu können, wurde anstelle der zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$  dissipierten Formänderungsleistung der Mittelwert der Dissipationsleistungen  ${}^t \dot{w}_d$  und  ${}^{t+\Delta t} \dot{w}_d$  in (7.96) berücksichtigt.

Die rechte Seite von (7.89) stellt eine Wärmestrombilanz dar. Solange das Wärmestromgleichgewicht nicht erreicht ist, bleibt eine Differenzlast bestehen, die das Temperaturinkrement  $\Delta^{(i)}\mathbf{T}$  des folgenden Iterationsschritts hervorruft. Als Konvergenzkriterium wird das Verhältnis der Quadratnormen der System-Knotentemperaturinkremente bzw. Knotentemperaturdifferenzen verwendet:

$$\frac{\|\Delta^{(i)}\mathbf{T}\|}{\|{}^{(i-1)}\mathbf{T} - {}^t\mathbf{T}\|} \leq \varepsilon_{\Theta 1} \quad (7.100)$$

Da z.B. bei elastischen Schritten keine Temperaturdifferenz auftritt, wird als zusätzliches Kriterium

$$\|{}^{(i-1)}\mathbf{T} - {}^t\mathbf{T}\| \leq \varepsilon_{\Theta 2} \quad (7.101)$$

berücksichtigt. Nach Erreichen der geforderten Genauigkeit im thermischen Schritt erfolgt eine erneute Berechnung des mechanischen Prozesses, die die aus der thermischen Rechnung bekannten Temperaturzuwächse verwendet. Nach dem sich daran anschließenden thermischen Schritt, der die durch den Temperaturanstieg veränderte Dissipationsleistung berücksichtigt, liefert ein Vergleich der Knotentemperaturen des  $k$ . und  $(k-1)$ . thermischen Schritts das Kriterium, ob eine weitere mechanisch-thermische Iteration zu durchlaufen ist.

#### 7.4.5 Kritische Schädigung und Bruch

Die im Kapitel 2.3.6 eingeführte kritische Schädigung  $\omega_c$  ist ein Wert, der die Grenze der Materialbelastbarkeit angibt. In diesem Kapitel soll die numerische Behandlung eines Prozesses besprochen werden, bei dem lokal die kritische Schädigung erreicht wird und der sogenannte Makrobruch beginnt. Hier werden, wie in verschiedenen Veröffentlichungen von Tvergaard und Needleman [26, 33], die Elemente, die  $\omega_c$  überschritten haben, als gebrochen angesehen. Durch die Verwendung von mehreren Gaußpunkten pro Element läßt sich der Rißverlauf innerhalb der Elemente durch das Erreichen der kritischen Schädigung an den einzelnen Gaußpunkten angeben.

Im Unterschied zu den Arbeiten von Tvergaard und Needleman ist bei dem hier zugrunde liegenden Verständnis des lokalen Versagens noch elastische Energie im Material gespeichert. Diese im Augenblick des Zerreißens freiwerdende Energie wird durch die Materialdämpfung dissipiert und muß als zusätzliche Energiequelle dem thermischen Prozeß zugeführt werden.

Eine unmittelbare Berücksichtigung des mit dem Versagen verbundenen Entlastungsvorgangs führte innerhalb der entsprechenden Zeitschritte zu einem divergenten Verhalten der Berechnung. Aus diesem Grund wird der mechanische Schritt grundsätzlich beendet, auch wenn dabei die kritische Schädigung erheblich überschritten wird. Zeigt eine Abfrage nach dem mechanischen Schritt dies an, so wird dieser Schritt annulliert und mit der halben Schrittweite erneut durchgeführt (vgl. Abbildung 7.2). Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis der beim Erreichen der kritischen Schädigung durchgeführte Teilschritt so klein ist, daß der Porenvolumenanteil an der versagenden Stelle die kritische Schädigung um maximal  $\Delta\omega_c$  übersteigt. Ist die mit dem Toleranzwert  $\Delta\omega_c$  vorgegebene Genauigkeit erreicht, so folgt der im Kapitel 7.4.4 beschriebene thermische Schritt, der zusätzlich die freiwerdende Energie des versagenden Gaußpunktes berücksichtigt.

Nach der vollständigen mechanisch-thermischen Iteration werden die Spannungen des Elementes auf den Wert Null gesetzt. Das dadurch entstehende Ungleichgewicht bewirkt in dem sich anschließenden mechanischen Schritt die mit dieser lokalen Entlastung verbundenen Verschiebungen.

Das geschilderte Vorgehen führt, in Verbindung mit dem von Tvergaard und Needleman vorgenommenen Schwärzen der gebrochenen Elemente zur graphischen Darstellung des Bruchverlaufs, leicht zu der falschen Einschätzung, die Elemente seien nicht mehr vorhanden, und dem darauf beruhenden Vorwurf, die Massenbilanz des Körpers sei verletzt. Dies ist jedoch nicht der Fall, da die Materie dieser Elemente zwar ihre Tragfähigkeit verloren hat, aber noch vollständig (in mehreren Bruchstücken) existiert.

In den im Kapitel 8 vorgestellten Berechnungen wurde als Steifigkeit der gebrochenen Elemente ein Tausendstel der ursprünglichen Steifigkeit verwendet, um die numerischen Probleme zu vermeiden, die mit steifigkeitslosen Elementen auftreten können.

Die in Kapitel 2 vorgestellten Materialgleichungen erlauben eine phänomenologische Berechnung des geschädigten Kontinuums und ermöglichen durch die Betrachtung des Porenvolumenanteils eine Aussage über die rißkritischen Stellen des Werkstücks. Der Rißverlauf selbst kann aber nur grob angegeben werden, da aus der Bruchmechanik bekannte Effekte mit diesem einfachen Stoffgesetz nicht erfaßbar sind. Dies liegt unter anderem daran, daß der Schädigungseinfluß durch die Ermittlung der effektiv tragenden Fläche berücksichtigt wird und lokale Spannungsspitzen, die durch die Größe oder Verteilung der Mikroporen bzw. den beginnenden Makroriß hervorgerufen werden, in der Modellierung nicht in Erscheinung treten.

Ein weiteres Problem dieser vereinfachten Bruchbeschreibung ist es, daß die Geometrie des FE-Netzes den Bruchverlauf beeinflußt, da der Riß von Element zu Element bzw. Gaußpunkt zu Gaußpunkt fortschreitet.

Ebenfalls netzabhängig sind Bruchmodelle, die zwischen den Elementen den Rißfortschritt durch das Trennen von Knoten verwirklichen, so daß sich in diesem Fall der Bruch von Knotenpunkt zu Knotenpunkt entwickelt.

Die durch das hier verwendete vereinfachte Bruchmodell bedingte Problematik des jeweils um ein Element fortschreitenden Bruches läßt sich durch eine Netzverfeinerung deutlich verringern. Eine automatische Netzneugenerierung in kritischen Zonen des betrachteten Körpers wäre diesbezüglich vorteilhaft. Einer das Materialverhalten realistisch beschreibenden Netzverfeinerung sind aber Grenzen gesetzt, da der FE-Rechnung die Kontinuumstheorie zugrunde liegt, die an die Vorstellung eines repräsentativen Volumenelements gebunden ist. Werden die Elemente des FE-Netzes diesbezüglich zu klein, so ist die Rechnung zwar numerisch unproblematisch, ist aber letztlich homogener als der reale Prozeß. Das globale Verhalten des Systems, welches beispielsweise durch die Zugkraft charakterisiert wird, ist davon normalerweise nicht beeinflußt. Die von einem unzulässig feinen FE-Netz ermittelten lokalen Spannungswerte stellen aber nur Mittelwerte der homogenisierten realen Spannungsschwankungen dar. Die Erfassung von Phänomenen, die durch die Inhomogenitäten der Mikrostruktur hervorgerufen werden, ist so grundsätzlich nicht möglich.

## 8. Rechnungen und Ergebnisse

### 8.1 Allgemeine Darstellung der berechneten Systeme

Der in Abbildung 8.1 gezeigte Meßbereich einer Probe kann mit den im Kapitel 7.3 angegebenen Gleichungen berechnet werden, solange die Deformationen homogen sind. Alle in dieser Arbeit angegebenen Berechnungen wurden analog zu den Experimenten mit konstanter Maschinen-Geschwindigkeit  $\dot{u}_M$  durchgeführt.



Abbildung 8.1: Homogene Berechnung eines Zugversuchs



Abbildung 8.2: FE-Rechnung der halben Zugprobe mit Ringelementen

Die FE-Rechnungen basieren auf unterschiedlichen Elementnetzen. Die jeweilige Netzgeometrie ist im Kapitel 8.3 zusammen mit den Ergebnissen dargestellt. In allen Fällen wurde nur die halbe Probe berechnet, so daß als vorgegebene Verschiebung des mittleren Querschnitts  $u_M/2$  zu berücksichtigen ist. Die Lagerung des mit Ringelementen diskretisierten Probenviertels zeigt Abbildung 8.2. Als Temperatur-Randbedingung  $T_v(t)$  können beliebige Werte vorgegeben werden. Für die in dieser Arbeit beschriebenen Berechnungen gilt  $T_v(t) = \overset{\circ}{T} = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ .

### 8.2 Numerische Probleme

Da die oben angegebene Lagerung bei der Berechnung isothermer Prozesse zu einer vollständig homogenen Deformation führt, wird in der Literatur oft die Probengeometrie mit einer geringen Imperfektion versehen. Tvergaard und Needleman überlagern in [26] den konstanten Radius  $R$  der Probe mit einer Cosinus-Funktion der Amplitude  $\Delta R$ . Auf diese Weise wurden

im Rahmen dieser Arbeit mit unterschiedlichen  $\Delta R$ -Werten isotherme Berechnungen durchgeführt. In Anlehnung an die Experimente wurden alternativ durch die Verringerung einer radialen Knotenkoordinate lokale Schwächungen vorgenommen. Unabhängig von der Größe und der Art dieser Imperfektionen zeigte sich im Gegensatz zu der zitierten Veröffentlichung keine Tendenz zu einer Lokalisierung der Deformationen. Selbst extreme lokale Querschnittsverringerungen von 10% änderten nichts an diesem überraschenden Verhalten. Auch die von Blix in [17] mit Erfolg eingesetzte Methode der kurzzeitigen Fixierung von radialen Knotenkoordinaten führte hier zu irrealen Ergebnissen. Die sich bei dieser Methode ausbildende Einschnürung war begleitet von einem starken Kraftanstieg, was in völligem Widerspruch zu den experimentellen Ergebnissen steht.

Den entscheidenden Hinweis gaben vergleichende Rechnungen mit dem kommerziellen FE-Programm Marc 3.4, die dankenswerterweise von Herrn Dipl.-Ing. P. Ullrich am Institut für Förderung und Transport der Deutsche Montan Technologie durchgeführt wurden. Es zeigte sich, daß bei der Verwendung von isoparametrischen 4-Knoten-Elementen eine spezielle Marc-Routine zur Volumen-Integration gewählt werden muß, um eine Lokalisierung zu erhalten. Ohne diese Routine, die in den Marc-Handbüchern insbesondere für Strukturen im vollplastischen Bereich empfohlen wird, zeigte sich ebenfalls keine Einschnürung. Die mit Marc durchgeführten Rechnungen berücksichtigten näherungsweise die in Kapitel 6 angegebenen Verfestigung durch die Vorgabe von acht Punkten der Spannungs-Dehnungs-Kurve bei  $T=25^{\circ}\text{C}$ . Die entsprechenden eigenen Berechnungen führten bei Ausschaltung der Materialschädigung ( $\omega=0$ ) bis auf geringe Abweichungen von etwa  $1\text{N}/\text{mm}^2$  zu gleichen Ergebnissen.

Die geschilderten Probleme werden von Nagtegaal, Parks und Rice in [62] mit der plastischen Volumenkonstanz begründet, da diese im Zusammenhang mit den linearen Verschiebungsansätzen der 4-Knoten-Elemente die Deformationsmöglichkeiten der Elemente stark einschränkt. Die von Marc zur Lösung dieses Problems verwendete selektive Integration, bei der die volumenverändernden Dehnungsanteile reduziert, d.h. mit einem Gauß-Punkt integriert werden, ist nicht unmittelbar in das hier vorliegende FE-Programm übertragbar. Anstelle dessen läßt sich der gesamte Prozeß reduziert integrieren. Im Gegensatz zu den Rechnungen mit höheren Ordnungen der Volumen-Integration zeigte sich mit der reduzierten Integration die erwartete Lokalisierung der Deformationen. Bathe vertritt in [29] die Auffassung, daß eine selektive oder reduzierte Integration prinzipiell nur verwendet werden sollte, wenn mit Berechnungen höherer Ordnung ausreichende Erfahrungen gesammelt wurden oder andere zuverlässige numerische oder experimentelle Ergebnisse vorliegen. Da letzteres hier der Fall ist, sind die im nächsten Kapitel dargestellten, auf dieser Volumen-

Integration basierenden Berechnungen akzeptabel, es sollten aber weitere numerische Untersuchungen zum Einfluß der verschiedenen Volumen-Integrations-Verfahren folgen. Abbildung 8.3 a zeigt die Ausgangsgeometrie einer Probe mit dem Radius  $R=7\text{mm}$ , die lokal um  $\Delta R=0,05\text{mm}$  geschwächt wurde. Sowohl die eigenen, als auch die mit Marc durchgeführten Berechnungen ergaben bei der Integration mit vier Gauß-Punkten die Verformung  $b$  und bei reduzierter Integration und gleichen vorgegebenen Verschiebungen eine Lokalisierung (c). Die abknickenden Verläufe der Elementränder im Bereich der Einschnürung entstanden durch eine geringe Genauigkeitsanforderung bei der hier dargestellten Vergleichsrechnung.

Die Ursache dafür war ein weiteres numerisches Problem, welches durch die Entlastungen einzelner Elemente entsteht. Da die elastische Steifigkeits-Matrix sich von der plastischen stark unterscheidet, führt dies zu großen Konvergenz-Schwierigkeiten insbesondere beim Einsetzen der Lokalisierung. Gleiches tritt auch auf, wenn weitere Elemente vor ihrer Entlastung neutral, d.h. ohne weiter zu verfestigen, deformiert werden. Die Berechnung entlastender Elemente mit der zu Beginn des Zeitschritts gültigen plastischen Element-Steifigkeits-Matrix führt häufig zur Divergenz. Deshalb wird bei der Entlastung zuvor plastischer Elemente eine Neuberechnung der Steifigkeitsmatrix durchgeführt. Das Konvergenzverhalten wird damit erheblich verbessert. Trotzdem entstehen bei den Rechnungen Situationen, in denen die Schrittweite der vorgegebenen Verschiebungen verändert werden muß, um Divergenz zu vermeiden. Auch kann unter Umständen eine elastische System-Steifigkeits-Matrix schnellere Konvergenz liefern als eine ständig neu zu berechnende Steifigkeits-Matrix mit elastischen und plastischen Elementen.

Schmid hat in [63] mit dem hier verwendeten modifizierten Newton-Raphson-Verfahren ebenfalls divergentes Verhalten bei Entlastungsvorgängen beobachtet. In der genannten Arbeit wurde mit der sogenannten BFGS-Methode wesentlich schnellere Konvergenz erzielt. Entsprechende Untersuchungen konnten im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt werden. Auf das Ergebnis der Berechnungen haben die geschilderten Konvergenz-Probleme aber keinen Einfluß, wenn die geforderte Genauigkeit der mechanischen Iteration erzielt wird.

### **8.3 Ergebnisse der Berechnungen und Vergleich mit den Experimenten**

Die im Kapitel 6 verwendeten homogenen Berechnungen mit einer maximalen Dehnung von 100% sind eine Idealisierung, die eine Approximation der Material-Funktionen näherungsweise ermöglicht. Die Spannungsverläufe der in Abbildung 8.4 dargestellten fiktiven Prozesse veranschaulichen die Entfestigung des Materials, die durch die Temperaturabhängigkeit der

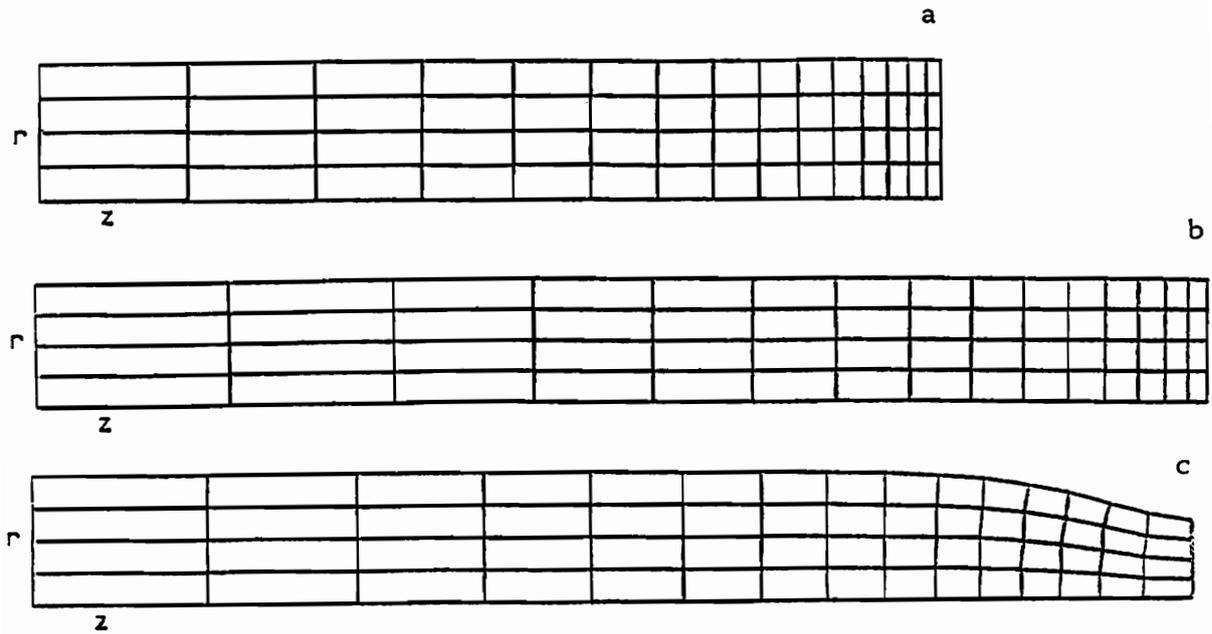


Abbildung 8.3: Vergleichsrechnung zur Volumen-Integration

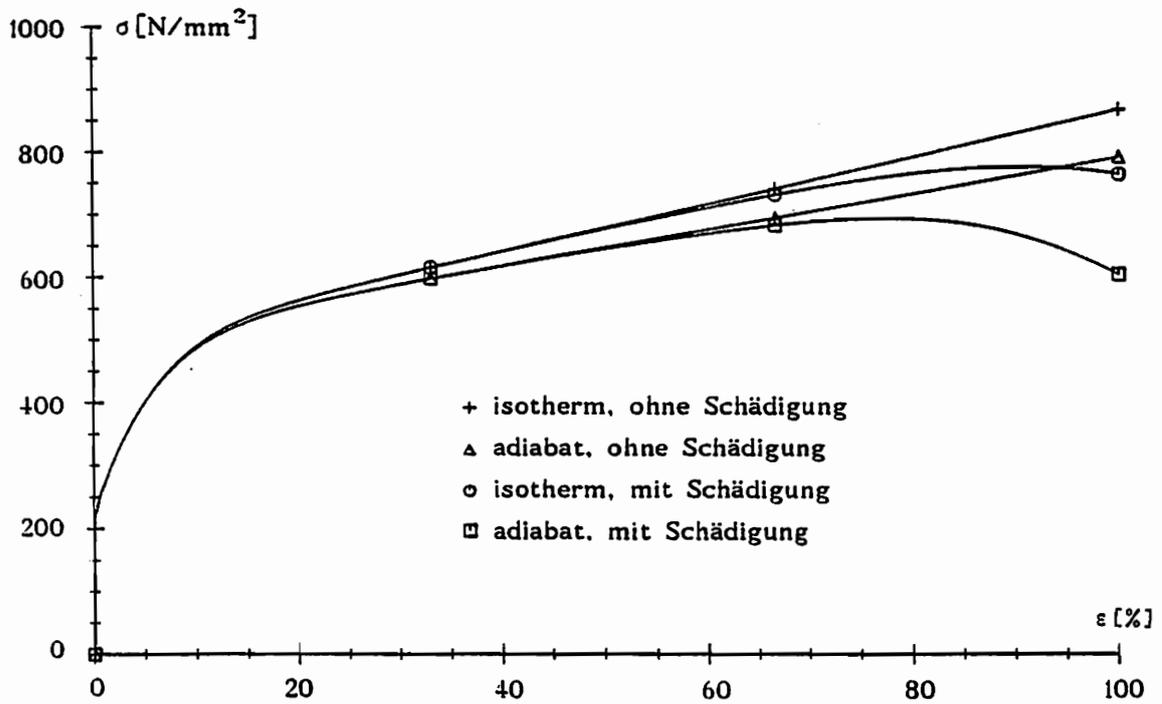


Abbildung 8.4: Rechnungen fiktiver homogener Prozesse

Werkstoff-Funktionen und die Schädigung hervorgerufen wird. Darüber hinaus sind diese Berechnungen aber von untergeordnetem Interesse, so daß im folgenden nur noch FE-Ergebnisse gezeigt werden. Alle dazu erforderlichen Runge-Kutta-Integrationen wurden mit der Genauigkeit 0,001 durchgeführt. Die Iteration des mechanischen Schrittes wurde beendet, wenn die Norm des Korrekturinkrementes weniger als ein Tausendstel der Norm der Verschiebungen im betrachteten Zeitschritt betrug. Für die thermische Iteration wurde entsprechend (7.100) und (7.101)  $\varepsilon_{\Theta 1} = 0.001$  und  $\varepsilon_{\Theta 2} = 0.001^{\circ}\text{C}$  benutzt. Das Abbruchkriterium der mechanisch-thermischen Iteration wird jeweils angegeben. Die kritische Schädigung  $\omega_c$  wurde beim Versagen der Elemente um weniger als 1% überschritten (vgl. Kapitel 7.4.5).

Bei allen Rechnungen konnte auf eine geometrische Imperfektion verzichtet werden, da selbst bei nahezu isothermen Berechnungen der geringe Temperaturzuwachs in der Probenmitte ausreicht, um dort die Lokalisierung einzuleiten.

Um zu überprüfen, ob die Resultate der FE-Berechnungen vom Elementtyp oder der Netzgeometrie abhängen, wurde eine Probe des Typs III sowohl mit 60 linearen 4-Knoten-Elementen als auch mit 40 kubischen 12-Knoten-Elementen diskretisiert. In Analogie zu den Experimenten wurde mit dem vollständigen Stoffgesetz jeweils ein Zugversuch mit  $\dot{\varepsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$  berechnet. Die Genauigkeit der mechanisch-thermische Iteration betrug in beiden Fällen  $0,01^{\circ}\text{C}$ . Die Abbildungen 8.5 und 8.6 zeigen mit der Anfangsgeometrie beginnend verschiedene Stadien der beiden Rechnungen. Im Gegensatz zu der Abbildung 8.3 ergeben sich mit den oben genannten Genauigkeitsvorgaben weitgehend knickfreie Elementränder im Innern der Probe. Dies ändert sich erst durch das Versagen einzelner Elemente bzw. Gauß-Punkte.

Wie im Experiment entsteht auch der gerechnete Bruch an der Stelle des kleinsten Probendurchmessers und wächst von innen nach außen. Der von Tvergaard und Needleman in [26] an einer extrem kurzen, mit 3360 Dreiecks-Elementen diskretisierten Probe beobachtete "Zick-Zack-Bruch" läßt sich mit den hier verwendeten Diskretisierungen nicht feststellen. Die gebrochenen Elemente sind in Abbildung 8.5 dunkel dargestellt. In Abbildung 8.6 sind die Gauß-Punkte eingezeichnet, die die kritische Schädigung überschritten haben und entlastet wurden.

Bis auf die durch die unterschiedlichen Diskretisierungen beeinflusste Bruchphase stimmen die Last-Verschiebungs-Kurven beider Rechnungen überein. Der ebenfalls in Abbildung 8.7 dargestellte Verlauf einer nicht einschnürenden Berechnung mit höherer Integrations-Ordnung weicht erst ab, sobald bei den anderen Rechnungen die Lokalisierung einsetzt. Diese

beginnt früher als beim Experiment, und die berechneten Kräfte sind kleiner als die gemessenen. Der Grund für die zweite Beobachtung ist, daß die Materialparameter mit Spannungs-Dehnungskurven ermittelt wurden, die Versuchen mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-3} \text{s}^{-1}$  entsprechen. Die in Abbildung 4.7 ersichtlichen Abweichungen sind im wesentlichen auf viskose Effekte zurückzuführen, was auch der Vergleich der beiden in Abbildung 4.8 dargestellten experimentellen Kurven verdeutlicht.

Die Abbildung 4.9 zeigt, daß nicht nur die Kraft-Weg-Kurven der beiden betrachteten Rechnungen gut übereinstimmen, sondern auch die lokalen Werte, von denen repräsentativ die Schädigungsvariable  $\omega$ , die Verfestigung  $k^2$  und die Temperatur  $T$  dargestellt sind. Oben ist jeweils die 4-Knoten-Element-Diskretisierung abgebildet. Darunter sind die Werte der neun Gauß-Punkte der 12-Knoten-Elemente angegeben. Der verglichene Zeitpunkt lag unmittelbar vor dem Beginn des Bruches, da die  $\omega$ -Werte im Zentrum der Einschnürung im Bereich der kritischen Schädigung liegen.

Die Diskretisierung einer Probe des Typs II mit 147 4-Knoten-Elementen und verschiedene Deformations-Stadien eines Zugversuchs sind in Abbildung 8.10 zu sehen. Auch diese Berechnung simulierte ein Experiment mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$ . Die Genauigkeit der mechanisch-thermischen Iteration betrug  $0,001^\circ\text{C}$ . Die in Abbildung 8.11 im Vergleich mit zwei Versuchen dargestellte Kraft-Verschiebungs-Kurve zeigt das gleiche Verhalten wie die entsprechenden Verläufe der Abbildung 8.7. Wesentlich realistischer ist bei dieser Diskretisierung der Lastabfall während des Bruches.

Der Anstieg der maximalen Oberflächentemperatur (Abbildung 8.12) zeigt besonders deutlich, daß die Lokalisierung bei der Rechnung früher einsetzt als bei den Experimenten. Da die außen liegenden Elemente nach dem Einsetzen des Bruchs besonders stark belastet werden, steigt die Temperatur der Oberfläche in dieser Phase stark an.

Die unterschiedlich früh einsetzende Einschnürung macht einen Vergleich der lokalen Temperaturen zu gleichen Zeitpunkten hinfällig. Näherungsweise vergleichbar sind Situationen, bei denen die größte örtliche Temperatur von Versuch und Rechnung übereinstimmen. Die Abbildungen 8.13 und 8.14 zeigen, daß bei gleicher Maximaltemperatur insbesondere im Bereich der Einschnürung das berechnete Temperaturprofil und die von der Thermokamera gemessenen Werte nur wenig voneinander abweichen. Ein Grund für die zum Probenende hin größer werdenden Differenzen ist die im Experiment auftretende Erwärmung der Probenhalterung, die mit der konstanten Temperatur-Randbedingung der Rechnung nicht erfaßt wird.

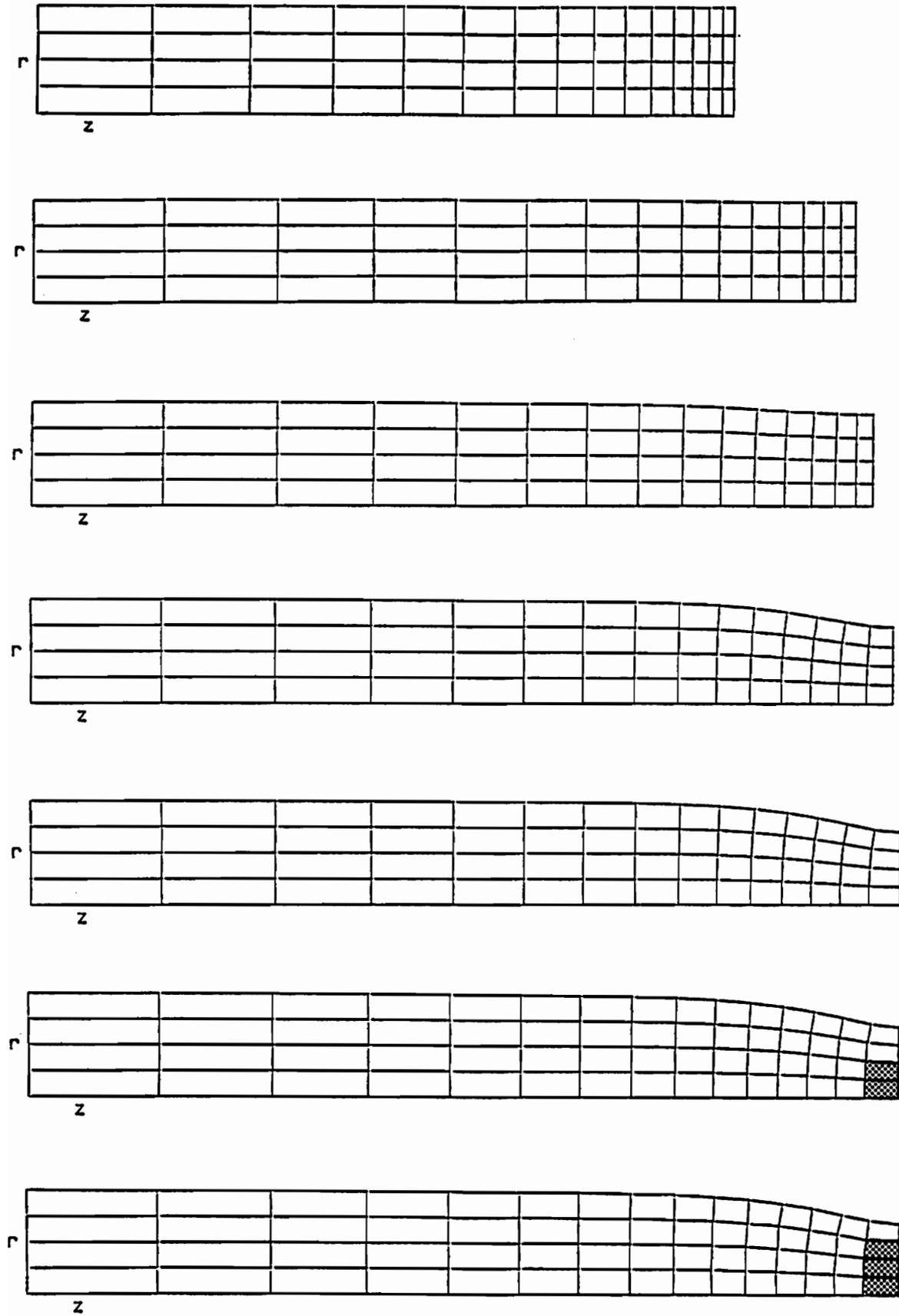


Abbildung 8.5: Stadien einer Rechnung mit 60 4-Knoten-Elementen

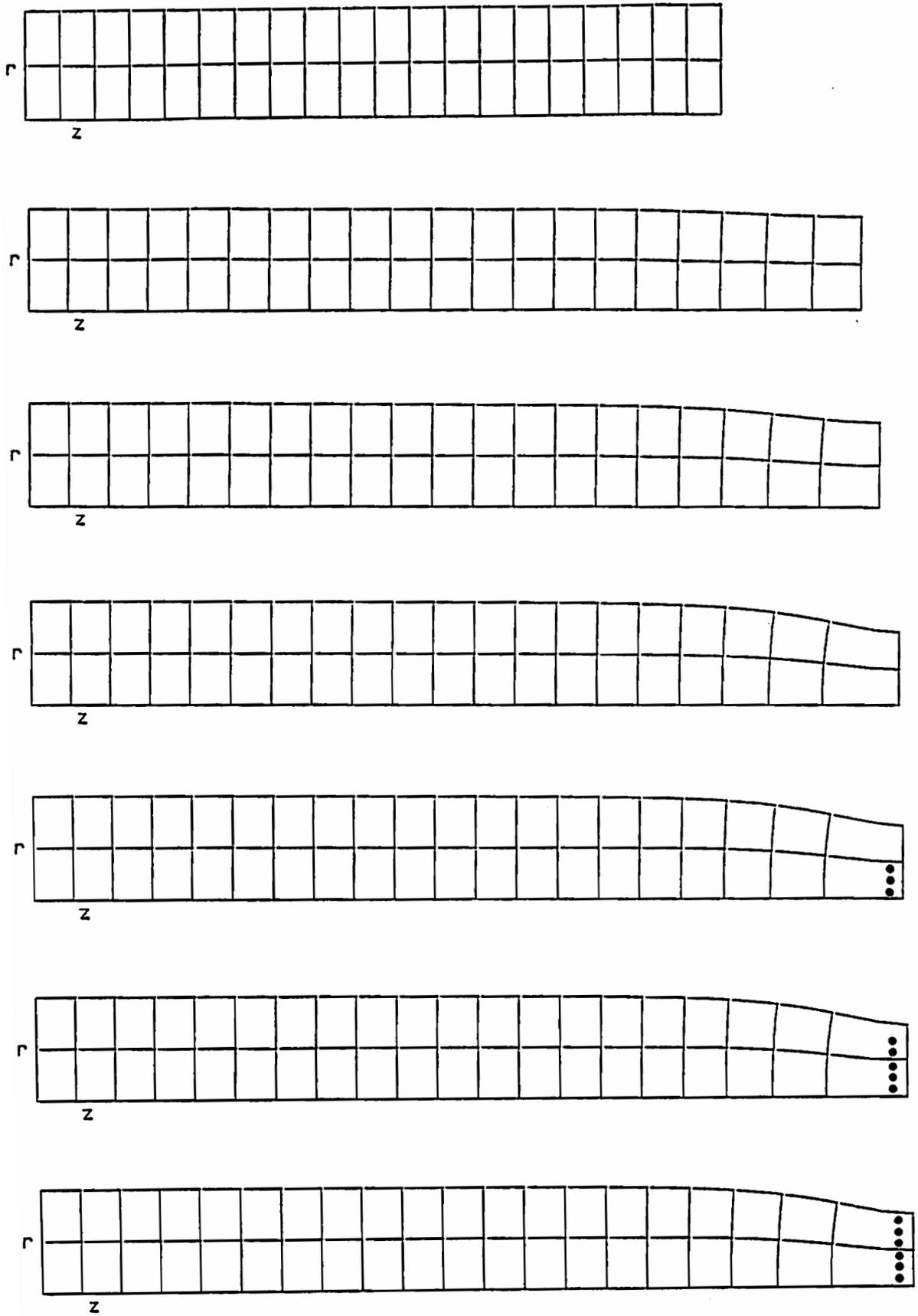


Abbildung 8.6: Stadien einer Rechnung mit 40 12-Knoten-Elementen

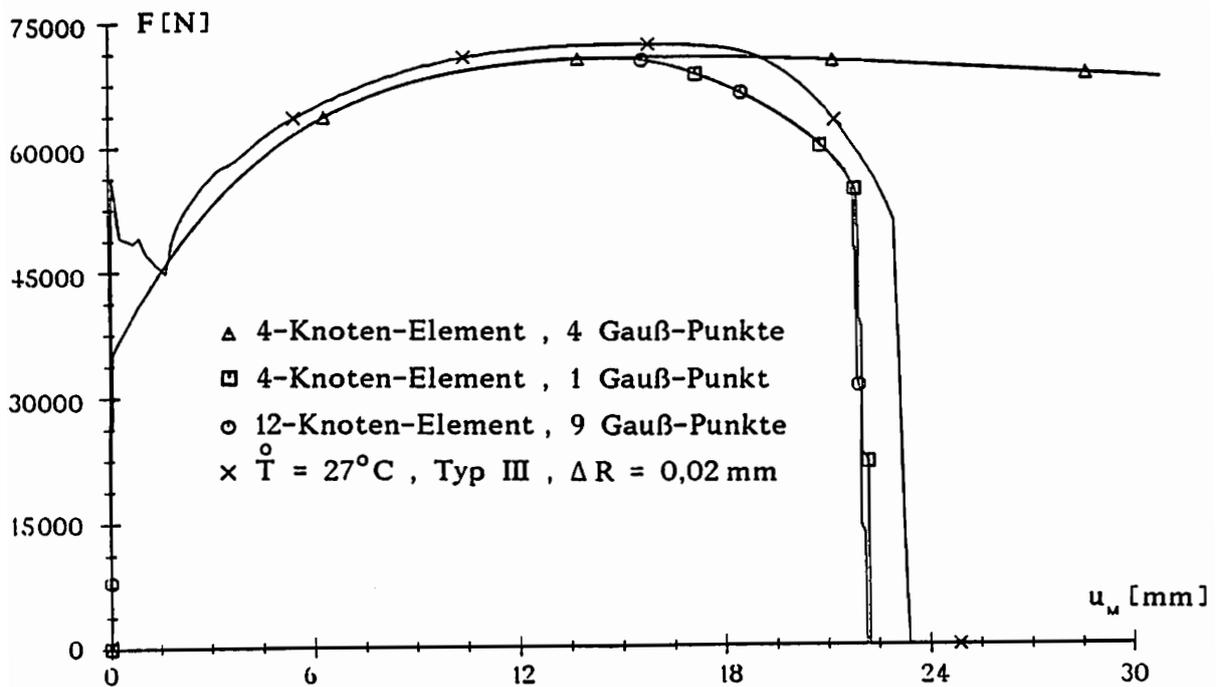


Abbildung 8.7: Kraft-Verschiebungs-Kurven bei  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$

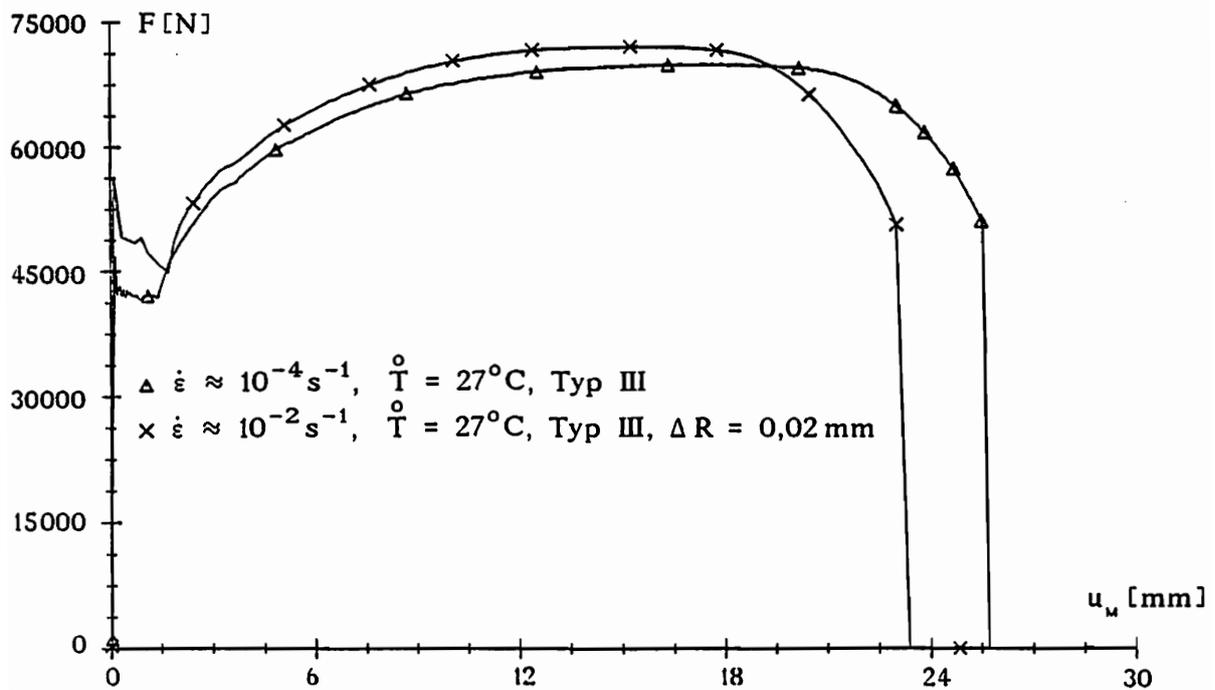


Abbildung 8.8: Kraft-Verschiebungs-Kurven bei  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$



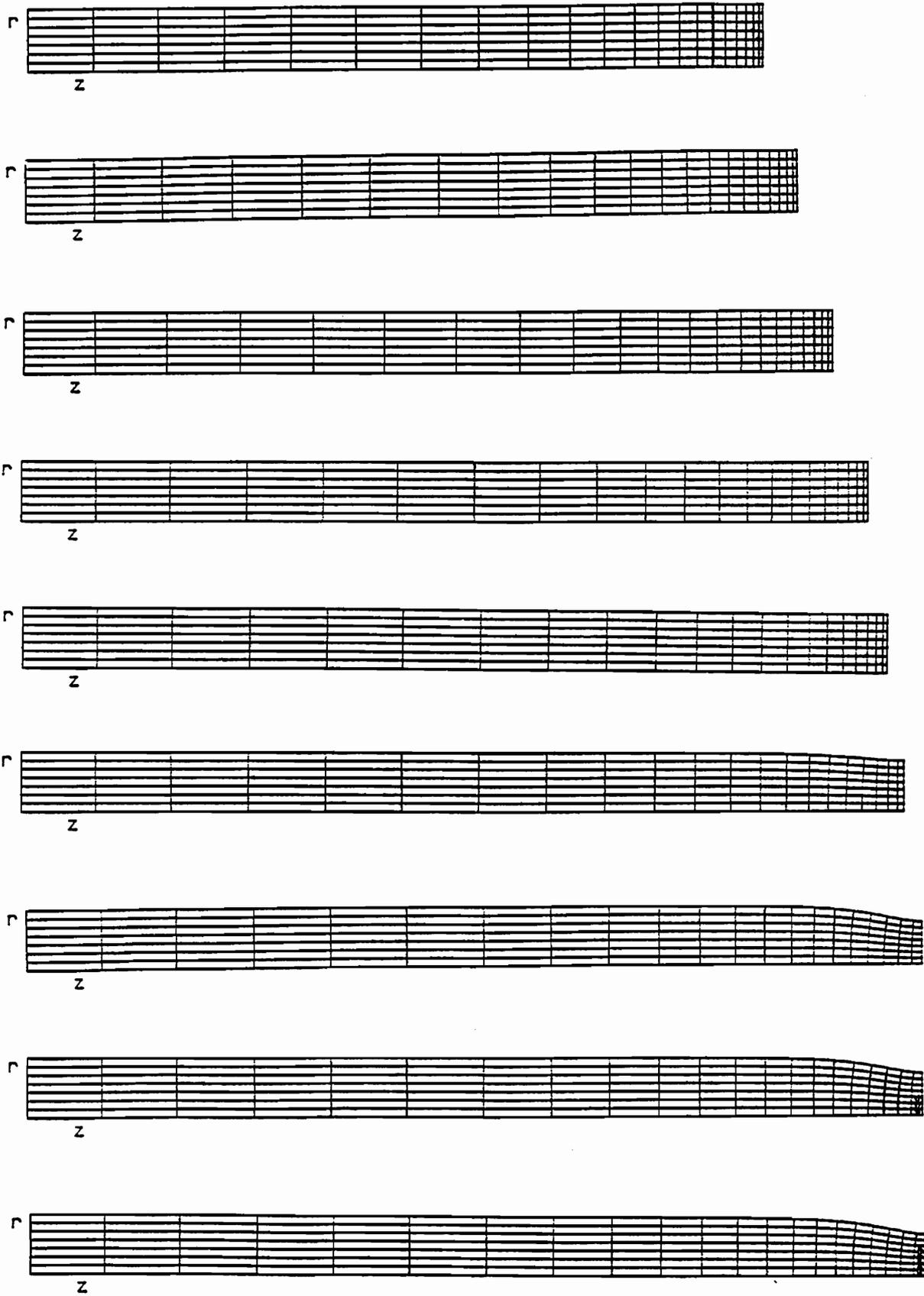


Abbildung 8.10: Stadien einer Rechnung mit 147 4-Knoten-Elementen

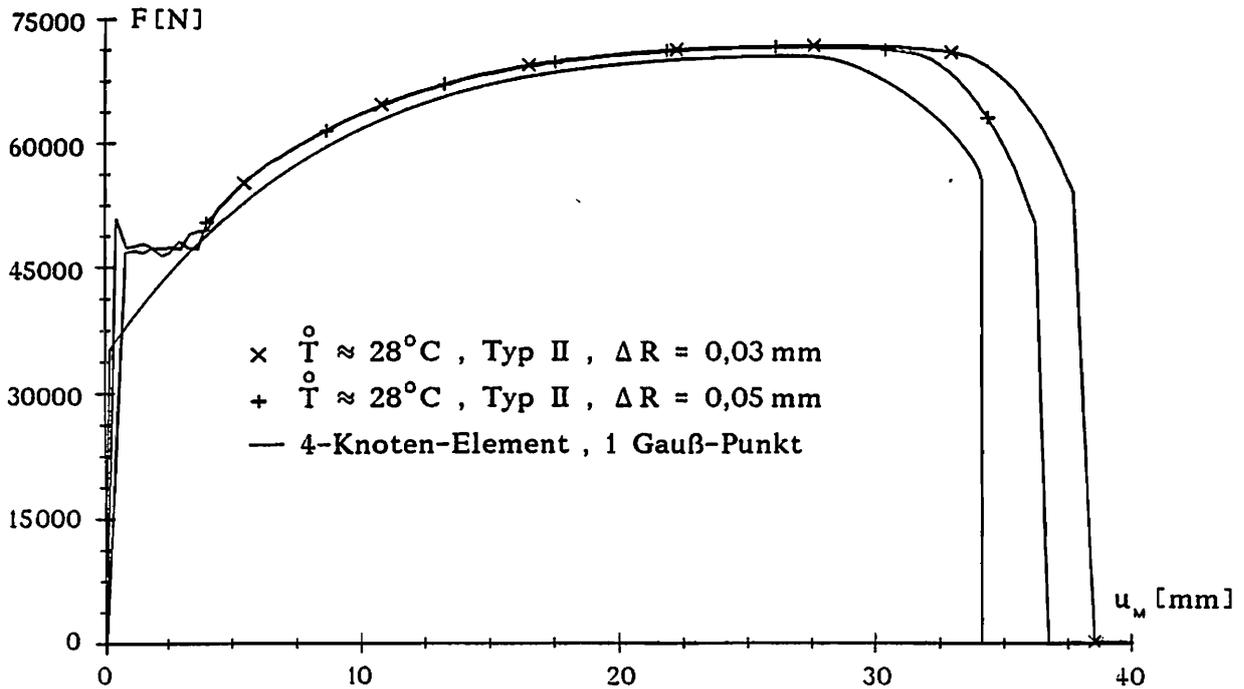


Abbildung 8.11: Kraft-Verschiebungs-Kurven bei  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

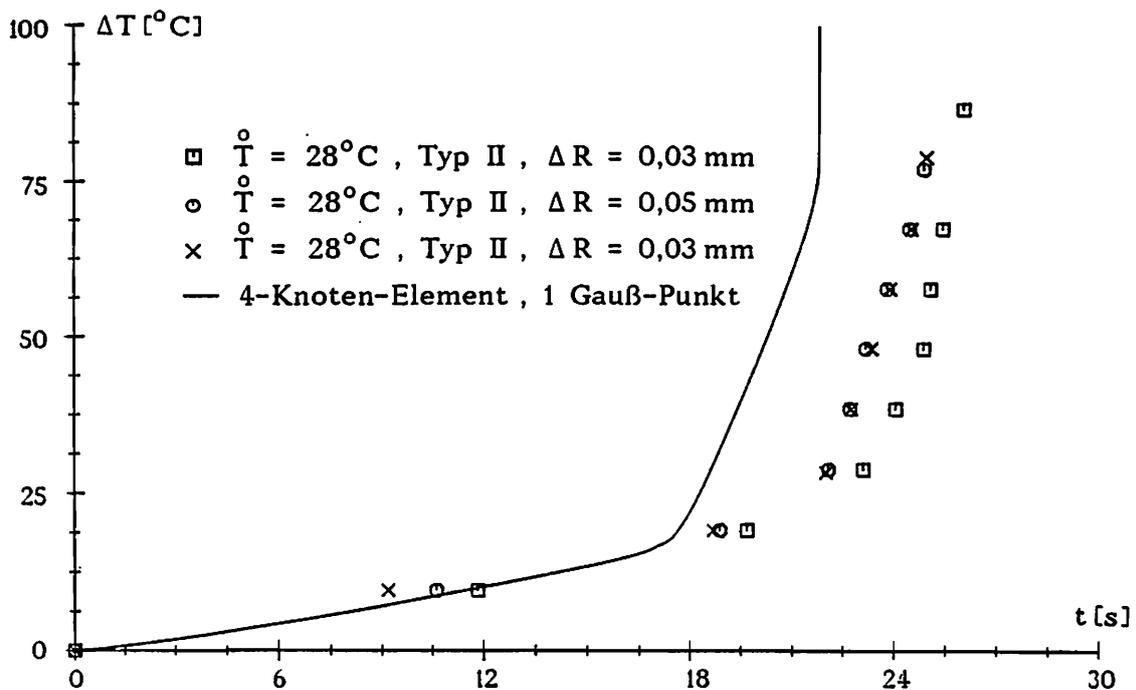


Abbildung 8.12: Maximale Oberflächentemperatur bei  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

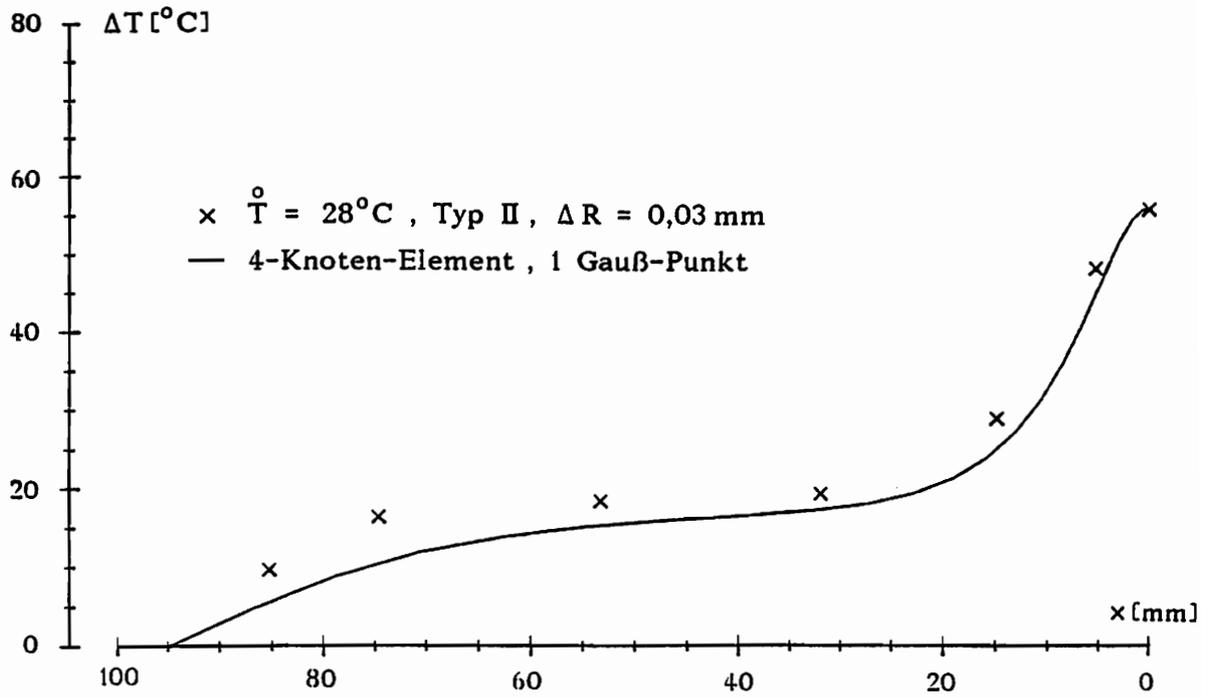


Abbildung 8.13: Temperaturprofile bei gleicher Maximaltemperatur

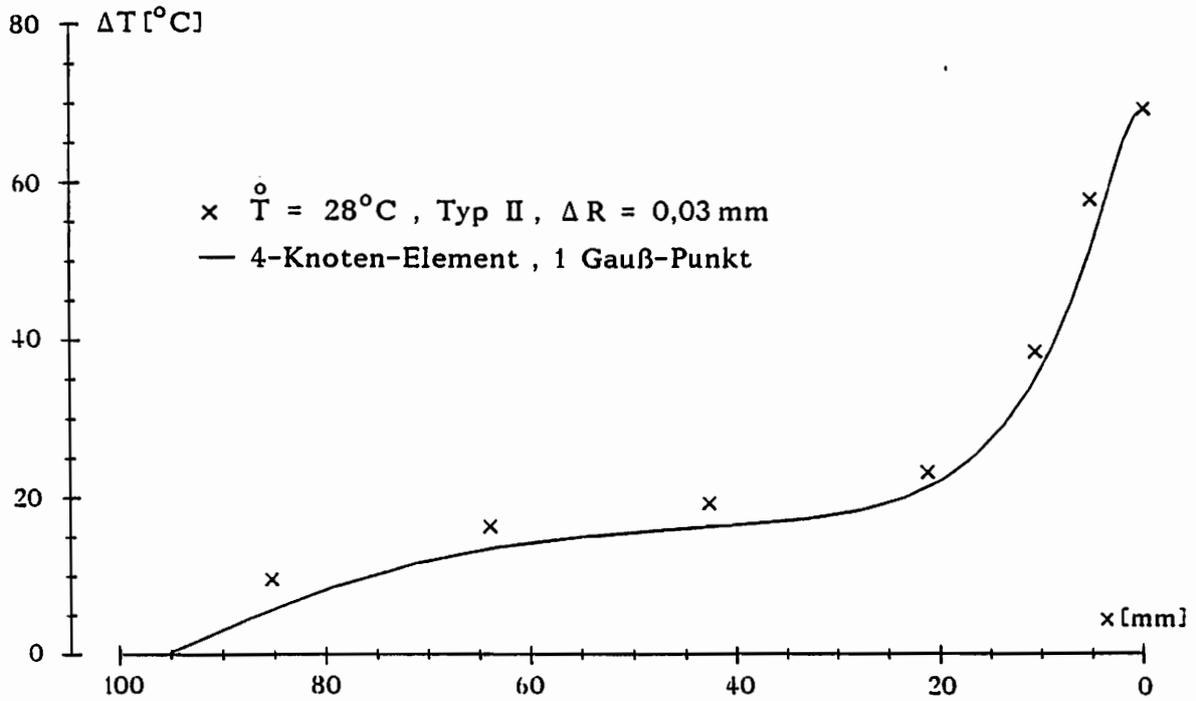


Abbildung 8.14: Temperaturprofile bei gleicher Maximaltemperatur





r	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	5	6	6	7
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	6	6	8
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	4	6	6	8
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	4	6	6	9
z																

r	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	5	6	6	8	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	4	6	6	9	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	4	6	6	9	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	4	6	6	9	
z																

0 < 0.05      1 < 0.10      2 < 0.15      3 < 0.20  
 4 < 0.25      5 < 0.30      6 < 4.30      7 < 8.30  
 8 < 12.30      9 < 16.30

Abbildung 8.16 a, b:  $\omega$  [%]

r	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	7	7	7	8	8	
	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	6	6	7	8	
	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	4	6	7	9		
	4	4	4	4	4	4	3	3	2	2	2	3	5	8	9	
z																

r	3	3	3	3	3	3	4	4	4	5	5	6	6	7	9	
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	5	7	8	
	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1	0	
	3	3	3	3	3	2	2	1	1	0	0	1	0	0	0	
z																

0 < 50      1 < 150      2 < 250      3 < 350  
 4 < 450      5 < 550      6 < 650      7 < 750  
 8 < 850      9 < 950

Abbildung 8.16 c, d:  $\sigma_3^3$  [N/mm<sup>2</sup>]

r	1	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	
	1	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	
	1	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	
	1	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	
z																

r	1	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	
	1	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	
	1	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	
	1	2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	
z																

0 < 25.04      1 < 25.28      2 < 25.52      3 < 25.76  
 4 < 26.00      5 < 26.24      6 < 26.48      7 < 26.72  
 8 < 26.96      9 < 27.20

Abbildung 8.16 e, f: T [°C]

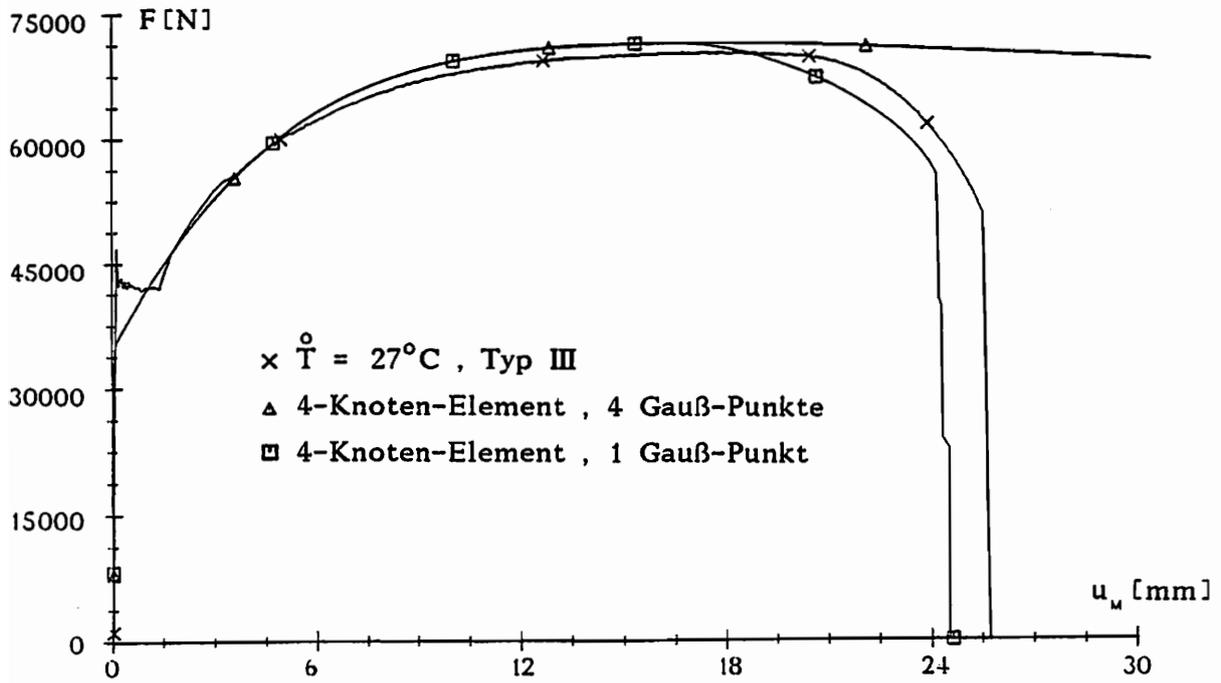


Abbildung 8.17: Kraft-Verschiebungs-Kurven bei  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$

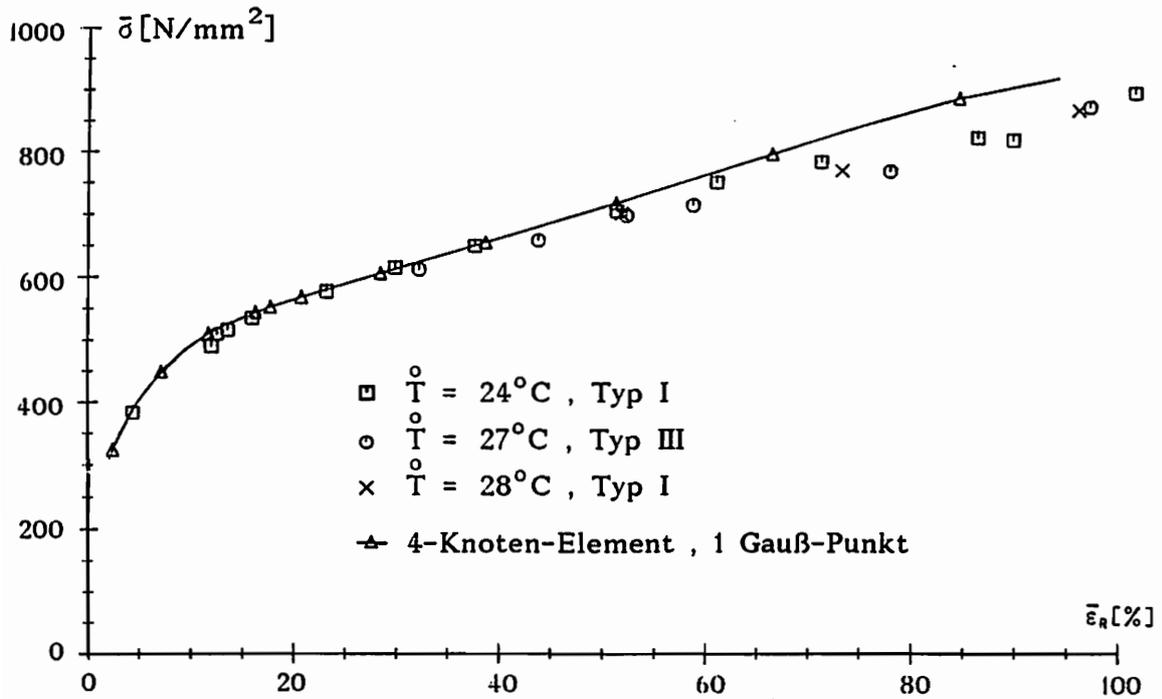


Abbildung 8.18: Lokale Spannungs-Dehnungs-Kurven

Die Abbildungen 8.15 a bis h sollen ein möglichst vollständiges Bild des inhomogenen Zustands vermitteln, der kurz vor dem Bruch im Bereich der Einschnürung einer Probe vorliegt. Im Gegensatz zu allen anderen Darstellungen, die jeweils gleiche Maßstäbe verwenden, wurden diese Abbildungen in radialer Richtung um den Faktor 2 verzerrt. Die meisten der Elemente sind bereits entlastet (d), und außerhalb der Lokalisierung unterscheiden sich die Werte vergleichsweise wenig, wenn man von den Temperaturen (c) absieht.

Besonders interessant ist die Tatsache, daß die im Kapitel 4.5.1 beschriebene Schädigungsverteilung mit dem hier betrachteten Stoffgesetz gut wiedergegeben wird. Im Zentrum der Einschnürung ist der Porenanteil am größten, er fällt entlang der Achse deutlich ab und ist bei den in der Darstellung weiter links liegenden Querschnitten des Einschnürbereichs am Rand größer als an der Achse. Dieses auch bei den anderen Rechnungen auftretende Verhalten (Abbildungen 8.9 a, b und 8.16 a, b) wird verständlich, wenn man die Spannungsverläufe (e bis h) betrachtet. An der Probenachse entstehen in den letztgenannten Querschnitten starke hydrostatische Druckspannungen, so daß in diesem Bereich die Schädigung nicht weiter anwächst.

Die letzte im Rahmen dieser Arbeit betrachtete Rechnung unterscheidet sich von der in Abbildung 8.5 dargestellten nur durch ihre Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Da bei derartigen Prozessen nur geringe Temperaturänderungen auftreten, wurde die Genauigkeit der mechanisch-thermischen Iteration mit  $0,0001^\circ\text{C}$  vorgegeben. Die Abbildung 8.16 stellt vergleichend die Schädigung, die Axialspannung und die Temperatur aller Gauß-Punkte vor dem Bruch und nach dem Versagen der beiden inneren Elemente gegenüber. Es zeigt sich, daß selbst während des Bruchvorgangs die Temperaturerhöhungen weniger als  $3^\circ\text{C}$  betragen (f), so daß die in dieser Arbeit häufig verwendete Bezeichnung "näherungsweise isotherm" gerechtfertigt ist. Nach dem Versagen der inneren Elemente steigt die Schädigung der äußeren Elemente weiter an (b), da diese unter der noch verbliebenen Zugkraft weiter deformiert werden. Die Abbildung 8.16 d zeigt, daß nicht nur die beiden gebrochenen, sondern auch die hinter ihnen liegenden, achsnahen Elemente entlastet werden.

Der Vergleich der Kraft-Verschiebungs-Kurven von Rechnung und Experiment ist in Abbildung 8.17 dargestellt. Es zeigt sich, daß die berechnete Kraft in diesem Fall größer ist als die gemessene. Hierfür sind ebenfalls die bereits im Zusammenhang mit den Abbildungen 8.7 und 8.8 angesprochenen viskosen Effekte die Ursache. Auch bei dieser Versuchsgeschwindigkeit zeigt eine zusätzlich eingezeichnete, nicht einschnürende Rechnung mit vier Gauß-Punkten pro Element identische Werte bis zum Beginn der

Lokalisierung. Der gestufte Lastabfall beim Bruch zeigt, daß die verwendete Diskretisierung nur bis zum Beginn des Bruches eine weitgehend realistische phänomenologische Beschreibung des Prozesses ermöglicht.

Die Abbildung 8.18 vergleicht die im Kapitel 6 zur Anpassung der Verfestigungs-Funktion verwendeten mittleren lokalen Spannungen der Experimente mit den entsprechenden Größen der letztgenannten Rechnung. Die für die Gleichungen (4.5) und (4.6) benötigten Werte der Zugkraft und des Radius des engsten Querschnitts wurden zu verschiedenen Zeitpunkten der Ausgabedatei entnommen. Es zeigt sich, daß die Berechnung im Dehnungsbereich 20% bis 80% steiler verläuft als die Meßdaten, daß sie aber mit anwachsender Schädigung bei sehr großen Dehnungen flacher wird. Diese Abbildung macht deutlich, daß die im Kapitel 6 verwendete Anpassung, die die gegensätzlichen Einflüsse von Schädigung und Dreiachsigkeit des Spannungszustands vernachlässigt, als erste Näherung ausgezeichnete Ergebnisse liefert. Es ist in diesem Zusammenhang fraglich, ob eine mit erheblichem Aufwand verbundene Verbesserung der Anpassung zweckmäßig ist, da die mehrfach in den Abbildungen aufgetretenen Abweichungen durch geschwindigkeitsabhängige Effekte auch dann bestehen bleiben. Im Rahmen dieser Arbeit wird deshalb auf die Überarbeitung der Werkstoff-Funktionen verzichtet. Entsprechende Möglichkeiten werden im folgenden Kapitel angesprochen.

## 9. Zusammenfassung und Ausblick

Nach einer Einleitung in die Problematik der bei duktilen Formänderungen entstehenden Materialschädigung und der Erläuterung des daraus resultierenden Kegel-Tasse-Bruches wurde ein Stoffgesetz vorgestellt, das wesentliche Aspekte dieses komplexen thermo-mechanischen Prozesses wiedergeben kann. Die Einschränkungen, die durch die Beschreibung des Materialverhaltens mit nur einer skalaren internen Variablen  $a$  und der skalaren Schädigungsvariablen  $\omega$  entstehen, wurden angesprochen. Das betrachtete Stoffgesetz wurde im Kapitel 3 im Vergleich mit den Schädigungsmodellen anderer Autoren diskutiert.

Einen umfangreichen Teil der vorliegenden Arbeit stellen die experimentellen Untersuchungen an Vollproben aus Ck 15-Stahl dar. Die Vielzahl der Abbildungen und die zusätzlichen im Text des Kapitels 4 enthaltenen Informationen sollen auch anderen Wissenschaftlern die Möglichkeit eröffnen, anhand der dargestellten Messungen ihre Stoffgesetze anzupassen bzw. zu überprüfen.

Um die Ergebnisse möglichst transparent zu machen, wurden die wesentlichen Versuchsparameter (Probentyp, Anfangstemperatur, Geschwindigkeit und Querschnittsreduktion) in den Abbildungen jeweils vermerkt. Aus dem gleichen Grund wurden auch Kalibrierversuche und Einflüsse der Probengeometrie angesprochen. Die Diskussion der Reproduzierbarkeit der Meßwerte ist in diesem Zusammenhang in gleichem Maße von Bedeutung wie die Beschreibung der aufgetretenen Probleme und Ungenauigkeiten. Diese sollen unter anderem auch aufzeigen, welche Schwierigkeiten oftmals damit verbunden sind, theoretische Sachverhalte mit verlässlichen Meßwerten experimentell zu überprüfen.

Das Kapitel 5 erläutert das Phänomen der dynamischen Reckalterung, welches von dem betrachteten plastischen Stoffgesetz nicht erfaßt werden kann, da es sich um einen zeitabhängigen Effekt handelt.

Die im Kapitel 6 durchgeführte Anpassung der Material-Funktionen mußte unter stark vereinfachenden Annahmen durchgeführt werden, da die erforderlichen Meßpunkte mit sehr großen Dehnungen nur dem Bereich der Einschnürung entnommen werden konnten. Die üblicherweise zur Approximation von Werkstoff-Parametern verwendeten Meßwerte vor der Lokalisierung der Deformationen waren durch die vergleichsweise geringen maximalen Dehnungen zur Anpassung nicht ausreichend.

Die im Kapitel 8 dargestellten Ergebnisse basieren auf den im Kapitel 7 angegebenen Gleichungen. Diese berücksichtigen die bei den betrachteten Prozessen auftretenden wechselseitigen thermischen und mechanischen Einflüsse.

In diesem Kapitel sollen einige Aspekte erneut aufgegriffen und weiterführende Überlegungen und Ansatzpunkte beschrieben werden.

Es wurde im Kapitel 8 angesprochen, daß mit den vorgestellten Diskretisierungen zwar die globale Richtung des Bruchverlaufs von der Achse zur Oberfläche wiedergegeben werden kann, nicht aber der von Tvergaard und Needleman [26] simulierte "Zick-Zack-Bruch". Es ist in diesem Zusammenhang kritisch anzufragen, ob eine Verwendung von Ringelementen für eine so detaillierte Betrachtung dieser in der Realität meist nicht rotations-symmetrisch auftretenden Bruchform ausreichend ist. Weiterhin ist zu bedenken, daß die Voraussetzungen zur repräsentativen Berechnung einer halben Probe in dem Augenblick verletzt werden, in dem der Riß die Ebene des engsten Querschnitts verläßt.

Ebenfalls in Kapitel 8 wurde die grundsätzliche Möglichkeit angesprochen, die in erster Näherung ermittelten Material-Funktionen anhand von FE-Rechnungen zu optimieren. Zwei unterschiedliche, in [11] bzw. [50] verwendete Verfahren wurden bereits im Kapitel 6 genannt. Wie bei allen Optimierungsmethoden steigt auch bei den angesprochenen der Bedarf an Rechenzeit erheblich mit der Anzahl der zu optimierenden Parameter. Aus diesem Grund sollte es bei der Verwendung solcher Verfahren immer das Ziel sein, nur wenige unbekannte Größen in die Optimierung einzubeziehen. Bei dem betrachteten Stoffgesetz würde beispielsweise die Kenntnis der Verfestigungsfunktion  $k^2$  einen erheblichen Vorteil bedeuten, da dann nur die Schädigungsfunktion  $\vartheta$  zu optimieren wäre.

Falls die entsprechenden technischen Möglichkeiten bestehen, sollte deshalb versucht werden, mit Stauchversuchen die Verfestigung des Materials zu ermitteln. Diese ermöglichen im Gegensatz zu den hier zur Verfügung stehenden Zugversuchen wesentlich größere homogene Dehnungen. Zusätzlich besitzen sie den Vorteil, daß bei der Druckbeanspruchung ein Auftreten von Materialschädigung durch Mikroporen nicht zu erwarten ist. Die Meßwerte werden somit weder von der Schädigung noch von einer Dreiachsigkeit des Spannungs-Zustands beeinflusst, so daß die gesuchte Verfestigung des Matrixmaterials solchen Versuchsdaten direkt entnommen werden kann.

Eine weitere Anregung zur Durchführung zusätzlicher Experimente ist in Abbildung 9.1 angedeutet. Um die stark streuenden Meßwerte des Porenanteils mit weiteren Versuchen zu überprüfen, wäre es interessant, in der dargestellten Weise aus dem Einschnürbereich einer Probe Quader zu entnehmen, um ihre Dichte zu ermitteln. Mit der Kenntnis der Anfangsdichte des Materials und Gleichung (2.44) ließe sich so der lokale Wert der Schädigungsvariablen berechnen. Ob und mit welcher Meßgenauigkeit dieser Vorschlag realisierbar ist, kann hier nicht gesagt werden. Es ist

jedoch zu vermuten, daß die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Probenabmessungen für eine derartige Untersuchung zu gering sind.

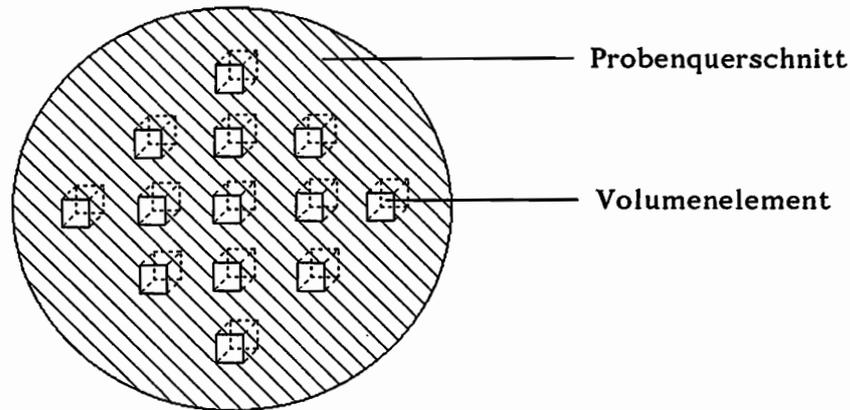


Abbildung 9.1: Untersuchung der lokalen Dichteänderung

Unabhängig von den zuletzt genannten Überlegungen muß zur Durchführung der oben angesprochenen Optimierung ein als Zielfunktion oder Qualitätsmerkmal bezeichnetes Maß definiert werden, mit dem die Güte der jeweils verwendeten Parameterkombination beurteilt werden kann. Bei den hier betrachteten Prozessen sollte dieses Qualitätsmerkmal sowohl den Verlauf der Zugkraft als auch lokale Meßwerte der Schädigung und der Temperaturverteilung berücksichtigen. Die Fragen nach der geeigneten Gewichtung dieser vorzugebenden Zielfunktion und der Anzahl der zum Vergleich heranzuziehenden Meßpunkte sind bei komplexen Optimierungsproblemen nicht unmittelbar zu beantworten.

Um ein Optimierungsverfahren einsetzen zu können, sind zusätzliche Studien zum Konvergenzverhalten von FE-Rechnungen mit entlastenden Elementen durchzuführen. Der nur durch ein gutes Konvergenzverhalten zu garantierende unterbrechungsfreie Ablauf der Berechnungen ist Voraussetzung für eine effiziente Verwendung einer numerischen Parameter-Optimierung, da diese unabhängig von der jeweils verwendeten Methode den zu untersuchenden Prozeß mit einer Vielzahl von Parametersätzen berechnen muß. Wie bereits im Kapitel 8.2 angesprochen, kann als erster Ansatzpunkt zur Verbesserung der Konvergenz die Implementierung des von Schmid [63] mit Erfolg eingesetzten BFGS-Verfahrens in das vorliegende Programm erfolgen. Als weitere Verbesserungsmöglichkeit kommt die Berechnung der vollständigen, nicht symmetrisierten Steifigkeitsmatrix in Betracht, was allerdings einen vergrößerten Speicherplatzbedarf hervorruft, da die Speicherung der oberen Skyline der Matrix dann nicht mehr ausreichend ist.

Um die Qualität und Vielseitigkeit eines Werkstoffgesetzes beurteilen zu können, muß die Berechnung verschiedenartiger Prozesse angestrebt werden. Aus diesem Grund wird von Tianmin Guo das Problem der ebenen Rißausbreitung mit dem hier beschriebenen Stoffgesetz untersucht. Die Ergebnisse entsprechender Simulationen sind zu analysieren und wenn möglich mit experimentellen Werten zu überprüfen.

Grundsätzlich ist die Einschränkung zu beachten, daß die mit dem vorliegenden Stoffgesetz betrachteten Prozesse keiner ausgeprägten Zeitabhängigkeit unterliegen dürfen. Um bei erhöhten Temperaturen das Materialverhalten beschreiben zu können, ist eine zeit- bzw. geschwindigkeitsabhängige Theorie erforderlich, die auch die dynamischen Alterungsvorgänge berücksichtigt. Es besteht diesbezüglich auch der Bedarf an weiteren umfangreichen experimentellen Untersuchungen, um den Einfluß der Alterung auf die Materialschädigung zu ermitteln. Die in diesem Zusammenhang auftretenden Mechanismen sind ein Beispiel dafür, daß die von vielen Wissenschaftlern unternommenen Versuche einer möglichst umfassenden Materialbeschreibung von der unendlichen Komplexität des Verhaltens realer Werkstoffe immer wieder in die Schranken verwiesen werden. Daß es trotzdem mit einem relativ einfach aufgebauten Stoffgesetz wie dem hier vorgestellten möglich ist, wesentliche Aspekte der komplizierten, im Einschnürbereich von Zugproben auftretenden Vorgänge wiederzugeben, sollte ermutigen, weitere Eigenschaften von Werkstoffen zu modellieren.

**Literaturverzeichnis**

- [1] **Kachanov, L. M.**  
Introduction to Continuum Damage Mechanics,  
Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986
- [2] **Rabotnov, Yu. N.**  
Creep Problems in Structural Members  
in: Applied Mathematics and Mechanics Vol. 7,  
North-Holland Publ. Company, Amsterdam, 1969, 373 ff
- [3] **Lemaitre, J.**  
Coupled Elasto-Plasticity and Damage Constitutive Equations  
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 51, 1985, 31-49
- [4] **Lemaitre, J.**  
A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture  
J. Eng. Materials Techn., Trans. ASME 107, 1985, 83-89
- [5] **Chaboche, J. L.**  
Continuum Damage Mechanics: Present State and Future Trends  
ONERA T.P. No. 1986-53
- [6] **Murakami, S., Sanomura, Y.**  
Analysis of the Coupled Effect of Plastic Damage and Creep Damage  
in Nimonic 80A at Finite Deformation  
Engrg. Fract. Mech. 25, 1986, 693-704
- [7] **Frantziskonis, G., Desai, C. S.**  
Elastoplastic Model with Damage for Strain Softening Geomaterials  
Acta Mech. 68, 1987, 151-170
- [8] **Lehmann, Th.**  
Some Thermodynamical Considerations on Inelastic Deformations  
Including Damage Processes  
Acta Mech. 79, 1-2, 1989, 1-24
- [9] **Bruhns, O. T., Diehl, H.**  
An Internal Variable Theory of Inelastic Behaviour at High Rates of  
Strain  
Arch. Mech. 41, 4, 1989, 427-463

- [ 10 ] **Diehl, H.**  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder  
Mitt. Inst. Mech., 66, Ruhr-Univ. Bochum, 1989
- [ 11 ] **Fornefeld, W.**  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells  
Mitt. Inst. Mech., 73, Ruhr-Univ. Bochum, 1990
- [ 12 ] **Lehmann, Th.**  
General frame for the definition of constitutive laws for large non-isothermic elastic-plastic and elastic-viscoplastic deformations  
in: CISM Courses and Lectures No. 281 (ed. Th. Lehmann), Springer-Verlag, 1984, 379-463
- [ 13 ] **Lehmann, Th., Blix, U.**  
On the influence of the coupling of thermal and mechanical processes in the necking problem in uniaxial tension  
J. Thermal Stresses 8, 1985, 153-165
- [ 14 ] **Zdebel, U., Lehmann, Th.**  
Some theoretical considerations and experimental investigations on a constitutive law in thermoplasticity  
Int. J. Plasticity, 3, 1987, 369-389
- [ 15 ] **Pape, A.**  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells  
Mitt. Inst. Mech., 57, Ruhr-Univ. Bochum, 1988
- [ 16 ] **Szegan, F.**  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung  
Mitt. Inst. Mech., 70, Ruhr-Univ. Bochum, 1989
- [ 17 ] **Blix, U.**  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode  
Mitt. Inst. Mech., 40, Ruhr-Univ. Bochum, 1983

- [18] **Zdebel, U.**  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-  
plastischen Stoffgesetz  
Mitt. Inst. Mech., 43, Ruhr-Univ. Bochum, 1984
- [19] **Lange, G.,**  
Mikroskopische und makroskopische Erscheinungsformen des duktilen  
Gewaltbruches (Gleitbruch)  
in: Systematische Beurteilung technischer Schadensfälle, Deutsche  
Ges. Metallkde., Oberursel, 1983, 79-97
- [20] **Stüwe, H-P.**  
Einführung in die Werkstoffkunde  
B.I. Hochschultaschenbücher Band 467, Mannheim, Wien, Zürich, 1978,  
131-133
- [21] **Lehmann, Th.**  
Große elasto-plastische Formänderungen  
Mitt. Inst. Mech., 1, Ruhr-Univ. Bochum, 1976
- [22] **Klingbeil, E.**  
Tensorrechnung für Ingenieure  
B.I. Hochschultaschenbücher Band 197, Mannheim, Wien, Zürich, 1966
- [23] **Tsakmakis, C.**  
Über inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung großer  
inelastischer Deformationen  
VDI-Fortschrittberichte, VDI-Verlag, Reihe 18, 36, 1987
- [24] **Lehmann, Th.**  
Thermodynamical Foundations of Large Inelastic Deformations of  
Solid Bodies Including Damage  
Int. J. Plasticity, 7, 1991, 79-98
- [25] **Tvergaard, V., Needleman, A.**  
Effect of Material Rate Sensitivity on Failure Modes in the Charpy  
V-Notch Test  
J. Mech. Phys. Solids, 34, 1986, 213-241
- [26] **Tvergaard, V., Needleman, A.**  
Analysis of the Cup-Cone Fracture in a Round Tensile Bar  
Acta Metall. 32, 1, 1984, 157-169

- [ 27 ] **Perzyna, P.**  
On Constitutive Modelling of Dissipative Solids for Plastic Flow, Instability and Fracture  
in: Plasticity Today (ed. A. Sawczuk and G. Bianchi), Elsevier Appl. Sci. Publ., 1985, 657-679
- [ 28 ] **Bruhns, O.T.**  
Einige Bemerkungen zur Beschreibung inelastischer Prozesse im Bereich hoher Deformationsgeschwindigkeiten  
Z. angew. Math. Mech., 67, 4, 1987, T181-T183
- [ 29 ] **Bathe, K.-J.**  
Finite-Elemente-Methoden  
Springer-Verlag, 1986
- [ 30 ] **Lehmann, Th.**  
On a generalized constitutive law for finite deformations in thermo-plasticity and thermo-viscoplasticity  
in: Constitutive Laws for Engineering Materials (ed. C.S. Desai, E. Krempl, P.D. Kiousis, T. Kundu), Elsevier, 1987, 173-194
- [ 31 ] **Gurson, A. L.**  
Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth  
J. Eng. Mater. Technol. 99, 1977, 2-15
- [ 32 ] **Tvergaard, V.**  
Material failure by void coalescence in localized shear bands  
Int. J. Solids Structures, 18, 8, 1982, 659-672
- [ 33 ] **Needleman, A., Tvergaard, V.**  
An analysis of ductile rupture modes at a crack tip  
J. Mech. Phys. Solids, 35, 2, 1987, 151-183
- [ 34 ] **Worswick, M. J., Pick, R. J.**  
Void growth and constitutive softening in a periodically voided solid  
J. Mech. Phys. Solids, 38, 5, 1990, 601-625
- [ 35 ] **Groche, P.**  
Zu einem aus mikromechanischen Modellen gewonnenem Werkstoffgesetz  
in: Numerische Methoden der Plastomechanik, Tagungsband, (ed. D. Besdo), Hannover 1989, 56-69

- [ 36 ] **Needleman, A., Kushner, A. S.**  
An analysis of void distribution effects on plastic flow in porous solids  
Eur. J. Mech., A/Solids, 9, 3, 1990, 193-206
- [ 37 ] **Fleck, N. A., Hutchinson, J. W., Tvergaard, V.**  
Softening by void nucleation and growth in tension and shear  
J. Mech. Phys. Solids, 37, 4, 1989, 515-540
- [ 38 ] **Lammering, R.**  
Beiträge zur Theorie und Numerik großer plastischer und kleiner elastischer Deformationen mit Schädigungseinfluß  
Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Nr. F 88/3, 1988
- [ 39 ] **Schmitt, W., Sun, D. Z., Kienzler, R.**  
Application of Micro-Mechanical Models to the Prediction of Ductile Fracture  
in: Localized Damage Computer-Aided Assessment and Control (ed. M.H. Aliabadi, C. A. Brebbia, D. J. Cartwright), Vol. 1: Fatigue and Fracture Mechanics, Springer-Verlag, 1990, 349-359
- [ 40 ] **Becker, R., Needleman, A., Richmond, O., Tvergaard, V.**  
Void growth and failure in notched bars  
J. Mech. Phys. Solids, 36, 3, 1988, 317-351
- [ 41 ] **Basista, M.**  
Damage mechanics experimental background  
Engineering Transactions 36, 4, 1988, 707-737
- [ 42 ] **Fuchs, E. A., Hughett, P., MacMillan, D. C.**  
Quantitative infrared thermography for measurement of temperature-dependent material properties  
Exp. Techn., September 1988, 18-21
- [ 43 ] **Gupta, N. K., Ambasht, B. P.**  
On Non-Uniform Deformation in Tension: An Experimental Study  
Z. angew. Math. Mech. 62, 4, 1982, 411-415
- [ 44 ] **Perzyna, P., Drabik, A.**  
Analysis of the evolution equation describing the postcritical behaviour of dissipative solids  
Arch. Mech., 36, 5-6, 1984, 733-748

- [ 45 ] **Graf, A.**  
Auswertung von Zugversuchen mit Ck 15-Stahlproben  
Konstruktiver Entwurf, Lehrstuhl für Mechanik I, Ruhr-Universität  
Bochum, 1991
- [ 46 ] **Macherauch, E.**  
Praktikum in Werkstoffkunde  
Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1987
- [ 47 ] **Li, C. C., Leslie, W. C.**  
Effects of dynamic strain aging on the subsequent mechanical  
properties of carbon steels  
Metall. Trans. A, 9A, 1978, 1765-1775
- [ 48 ] **Sachdev, A. K.**  
Dynamic Strain Aging of Various Steels  
Metall. Trans. A, 1982, 13A, 1793-1797
- [ 49 ] **Wegst, C.W.**  
Stahlschlüssel  
Verlag Stahlschlüssel, Wegst KG, 1986
- [ 50 ] **Scholz, C.**  
Ein Beitrag zur Gestaltungsoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen  
Mitt. Inst. Mech., 71, Ruhr-Univ. Bochum, 1989
- [ 51 ] **Dahl, W., Rees, H.**  
Die Spannungs-Dehnungs-Kurve von Stahl  
Verlag Stahleisen m. b. H., Düsseldorf 1976
- [ 52 ] **Richter, F.**  
Die wichtigsten physikalischen Eigenschaften von 52 Eisenwerkstoffen  
Mannesmann Forschungsberichte, 650, 1974
- [ 53 ] **Titchener, A. L., Bever, M. B.**  
The stored energy of cold work  
Progress in Metall Physics, (ed. B. Chalmers, R. King), 7, 1958,  
247-338
- [ 54 ] **Bever, M. B., Holt, D. L., Titchener, A. L.**  
The stored energy of cold work  
Progress in Materials Science, 17, Pergamon Press, 1973

- [ 55 ] **Farren, W. S., Taylor, G. I.**  
The heat developed during plastic extension of metals  
Proc. Roy. Soc. A, 107, 1925, 422-451
- [ 56 ] **Taylor, G. I., Quinney, H.**  
The latent energy remaining in a metal after cold working  
Proc. Roy. Soc. A, 143, 1934, 307-326
- [ 57 ] **Sluzalec, A.**  
An evaluation of the internal dissipation factor in coupled thermo-  
plasticity  
Int. J. Non-Linear Mechanics, 25, 4, 1990, 395-403
- [ 58 ] **Lee, E. H.**  
Elastic-Plastic Deformations at Finite Strains  
J. Appl. Mech., 36, 1969, 1-6
- [ 59 ] **Rott, U.**  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen  
Mitt. Inst. Mech., 76, Ruhr-Univ. Bochum, 1991
- [ 60 ] **Bruhns, O. T., Boecke, B., Link, F.**  
The constitutive relations of elastic-inelastic materials at small strains  
Nucl. Engng. Design, 83, 1984
- [ 61 ] **Miehe, C.**  
Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse  
Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der  
Universität Hannover, Nr. F 88/6, 1988
- [ 62 ] **Nagtegaal, J. C., Parks, D. M., Rice, J. R.**  
On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic  
range  
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 4, 1974, 153-177
- [ 63 ] **Schmid, U.**  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern  
Mitt. Inst. Mech., 50, Ruhr-Univ. Bochum, 1987

### Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1      Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2      Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3      Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4      Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5      Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6      Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7      H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8      Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9      Berend Fischer:  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10      Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11      Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12      Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13      Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14      Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15      Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16      Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzipie der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzipie der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktwise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien  
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67      **Michael Geis:**  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68      **Günter Renker:**  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69      **Berthold Schieck:**  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70      **Frank Szepan:**  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71      **Christian Scholz:**  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72      **J. Badur/H. Stumpf:**  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73      **Werner Fornefeld:**  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74      **J. Sączuk/H. Stumpf:**  
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75      **Andreas Feldmüller:**  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 75**