

**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Michael Geis

Zur Berechnung ebener,  
elastodynamischer Rißprobleme  
mit der Randelementmethode

Heft Nr. 67



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum**

**Michael Geis**

**Zur Berechnung ebener,  
elastodynamischer Rißprobleme  
mit der Randelementmethode**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 67  
November 1989**

**Herausgeber:**

**Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum**

© 1989 Dr.-Ing. Michael Geis  
Elberfelder Straße 8  
5810 Witten

**Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung der Arbeit  
oder von Teilen daraus bedarf der Zustimmung des Autors.**

## **Zusammenfassung**

Die Randelementmethode (REM, BEM) wird zur Untersuchung ebener, linear-elastischer Strukturen unter statischer und dynamischer Belastung eingesetzt, wobei Riß- und Kerbprobleme besondere Beachtung finden. Zur Steigerung der Genauigkeit werden sämtliche Randintegrale über geradlinige Elemente nicht wie üblich numerisch, sondern analytisch ausgewertet. Die Aufstellung der Systemgleichungen erfolgt mittels eines von Nardini und Brebbia vorgestellten Verfahrens mit konstanten REM-Massenmatrizen, das hier mit einer neuen Gebiets-Näherungsfunktion kombiniert wird. Zur Berechnung von Schwingungsverläufen werden sowohl Zeitschrittverfahren als auch die Modalanalyse eingesetzt. Die Diskretisierung der Rißspitzen erfolgt mit spannungssingulären Viertelpunktelementen, aus deren Knotenverschiebungen die Spannungsintensitätsfaktoren mit einer hier hergeleiteten Formel mit hoher Genauigkeit direkt berechnet werden können. Die Resultate werden Referenzlösungen aus der Literatur gegenübergestellt.

## **Summary**

The boundary element method (BEM) is employed for the calculation of plane, linear-elastic structures under static and dynamic load, whereby special attention is paid to problems of cracks and notches. To increase the accuracy all integrals over linear elements are evaluated analytically instead of numerically. The composition of the system of equations is carried out with a procedure of constant mass matrices presented by Nardini and Brebbia, which is combined with a new domain approximation function. To calculate transient responses time step methods are used as well as modal superposition. For the discretization of the crack tips traction-singular quarter-point-elements are applied. Stress intensity factors can be computed with high accuracy from the nodal displacements of these elements by use of a formula which is derived here. The results are compared to values from the literature.

## **Vorwort**

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1986 bis 1989 während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe für Numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik der Abteilung für Bauingenieurwesen der Ruhr-Universität Bochum.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller für die Anregung, Unterstützung und Förderung dieser Arbeit sowie für die Übernahme des Berichtes. Herrn Prof. Dr. G. Schmid danke ich für sein Interesse und für die Übernahme des zweiten Berichtes.

Bei meinen Kollegen, die mich mit Rat und Tat unterstützt und damit ebenfalls zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben, möchte ich mich an dieser Stelle ebenfalls bedanken.

Bochum, im November 1989

Michael Geis

Doktorarbeit eingereicht am: 16.06.89

Tag der mündlichen Prüfung: 31.10.89

Berichter: Prof. Dr.-Ing. H. Waller  
Prof. Dr. G. Schmid

## **Inhaltsverzeichnis**

	<b>Seite</b>
<b>0. Abkürzungen</b>	<b>6</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>8</b>
<b>2. Gleichungen der linearen Elastomechanik</b>	<b>10</b>
2.1. Notationen	11
2.2. Grundgleichungen	11
2.3. Ebener Spannungs- und Verzerrungszustand	13
2.4. Bewegungsgleichungen	14
2.5. Randspannungen	14
2.6. Randbedingungen	15
<b>3. Gleichungen der linear-elastischen Bruchmechanik</b>	<b>16</b>
3.1. Spannungsintensitätsfaktoren	16
3.2. Der Griffith-Riß	17
3.3. Das J-Integral	19
<b>4. Die REM in der Elastostatik</b>	<b>21</b>
4.1. Aufstellen der Randintegralgleichungen	21
4.2. Singuläre Punkte	24
4.3. Übergang zu diskreten Punkten	26
4.4. Numerische Berechnung der Randintegrale	30
4.5. Analytische Berechnung der Randintegrale	31
4.5.1. Koordinatensysteme	32
4.5.2. Fundamentallösungen	34
4.5.3. Element-Ansatzfunktionen	35
4.5.4. Berechnung der Elementmatrizen	36
4.5.5. Integrale der Standardelemente	37
4.5.6. Integrale der Viertelpunkt-Elemente	39
4.6. Innenknoten	41
4.7. Spannungen auf dem Rand	43
4.8. Doppelknoten	44
4.9. Substruktur-Technik	45

<b>5.</b>	<b>Die REM in der Elastodynamik</b>	<b>48</b>
5.1.	Formulierung mit frequenzabhängigen Systemmatrizen	49
5.2.	Formulierung mit konstanter Massenmatrix	52
5.2.1.	Lineare Ansatzfunktionen	55
5.2.2.	Fundamentallösung als Ansatz	55
5.2.3.	Konsistenter Ansatz	57
5.2.4.	Erweiterung mit Innenknoten	60
5.3.	Volumenkräfte	62
5.4.	Kombination mit der Methode der Finiten Elemente	63
<b>6.</b>	<b>Berechnungen im Frequenzbereich und Modalanalyse</b>	<b>66</b>
6.1.	Frequenzabhängige Matrizen	66
6.1.1.	Systemantwort auf harmonische Erregung	66
6.1.2.	Berechnung von Eigenfrequenzen	66
6.2.	Konstante Matrizen	67
6.2.1.	Reduktion des Gleichungssystems	67
6.2.2.	Berechnung von Eigenfrequenzen	69
6.3.	Modalanalyse für REM mit konstanten Matrizen	70
6.3.1.	Systemantwort auf harmonische oder konstante Erregung	72
6.3.2.	Systemantwort auf schrittweise konstante Erregung	73
6.3.3.	Rechnung mit verminderter Modalordnung	74
6.4.	Beispiele	75
6.4.1.	Quadratische Klagscheibe	75
6.4.2.	Zweiseitig eingespannte Rechteckscheibe	80
6.4.3.	Erddamm	84
6.4.4.	Bewertung	87
<b>7.</b>	<b>Berechnung mit Zeitschrittverfahren</b>	<b>90</b>
7.1.	Das Newmark-Verfahren	90
7.2.	Das Wilson- $\Theta$ -Verfahren	91
7.3.	Das Houbolt-Verfahren	92
7.4.	Beispiele	93
7.4.1.	Einmassenschwinger	93
7.4.2.	Zweiseitig eingespannte Rechteckscheibe	95
7.4.3.	Bewertung	98

<b>8.</b>	<b>Die REM in der elasto-statischen Bruchmechanik</b>	<b>99</b>
8.1.	Viertelpunkt-Elemente	101
8.2.	Berechnung von K-Faktoren aus den RiBrandverschiebungen	102
8.3.	Berechnung von K-Faktoren aus den Spannungsverläufen	105
8.4.	Beispiele für statische K-Faktoren	106
8.4.1.	CT-Probe	106
8.4.2.	Schräger Innenriß in der unendlichen Scheibe	108
8.4.3.	Schräger Randriß in gezogenem Streifen	112
8.4.4.	Parallele Mehrfachrisse unter Zug und Schub	113
8.4.5.	Abgeknickter Riß	115
8.4.6.	Kerbrißproblem	116
8.4.7.	Teilweise schließender Randriß	118
8.4.8.	Teilweise schließender, schräger Innenriß	120
8.4.9.	Bewertung	122
<b>9.</b>	<b>Die REM in der elasto-dynamischen Bruchmechanik</b>	<b>123</b>
9.1.	Beispiele für dynamische K-Faktoren	124
9.1.1.	Kerbschlagbiegeprobe ohne Auflager	124
9.1.2.	Kerbschlagbiegeprobe mit Auflagern	130
9.1.3.	Rechteckscheibe mit Innenriß	132
9.1.4.	Rechteckscheibe mit schrägem Randriß	136
9.1.5.	Rechteckscheibe mit schrägem Innenriß	138
9.1.6.	Bewertung	141
<b>10.</b>	<b>Kerb- und Kerbrißprobleme</b>	<b>142</b>
10.1	Rechteckscheibe mit Kreiskerbe	142
10.2	Streifen mit Kreiskerbe und Randriß	145
<b>11.</b>	<b>Programmtechnische Realisierung</b>	<b>150</b>
<b>12.</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>153</b>
<b>13.</b>	<b>Literatur</b>	<b>156</b>



## 0. Abkürzungen

<b>a</b>	Rißlänge
<b><math>\alpha, \beta</math></b>	Hilfsvektoren
<b>A</b>	Aufpunkt der Fundamentallösung
<b>A</b>	allgemeine Matrix
<b>b</b>	Belastungen
<b>BEM</b>	Boundary-Element-Methode
<b><math>c_1</math></b>	Druckwellengeschwindigkeit
<b><math>c_2</math></b>	Scherwellengeschwindigkeit
<b><math>c_R</math></b>	Rayleighwellengeschwindigkeit
<b>C</b>	Werte im singulären Punkt
<b><math>\delta</math></b>	Kronecker-Delta
<b><math>\Delta</math></b>	Dirac-Delta
<b><math>\varepsilon</math></b>	Verzerrungen
<b>E</b>	Elastizitätsmodul
<b>EVZ</b>	Ebener Verzerrungs-Zustand
<b>ESZ</b>	Ebener Spannungs-Zustand
<b>f</b>	FEM-Lastvektor
<b>FEM</b>	Finite-Elemente-Methode
<b>FDM</b>	Finite-Differenzen-Methode
<b>G</b>	Schubmodul
<b>G, H</b>	REM-Systemmatrizen
<b><math>G^E, H^E</math></b>	REM-Elementmatrizen
<b><math>\Gamma</math></b>	Rand
<b>I</b>	Einheitsmatrix
<b>K</b>	Knotenpunkt
<b>K</b>	Steifigkeitsmatrix
<b><math>K_{I,II}</math></b>	Spannungsintensitätsfaktoren
<b><math>\kappa</math></b>	Materialkennwert
<b><math>\ell</math></b>	Elementlänge
<b><math>\lambda</math></b>	Lamé-Konstante
<b>LEBM</b>	linear-elastische Bruchmechanik
<b>M</b>	Massenmatrix
<b><math>\mu</math></b>	Schubmodul
<b>n</b>	Randnormale
<b>N</b>	Anzahl der Randknoten
<b><math>N_E</math></b>	Anzahl der Randelemente
<b><math>\nu</math></b>	Querkontraktionszahl

$\omega$	Kreisfrequenz
$\Omega$	Erregerfrequenz
$\Omega$	Gebiet
$p$	Randspannungen
$P^*$	Fundamental-Randspannungen
$\tilde{p}$	Pseudo-Randspannungen
$\varphi$	Winkelkoordinate
$\Phi$	Rand-Ansatzfunktionen
$\Phi$	Modalmatrix
$q$	Modalkoordinate
$r$	Abstand
$r$	rechte Seite eines Gleichungssystems
REM	Randelementmethode
$\rho$	Dichte
$s$	Randkoordinate
$t$	Zeit
$\sigma$	Spannungen
$\sigma^*$	Fundamental-Spannungen
$\tilde{\sigma}$	Pseudo-Spannungen
$T$	Transformationsmatrix
$u, v$	Verschiebungen
$U^*$	Fundamentallösung
$\tilde{u}$	Pseudo-Verschiebungen
$x, y$	karthesische Koordinaten
$x$	Lösungs-Vektor
$X$	Gebietspunkt
$\xi$	dimensionslose Randkoordinate

## 1. Einleitung

Unter den numerischen Verfahren zur Berechnung ebener und räumlicher Kontinua hat die Randelement- bzw. Boundary-Element-Methode (REM, BEM) in den vergangenen Jahren als Alternative zu den etablierten Verfahren der Finiten Elemente (FEM) und der Finiten Differenzen (FDM) zunehmend an Bedeutung gewonnen. Bei der REM wird im Gegensatz zu den genannten Gebietsverfahren nur der Rand bzw. die Oberfläche des zu untersuchenden Gebietes diskretisiert, woraus im allgemeinen eine erheblich geringere Anzahl von Freiheitsgraden resultiert. Im Gegensatz zur FEM und FDM führen die gebräuchlichen REM-Formulierungen jedoch auf vollbesetzte, nicht-symmetrische Systemmatrizen, so daß ihre Vorteile durch den größeren Aufwand bei der Aufstellung und Lösung des Gleichungssystems zum Teil wieder aufgehoben werden.

Erste Arbeiten zur Anwendung der REM in der Elastostatik und -dynamik wurden Ende der 60er Jahre von Rizzo [70] (1967), Cruse und Rizzo [27,28] (1968) sowie von Cruse [29] (1969) veröffentlicht. Ausführlichere Darstellungen der REM in Form von Lehrbüchern stehen dem Ingenieur seit etwa 10 Jahren zur Verfügung. Zu nennen sind hier im wesentlichen Brebbia [14] (1978), Brebbia und Walker [15] (1980), Banerjee und Butterfield [7] (1981) sowie Brebbia, Telles und Wrobel [17] (1984). In jüngerer Zeit sind auch einige deutschsprachige Bücher erschienen: Bausinger und Kuhn [9] (1987), Hartmann [40] (1987), Antes [4] (1988).

Bei der Berechnung zeitabhängiger Probleme mit der REM ist zwischen verschiedenen Ansätzen zu unterscheiden. Wellenausbreitungsprobleme wurden zuerst von Cruse und Rizzo [27] (1968) unter Verwendung einer Laplace-, später von Niwa et al. [63] (1971) unter Verwendung einer Fourier-transformierten Fundamentallösung untersucht. Jüngere Arbeiten hierzu stammen von Manolis und Beskos [53] (1981), Ottenstreuier [64] (1981), Becker [10] (1984) und Huh [43] (1986). Die Möglichkeit einer direkten Lösung im Zeitbereich wurde von Cole et. al. [26] (1978) aufgezeigt und u.a. von Mansur und Brebbia [54] (1983), Antes [5] (1985) und v. Estorff [34] (1986) auf verschiedene zweidimensionale Fälle angewendet. Diese Verfahren liefern frequenz- oder zeitabhängige Systemmatrizen, die für jede betrachtete Frequenz bzw. für jeden Zeitschritt erneut aufgestellt werden müssen.

Ein anderes Lösungsverfahren wurde von Nardini und Brebbia [57] (1982) vorgeschlagen. Unter Verwendung der statischen Lösungsfunktion und geeigneter Näherungsansätze zur Darstellung der Trägheitskräfte erhält man konstante Systemmatrizen ähnlich der FEM-Steifigkeits- und -Massenmatrix.

Das Auftreten katastrophaler Schäden an verschiedensten Konstruktionen hat dazu geführt, daß sich Ingenieure seit etwa einem halben Jahrhundert zunehmend mit der Untersuchung des Bruchverhaltens metallischer Bauteile beschäftigen. Aus diesen Bestrebungen entwickelte sich die Bruchmechanik, die entsprechend dem Materialverhalten der untersuchten Werkstoffe in die linear-elastische Bruchmechanik (LEBM) und die Fließbruchmechanik (FBM) zu unterteilen ist. Die Theorie der LEBM hat Gültigkeit, solange keine oder nur eine sehr kleine plastische Zone an der Rißspitze auftritt (sprödes Bruchverhalten).

Das meistverwendete Verfahren der LEBM zur Beschreibung der singulären Spannungsverläufe im Bereich einer Rißspitze ist das der Spannungsintensitätsfaktoren (K-Faktoren). Als Bruchkriterium dient dabei das Verhältnis zwischen den Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  der statisch belasteten Struktur und den zugehörigen, materialspezifischen Grenzwerten  $K_{Ic}$ ,  $K_{IIc}$ ,  $K_{IIIc}$ , den sogenannten Rißzähigkeiten. Dieses Konzept kann auch auf Rißprobleme unter dynamischer Belastung angewendet werden. Die kritischen Grenzwerte unter schlagartig aufgebrachtener Belastung unterscheiden sich im allgemeinen von den statischen Werten und werden häufig als Schlagbruchzähigkeiten  $K_{Id}$ ,  $K_{IIId}$ ,  $K_{IIIId}$  bezeichnet.

Die Anwendung von Gebietsverfahren auf Riß- oder auch Kerbprobleme erfordert eine sehr feine Elemententeilung in der Umgebung der Rißspitze bzw. des Kerbgrundes, um das spezielle Lösungsverhalten in diesem Bereich hinreichend genau wiederzugeben. Die REM ist zur Untersuchung derartiger Problemstellungen wesentlich besser geeignet, da hier die im Innern des betrachteten Gebietes geltenden Differentialgleichungen exakt erfüllt werden und eine Elemententeilung wiederum nur auf dem Rand erfolgt.

Bei der Untersuchung von Rißproblemen mit der REM kann zwischen zwei an das spezielle Rißverhalten angepaßten Vorgehensweisen unterschieden werden. Wie Snyder and Cruse [75] (1973) gezeigt haben, besteht die Möglichkeit, unter Verwendung Greenscher Funktionen auf eine Diskretisierung des Risses durch Randelemente gänzlich zu verzichten. Eine ausführliche Behandlung dieses Verfahrens findet sich in der Arbeit von Mews [56] (1988). Ein anderer Weg wurde von Blandford et. al. [11] (1981) beschritten, die die Verwendung spezieller Viertel-punkt-Rißspitzen-Elemente (Quarter-Point-Elements) erstmals von der FEM auf die REM übertrugen und K-Faktoren direkt aus den Knotenverschiebungen dieser QP-Elemente berechneten. Martinez und Dominguez [55] (1983) haben gezeigt, daß hierzu auch die singulären Randspannungsverläufe dieser Elemente herangezogen werden können.

Obwohl die FEM bereits zur Untersuchung verschiedenartiger, dynamisch beanspruchter Rißprobleme eingesetzt worden ist, finden sich nur sehr wenige Veröffentlichungen zur Anwendung der REM in der Bruchdynamik. Zu nennen sind in diesem Zusammenhang die Arbeiten von Sládek und Sládek [72] (1986) und von Dominguez und Gallego [31] (1989).

Ziel dieser Arbeit ist es, hier einen weiteren Beitrag zu leisten. Die Randelementmethode soll zur Untersuchung nicht-symmetrischer, ebener, stationärer Rißprobleme in berandeten Gebieten unter beliebiger, zeitabhängiger Belastung angewendet werden. Zur Realisierung dieses Vorhabens besteht prinzipiell die Auswahlmöglichkeit zwischen den verschiedenen, vorgenannten Möglichkeiten:

- Verwendung einer Formulierung mit frequenz- bzw. zeitabhängigen Systemmatrizen oder einer Näherungslösung mit konstanten Matrizen
- Rißdarstellung mit Standard-Elementen, Viertelpunkt-Elementen oder mit Greenschen Funktionen
- Spannungsintensitätsfaktor-Berechnung aus Verschiebungen, Spannungen oder aus dem Riceschen Linienintegral

Diese Verfahren sollen zunächst hinsichtlich ihrer spezifischen Vor- und Nachteile miteinander verglichen werden. Gesucht wird dabei ihre bestmögliche Kombination im Hinblick auf eine hohe Genauigkeit der Ergebnisse bei vergleichsweise geringem Rechenaufwand.

## 2. Gleichungen der linearen Elastomechanik

Alle Gleichungen werden unter den folgenden Voraussetzungen aufgestellt:

- alle Verformungen sind infinitesimal klein
- das Materialverhalten ist linear-elastisch und isotrop
- die Geometrie und die Belastungen der betrachteten Systeme sind konstant über ihre Dicke

### 2.1. Notation

Es wird die karthetische Tensor-Notation verwendet; Indizes kennzeichnen die Koordinaten-Richtung, über identische Indizes wird summiert (Einsteinsche Summenkonvention):

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} \quad \text{für ebene Probleme} \quad (2.1a)$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad \text{für räumliche Probleme} \quad (2.1b)$$

Ortsableitungen werden ebenfalls durch Indizes gekennzeichnet, Zeitableitungen durch einen Punkt:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j} \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \dot{u}_i \quad (2.2b)$$

Großbuchstaben in runden Klammern geben an, in welchen Punkten die voranstehenden Größen wirken. Über identische Großbuchstaben wird, sofern im einzelnen nicht anders angegeben, ebenfalls summiert.

$$A(K,M) b(M) = A(K,1) b(1) + A(K,2) b(2) + \dots + A(K,N) b(N) \quad (2.3)$$

Matrizen und Vektoren sind durch Fettdruck gekennzeichnet.

### 2.2. Grundgleichungen

Das Gleichgewicht in einem Punkt X im Innern eines betrachteten Gebietes (Abb. 2.1) läßt sich beschreiben durch

$$\sigma_{ij,j}(X) + b_i(X) = \rho \ddot{u}_i(X) \quad \text{mit } j=1,2,3 \quad (2.4)$$

mit  $u_i$ : Verschiebungstensor  
 $b_i$ : Volumenkräfte  
 $\sigma_{ij}$ : Spannungstensor  
 $\rho$ : Dichte

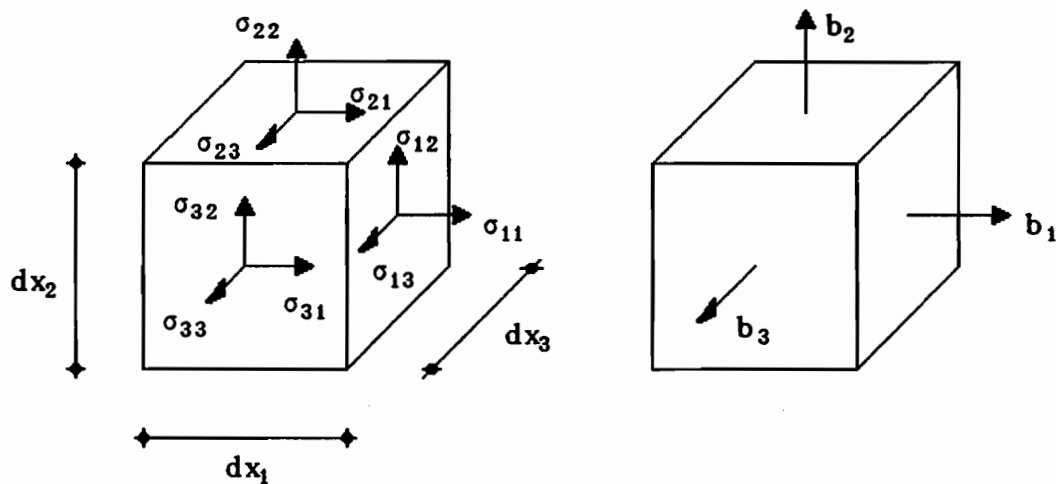


Abb. 2.1: Komponenten des Spannungstensors  $\sigma_{ij}$  und Volumenkräfte  $b_i$

Der Spannungstensor ist symmetrisch:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.5)$$

Der Zusammenhang zwischen den Spannungen, den Verzerrungen und den Verschiebungen wird durch das Hookesche Stoffgesetz und die Kompatibilitätsbedingungen beschrieben:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad \text{mit } k=1,2,3 \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.7)$$

mit  $E$ : Elastizitätsmodul  
 $\nu$ : Querkontraktionszahl  
 $\varepsilon_{ij}$ : Verzerrungstensor  
 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i=j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases}$ : Kronecker-Delta

### 2.3. Ebener Spannungs- und Verzerrungszustand

Bei einer zweidimensionalen Betrachtungsweise ist zwischen dem ebenen Verzerrungszustand (EVZ) und dem ebenen Spannungszustand (ESZ) zu unterscheiden. Der ebene Verzerrungszustand wird Rechenmodellen zugrunde gelegt, bei denen die Verzerrungen über die Dicke, d.h. die Koordinate  $x_3$ , als konstant angesehen werden können ( z.B. Baugrundmodelle, "dicke" Bauteile ). Hier gilt also

$$u_3 = \text{const.} \quad (2.8a)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0 \quad (2.8b)$$

$$\varepsilon_{11,3} = \varepsilon_{22,3} = \varepsilon_{12,3} = 0 \quad (2.8c)$$

Der ebene Spannungszustand basiert auf einer zweidimensionalen Betrachtungsweise der Spannungsverteilung, d.h.

$$\sigma_{33} = \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad (2.9a)$$

$$\sigma_{11,3} = \sigma_{22,3} = \sigma_{12,3} = 0 \quad (2.9b)$$

Die Summation erfolgt in allen von hier ab folgenden Gleichungen nur noch über zwei Dimensionen. Das Stoffgesetz lautet dann für beide Zustände

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu^*}{1-2\nu^*} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad \text{mit } k=1,2 \quad (2.10a)$$

$$\text{mit } \nu^* = \nu \quad \text{und} \quad E^* = E \quad \text{für EVZ} \quad (2.10b)$$

$$\nu^* = \frac{\nu}{1+\nu} \quad \text{und} \quad E^* = E \left( 1 - \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \right) \quad \text{für ESZ} \quad (2.10c)$$

Der Schubmodul ist in beiden Fällen identisch

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{E^*}{2(1+\nu^*)} \quad (2.11)$$

Man erkennt, daß somit alle auf dem Stoffgesetz basierenden Gleichungen sowohl im dreidimensionalen Zustand als auch im zweidimensionalen Verzerrungszustand gelten. Der Übergang zum zweidimensionalen Spannungszustand kann immer dadurch erfolgen, daß  $\nu$  und  $E$  durch  $\nu^*$  und  $E^*$  ersetzt werden. Alle im folgenden wiedergegebenen Gleichungen des EVZ lassen sich also durch diese Substitution direkt in die des ESZ überführen.



## 2.4. Bewegungsgleichungen

Einsetzen des Stoffgesetzes und der Kompatibilitätsbedingungen in die Gleichgewichtsbeziehung führt nun auf die Naviersche Bewegungsgleichung

$$\frac{E}{2(1+\nu)} u_{i,jj} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{1}{1-2\nu} u_{j,ji} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.12)$$

Diese Differentialgleichung wird in der Literatur oftmals auch mittels der Laméschen Konstanten dargestellt

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.13a)$$

$$\text{mit: } \lambda = \frac{2\nu}{1-2\nu} \mu : \quad \text{Lamé-Konstante} \quad (2.13b)$$

Gleichwertig hierzu ist eine Beschreibung über die Wellenausbreitungsgeschwindigkeiten:

$$c_2^2 u_{i,jj} + (c_1^2 - c_2^2) u_{j,ji} + \frac{1}{\rho} b_i = \ddot{u}_i \quad (2.14a)$$

$$\text{mit: } c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} : \quad \text{Druckwellengeschwindigkeit} \quad (2.14b)$$

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} : \quad \text{Scherwellengeschwindigkeit} \quad (2.14c)$$

## 2.5. Randspannungen

Der Zusammenhang zwischen Spannungen  $\sigma_{ij}$  im Innern und  $p_i$  auf dem Rand eines betrachteten Gebietes  $\Omega$  (Abb. 2.2) wird beschrieben durch

$$p_i = \sigma_{ij} n_j = \lambda u_{j,j} n_i + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j \quad (2.15)$$

$$\text{mit } p_i : \quad \text{Randspannungskomponenten}$$

$$n_j : \quad \text{Randnormalenkomponenten}$$

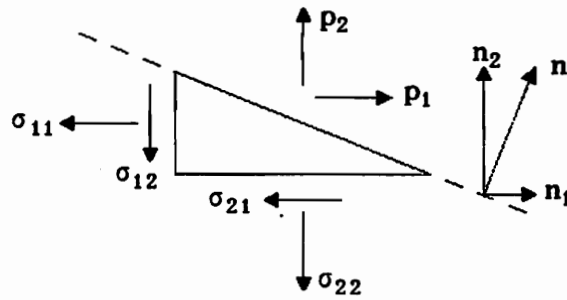


Abb. 2.2: Komponenten der Randspannungen

## 2.6. Randbedingungen

Die Untersuchung eines Gebietes  $\Omega$  setzt voraus, daß auf jedem Teilstück seines Randes entweder die Verschiebungen oder die Randspannungen bekannt sind (Abb. 2.3). Dementsprechend wird der Rand  $\Gamma$  in zwei Teile unterteilt, wobei auf dem ersten Teil die Verschiebungen und auf dem zweiten die Randspannungen für die Berechnung vorgegeben werden.

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (2.16a)$$

$$\text{mit } u_i = \bar{u}_i \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (2.16b)$$

$$p_i = \bar{p}_i \quad \text{auf } \Gamma_2 \quad (2.16c)$$

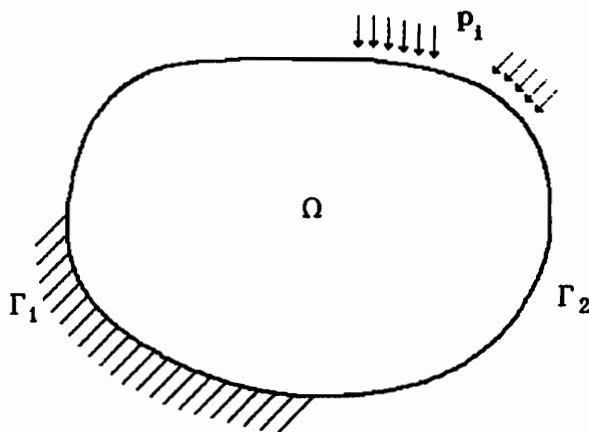


Abb. 2.3: Gebiet  $\Omega$  mit Rändern  $\Gamma_1$

### 3. Gleichungen der linear-elastischen Bruchmechanik

#### 3.1. Spannungsintensitätsfaktoren

Die Aufgabe der Bruchmechanik besteht darin, eine Aussage darüber treffen zu können, ob bestimmte Bauteile innerhalb einer Konstruktion unter bekannter Belastung durch Bruch versagen. Hierzu bedarf es einer idealisierenden Modellbildung, die es ermöglichen soll, das recht komplexe Materialverhalten an Rißspitzen mit den Gleichungen der linear-elastischen Kontinuumsmechanik sinnvoll zu beschreiben.

Ein solches Verfahren ist das sogenannte K-Faktor-Konzept. Die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  beschreiben die Singularität der Spannungen an einer Rißspitze. Das Verhältnis dieser Faktoren zu in Laborversuchen ermittelten kritischen Werten, den sogenannten Rißzähigkeiten  $K_{IC}$ , dient dann als Maß dafür, ob das betreffende Bauteil versagt oder nicht. Zu unterscheiden ist zwischen den Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$ ,  $K_{II}$  und  $K_{III}$  entsprechend den drei auftretenden Rißöffnungsarten:

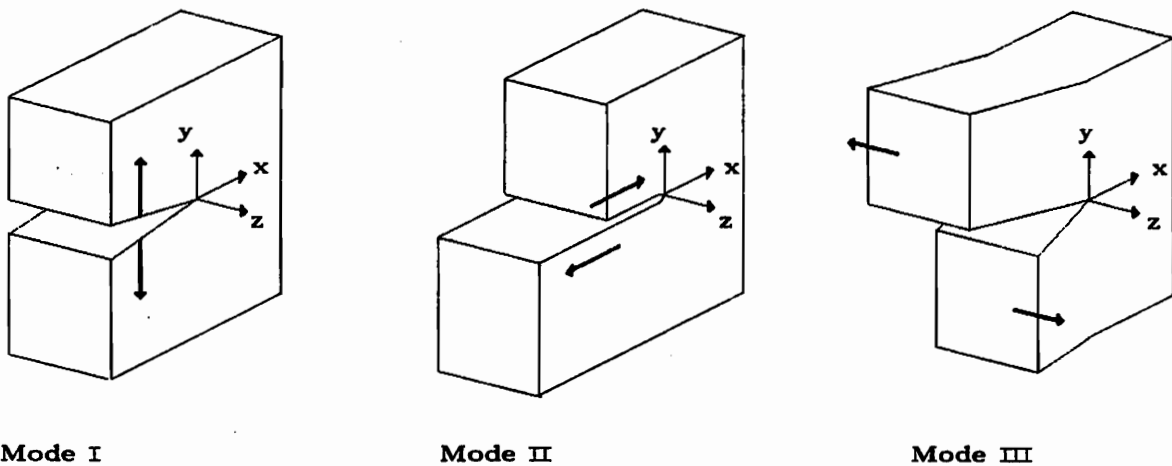


Abb. 3.1: Die drei Rißöffnungsarten

Die beschriebene Vorgehensweise läßt sich grundsätzlich auch auf dynamische Probleme übertragen. Die dynamische Rißzähigkeit wird in Laborversuchen meist unter schlagartiger Belastung ermittelt und daher auch als Schlagbruchzähigkeit bezeichnet. Der Versuchsaufwand ist dabei infolge der erforderlichen Hochgeschwindigkeitsmeßtechnik ungleich höher als im statischen Fall.

Von Interesse sind zeitabhängige K-Faktoren insbesondere, weil eine dynamische Beanspruchung zu wesentlich höheren Spannungen führen kann als die äquivalente statische Last.

### 3.2. Der Griffith-Riß

Als Rißmodell dient der Griffith-Riß [36], ein gerader Schlitz der Länge  $2a$ , der in Abb. 3.2 in der unendlichen Scheibe unter einachsiger Zugbeanspruchung dargestellt ist.

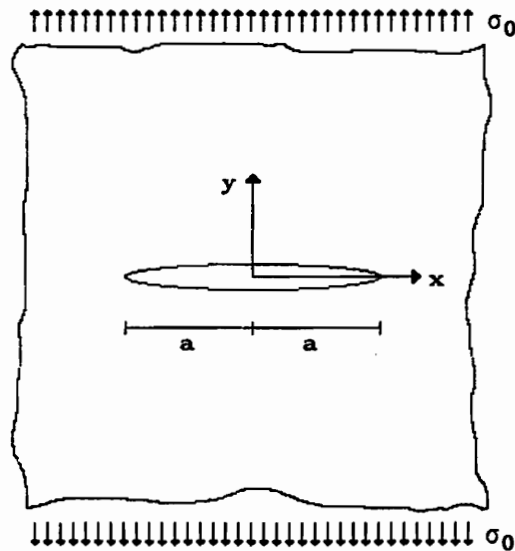


Abb. 3.2: Griffith-Riß in der unendlichen Scheibe unter einachsigem Zug

Für dieses Rißmodell ist die exakte Spannungs- und Verschiebungsverteilung bekannt [20,37]. So ergeben sich die Rißrandverschiebungen z.B. zu

$$v_{\text{Rand}} = \frac{1+\chi}{4\mu} \sigma_0 \sqrt{a^2 - x^2} \quad (3.1a)$$

$$\text{mit } \chi = 3-4\nu \quad \text{für EVZ} \quad (3.1b)$$

$$\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad \text{für ESZ} \quad (3.1c)$$

Der Spannungsintensitätsfaktor ist hier definiert zu

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (3.2a)$$

$$K_{II} = K_{III} = 0 \quad (3.2b)$$

Für die unmittelbare Umgebung der Rißspitze in einem beliebigen Bauteil (Abb. 3.3) werden oft Näherungsgleichungen in Abhängigkeit der K-Faktoren verwendet, die aus den exakten Beziehungen des Risses in der unendlichen Scheibe abgeleitet worden sind.

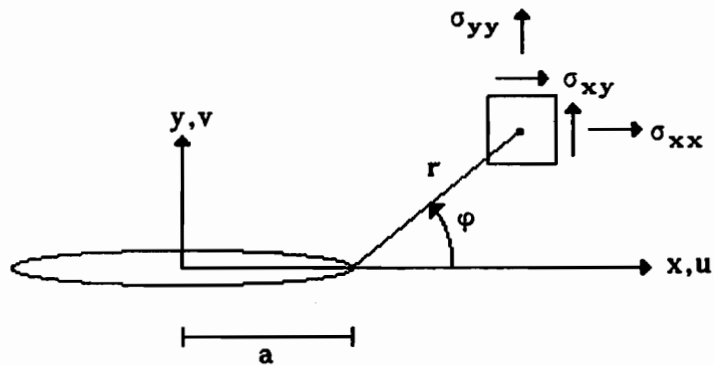


Abb. 3.3: Koordinaten und Spannungen an der Rißspitze

Die Verschiebungs- und Spannungskomponenten lauten hier in Abhängigkeit der Faktoren  $K_I$  und  $K_{II}$ :

$$u = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\varphi}{2} (\chi - 1 + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} (\chi + 1 + 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}) \quad (3.3a)$$

$$v = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\varphi}{2} (\chi + 1 - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}) + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\varphi}{2} (\chi - 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \quad (3.3b)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} (1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} (2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}) \quad (3.4a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} (1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}) \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \end{aligned} \quad (3.4b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + \\ & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} (1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2}) \end{aligned} \quad (3.4c)$$

Kennzeichnend ist dabei die  $\sqrt{r}$ -Charakteristik der Verschiebungen und die  $1/\sqrt{r}$ -Singularität der Spannungsverläufe. Insbesondere ergeben sich einfache Näherungen für die Rißachse:

$$\varphi = \pi: \quad u = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\chi+1) \quad (3.5a)$$

$$v = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\chi+1) \quad (3.5b)$$

$$\varphi = 0: \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (3.6a)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (3.6b)$$

Die K-Faktoren ergeben sich abhängig von der Systemgeometrie und Belastung. Für viele Standardfälle sind statische K-Faktoren in Tabellen und Diagrammen zusammengefaßt veröffentlicht worden, so z.B. von Rooke and Cartwright in ihrem Compendium of Stress Intensity Factors [71].

### 3.3. Das J-Integral

Die Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren kann auch über das Ricesche Linienintegral (J-Integral) erfolgen, das von Rice [69] für den statischen Fall angegeben wird als

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - T u_{,1} ds) d\Gamma$$

$$\text{mit } W = \int_0^{\varepsilon_{1j}} \sigma_{1j} d\varepsilon_{1j} \quad : \text{ elastische Energiedichte}$$

$$T_i = p_i = \sigma_{1j} n_j \quad : \text{ Randspannung (traction)}$$

Das J-Integral ist wegunabhängig, d.h. die Integration erfolgt auf einem beliebigen Weg entgegen dem Uhrzeigersinn um die Rißspitze herum (Abb. 3.4)

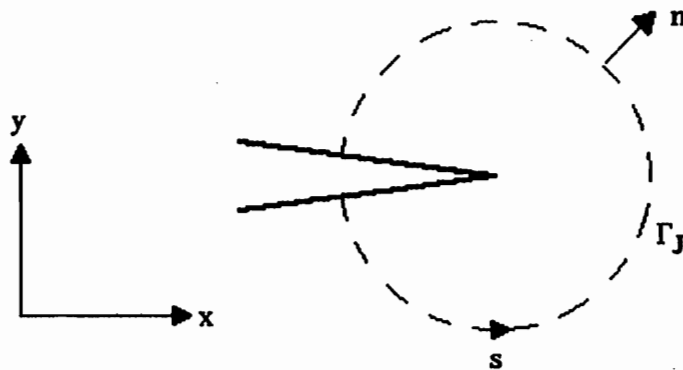


Abb. 3.4: Ricesches Linienintegral

Für den dynamischen Fall wurde das Integral u.a. von Mall [52] um einen Zusatzterm, der den Einfluß der Massenträgheit wiedergibt, erweitert

$$\hat{J} = \int_{\Gamma} ( W dy - T u_{,1} ds ) + \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i u_{i,1} d\Omega$$

Für reine Mode I-Belastung lautet der Zusammenhang mit dem Spannungsintensitätsfaktor

$$\hat{J} = \frac{1+\nu}{8\mu} K_I^2$$

Bei gemischten Problemen, d.h. wenn der Riß zusätzlich im Mode II belastet wird, muß das J-Integral in einen symmetrischen (I) und einen antimetrischen Term (II) aufgespalten werden:

$$\hat{J} = \hat{J}^I + \hat{J}^{II}$$

#### 4. Die Randelementmethode in der Elastostatik

##### 4.1. Aufstellen der Randintegralgleichungen

Die Gleichgewichtsbeziehung in einem Punkt  $X$  im Innern eines betrachteten Gebietes  $\Omega$  reduziert sich im Fall verschwindender Volumen- und Trägheitskräfte auf

$$\sigma_{ij,j}(X) = 0 \quad (4.1)$$

Die Anwendung der Methode der gewichteten Residuen mit einer Wichtungsfunktion  $W_{ki}$  auf diese Gleichung führt auf das Integral

$$I_s = \int_{\Omega} W_{ki} \sigma_{ij,j}(X) d\Omega = 0 \quad (4.2)$$

Als Wichtungsfunktion wird die sogenannte Fundamentallösung verwendet:

$$W_{ki} = U_{ki}^*(A, X) \quad (4.3)$$

Dabei handelt es sich um die Verschiebungsfunktion eines unendlich ausgedehnten Gebietes infolge einer Einzellast in einem Punkt  $A$ , der innerhalb von  $\Omega$  liegt. Die statische Fundamentallösung muß also folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\mu U_{ki,jj}^*(A, X) + (\lambda + \mu) U_{kj,ji}^*(A, X) = \sigma_{kij,j}^*(A, X) = -\Delta_{ki}(A, X) \quad (4.4)$$

mit der Dirac-Delta-Funktion

$$\Delta_{ki}(A, X) \begin{cases} = 0, & \text{wenn } A \neq X \text{ oder } k \neq i \\ = \infty, & \text{wenn } A = X \text{ und } k = i \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega} \Delta_{ki}(A, X) f(X) d\Omega = \delta_{ki} f(A)$$

Im zweidimensionalen Fall ist dies die Kelvin-Lösung

$$U_{ki}^*(A, X) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (4\nu-3) \delta_{ki} \ln \frac{r}{c} + r_k r_i \right\} \quad (4.6)$$

Der Abstand zwischen dem Aufpunkt  $A$  der Fundamentallösung und dem Punkt  $X$  der resultierenden Verschiebung wird dabei mit  $r$ , seine Richtungskomponenten mit  $r_i$  bezeichnet.  $c$  ist eine frei wählbare Skalierungskonstante [49].



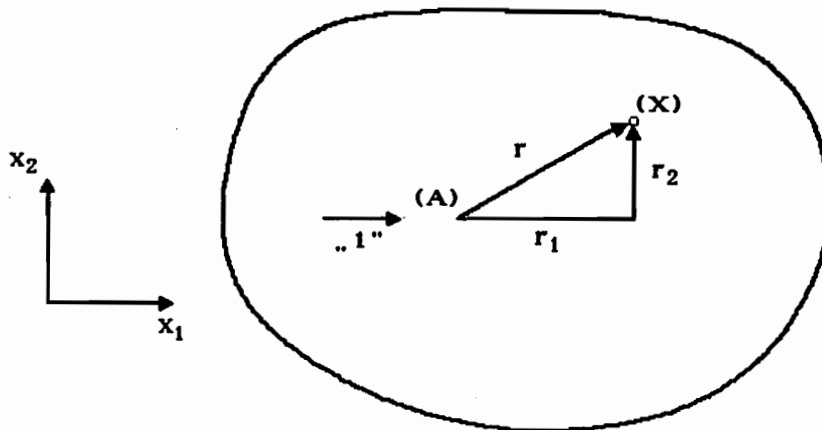


Abb. 4.1: Relativ-Koordinaten der Punkte A und X

Die korrespondierenden Fundamental-Randspannungen lauten

$$P_{ki}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ r_j n_j ( (2\nu-1) \delta_{ki} - 2 r_{,k} r_{,i} ) + (2\nu-1) ( r_i n_k - r_k n_i ) \right\}$$

mit  $r_i = x_i(X) - x_i(A)$

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{r_i r_i} \quad (4.7)$$

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r}$$

Einsetzen der Fundamentallösung, des Stoffgesetzes und der Kompatibilitätsbedingungen in das Gebietsintegral führt auf

$$I_s = \int_{\Omega} U_{ki}^* \left\{ \lambda u_{j,j1} + \mu ( u_{1,jj} + u_{j,1j} ) \right\} d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

Partielle Integration liefert:

$$I_s = \int_{\Omega} \left\{ ( U_{ki}^* \lambda u_{j,j} )_{,i} + ( U_{ki}^* \mu ( u_{1,j} + u_{j,1} ) )_{,j} \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \left\{ U_{ki,1}^* \lambda u_{j,j} + U_{ki,j}^* \mu ( u_{1,j} + u_{j,1} ) \right\} d\Omega = 0 \quad (4.9)$$

Nochmalige partielle Integration führt nun auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} I_s &= \int_{\Omega} \left\{ (U_{ki}^* \lambda u_{j,j})_{,i} + (U_{ki}^* \mu (u_{i,j} + u_{j,i}))_{,j} \right\} d\Omega \\ &- \int_{\Omega} \left\{ (U_{ki,i}^* \lambda u_j + U_{ki,j}^* \mu u_i)_{,j} + (U_{ki,j}^* \mu u_j)_{,i} \right\} d\Omega \quad (4.10) \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ U_{ki,ij}^* \lambda u_j + U_{ki,jj}^* \mu u_i + U_{ki,ji}^* \mu u_j \right\} d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Mittels des Gaußschen Integralsatzes werden die beiden ersten Gebietsintegrale in Randintegrale überführt:

$$\begin{aligned} I_s &= \int_{\Gamma} U_{ki}^* \left\{ \lambda u_{j,j} n_i + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j \right\} d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} \left\{ \lambda U_{kj,j}^* n_i + \mu (U_{ki,j}^* + U_{kj,i}^*) n_j \right\} u_i d\Gamma \quad (4.11) \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ \lambda U_{kj,ji}^* + \mu (U_{ki,jj}^* + U_{kj,ij}^*) \right\} u_i d\Omega = 0 \end{aligned}$$

Mit den aus Kap. 2 bekannten Zusammenhängen zwischen Spannungen und Verschiebungen kann man nun schreiben:

$$I_s = \int_{\Gamma} U_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

Die Fundamentallösung wurde so gewählt, daß das verbliebene Gebietsintegral verschwindet. Einsetzen von Gl. (4.4) führt hier also auf

$$\int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^*(A,X) u_i(X) d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta_{ki}(A,X) u_i(X) d\Omega = - \delta_{ki}(A,X) u_i(X) \quad (4.13)$$

Damit gilt nun

$$I_s = \int_{\Gamma} U_{ki}^*(A,X) p_i(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ki}^*(A,X) u_i(X) d\Gamma - \delta_{ki}(A,X) u_i(X) = 0 \quad (4.14)$$

Diese Gleichung hat Gültigkeit, solange sich der Aufpunkt A innerhalb des Gebietes  $\Omega$  befindet, nicht aber, wenn er auf dessen Rand  $\Gamma$  liegt.

#### 4.2. Singuläre Punkte

Sowohl die Fundamentallösung  $U_{k1}^*$  als auch die Fundamental-Randspannung  $P_{k1}^*$  sind in ihrem Aufpunkt A nicht definiert, da der Abstand  $r$  hier zu null wird und sich die Funktionen  $\ln(r)$  und  $(1/r)$  somit nicht berechnen lassen. Liegt A auf dem Rand  $\Gamma$ , handelt es sich bei den Randintegralen in Gl. (4.14) dementsprechend um uneigentliche Integrale [21], die einer besonderen Betrachtung bedürfen.

Zu diesem Zweck wird der Rand zunächst in einem Kreisbogen mit dem Radius  $\varepsilon$  um den Punkt herumgeführt (Abb. 4.2) und die Integrale über den so gebildeten Rand  $\Gamma_\varepsilon$  und den verbliebenen Rest  $\bar{\Gamma} = \Gamma - \Gamma_\varepsilon$  getrennt berechnet.

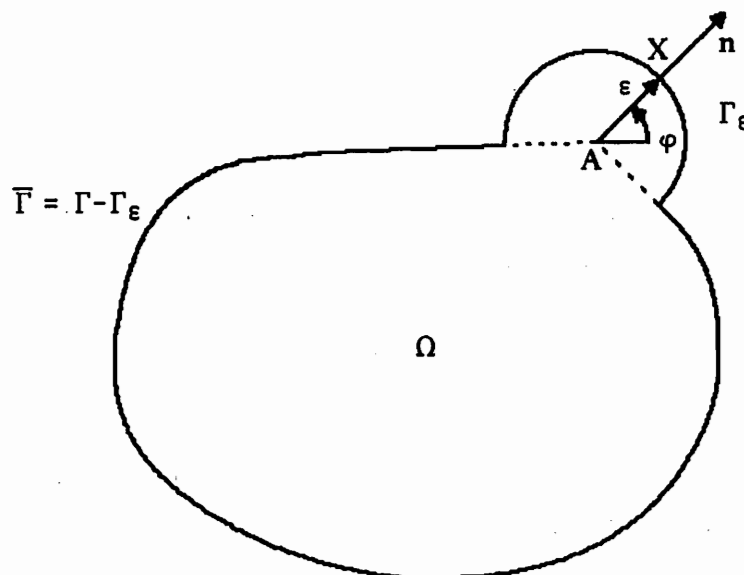


Abb.4.2: Integrationsweg um den singulären Punkt

Auf dem Rand  $\Gamma_\varepsilon$  gelten folgende Zusammenhänge:

$$n_1 = \cos \varphi$$

$$n_2 = \sin \varphi$$

$$s = \varepsilon \cdot \varphi \Rightarrow ds = \varepsilon \cdot d\varphi$$

$$r = \varepsilon$$

(4.15)

$$r_1 = \varepsilon \cos \varphi$$

$$r_2 = \varepsilon \sin \varphi$$

$$r_j n_j = \varepsilon (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \varepsilon$$

$$r_i n_k - r_k n_i = 0$$

Aufteilung der Randintegrale in Gl. (4.14) führt dann auf

$$\begin{aligned} I_s &= \int_{\Gamma} U_{k1}^*(A, X) p_1(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{k1}^*(A, X) u_1(X) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_\varepsilon} U_{k1}^*(A, X) p_1(X) d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{k1}^*(A, X) u_1(X) d\Gamma - \delta_{k1}(A, X) u_1(X) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Zur Berechnung der Integralwerte im singulären Punkt muß nun der Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$  gebildet werden. Für das erste Integral gilt dann

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} U_{k1}^*(A, X) p_1(X) d\Gamma \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left\{ (4\nu-3) \ln \frac{\varepsilon}{c} + n_k n_i \right\} \varepsilon d\varphi p_1(A) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Das zweite Integral wird mit dem integralfreien Term zusammengefaßt. Es gilt

$$C_{k1}(A, X) = \delta_{k1}(A, X) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{k1}^*(A, X) d\Gamma \quad (4.18)$$

Die Koeffizienten  $C_{k1}$  ergeben sich abhängig vom Eckwinkel des Randes im Punkt A:

$$\begin{aligned} C_{11}(A, K) &= \delta(A, K) \left\{ 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \left\{ 2\nu - 1 - 2 \frac{r_1^2}{r} \right\} d\varphi \right\} \\ &= \delta(A, K) \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ 2\nu - 1 - 2 \cos^2 \varphi \right\} d\varphi \right\} \\ &= \delta(A, K) \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \varphi (2\nu-1) - \varphi - \frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \right\} \\ &= \delta(A, K) \left\{ 1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} + \frac{\sin(2\varphi_1) - \sin(2\varphi_2)}{8\pi(1-\nu)} \right\} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$C_{22}(A,K) = \delta(A,K) \left\{ 1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2\pi} - \frac{\sin(2\varphi_1) - \sin(2\varphi_2)}{8\pi(1-\nu)} \right\}$$

$$C_{12}(A,K) = C_{21}(A,K) = \delta(A,K) \left\{ \frac{\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_2}{4\pi(1-\nu)} \right\}$$

Für Innenpunkte, für glatten Rand und für Außenpunkte erhält man die Werte:

Innenpunkt:	$\varphi_1 = \varphi_2$	$C_{ki} = \delta_{ki}$	
glatter Rand:	$\varphi_1 = \varphi_2 + \pi$	$C_{ki} = \frac{\delta_{ki}}{2}$	(4.20)
Außenpunkt:	$\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi$	$C_{ki} = 0$	

Die entsprechenden Ausdrücke für dem dreidimensionalen Fall sind in der Arbeit von Hartmann [39] zusammenfassend dargestellt.

Einsetzen von  $C_{ki}$  in Gl. (4.16) führt nun auf

$$I_s = \int_{\Gamma} \mathbf{U}_{ki}^*(A,X) p_i(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ki}^*(A,X) u_i(X) d\Gamma - C_{ki}(A,X) u_i(X) = 0 \quad (4.21)$$

Sofern das untersuchte Gebiet eine geschlossene Randkurve besitzt, können die Werte  $C_{ki}$  auch aus der Bedingung berechnet werden, daß Starrkörperverschiebungen keine Randkräfte verursachen dürfen. Mit  $u_i = 1$  und  $p_i = 0$  folgt hier

$$\left\{ \int_{\Gamma} P_{ki}^*(A,X) d\Gamma + C_{ki} \right\} \cdot 1 = 0 \quad (4.22)$$

bzw.

$$C_{ki} = - \int_{\Gamma} P_{ki}^*(A,X) d\Gamma \quad (4.23)$$

### 4.3. Übergang zu diskreten Punkten

Die Gleichungen sollen nun so umgeformt werden, daß sich mit ihnen Verschiebungen und Spannungen in diskreten Randpunkten berechnen lassen. Zu diesem Zweck wird der Rand des betrachteten Gebietes in Randelemente unterteilt.

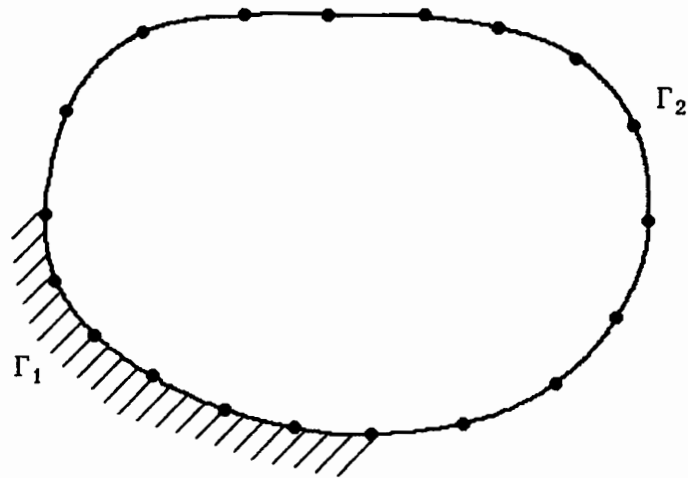


Abb. 4.3: Unterteilung des Randes in Elemente

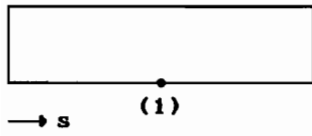
Für jedes Randelement wird der Zusammenhang zwischen den Kenngrößen in einem Elementknoten  $K$  und einem beliebigen Elementpunkt  $X$  durch Ansatzfunktionen  $\Phi$  dargestellt:

$$\begin{aligned} u_i(X) &= \Phi^u(X,K) u_i(K) \\ p_i(X) &= \Phi^p(X,K) p_i(K) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Die Ansatzfunktionen werden so gewählt, daß sie in jeweils einem Knoten  $K$  den Wert 1 annehmen und in allen anderen Knoten gleich null sind. Weiterhin wirken die Ansatzfunktionen nur auf den an den jeweiligen Knoten  $K$  angrenzenden Elementen und verschwinden auf dem gesamten übrigen Rand.

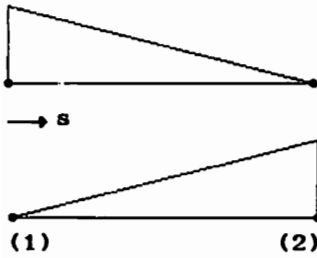
Möglich ist die Verwendung konstanter, linearer, quadratischer oder auch anderer Element-Ansatzfunktionen, beispielsweise mit einem Wurzel-Term. Dabei besitzt das Element mit konstanter Ansatzfunktion einen Knoten in seiner Mitte, das mit linearem Ansatz zwei Knoten in seinen Endpunkten und das mit quadratischem Ansatz einen Knoten in der Mitte und zwei in den Endpunkten (Abb. 4.4). Eine Sonderform stellt das Quarter-Point-Element dar, dessen zweiter Knoten bei einem Viertel seiner Länge plaziert ist.

Für Elemente mit fortlaufender Knotennummerierung und dem Knoten  $K=1$  als erstem Elementknoten ist der Verlauf der Ansatzfunktionen in Abb. 4.4 dargestellt.



$$\Phi(X,1) = 1 \quad (4.25a)$$

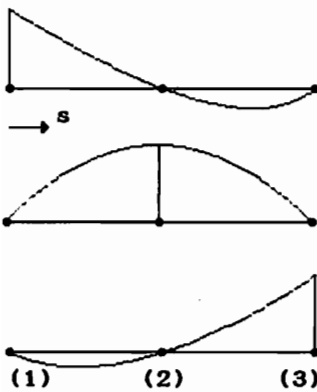
Abb. 4.4a: Element mit konstantem Ansatz



$$\Phi(X,1) = 1 - \frac{s}{\ell} \quad (4.25b)$$

$$\Phi(X,2) = \frac{s}{\ell}$$

Abb. 4.4b: Element mit linearem Ansatz

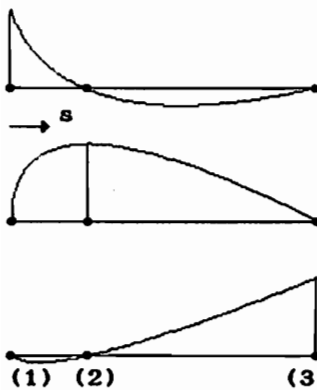


$$\Phi(X,1) = 1 - 3 \frac{s}{\ell} + 2 \left(\frac{s}{\ell}\right)^2$$

$$\Phi(X,2) = 4 \frac{s}{\ell} - 4 \left(\frac{s}{\ell}\right)^2 \quad (4.25c)$$

$$\Phi(X,3) = -\frac{s}{\ell} + 2 \left(\frac{s}{\ell}\right)^2$$

Abb. 4.4c: Element mit quadratischem Ansatz



$$\Phi(X,1) = 1 - 3 \sqrt{\frac{s}{\ell}} + 2 \frac{s}{\ell}$$

$$\Phi(X,2) = 4 \sqrt{\frac{s}{\ell}} - 4 \frac{s}{\ell} \quad (4.25d)$$

$$\Phi(X,3) = -\sqrt{\frac{s}{\ell}} + 2 \frac{s}{\ell}$$

Abb. 4.4d: Element mit Quadratwurzel-Ansatz

Die Integrale werden auf Element-Ebene ausgewertet.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_s = \sum_{E=1}^{N_E} \left\{ \int_{\Gamma_E} \mathbf{U}_{ki}^*(A, X) \Phi(X, K) d\Gamma p_i(K) \right. \\ \left. - \int_{\Gamma_E} P_{ki}^*(A, X) \Phi(X, K) d\Gamma u_i(K) \right\} - C_{ki}(A, K) u_i(K) = 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Für die Integral-Ausdrücke auf Elementebene werden die Abkürzungen  $G^E$  und  $\hat{H}^E$  eingeführt, ihre Summation auf Systemebene wird mit  $G$  bzw.  $\hat{H}$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} G_{ki}(A, K) &= \sum_{E=1}^{N_E} G_{ki}^E(A, K) = \sum_{E=1}^{N_E} \int_{\Gamma_E} \mathbf{U}_{ki}^*(A, X) \Phi(X, K) d\Gamma \\ \hat{H}_{ki}(A, K) &= \sum_{E=1}^{N_E} \hat{H}_{ki}^E(A, K) = \sum_{E=1}^{N_E} \int_{\Gamma_E} P_{ki}^*(A, X) \Phi(X, K) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.27)$$

Nun kann man für Gl. (4.26) schreiben

$$G_{ki}(A, K) p_i(K) - H_{ki}(A, K) u_i(K) = 0 \quad (4.28)$$

$$\text{mit } H_{ki}(A, K) = \hat{H}_{ki}(A, K) + C_{ki}(A, K)$$

Die Komponenten  $G_{ki}$ ,  $H_{ki}$ ,  $\hat{H}_{ki}$  und  $C_{ki}$  werden in den gleichnamigen Systemmatrizen  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}$  und  $\mathbf{C}$ , die Verschiebungen  $u_i$  und Randspannungen  $p_i$  in den Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{p}$  zusammengefaßt. Setzt man nun für  $A$  und  $K$  nacheinander alle  $N$  Knoten des betrachteten Gebietes und für die Indizes  $k$  und  $i$  die beiden Koordinatenrichtungen ein, so erhält man das matrizielle, lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{G} \mathbf{p} - \mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

$$\text{mit } \mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}} + \mathbf{C}$$

Entsprechend der in jeder Richtung in jedem Knoten vorgegebenen Randbedingung werden die unbekanntenen Größen in einem Vektor  $\mathbf{x}$  zusammengefaßt, die bekannten in einem Vektor  $\bar{\mathbf{y}}$ . Durch Austausch der zugehörigen Spalten von  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  erhält man ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Unbekannten.



$$\begin{vmatrix} \mathbf{G}_{11} & -\mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & -\mathbf{H}_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{H}_{11} & -\mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & -\mathbf{G}_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \bar{\mathbf{p}}_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{b} \quad (4.30)$$

#### 4.4. Numerische Berechnung der Randintegrale

Die meisten der für die Aufstellung der Systemmatrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  zu berechnenden Integrale lassen sich mit hinreichender Genauigkeit mittels numerischer Integrationsformeln bestimmen. Verwendung findet dabei i.a. die Standard-Gauß-Quadratur [21]: Anstelle der Integration über einen Randbereich erfolgt die Berechnung für bestimmte Randpunkte, deren gewichtete Funktionswerte dann summiert werden.

Für die Integration über eine Funktion  $f$  auf dem in Abb. 4.5 dargestellten Randelement der Länge  $\ell$  gilt dann der Zusammenhang:

$$I = \int_0^{\ell} f(s) ds = \frac{\ell}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{\ell}{2}(\xi+1)\right) d\xi \approx \frac{\ell}{2} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{\ell}{2}(\xi_i+1)\right) w_i \quad (4.31)$$

Die Koordinaten  $\xi_i$  und die zugehörigen Wichtungsfaktoren  $w_i$  sind in Tabellen der Standardliteratur [17] zusammengefaßt.

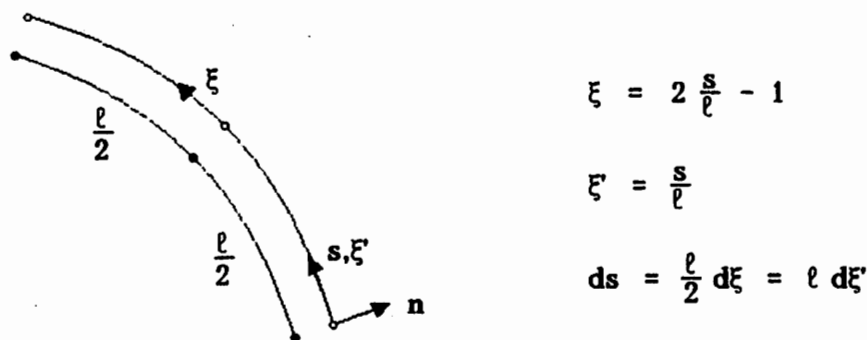


Abb. 4.5: Randkoordinaten

Die Aufstellung der Diagonal-Elemente der Matrix  $\mathbf{G}$  erfordert die Auswertung singulärer Integrale, die den Logarithmus enthalten. Hier kann vorteilhaft die logarithmische Gauß-Quadratur [17] eingesetzt werden. Mit der dimensionslosen Koordinate  $\xi'$  und den Wichtungsfaktoren  $v_i$  gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \int_0^{\ell} f(s) \ln(s) \, ds \\ &= \ell \int_0^1 f(\ell \xi') \ln(\xi') \, d\xi' + \frac{\ell}{2} \ln(\ell) \int_{-1}^1 f\left(\frac{\ell}{2}(\xi+1)\right) \, d\xi \\ &\approx \ell \sum_{i=1}^n f(\ell \xi'_i) v_i + \frac{\ell}{2} \ln(\ell) \sum_{i=1}^n f\left(\frac{\ell}{2}(\xi_i+1)\right) w_i \end{aligned} \quad (4.32)$$

#### 4.5. Analytische Berechnung der Randintegrale

Die numerische Auswertung der Randintegrale für randnahe Innenknoten oder Knotenpunkte auf den einander gegenüberliegenden Rändern eines Risses oder Schlitzes (Abb. 4.6) beinhaltet zum Teil erhebliche Integrationsfehler, die durch das singuläre Verhalten der Fundamental-Funktionen verursacht werden.

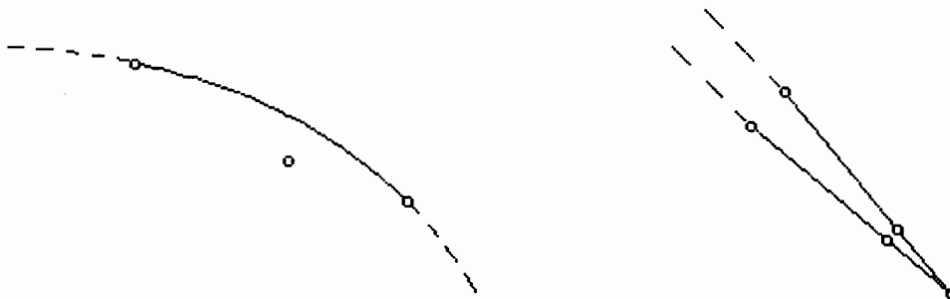


Abb. 4.6: Randnahe Innenknoten und Rißrand

Um auch in diesen Fällen eine korrekte Berechnung der Randintegrale zu gewährleisten, werden in dieser Arbeit alle Randintegrale über geradlinige Elemente nicht mehr numerisch, sondern im Rahmen der Darstellungsgenauigkeit des verwendeten Rechners exakt berechnet. Das hierzu verwendete Verfahren zur matriziellen Berechnung der Elementmatrizen  $\mathbf{H}^E$  und  $\mathbf{G}^E$  wird in diesem Kapitel vorgestellt.

### 4.5.1. Koordinatensysteme

Zunächst werden die Zusammenhänge zwischen dem globalen, auf den aktuellen Aufpunkt (A) bezogenen Koordinatensystem  $(x_1, x_2)$  und der lokalen Randelementkoordinate (s) näher betrachtet. Für geradlinige Elemente werden dabei die in Abb. 4.7 dargestellten Beziehungen verwendet.

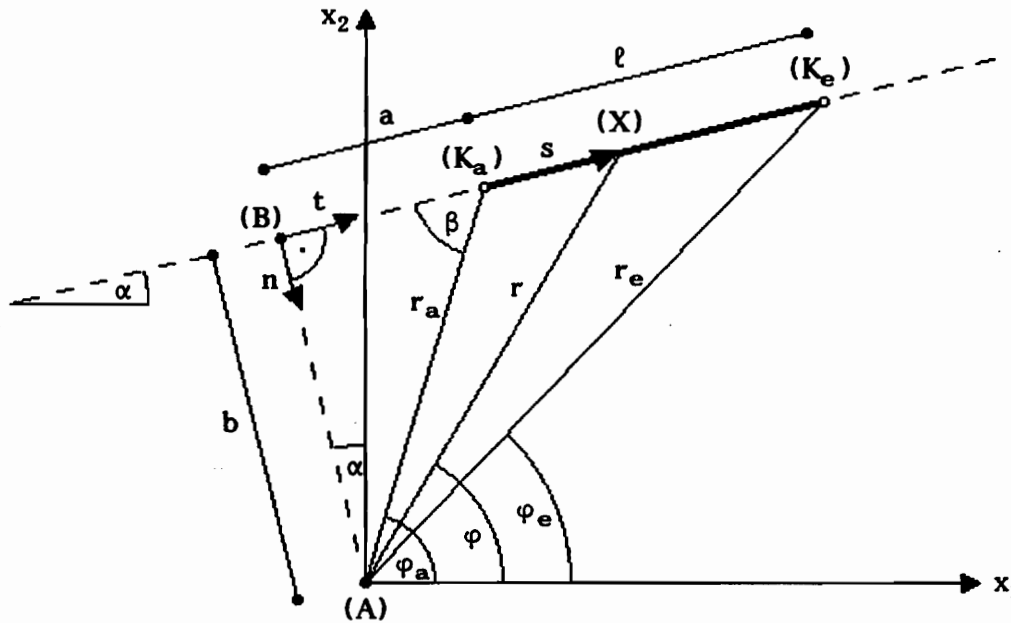


Abb. 4.7: Koordinaten und Abstände zwischen Aufpunkt A und Randpunkt X

- mit:
- A: Aufpunkt
  - $K_a$ : Element-Anfangsknoten
  - $K_e$ : Element-Endknoten
  - B: Randpunkt, dessen Normale durch A geht
  - a: Abstand zwischen B und  $K_a$
  - b: Abstand zwischen A und B
  - l: Elementlänge
  - $\alpha$ : Richtungswinkel der Randgeraden

Mit der neuen Randkoordinate

$$t = s+a \quad (4.33a)$$

gilt für den Abstandvektor zwischen (A) und (X) der Zusammenhang

$$r^2 = t^2 + b^2 \quad (4.33b)$$

Insbesondere erhält man durch Einsetzen für den Anfangs- und den Endknoten des betrachteten Elementes

$$\begin{aligned} r_a &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ r_e &= \sqrt{(l+a)^2 + b^2} \end{aligned} \quad (4.33c)$$

Durch Einsetzen der Richtungskomponenten der Randnormalen

$$n_1 = \sin \alpha$$

$$n_2 = -\cos \alpha$$

ergeben sich die für die Fundamentallösung relevanten Komponenten des Abstandes zu

$$\begin{aligned} r_1 &= -t n_2 - b n_1 \\ r_2 &= t n_1 - b n_2 \\ r_1^2 &= t^2 n_2^2 + t^2 b n_1 n_2 + b^2 n_1^2 \\ r_2^2 &= t^2 n_1^2 - t^2 b n_1 n_2 + b^2 n_2^2 \\ r_1 r_2 &= -t^2 n_1 n_2 + t b (n_2^2 - n_1^2) + b^2 n_1 n_2 \\ r_1 n_2 + r_2 n_1 &= -b \\ r_2 n_1 - r_1 n_2 &= t \end{aligned} \quad (4.34)$$

#### 4.5.2. Fundamentallösungen

Die Fundamentallösungen lauten

$$\begin{aligned}
 U_{ki}^* &= C_u \left\{ (4\nu-3) \ln \frac{r}{c} + r_{,k} r_{,i} \right\} \\
 P_{ki}^* &= C_p \left\{ r_j n_j ( (2\nu-1) \delta_{ki} - 2 r_{,k} r_{,i} ) + (2\nu-1) ( r_i n_k - r_k n_i ) \right\} \\
 \text{mit } C_u &= \frac{1}{8\pi\mu (1-\nu)} \\
 C_p &= \frac{1}{4\pi (1-\nu) r^2}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Für gerade Elemente vereinfachen sich diese Ausdrücke unter Verwendung der in Kap. 4.5.1. eingeführten Zusammenhänge. Die Komponenten der Fundamentallösung ergeben sich im einzelnen zu:

$$\begin{aligned}
 U_{11}^* &= C_u \left\{ (4\nu-3) \ln \frac{r}{c} + \left( \frac{r_1}{r} \right)^2 \right\} \\
 U_{12}^* = U_{21}^* &= C_u \left\{ \frac{r_1 r_2}{r^2} \right\} \\
 U_{22}^* &= C_u \left\{ (4\nu-3) \ln \frac{r}{c} + \left( \frac{r_2}{r} \right)^2 \right\} \\
 P_{11}^* &= C_p \left\{ (1-2\nu) \frac{b}{r^2} + 2b \frac{r_1^2}{r^4} \right\} \\
 P_{12}^* &= C_p \left\{ -(1-2\nu) \frac{t}{r^2} + 2b \frac{r_1 r_2}{r^4} \right\} \\
 P_{21}^* &= C_p \left\{ (1-2\nu) \frac{t}{r^2} + 2b \frac{r_1 r_2}{r^4} \right\} \\
 P_{22}^* &= C_p \left\{ (1-2\nu) \frac{b}{r^2} + 2b \frac{r_2^2}{r^4} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Nach dem Einsetzen der Beziehungen für  $r_i$  werden die Fundamentallösungen nun als Matrizenprodukt beschrieben. Die Vektoren  $\mathbf{U}^*$  und  $\mathbf{P}^*$  enthalten dabei die element-abhängigen Komponenten der Fundamentallösungen, wobei die Matrizen  $\mathbf{D}_G$  und  $\mathbf{D}_H$  die für das jeweilige Element konstanten und der Vektor  $\mathbf{d}$  die von der Randkoordinate abhängigen Bestandteile der Fundamentallösung enthält.

$$\begin{array}{c}
 \frac{U_{11}^*}{C_u} \\
 \frac{U_{12}^*}{C_u} \\
 \frac{U_{22}^*}{C_u} \\
 \dots \\
 \frac{P_{11}^*}{C_p} \\
 \frac{P_{12}^*}{C_p} \\
 \frac{P_{21}^*}{C_p} \\
 \frac{P_{22}^*}{C_p}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccccc}
 bn_1^2 & 2bn_1n_2 & n_2^2 & 0 & 0 & 0 & 4\nu-3 \\
 bn_1n_2 & b(n_2^2-n_1^2) & -n_1n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 bn_2^2 & -2bn_1n_2 & n_1^2 & 0 & 0 & 0 & 4\nu-3 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1-2\nu & 0 & 0 & b^2n_1^2 & 2bn_1n_2 & n_2^2 & 0 \\
 0 & 1-2\nu & 0 & b^2n_1n_2 & b(n_2^2-n_1^2) & -n_1n_2 & 0 \\
 0 & 2\nu-1 & 0 & b^2n_1n_2 & b(n_2^2-n_1^2) & -n_1n_2 & 0 \\
 1-2\nu & 0 & 0 & b^2n_2^2 & -2bn_1n_2 & n_1^2 & 0
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \frac{b}{r^2} \\
 \frac{t}{r^2} \\
 \frac{t^2}{r^2} \\
 \dots \\
 \frac{2b}{r^4} \\
 \frac{2bt}{r^4} \\
 \frac{2bt^2}{r^4} \\
 \ell n \frac{r}{c}
 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}^* &= \mathbf{D}_G \cdot \mathbf{d} \\
 \mathbf{P}^* &= \mathbf{D}_H \cdot \mathbf{d}
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

### 4.5.3. Element-Ansatzfunktionen

Die Element-Ansatzfunktionen kann man allgemein beschreiben durch

$$\Phi(X,K) = A(1,K) + \left(\frac{s}{\ell}\right) A(2,K) + \left(\frac{s}{\ell}\right)^2 A(3,K) + \sqrt{\frac{s}{\ell}} A(4,K) + \sqrt{\frac{\ell}{s}} A(5,K) \tag{4.38}$$

Dieser Zusammenhang wird nun ebenfalls als Matrizenprodukt dargestellt. Der Vektor  $\Phi$  mit den drei Ansatzfunktionen ergibt sich als Produkt des Vektors  $s$ , der die Potenzen der normierten Randkoordinate  $\left(\frac{s}{\ell}\right)$  enthält, und der Matrix  $A$  mit den vom Elementtyp abhängigen Einflußwerten der Potenzen.

Für die vier verschiedenen, in dieser Arbeit verwendeten Elementtypen aus Kap. 4.3 ergeben sich die Ansatzfunktionen dann folgendermaßen:

$$\text{1. linear: } \left| \begin{array}{ccc} \Phi(X,1) & \Phi(X,2) & \Phi(X,3) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{s}{\ell} & \left(\frac{s}{\ell}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{s}{\ell}} & \sqrt{\frac{\ell}{s}} & 0 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

$$2. \text{ quadr.: } \left| \begin{array}{ccc} \Phi(X,1) & \Phi(X,2) & \Phi(X,3) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{s}{\ell} & \left(\frac{s}{\ell}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{s}{\ell}} & \sqrt{\frac{\ell}{s}} & \end{array} \right| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$3. \text{ QP: } \left| \begin{array}{ccc} \Phi(X,1) & \Phi(X,2) & \Phi(X,3) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{s}{\ell} & \left(\frac{s}{\ell}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{s}{\ell}} & \sqrt{\frac{\ell}{s}} & \end{array} \right| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$4. \text{ TSQP: } \left| \begin{array}{ccc} \Phi(X,1) & \Phi(X,2) & \Phi(X,3) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & \frac{s}{\ell} & \left(\frac{s}{\ell}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{s}{\ell}} & \sqrt{\frac{\ell}{s}} & \end{array} \right| \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{Allgemein: } \Phi = \mathbf{s} \cdot \mathbf{A} \quad (4.39)$$

#### 4.5.4. Berechnung der Elementmatrizen

Mit den zuvor eingeführten Beziehungen für die Fundamentallösung und die Ansatzfunktionen können die Elementmatrizen nun ebenfalls als Matrizenprodukt dargestellt werden.

$$\mathbf{G}^E = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^* \Phi \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{D}_G \mathbf{d} \mathbf{s} \mathbf{A} \, d\Gamma = \mathbf{D}_G \int_{\Gamma} \mathbf{d} \mathbf{s} \, d\Gamma \mathbf{A} = \mathbf{D}_G \mathbf{S} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{H}^E = \int_{\Gamma} \mathbf{P}^* \Phi \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{D}_H \mathbf{d} \mathbf{s} \mathbf{A} \, d\Gamma = \mathbf{D}_H \int_{\Gamma} \mathbf{d} \mathbf{s} \, d\Gamma \mathbf{A} = \mathbf{D}_H \mathbf{S} \mathbf{A}$$

$$\text{mit } \mathbf{S} = \int_{\Gamma} \mathbf{d} \mathbf{s} \, d\Gamma \quad (4.40)$$

Die Matrizen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{A}$  sind nur vom Elementtyp und der Elementlage abhängig, während alle koordinatenabhängigen und somit für die Integration relevanten Größen in den Vektoren  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{s}$  zusammengefaßt sind. Die Matrix  $\mathbf{S}$  enthält somit also alle zu lösenden Integrale.

$$\mathbf{S} = \int_{\Gamma} \begin{array}{ccccc} \frac{b}{r^2} & \frac{s}{\ell} \frac{b}{r^2} & \frac{s^2}{\ell^2} \frac{b}{r^2} & \sqrt{\frac{s}{\ell}} \frac{b}{r^2} & \sqrt{\frac{\ell}{s}} \frac{b}{r^2} \\ \frac{t}{r^2} & \frac{s}{\ell} \frac{t}{r^2} & \frac{s^2}{\ell^2} \frac{t}{r^2} & \sqrt{\frac{s}{\ell}} \frac{t}{r^2} & \sqrt{\frac{\ell}{s}} \frac{t}{r^2} \\ \frac{t^2}{r^2} & \frac{s}{\ell} \frac{t^2}{r^2} & \frac{s^2}{\ell^2} \frac{t^2}{r^2} & \sqrt{\frac{s}{\ell}} \frac{t^2}{r^2} & \sqrt{\frac{\ell}{s}} \frac{t^2}{r^2} \\ \frac{2b}{r^4} & \frac{s}{\ell} \frac{2b}{r^4} & \frac{s^2}{\ell^2} \frac{2b}{r^4} & \sqrt{\frac{s}{\ell}} \frac{2b}{r^4} & \sqrt{\frac{\ell}{s}} \frac{2b}{r^4} \\ \frac{2b}{r^4} t & \frac{s}{\ell} \frac{2bt}{r^4} & \frac{s^2}{\ell^2} \frac{2bt}{r^4} & \sqrt{\frac{s}{\ell}} \frac{2bt}{r^4} & \sqrt{\frac{\ell}{s}} \frac{2bt}{r^4} \\ \frac{2b}{r^4} t^2 & \frac{s}{\ell} \frac{2bt^2}{r^4} & \frac{s^2}{\ell^2} \frac{2bt^2}{r^4} & \sqrt{\frac{s}{\ell}} \frac{2bt^2}{r^4} & \sqrt{\frac{\ell}{s}} \frac{2bt^2}{r^4} \\ \ell n \frac{r}{c} & \frac{s}{\ell} \ell n \frac{r}{c} & \frac{s^2}{\ell^2} \ell n \frac{r}{c} & \sqrt{\frac{s}{\ell}} \ell n \frac{r}{c} & \sqrt{\frac{\ell}{s}} \ell n \frac{r}{c} \end{array} d\Gamma$$

(4.41)

Ihre 35 Elemente beinhalten insgesamt 23 verschiedene Randintegrale. Um eine mehrfache Berechnung identischer Ausdrücke zu vermeiden, werden die jeweils benötigten Integraltypen I zunächst abhängig vom Elementtyp berechnet und die Matrix **S** anschließend durch entsprechende Überlagerung dieser Grund-Integrale gebildet.

#### 4.5.5. Integrale der Standardelemente

Die Integrale über Randelemente mit konstanten, linearen und quadratischen Ansatzfunktionen sind in den ersten drei Spalten von **S** enthalten. Zur Berechnung dieser Werte werden die Grund-Integrale  $I_1$  bis  $I_{13}$  benötigt.

$$I_1 = \int_0^{\ell} \frac{1}{r^2} ds = \frac{1}{b} (\varphi_a - \varphi_e)$$

$$I_2 = \int_0^{\ell} \frac{t}{r^2} ds = \ell n \left( \frac{r_a}{r_e} \right)$$



$$I_3 = \int_0^{\ell} \frac{t^2}{r^2} ds = \ell - b^2 I_1$$

$$I_4 = \int_0^{\ell} \frac{t^3}{r} ds = \frac{(\ell+a)^2 - a^2}{2} - b^2 I_2$$

$$I_5 = \int_0^{\ell} \frac{t^4}{r^2} ds = \frac{(\ell+a)^3 - a^3}{3} - b^2 I_3$$

$$I_6 = \int_0^{\ell} \frac{2b}{r^4} ds = \frac{\ell+a}{br_e^2} - \frac{a}{br_a^2} + \frac{1}{b} I_1$$

$$I_7 = \int_0^{\ell} \frac{2bt}{r^4} ds = \frac{b}{r_a^2} - \frac{b}{r_e^2} \quad (4.42)$$

$$I_8 = \int_0^{\ell} \frac{2bt^2}{r^4} ds = 2b I_1 - b^2 I_6$$

$$I_9 = \int_0^{\ell} \frac{2bt^3}{r^4} ds = 2b I_2 - b^2 I_7$$

$$I_{10} = \int_0^{\ell} \frac{2bt^4}{r^4} ds = 2b\ell - 4b^3 I_1 + b^4 I_6$$

$$I_{11} = \int_0^{\ell} \ln \frac{r}{c} ds = (\ell+a) \left( \ln \frac{r_e}{c} - 1 \right) - a \left( \ln \frac{r_a}{c} - 1 \right) + b^2 I_1$$

$$I_{12} = \int_0^{\ell} t \ln \frac{r}{c} ds = \frac{r_e^2}{4} \left( \ln \frac{r_e}{c} - 1 \right) - \frac{r_a^2}{4} \left( \ln \frac{r_a}{c} - 1 \right)$$

$$I_{13} = \int_0^{\ell} t^2 \ln \frac{r}{c} ds = \frac{(\ell+a)^3}{9} \left( 3 \ln \frac{r_e}{c} - 1 \right) - \frac{a^3}{9} \left( 3 \ln \frac{r_a}{c} - 1 \right) + \frac{b^2 \ell}{3} - \frac{b^4}{3} I_1$$

Mit diesen Werten können die zugehörigen Elemente der Matrix **S** nun folgendermaßen berechnet werden:

$$S_{11} = b I_1 \quad ; \quad S_{21} = \frac{b}{\ell} \left( I_2 - a I_1 \right) \quad ; \quad S_{13} = \frac{b}{\ell^2} \left( I_3 - 2a I_2 + a^2 I_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 S_{21} &= I_2 & ; & \quad S_{22} = \frac{1}{\ell} (I_3 - a I_2) & ; & \quad S_{23} = \frac{1}{\ell^2} (I_4 - 2a I_3 + a^2 I_2) \\
 S_{31} &= I_3 & ; & \quad S_{32} = \frac{1}{\ell} (I_4 - a I_3) & ; & \quad S_{33} = \frac{1}{\ell^2} (I_5 - 2a I_4 + a^2 I_3) \\
 S_{41} &= I_6 & ; & \quad S_{42} = \frac{1}{\ell} (I_7 - a I_6) & ; & \quad S_{43} = \frac{1}{\ell^2} (I_8 - 2a I_7 + a^2 I_6) \\
 S_{51} &= I_7 & ; & \quad S_{52} = \frac{1}{\ell} (I_8 - a I_7) & ; & \quad S_{53} = \frac{1}{\ell^2} (I_9 - 2a I_8 + a^2 I_7) \\
 S_{61} &= I_8 & ; & \quad S_{62} = \frac{1}{\ell} (I_9 - a I_8) & ; & \quad S_{63} = \frac{1}{\ell^2} (I_{10} - 2a I_9 + a^2 I_8) \\
 S_{71} &= I_{11} & ; & \quad S_{72} = \frac{1}{\ell} (I_{12} - a I_{11}) & ; & \quad S_{73} = \frac{1}{\ell^2} (I_{13} - 2a I_{12} + a^2 I_{11})
 \end{aligned}$$

#### 4.4.6. Integrale der Viertelpunkt-Elemente

Die Randintegrale über Viertelpunkt-Elemente sind in den beiden letzten Spalten von **S** enthalten. Zur Berechnung werden 10 zusätzliche Grund-Integrale benötigt, die die Quadratwurzel der Randkoordinate  $s$  enthalten. Ihre Berechnung wird durch eine Substitution

$$s = z^2 \quad \Rightarrow \quad ds = 2z \, dz \quad (4.43)$$

vereinfacht. Damit lautet der Zusammenhang zwischen  $r$  und  $z$

$$\begin{aligned}
 r^2 &= z^4 + 2az^2 + a^2 + b^2 = (z^2 + Az + r_a)(z^2 - Az + r_a) \\
 \text{mit } A &= \sqrt{2r_a - 2a}
 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Innerhalb der Grund-Integrale wiederkehrende Ausdrücke werden zunächst in den Hilfs-Integralen  $I_{40}$  bis  $I_{48}$  zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}
 I_{40} &= \int_0^{\sqrt{\ell}} \left( \frac{1}{z^2 + Az + r_a} + \frac{1}{z^2 - Az + r_a} \right) dz = \frac{2}{D} \arctan \frac{D\sqrt{\ell}}{r_a - \ell} \\
 I_{41} &= \int_0^{\sqrt{\ell}} \left( \frac{1}{(z^2 + Az + r_a)^2} + \frac{1}{(z^2 - Az + r_a)^2} \right) dz = \frac{4\sqrt{\ell}}{D^2} \frac{\ell + a}{\ell^2 + 2a\ell + r_a^2} + \frac{2}{D^2} I_{40}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{44} &= \int_0^{\sqrt{\ell}} \left( \frac{z}{z^2 - Az + r_a} - \frac{z}{z^2 + Az + r_a} \right) dz = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{z^2 - Az + r_a}{z^2 + Az + r_a} \right) + \frac{A}{2} I_{40} \\
 I_{45} &= \int_0^{\sqrt{\ell}} \left( \frac{z}{(z^2 + Az + r_a)^2} - \frac{z}{(z^2 - Az + r_a)^2} \right) dz = -\frac{2A}{D^2} - \frac{A}{D^2} I_{40} \quad (4.45) \\
 I_{47} &= \int_0^{\sqrt{\ell}} \left( \frac{z^2}{z^2 - Az + r_a} + \frac{z^2}{z^2 + Az + r_a} \right) dz = 2z + \frac{A}{2} \ln \left( \frac{z^2 - Az + r_a}{z^2 + Az + r_a} \right) + a I_{40} \\
 I_{48} &= \int_0^{\sqrt{\ell}} \left( \frac{z^2}{(z^2 + Az + r_a)^2} + \frac{z^2}{(z^2 - Az + r_a)^2} \right) dz = -4 \frac{a\ell\sqrt{\ell} + r_a^2\sqrt{\ell}}{D^2 r_e^2} + \frac{2r_a}{D^2} I_{40}
 \end{aligned}$$

mit  $D = \sqrt{2r_a + 2a}$

Die Grund-Integrale  $I_{14}$  bis  $I_{23}$  lauten damit:

$$\begin{aligned}
 I_{14} &= \int_0^{\ell} \frac{1}{\sqrt{s} r^2} ds = \int_0^{\sqrt{\ell}} \frac{2}{r^2} dz = \frac{I_{40}}{r_a} - \frac{I_{44}}{A r_a} \\
 I_{15} &= \int_0^{\ell} \frac{\sqrt{s}}{r^2} ds = \int_0^{\sqrt{\ell}} 2 \frac{z^2}{r^2} dz = \frac{I_{44}}{A} \\
 I_{16} &= \int_0^{\ell} \frac{s\sqrt{s}}{r^2} ds = \int_0^{\sqrt{\ell}} 2 \frac{z^4}{r^2} dz = 2\sqrt{\ell} + (r_a - 2a) I_{15} - r_a I_{40} \\
 I_{17} &= \int_0^{\ell} \frac{s^2\sqrt{s}}{r^2} ds = \int_0^{\sqrt{\ell}} 2 \frac{z^6}{r^2} dz = \frac{2}{3} \ell\sqrt{\ell} - 2a I_{16} - r_a^2 I_{15} \\
 I_{18} &= \int_0^{\ell} \frac{2b}{\sqrt{s} r^4} ds = \int_0^{\sqrt{\ell}} \frac{2b}{r^4} dz = \frac{2b}{r_a^2} \left( \frac{I_{41}}{2} + \frac{I_{45}}{A} + \frac{I_{48}}{2A^2} + I_{14} - \frac{I_{15}}{4A} \right) \\
 I_{19} &= \int_0^{\ell} \frac{2b\sqrt{s}}{r^4} ds = \int_0^{\sqrt{\ell}} 4b \frac{z^2}{r^4} dz = \frac{b}{A^2} \left( I_1 + \frac{I_{15}}{r_a} - \frac{I_{40}}{r_a} \right) \\
 I_{20} &= \int_0^{\ell} \frac{2bs\sqrt{s}}{r^4} ds = \int_0^{\sqrt{\ell}} 4b \frac{z^4}{r^4} dz = \frac{b}{A^2} \left( I_{48} - I_{14} \right)
 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$I_{21} = \int_0^{\ell} \frac{2bs^2\sqrt{s}}{r^4} ds = \int_0^{\sqrt{\ell}} 4b \frac{z^6}{r^4} dz = 2b I_{14} - 2a I_{20} - r_a^2 I_{19}$$

$$I_{22} = \int_0^{\ell} \sqrt{s} \ln \frac{r}{c} ds = \frac{2}{3} \left( \ell \sqrt{\ell} \ln \frac{r_e}{c} - I_{17} - a I_{16} \right)$$

$$I_{23} = \int_0^{\ell} \frac{1}{\sqrt{s}} \ln \frac{r}{c} ds = 2 \sqrt{\ell} \ln \frac{r_e}{c} - 2a I_{15} - 2 I_{16}$$

Die zugehörigen Elemente der Matrix **S** können nun wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} S_{14} &= \frac{b}{\sqrt{\ell}} \left( I_{15} \right) & ; & \quad S_{15} = b \sqrt{\ell} \left( I_{14} \right) \\ S_{24} &= \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left( I_{16} + a I_{15} \right) & ; & \quad S_{25} = \sqrt{\ell} \left( I_{15} + a I_{14} \right) \\ S_{34} &= \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left( I_{17} + 2a I_{16} + a^2 I_{15} \right) & ; & \quad S_{35} = \sqrt{\ell} \left( I_{16} + 2a I_{15} + a^2 I_{14} \right) \\ S_{44} &= \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left( I_{19} \right) & ; & \quad S_{45} = \sqrt{\ell} \left( I_{18} \right) \\ S_{54} &= \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left( I_{20} + a I_{19} \right) & ; & \quad S_{55} = \sqrt{\ell} \left( I_{19} + a I_{18} \right) \\ S_{64} &= \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left( I_{21} + 2a I_{20} + a^2 I_{19} \right) & ; & \quad S_{65} = \sqrt{\ell} \left( I_{20} + 2a I_{19} + a^2 I_{18} \right) \\ S_{74} &= \frac{1}{\sqrt{\ell}} \left( I_{22} \right) & ; & \quad S_{75} = \sqrt{\ell} \left( I_{23} \right) \end{aligned}$$

#### 4.6. Innenknoten

Die Verschiebungen in Innenpunkten des untersuchten Gebietes berechnen sich auf die gleiche Weise wie die Randverschiebungen. Aus den Gleichungen (4.26) bis (4.28) erhält man für  $C_{ki}(A, X) = \delta_{ki}(A, X)$  direkt

$$\begin{aligned} u_i(A) &= \int_{\bar{\Gamma}} U_{ki}^*(A, X) \Phi(X, K) d\Gamma p_i(K) - \int_{\bar{\Gamma}} P_{ki}^*(A, X) \Phi(X, K) d\Gamma u_i(K) \\ &= G_{ki}(A, K) p_i(K) - \hat{H}_{ki}(A, K) u_i(K) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Die Beziehung zur Berechnung der Spannungen erhält man aus den Gln. (2.6),(2.7)

$$\sigma_{kj} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{u_{k,j} + u_{j,k}}{2} + \frac{\nu}{1-2\nu} u_{e,e} \delta_{kj} \right\} \quad (4.48)$$

Bei der Berechnung der Ableitungen ist zu beachten, daß diese hier nicht auf dem Rand, sondern im Aufpunkt A erfolgen

$$u_{k,j} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j(A)} = - \frac{\partial u_k}{\partial x_j(X)} \quad (4.49)$$

Die Differentiation von Gl. (4.47) erfolgt nur innerhalb der Fundamentallösungen. Einsetzen in Gl. (4.48) führt dann auf

$$\begin{aligned} \sigma_{kj}(A) &= \frac{E}{1+\nu} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{U_{k1,j}^* + U_{j1,k}^*}{2} + \frac{\nu}{1-2\nu} U_{e1,e}^* \delta_{kj} \right\} \Phi \, d\Gamma \, p_1 \\ &\quad - \frac{E}{1+\nu} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{P_{k1,j}^* + P_{j1,k}^*}{2} + \frac{\nu}{1-2\nu} P_{e1,e}^* \delta_{kj} \right\} \Phi \, d\Gamma \, u_1 \\ &= \int_{\Gamma} Q_{k1j}^*(A,K) \, d\Gamma \, p_1(K) - \int_{\Gamma} R_{k1j}^*(A,K) \, d\Gamma \, u_1(K) \end{aligned} \quad (4.50)$$

mit

$$Q_{k1j}^* = \frac{-1}{4\pi (1-\nu) r^2} \left\{ (r_j \delta_{k1} + r_k \delta_{1j} - r_1 \delta_{kj}) (2\nu-1) - \frac{2 r_1 r_i r_k}{r^2} \right\}$$

$$R_{k1j}^* = \frac{\mu}{2\pi (1-\nu) r^2} \cdot$$

$$\begin{aligned} &\left\{ 2r_e n_e \left[ (1-2\nu) \delta_{k1} r_{,j} + \nu (\delta_{kj} r_{,1} + \delta_{j1} r_{,k}) - 4r_{,k} r_{,1} r_{,j} \right] \right. \\ &\quad + 2\nu (n_k r_{,1} r_{,j} + n_1 r_{,k} r_{,j}) \\ &\quad \left. + (1-2\nu) (2n_j r_{,k} r_{,1} + n_1 \delta_{jk} + n_k \delta_{1j}) - (1-4\nu) n_j \delta_{1k} \right\} \end{aligned}$$

#### 4.7. Spannungen auf dem Rand

In vielen Fällen, wie beispielsweise bei allen Kerbproblemen, sind neben den äußerlich angreifenden Spannungen vor allem innere Spannungen parallel zum Randverlauf von Interesse. Die Berechnung dieser Spannungskomponenten kann wie bei den Spannungen in Innenknoten in einer Nachlaufrechnung direkt aus den Ergebnissen der Standard-Rechnung erfolgen. In Abbildung 4.8 sind die auf dem Rand einer ebenen Struktur auftretenden inneren und äußeren Spannungskomponenten am Beispiel eines linearen Zwei-Knoten-Elementes dargestellt.

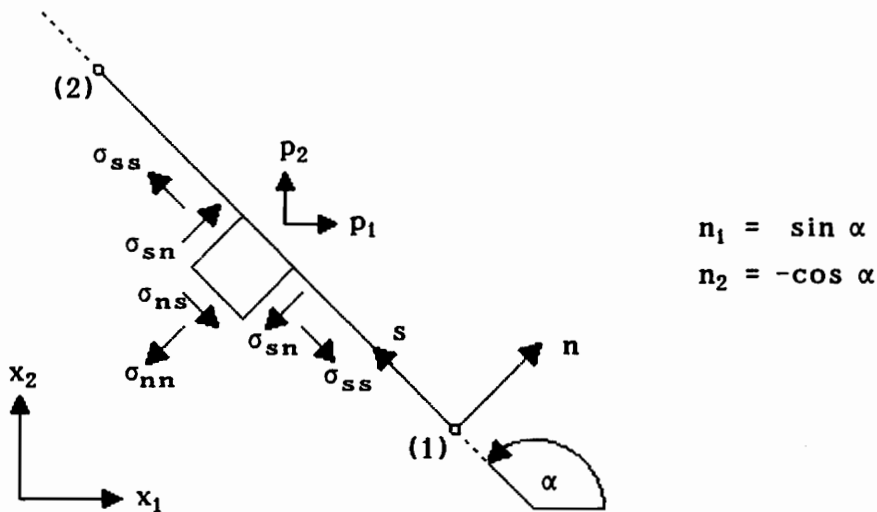


Abb. 4.8: Spannungskomponenten auf dem Rand

Zwischen den Komponenten der äußeren Randspannungen  $p_1$  in globalen Koordinaten  $(x_1, x_2)$  und in lokalen Koordinaten  $(s, n)$  besteht zunächst der allgemeine Zusammenhang

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= p_n = p_1 \sin \alpha - p_2 \cos \alpha = p_1 n_1 + p_2 n_2 \\ \sigma_{ns} &= p_s = p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha = p_2 n_1 - p_1 n_2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Die Normalspannungen in Randrichtung sind nun zusätzlich von der Längenänderung des Randstücks abhängig

$$\sigma_{ss} = \frac{1}{1-\nu} \left( \nu \sigma_{nn} + 2G \epsilon_{ss} \right) \quad (4.52)$$

Die Dehnung  $\varepsilon_{ss}$  im Punkt X kann dabei durch die Knotenverschiebungen  $u_1$  und die Rand-Ansatzfunktionen  $\Phi$  dargestellt werden. Aus der Beziehung

$$\begin{aligned} u_s(X) &= u_1(X) \cos \alpha + u_2(X) \sin \alpha = u_2(X) n_1 - u_1(X) n_2 \\ &= \Phi(X,K) \left( u_2(K) n_1 - u_1(K) n_2 \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

folgt durch Differentiation direkt

$$\varepsilon_{ss}(X) = u_{s,s}(X) = \Phi_{,s}(X,K) \left( u_2(K) n_1 - u_1(K) n_2 \right) \quad (4.54)$$

Für das Zwei-Knoten-Element mit den Knoten 1 und 2 erhält man die erforderlichen Ableitungen der Ansatzfunktionen zu

$$\begin{aligned} \Phi_{,s}(X,1) &= -\frac{1}{\ell} \\ \Phi_{,s}(X,2) &= \frac{1}{\ell} \end{aligned} \quad (4.55a)$$

Für das Drei-Knoten-Element mit den Knoten 1, 2 und 3 und quadratischem Ansatz lauten die Ableitungen

$$\begin{aligned} \Phi_{,s}(X,1) &= -\frac{3}{\ell} + \frac{4s}{\ell^2} \\ \Phi_{,s}(X,2) &= \frac{4}{\ell} - \frac{8s}{\ell^2} \\ \Phi_{,s}(X,3) &= -\frac{1}{\ell} + \frac{4s}{\ell^2} \end{aligned} \quad (4.55b)$$

#### 4.8. Doppelknoten

Die korrekte Wiedergabe von sich sprunghaft ändernden Randbedingungen oder unstetigen Randspannungsverläufen, also z.B. der Übergang von  $\Gamma_1$  nach  $\Gamma_2$  oder von  $\bar{p}=0$  nach  $\bar{p}\neq 0$ , macht es erforderlich, sogenannte Doppelknoten einzuführen. Während im Normalfall der Endknoten eines Elementes mit dem Anfangsknoten des Nachbarelementes identisch ist, handelt es sich hier um zwei getrennte Knoten mit derselben Koordinate.

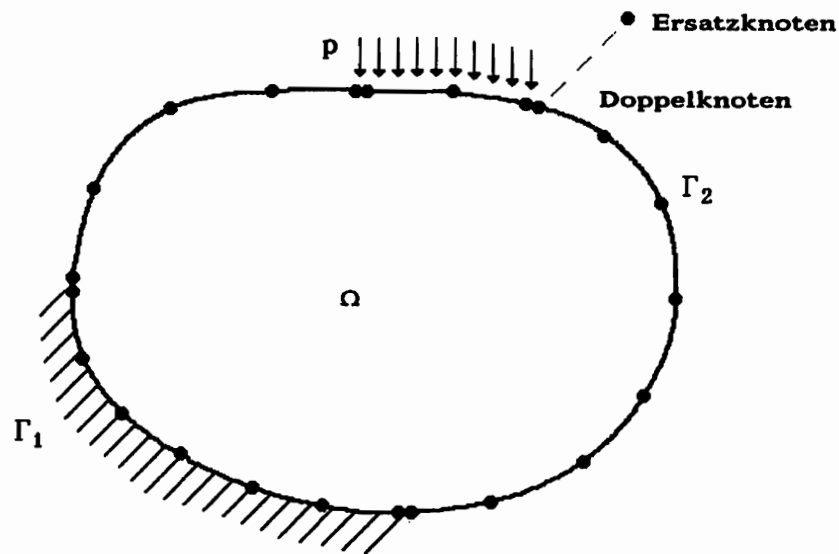


Abb. 4.9: Verwendung von Doppelknoten

Bei der Aufstellung des System-Gleichungssystems wird der Aufpunkt der Fundamentallösung nacheinander in jeden Knoten gelegt. Doppelknoten führen dementsprechend zu identischen Zeilen der Matrizen  $\mathbf{G}$  und  $\hat{\mathbf{H}}$ . Es ist daher zu beachten, daß hier in mindestens einem der beiden Knoten die Randspannung vorgegeben sein muß, damit das Gleichungssystem nicht singulär wird.

Sollen in beiden Knoten Randspannungen berechnet werden, so müssen zusätzliche Bedingungen zur Beseitigung der Singularität eingeführt werden. Bei der Aufstellung des Gleichungssystems kann der Aufpunkt  $A$  zu diesem Zweck anstelle in den zweiten der beiden Doppelknoten in einen Punkt außerhalb des untersuchten Gebietes gelegt werden. Da der Wert  $C_{k1}$  aus Kap. 4.2 für Außenpunkte null ist, erhält man auf diese Weise eine zusätzliche Gleichung, ohne zusätzliche Unbekannte einzuführen.

#### 4.9. Substruktur-Technik

Die Untersuchung nur gebietsweise homogener Gebiete wird durch die sogenannte Substruktur-Technik möglich. Dabei wird das Gesamtgebiet in homogene Teilgebiete unterteilt, für die dann jeweils die Systemmatrizen getrennt berechnet und erst anschließend zu Gesamt-Systemmatrizen vereinigt werden. Sinnvoll kann eine Aufteilung in solche Substrukturen auch sein, um bei langgestreckten Bauteilen eine Bandstruktur der Matrizen ähnlich wie bei der FEM zu erzielen, wodurch sich



in einigen Fällen der Rechenaufwand trotz Einführung zusätzlicher Freiheitsgrade reduzieren läßt.

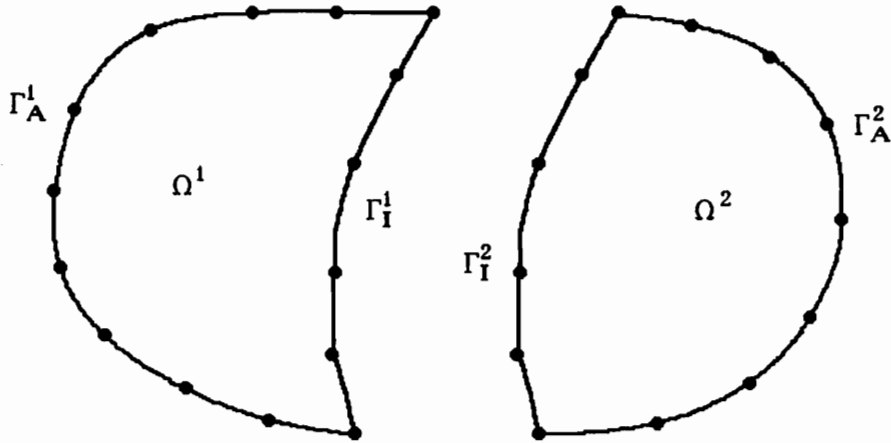


Abb. 4.10: Aufteilung in Substrukturen

Das in der Abbildung dargestellte Gebiet wurde beispielhaft in zwei Teilgebiete unterteilt. Auf dem gemeinsamen Rand  $\Gamma_I$  können keine Randbedingungen vorge-schrieben werden, es müssen jedoch bestimmte Übergangsbedingungen eingehalten werden. Diese sind

die Kompatibilität der Verschiebungen

$$\mathbf{u}_I^1 = \mathbf{u}_I^2 \quad (4.56a)$$

und das Kräftegleichgewicht

$$\mathbf{p}_I^1 = -\mathbf{p}_I^2 \quad (4.56b)$$

Die Gleichungssysteme der Teilgebiete lassen sich nun wie folgt darstellen

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{G}_{AA}^1 & \mathbf{G}_{AI}^1 & & \mathbf{p}_A^1 \\ \hline & & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{G}_{IA}^1 & \mathbf{G}_{II}^1 & & \mathbf{p}_I^1 \\ \hline & & \mathbf{G}_{AA}^2 & \mathbf{G}_{AI}^2 \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{p}_A^2 \\ \hline & & \mathbf{G}_{IA}^2 & \mathbf{G}_{II}^2 \\ \hline & & & \mathbf{p}_I^2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{H}_{AA}^1 & \mathbf{H}_{AI}^1 & & \mathbf{u}_A^1 \\ \hline & & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{H}_{IA}^1 & \mathbf{H}_{II}^1 & & \mathbf{u}_I^1 \\ \hline & & \mathbf{H}_{AA}^2 & \mathbf{H}_{AI}^2 \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{u}_A^2 \\ \hline & & \mathbf{H}_{IA}^2 & \mathbf{H}_{II}^2 \\ \hline & & & \mathbf{u}_I^2 \\ \hline \end{array}$$

Durch den Einbau der Übergangsbedingungen Gln. (4.56) wird das Gleichungssystem überführt in

$$\begin{vmatrix} G_{AA}^1 & G_{AI}^1 & H_{AI}^1 & 0 \\ G_I^1 & G_{II}^1 & H_{II}^1 & \\ & -G_{AI}^2 & H_{AI}^2 & G_{AA}^2 \\ 0 & -G_{II}^2 & H_{II}^2 & G_{IA}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_A^1 \\ p_I^1 \\ u_I^2 \\ p_A^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_{AA}^1 & 0 \\ H_{IA}^1 & \\ & H_{AA}^2 \\ 0 & H_{IA}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_A^1 \\ u_A^2 \end{vmatrix} \quad (4.57)$$

Auf dem gemeinsamen Innenrand genügt die Berechnung der Schnittgrößen  $p_I^1$  und  $u_I^2$ . Die Größen  $u_A^1$  und  $p_A^2$  ergeben sich aus den Übergangsbedingungen und brauchen an dieser Stelle nicht berechnet zu werden.

## 5. Die Randelementmethode in der Elastodynamik

Bei der Anwendung der Randelementmethode auf elastodynamische Problemstellungen können im wesentlichen drei unterschiedliche Wege beschritten werden. Diese lassen sich folgendermaßen kennzeichnen

- Aufstellung zeitabhängiger Systemmatrizen mittels einer Fundamentallösung im Zeitbereich
- Aufstellung frequenzabhängiger Systemmatrizen mittels einer Fundamentallösung im Frequenzbereich
- Aufstellung konstanter Systemmatrizen durch Verwendung von Näherungsansätzen

Auf die Untersuchung im Zeitbereich soll im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden. Näheres hierzu findet sich in der Literatur, z.B. Brebbia [17,18], Antes [4], v.Estorff [34].

Ausgangspunkt für die Herleitung elastodynamischer Randintegralgleichungen ist wieder die Gleichgewichtsbeziehung (2.4) im Punkt X im Innern des betrachteten Gebietes  $\Omega$ .

$$\sigma_{ij,j}(X) - \rho \ddot{u}_i(X) + b_i(X) = 0 \quad (5.1)$$

Die Anwendung einer Fundamentallösung  $U_{ki}^*$  als Wichtungsfunktion auf diese Gleichgewichtsbeziehung führt dann auf

$$\int_{\Omega} U_{ki}^*(A,X) \{ \sigma_{ij,j}(X) - \rho \ddot{u}_i(X) + b_i(X) \} d\Omega = 0 \quad (5.2)$$

Für eine Betrachtung im Frequenzbereich wird ein harmonischer Ansatz verwendet

$$u_i = \hat{u}_i e^{i\omega t} \quad (5.3)$$

$$\text{mit } \ddot{u}_i = -\omega^2 \hat{u}_i e^{i\omega t} = -\omega^2 u_i \quad (5.4)$$

Damit geht diese Gleichung über in

$$\int_{\Omega} U_{ki}^*(A,X) \{ \sigma_{ij,j}(X) + \rho \omega^2 u_i(X) + b_i(X) \} d\Omega = 0 \quad (5.5)$$

Von hier ab unterscheiden sich die verschiedenen Vorgehensweisen der elastodynamischen REM. Beschrieben wird zunächst die bereits in vielen Arbeiten [2,10, 24,43,64] verwendete Formulierung im Frequenzbereich. Dieser werden dann Verfahren gegenübergestellt, die auf konstante Systemmatrizen führen.

### 5.1. Formulierung mit frequenzabhängigen Systemmatrizen

Das Integral (5.5) soll für den Fall verschwindender Volumenkräfte unter Verwendung einer geeigneten Fundamentallösung vollständig in ein Randintegral überführt werden. Zu diesem Zweck muß die Fundamentallösung der um den Trägheitsterm erweiterten Differentialgleichung (4.4) genügen.

$$\sigma_{kij,j}^*(A,X) + \rho\omega^2 U_{ki}^*(A,X) = -\Delta_{ki}(A,X) \quad (5.6)$$

Ein weiteres Kriterium für die Wahl der Fundamentallösung bei der Untersuchung nicht-abgeschlossener Gebiete ist die Sommerfeldsche Ausstrahlbedingung [76], die beinhaltet, daß keine Energie aus dem Unendlichen in das betrachtete Gebiet einstrahlen darf. Im zweidimensionalen Fall lautet sie

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{r} \left( \frac{\partial U^*}{\partial r} - \frac{i\omega}{c} U^* \right) \right\} = 0 \quad (5.7)$$

Die Fundamentallösung, die sowohl die Dgl. als auch die Ausstrahlbedingung erfüllt, lautet für zweidimensionale elastodynamische Probleme

$$U_{ki}^* = \frac{1}{4\mu} \left\{ U_1 \delta_{ki} - U_2 r_{,k} r_{,i} \right\} \quad (5.8a)$$

$$\text{mit } U_1 = H_0^{(1)}(z_2) - \frac{H_1^{(1)}(z_2)}{z_2} + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 \frac{H_1^{(1)}(z_1)}{z_1}$$

$$U_2 = - H_2^{(1)}(z_2) + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 H_2^{(1)}(z_1)$$

$$U_3 = - z_2 H_2^{(1)}(z_2) + z_1 \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 H_2^{(1)}(z_1)$$

$$z_1 = \frac{\omega r}{c_1}$$

Die Funktionen  $H_\nu^{(1)}$  sind Hankel-Funktionen erster Art und  $\nu$ -ter Ordnung. Sie setzen sich aus den entsprechenden Bessel-Funktionen  $J_\nu$  und  $Y_\nu$  zusammen [80]:

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + i Y_\nu(z) \quad (5.8b)$$

Zu bemerken ist in diesem Zusammenhang, daß der Realteil der Fundamentallösung, der mit den Besselfunktionen  $Y_\nu$  gebildet wird, für sich allein bereits die Dgl. (5.6) erfüllt. Der Imaginärteil, der die Funktionen  $J_\nu$  beinhaltet, erfüllt dagegen die homogene Dgl. und wird zur Erfüllung der Ausstrahlbedingung hinzugefügt.

Die Fundamental-Randspannungen ergeben sich nun zu

$$P_{ki}^* = \frac{i}{4r} \left\{ (r_{,j} n_j \delta_k + r_{,i} n_k) W1 + r_{,k} n_i W2 + r_{,k} r_{,i} r_{,j} n_j W3 \right.$$

$$\text{mit } W1 = r \frac{dU_1}{dr} - U_2 = -z_2 H_1^{(1)}(z_2) - 2 U_2 \quad (5.8c)$$

$$\begin{aligned} W2 &= - \left( \frac{z_2}{z_1} \right)^2 U_2 + \left( \left( \frac{z_2}{z_1} \right)^2 - 2 \right) \left( r \frac{dU_1}{dr} - r \frac{dU_2}{dr} \right) \\ &= - \frac{c_1^2}{c_2^2} U_2 + \frac{c_1^2 - c_2^2}{c_2^2} (W1 + 3 U_2 - U_3) \end{aligned}$$

$$W3 = 4U_2 - 2 r \frac{dU_2}{dr} = 8 U_2 - 2 U_3$$

Die Berechnung der Hankel-Funktionen kann näherungsweise mit Polynom-Ansätzen, wie sie beispielsweise von Abramowitz und Stegun [1] angegeben werden, erfolgen. Die Grenzwertbildung für  $\omega=0$  führt auf die statische Fundamentallösung aus Kapitel 4. Bei der Berechnung der Fundamentallösungen für niedrige Frequenzen muß beachtet werden, daß sie sich aus Summanden stark unterschiedlicher Größenordnungen zusammensetzen. Um hieraus resultierende numerische Fehler zu vermeiden, ist es sinnvoll, Terme gleicher Größenordnung zunächst getrennt zu berechnen und erst danach zusammenzufassen.

Die Werte  $C_{ij}$  in den singulären Punkten und damit die Diagonal-Submatrizen von  $H$  können hier nicht mehr aus Starrkörperbedingungen berechnet werden. Sie sind jedoch mit denen der statischen Berechnung aus Kap. 4. identisch, so daß keine zusätzlichen Grenzwertbetrachtungen erforderlich werden [3].

Die übrige Vorgehensweise unterscheidet sich nicht von der des statischen Falls, jedoch erhält man aufgrund der verwendeten Fundamentallösung hier ein frequenzabhängiges Gleichungssystem.

$$\mathbf{G}(\omega) \mathbf{p}(\omega) - \mathbf{H}(\omega) \mathbf{u}(\omega) + \mathbf{b}(\omega) = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

Umstellen der Matrix-Spalten und der Vektoren führt dann wie im statischen Fall auf ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Unbekannten

$$\mathbf{A}(\omega) \mathbf{x}(\omega) = \mathbf{r}(\omega) \quad (5.10)$$

Bei offenen Gebieten, wie sie z.B. bei Halbraumproblemen vorkommen [43,64], muß die komplexe Fundamentallösung verwendet werden, da nur so die korrekte Beschreibung einer geometrischen (Ausstrahl-) Dämpfung gewährleistet wird.

Geschlossene Gebiete, wie sie hier ausschließlich betrachtet werden, besitzen im Gegensatz dazu keine Wellenausstrahlung ins Unendliche. Hier ist es daher prinzipiell möglich, eine rein reelle Fundamentallösung anzuwenden.

Sollen der Frequenzgang respektive die Eigenfrequenzen einer Struktur ermittelt werden, so muß das Gleichungssystem in beiden Fällen für jede betrachtete Frequenz neu aufgestellt und gelöst werden.

Einen wesentlich geringeren Rechenaufwand bei der Untersuchung abgeschlossener Gebiete versprechen Verfahren, die mit einer Separation der Orts- und der Zeitlösung arbeiten und damit auf konstante, frequenzunabhängige Systemmatrizen führen. Diese innerhalb der FEM altbewährte Vorgehensweise einer Formulierung mit Steifigkeits- und Massenmatrizen wurde erstmals von Nardini und Brebbia [57] für die REM aufgestellt und wird hier zunächst näher beschrieben.

## 5.2. Formulierung mit konstanter Massenmatrix

Ein Verfahren zur Aufstellung einer konstanten REM-Massenmatrix wurde von Nardini und Brebbia [16,19,57-61] vorgestellt und als "Dual Reciprocity Method" bezeichnet. Ausgangspunkt ist wieder die Anwendung der Methode der gewichteten Residuen auf das dynamische Gleichgewicht. Die Integralgleichung (5.2) wird nun für den Fall verschwindender Volumenkräfte  $b_i$  in ein frequenzunabhängiges und in ein frequenzabhängiges Integral aufgeteilt:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} U_{k_1}^*(A, X) \sigma_{ij,j}(X) d\Omega - \rho \int_{\Omega} U_{k_1}^*(A, X) \ddot{u}_i(X) d\Omega & (5.11) \\ &= I_{\text{stat}} + I_{\text{dyn}} = 0 \end{aligned}$$

Anstelle der frequenzabhängigen Fundamentallösung aus Kap. 5.1 wird hier die vergleichsweise einfache statische Lösung verwendet! Das linke Integral läßt sich damit in der in Kap. 4 dargestellten Weise in ein Randintegral überführen:

$$\begin{aligned} I_{\text{stat}} &= \int_{\Gamma} \{ U_{k_1}^*(A, X) p_i(X) - P_{k_1}^*(A, X) u_i(X) \} d\Gamma - u_k(A) & (5.12) \\ &= G_{k_1}(A, K) p_i(K) - H_{k_1}(A, K) u_i(K) \end{aligned}$$

Für die Berechnung des dynamischen Anteils werden die Massen-Verschiebungen bzw. -Beschleunigungen nun als Produkt aus ortsabhängigen Funktionen  $f_{1\ell} = \tilde{\sigma}_{1\ell j,j}$  und zeitabhängigen Funktionen  $\alpha_\ell$  dargestellt:

$$u_i(X) = f_{1\ell}(X, M) \alpha_\ell(M) = \tilde{\sigma}_{1\ell j,j}(X, M) \alpha_\ell(M) \quad (5.13)$$

Unter Verwendung des harmonischen Ansatzes (5.3) für  $u(t)$  und  $\alpha(t)$  gilt dann auch

$$\ddot{u}_i(X) = -\omega^2 u_i(X) = \tilde{\sigma}_{1\ell j,j}(X, M) \ddot{\alpha}_\ell(M) = -\omega^2 \tilde{\sigma}_{1\ell j,j}(X, M) \alpha_\ell(M) \quad (5.14)$$

Einsetzen in das dynamische Gebietsintegral führt auf

$$\begin{aligned} I_{\text{dyn}} &= \rho \omega^2 \int_{\Omega} U_{k_1}^*(A, X) u_i(X) d\Omega \\ &= \rho \omega^2 \int_{\Omega} U_{k_1}^*(A, X) \tilde{\sigma}_{1\ell j,j}(X, M) d\Omega \alpha_\ell(M) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Der Integrand des dynamischen Gebietsintegrals in Gl. (5.15) stimmt jetzt formal mit dem des statischen aus Gl. (5.11) überein, so daß es sich nun auf gleiche Weise wie das statische Gebietsintegral in einen Randintegralausdruck überführen läßt. Dazu muß die Ansatzfunktion der Differentialgleichung (5.16) genügen, d.h.  $\tilde{\sigma}_{ie_j}$  kann als Pseudo-Spannungsfunktion infolge einer Pseudo-Verschiebungsfunktion  $\tilde{u}_{ie}$  betrachtet werden:

$$\tilde{\sigma}_{ie_j,j}(X,M) = \lambda \delta_{ie} \tilde{u}_{ij,j} + \mu (\tilde{u}_{ie,jj} + \tilde{u}_{ij,e_j}) \quad (5.16)$$

mit  $\tilde{u}_{ie}$  Pseudo-Verschiebungen  
 $\tilde{\sigma}_{ie_j}$  Pseudo-Spannungen

Zweimalige partielle Integration der Gleichung (5.15) führt dann auf den Randintegralausdruck

$$I_{\text{dyn}} = \rho \omega^2 \left\{ \int_{\Gamma} (U_{k_i}^*(A,X) \tilde{p}_{ie}(X,M) - P_{k_i}^*(A,X) \tilde{u}_{ie}(X,M)) d\Gamma - \delta_{ki} \tilde{u}_{ie}(A,M) \right\} \alpha_e(M) \quad (5.17)$$

mit  $\tilde{p}_{ie} = \tilde{\sigma}_{ie_j} n_j$  Pseudo-Randspannungen

Die Randverläufe der Funktionen  $\tilde{u}$  und  $\tilde{p}$  werden nun mit denselben Ansatzfunktionen angenähert, wie sie auch für  $u$  und  $p$  verwendet worden sind. Man erhält

$$I_{\text{dyn}} = \rho \omega^2 \left\{ \int_{\Gamma} U_{k_i}^*(A,X) \Phi(X,K) d\Gamma \tilde{p}_{ie}(K,M) - \left( \int_{\Gamma} P_{k_i}^*(A,X) \Phi(X,K) d\Gamma - \delta_{ki}(A,K) \right) \tilde{u}_{ie}(K,M) \right\} \alpha_e(M) \quad (5.18)$$

Die neuen Funktionen stehen somit außerhalb der Integrale, die jetzt mit denen des statischen Falles übereinstimmen. Mit den bereits eingeführten Abkürzungen  $G$  und  $H$  geht das Integral nun über in

$$I_{\text{dyn}} = \rho \omega^2 \left\{ G_{k_i}(A,K) \tilde{p}_{ie}(K,M) - H_{k_i}(A,K) \tilde{u}_{ie}(K,M) \right\} \alpha_e(M) \quad (5.19)$$

Die Komponenten  $G_{k_i}$ ,  $H_{k_i}$ ,  $\tilde{u}_{ie}$ ,  $\tilde{p}_{ie}$  und  $\tilde{\sigma}_{ie_j,j}$  werden in  $2N \times 2N$ -Matrizen, die Werte  $u_i$  und  $\alpha_e$  in Vektoren zusammengefaßt. Dabei durchlaufen die Indizes die beiden Koordinatenrichtungen, die Knotennummern alle  $N$  Randknoten. Somit erhält man aus der Gleichung (5.13) und dem Einsetzen von (5.12) und (5.19) in (5.11) die matriziellen Zusammenhänge :



$$\mathbf{u} = \mathbf{F} \boldsymbol{\alpha} \quad (5.20)$$

$$\mathbf{G} \mathbf{p} - \mathbf{H} \mathbf{u} = -\rho \omega^2 \{ \mathbf{G} \tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{H} \tilde{\mathbf{U}} \} \boldsymbol{\alpha} \quad (5.21)$$

Inversion der ersten der beiden Gleichungen und Einsetzen in die zweite führt auf

$$\mathbf{G} \mathbf{p} - \mathbf{H} \mathbf{u} = -\rho \omega^2 \{ \mathbf{G} \tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{H} \tilde{\mathbf{U}} \} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{u} = -\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u}$$

mit der zeit- und frequenzunabhängigen Massenmatrix  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \rho \{ \mathbf{G} \tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{H} \tilde{\mathbf{U}} \} \mathbf{F}^{-1} \quad (5.23)$$

Das entscheidende Kriterium des hier beschriebenen Verfahrens ist die Wahl einer geeigneten Ansatzfunktion  $f_{i\ell}$  für die Trägheitskräfte. Von Nardini werden hierzu bereits verschiedene Vorschläge gemacht:

- konstante Funktionen

$$f_{i\ell}(X, M) = \delta_{i\ell} C$$

- lineare Funktionen

$$f_{i\ell}(X, M) = \delta_{i\ell} r(X, M)$$

$$\text{mit } r_1(X, M) = x_1(M) - x_1(X)$$

$$r(X, M) = \sqrt{r_1(X, M) r_1(X, M)}$$

- Polynomansätze

$$f_{i\ell}(X, M) = \delta_{i\ell} x_1^m(X) x_2^n(X)$$

Denkbar ist auch ein quadratischer Ansatz

$$f_{i\ell}(X, M) = \delta_{i\ell} r^2(X, M)$$

Der verwendete Ansatz muß zunächst einmal zwei Kriterien genügen:

- Die Matrix  $\mathbf{F}$  der Ansatzfunktionen  $f_{i\ell}$  muß invertierbar sein
- Die zugehörige Verschiebungsfunktion  $\tilde{\mathbf{u}}$  muß existieren

Proberechnungen haben gezeigt, daß neben dem konstanten meist auch der Polynom- und der quadratische Ansatz auf eine singuläre **F**-Matrix führen. Sinnvoll ist daher nur die Verwendung linearer Ansatzfunktionen, wie sie auch allen von Nardini veröffentlichten Beispielen zugrunde liegen. Um Starrkörperbeschleunigungen (z.B. aus Gravitation) besser wiederzugeben, kann dem Ansatz eine konstante Funktion überlagert werden.

### 5.2.1. Lineare Ansatzfunktionen

Die von Nardini vorgeschlagene, lineare Ansatzfunktion für die Trägheitskräfte hat die Form

$$f_{ie}(K,M) = \delta_{ie} \mu \{ C - r(K,M) \} \quad (5.24)$$

Die zugehörige Pseudo-Verschiebungsfunktion lautet in diesem Fall

$$\tilde{u}_{ie} = \frac{1-2\nu}{5-4\nu} C r_e r_i + \frac{1}{30(1-\nu)} \left( r r_e r_i + \delta_{ie} \frac{r^3}{3} (10\nu-9) \right) \quad (5.25)$$

Die zugehörige Pseudo-Randspannungsfunktion hat die Form

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{ie} = & \frac{\mu C}{5-4\nu} \{ (1-2\nu) (r_e n_i + r_j n_j \delta_{ie}) + (2+2\nu) r_i n_e \} \\ & + \frac{1}{30(1-\nu)} \left\{ r r_i n_e (2-10\nu) + r r_e n_i (10\nu-8) \right. \\ & \left. + r_j n_j \left( r \delta_{ie} (10\nu-8) + 2 \frac{r_e r_i}{r} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Dieser Ansatz von Nardini, der in identischer Form auch von Ahmad und Banerjee [2] verwendet worden ist, wird von nun an kurz als N-Ansatz bezeichnet.

### 5.2.2. Fundamentallösung als Ansatz

Den beiden vorgenannten Verfahren zur Untersuchung elastodynamischer Probleme mit der REM sollen in dieser Arbeit neuentwickelte, alternative Vorgehensweisen gegenübergestellt werden.

Viele Schwingungsformen lassen sich nämlich mit dem recht groben Ansatz von Nardini nur sehr schlecht wiedergeben, wie auch Kanarachos und Provatidis [46]

bei der Untersuchung von Wellenausbreitungsproblemen festgestellt haben. Eine Verbesserung ist durch Verwendung eines modifizierten Ansatzes zu erwarten, der zumindest alle Biegeformen, die unter statischer Belastung (inklusive dem Lastfall konstanter Volumenkräfte) auftreten können, so exakt wie möglich darstellen kann. Um dies zu erreichen, ist nichts naheliegender als die Verwendung der statischen Fundamentallösung als Ansatzfunktion für die Trägheitskräfte.

Die Verschiebungsfunktion  $u_1$  in Gl. (5.11) besteht dementsprechend aus der Überlagerung von Verschiebungsverläufen infolge zunächst unbekannter Randspannungen  $\beta_e$ . Dieser Ansatz ist formal identisch mit der Berechnung von Innenpunkt-Verschiebungen infolge von Randspannungen, wie sie in Kap. 4.6 beschrieben worden ist.

$$u_1(X) = \int_{\Gamma} U_{1e}^*(X, Y) \beta_e(Y) d\Gamma \quad (5.27)$$

Für die Randspannungen werden wieder die bekannten Rand-Ansatzfunktionen verwendet

$$u_1(X) = \int_{\Gamma} U_{1e}^*(X, Y) \Phi(Y, L) d\Gamma \beta_e(L) = G_{1e}(X, L) \beta_e(L) \quad (5.28)$$

Die Fundamentallösung  $U^*$  wird in den weiteren Schritten durch eine Pseudo-Spannungsfunktion  $\tilde{\sigma}_{1ej}$  dargestellt, deren Verlauf auf dem Rand  $\Gamma$  wieder mit den bekannten Ansatzfunktionen  $\Phi$  angenähert wird. Damit wird es möglich, die Fundamentallösung aus dem Randintegral herauszuziehen:

$$\begin{aligned} u_1(X) &= U_{1e}^*(X, M) \int_{\Gamma} \Phi^T(M, Y) \Phi(Y, L) d\Gamma \beta_e(L) \\ &= \tilde{\sigma}_{1ej,j}(X, M) \cdot T(M, L) \cdot \beta_e(L) \\ &= \tilde{\sigma}_{1ej,j}(X, M) \cdot \alpha_e(M) \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\text{mit } T(M, L) = \int_{\Gamma} \Phi^T(M, Y) \Phi(Y, L) d\Gamma$$

$$\tilde{\sigma}_{1ej,j}(X, M) = U_{1e}^*(X, M)$$

$$\alpha_e(M) = T(M, L) \beta_e(L)$$

Durch diese Bezeichnungsweise wurde Übereinstimmung mit der Gleichung (5.13) aus dem Nardini-Verfahren erzielt. Nach dem Einsetzen in das dynamische Gebiets-

integral, zweimaliger partieller Integration und Zusammenfassung aller Komponenten in Matrizen und Vektoren erhält man wieder den Zusammenhang aus Gl. (5.21).

$$\text{Mit } \mathbf{u} = \mathbf{G} \boldsymbol{\beta} \tag{5.30}$$

$$\text{und } \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{T} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{T} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{u}$$

geht das Gleichungssystem dann über in

$$\mathbf{G} \mathbf{p} - \mathbf{H} \mathbf{u} = -\rho \omega^2 \{ \mathbf{G} \tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{H} \tilde{\mathbf{U}} \} \mathbf{T} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{u} = -\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{u} \tag{5.31}$$

$$\text{mit } \mathbf{M} = \rho \{ \mathbf{G} \tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{H} \tilde{\mathbf{U}} \} \mathbf{T} \mathbf{G}^{-1}$$

Die zugehörigen Pseudo-Verschiebungs- und -Randspannungsfunktionen sind in den Gln. (5.32) wiedergegeben.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ie} = & -\frac{1}{8} C_u^2 \left\{ (32v^2 - 56v + 26) r^2 \delta_{ie} (2 \ln \frac{r}{c} - 1) \right. \\ & \left. + (32v^2 - 24) r_i r_e \ln \frac{r}{c} + (-16v^2 + 20v - 5) (r^2 \delta_{ie} + 2 r_i r_e) \right\} \end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{ie} = & \frac{1}{2} C_u^2 \mu \left\{ r_i n_e \left( (-32v^2 + 32v - 12) \ln \frac{r}{c} + 16v^2 - 12v - 5 \right) + \right. \\ & \left. (r_e n_i + \delta_{ie} r_j n_j) \left( (32v^2 - 48v + 20) \ln \frac{r}{c} - 16v^2 + 20v - 5 + \frac{r_i r_e}{r^2} r_j n_j (16v - 12) \right) \right\} \end{aligned}$$

Zur Unterscheidung gegenüber dem N-Ansatz wird die hier erstmals beschriebene alternative Vorgehensweise zur Aufstellung einer REM-Massenmatrix in dieser Arbeit als A-Ansatz bezeichnet.

### 5.2.3. Konsistenter Ansatz

Das Nardini-Verfahren benötigt Gebiets-Ansätze zur Darstellung der Beschleunigungen infolge von Massenträgheit. Somit ist die Qualität der Ergebnisse in starkem Maße davon abhängig, inwieweit sich auch komplizierte Verformungszustände mit den gewählten Ansatzfunktionen darstellen lassen. Bei der Finite-Element-Methode werden Massenmatrizen im allgemeinen über konsistente Verformungsansätze hergeleitet, d.h. den Beschleunigungen liegen dieselben Gebiets-Ansätze zugrunde wie den Verschiebungen. Diese Vorgehensweise wird hier näherungsweise auf die REM übertragen.

Betrachtet wird zunächst wieder das dynamische Integral aus Gl (5.11)

$$I_{\text{dyn}} = -\rho \int_{\Omega} U_{k1}^*(A, X) \ddot{u}_1(X) d\Omega \quad (5.33)$$

Im Gegensatz zum Nardini-Verfahren wird an dieser Stelle keine Gebiets-Ansatzfunktion für die Beschleunigungen  $\ddot{u}$  eingeführt. Die Umformung des Gebietsintegrals erfolgt stattdessen über eine Integration der Fundamentallösung, die hier analog Kap. 5.2.2 als Ableitung einer Pseudo-Spannungsfunktion  $\tilde{\sigma}$  dargestellt wird.

$$U_{k1}^* = \tilde{\sigma}_{k1j,j}$$

Zweimalige partielle Integration der Fundamentallösung führt dann auf

$$\begin{aligned} I_{\text{dyn}} &= -\rho \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{k1j,j}(A, X) \ddot{u}_1(X) d\Omega \quad (5.34) \\ &= -\rho \left\{ \int_{\Gamma} \left( \tilde{p}_{k1}(A, X) \ddot{u}_1(X) - \tilde{u}_{k1}(A, X) \ddot{p}_1(X) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \tilde{u}_{k1}(A, X) \ddot{\sigma}_{1j,j}(X) d\Omega \right\} \end{aligned}$$

Der Verlauf der Beschleunigungen soll nun mit dem eines statischen Verschiebungsfeldes übereinstimmen. Er muß also die zweite Ableitung von Gl. (4.1) nach der Zeit erfüllen:

$$\ddot{\sigma}_{1j,j}(X) = 0 \quad (5.35)$$

Einsetzen dieser Beziehung in die zweite Zeitableitung von Gl. (5.1) führt dann auf

$$\ddot{\sigma}_{1j,j}(X) - \rho \ddot{u}_1(X) = -\rho \ddot{u}_1(X) = 0 \quad (5.36)$$

Diese Vorgehensweise entspricht also einer Vernachlässigung der vierten Zeitableitung der Verschiebungen beim Ansatz für die Massenmatrix. Durch Einsetzen von Gl. (5.35) in Gl. (5.34) entfällt damit das Gebietsintegral und man erhält den Randintegralausdruck

$$I_{\text{dyn}} = -\rho \int_{\Gamma} \left( \tilde{p}_{k1}(A, X) \ddot{u}_1(X) - \tilde{u}_{k1}(A, X) \ddot{p}_1(X) \right) d\Gamma \quad (5.37)$$

Die Randverläufe werden wieder mit den aus Kap. 4 bekannten Ansatzfunktionen  $\Phi$  dargestellt. Unter Verwendung der Abkürzungen  $\hat{P}$  und  $\hat{U}$  für die so entstandenen Randintegralausdrücke kann man jetzt schreiben

$$I_{\text{stat}} + I_{\text{dyn}} = G_{ki}(A, K) p_i(K) - H_{ki}(A, K) u_i(K) \quad (5.38)$$

$$+ \rho \hat{U}_{ki}(A, K) \ddot{p}_i(K) - \rho \hat{P}_{ki}(A, K) \ddot{u}_i(K) = 0$$

$$\text{mit } \hat{P}_{ki}(A, K) = \int_{\Gamma} \tilde{p}_{ki}(A, X) \Phi(X, K) d\Gamma$$

$$\hat{U}_{ki}(A, K) = \int_{\Gamma} \tilde{u}_{ki}(A, X) \Phi(X, K) d\Gamma$$

Die Zusammenfassung aller Elemente in gleichnamigen Matrizen führt nun auf die vereinfachte Darstellung der Gleichung in Matrixschreibweise

$$\mathbf{G} \mathbf{p} - \mathbf{H} \mathbf{u} = \rho \left( \hat{\mathbf{P}} \ddot{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{U}} \ddot{\mathbf{p}} \right) \quad (5.39)$$

Da der Beschleunigungsverlauf die Form eines statischen Verschiebungsfeldes haben soll, muß er auch der zweiten Zeitableitung von Gl. (4.29) genügen. Es gilt daher

$$\mathbf{G} \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{H} \ddot{\mathbf{u}} \quad (5.40)$$

Linksmultiplikation mit  $\mathbf{G}^{-1}$  und Einsetzen in Gl. (5.39) führt dann auf die Systemgleichung

$$\mathbf{G} \mathbf{p} - \mathbf{H} \mathbf{u} = \rho \left( \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{U}} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \right) \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \quad (5.41)$$

mit der Massenmatrix

$$\mathbf{M} = \rho \left( \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{U}} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \right) \quad (5.42)$$

Der Vorteil der in diesem Kapitel beschriebenen Vorgehensweise liegt einerseits in der Möglichkeit der gleichzeitigen Berechnung der Matrizen  $\hat{\mathbf{P}}$  und  $\hat{\mathbf{U}}$  mit den Matrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$ . Der zusätzliche Programmieraufwand für die Aufstellung der dynamischen Matrizen ist dadurch sehr gering. Andererseits werden Starrkörperbeschleunigungen, also auch die Lastfälle Eigengewicht und Fliehkraft infolge Rotation (Kap. 5.3), mathematisch exakt wiedergegeben, da hier keine höheren als die zweite Zeitableitung auftreten und Gl. (5.35) damit exakt erfüllt wird.

Diese Vorgehensweise wird hier als C-Ansatz bezeichnet.

### 5.2.4 Erweiterung mit Innenknoten

Höhere Eigenformen lassen sich meist nur unzureichend über die Verformungszustände aus statischen Belastungen darstellen. Um eine bessere Übereinstimmung insbesondere im Innern des untersuchten Gebietes  $\Omega$  zu erzielen, können zusätzliche Innenknoten eingeführt werden.

Das Aufbringen der Fundamentallösung in diesen Knoten führt dann zunächst auf eine Erweiterung des statischen Gleichungssystems um die Anzahl der zusätzlichen Freiheitsgrade, wie es in Gl.(5.43) dargestellt ist. Dabei sind die Matrizen und Vektoren entsprechend ihren Zugehörigkeiten zu Außenrand-Knoten (A) und Innenknoten (I) aufgeteilt worden.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{G}(A,A) & \mathbf{G}(A,I) \\ \mathbf{G}(I,A) & \mathbf{G}(I,I) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{p}(A) \\ \mathbf{p}(I) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{H}(A,A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}(I,A) & \mathbf{I} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u}(A) \\ \mathbf{u}(I) \end{vmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.43)$$

Da die Innenknoten nicht auf einem Rand liegen, sind die zugehörigen Elemente der Submatrix  $\mathbf{H}(A,I)$  allesamt gleich null. Aus dem gleichen Grund können in diesen Knoten keine Randspannungen im eigentlichen Sinne, sondern stattdessen nur Einzelkräfte bzw. Knotenersatzkräfte angreifen.

Die Elemente der Matrix  $\mathbf{G}(A,I)$  ergeben sich für Einzelkräfte durch direktes Einsetzen der Knotenabstände in die Fundamentallösung:

$$G_{k_i}(A,I) = \int_{\Omega} U_{k_i}^*(A,X) \Delta_{ij}(X,I) d\Omega p_j(I) = U_{k_i}^*(A,I) p_i(I) \quad (5.44)$$

Für die Aufstellung der Matrix  $\mathbf{G}(I,I)$  muß man sich eines Ersatzmodells bedienen, da eine sinnvolle Berechnung ihrer Diagonal-Elemente wegen der Singularität der Fundamentallösung  $U_{k_i}^*$  für  $r \rightarrow 0$  nicht möglich ist. Aus diesem Grund werden die Einzellasten  $p(I)$  hier durch äquivalente, konstante Ersatzlasten  $\tilde{p}(I)$  angenähert, die flächenhaft über ein kreisförmiges Gebiet mit dem Radius  $r_0$  aufgebracht werden (Abb. 5.1).

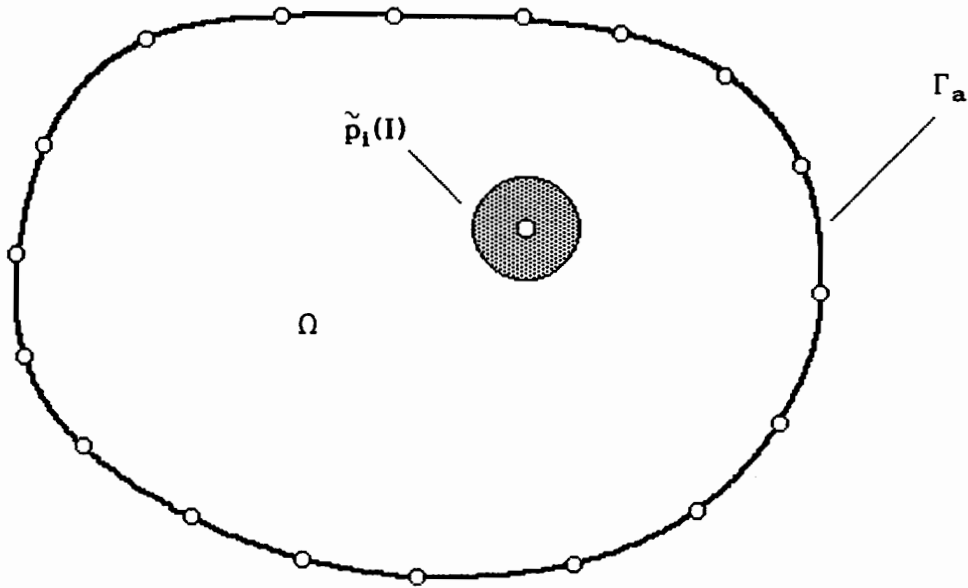


Abb. 5.1: Innenknoten (I) mit flächenhaft verteilter Ersatzlast  $\tilde{p}_1(I)$

Mit diesem Ansatz ergeben sich die Diagonalelemente von  $G(I,I)$  dann zu

$$\begin{aligned} G_{11}(I,I) &= C_u \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{ (4\nu-3) \ln \frac{r}{c} + \cos^2 \varphi \right\} r \, dr \, d\varphi \frac{1}{\pi r_0^2} \\ &= C_u \left\{ (4\nu-3) \ln \frac{r_0}{c} - (2\nu-1) \right\} \end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned} G_{22}(I,I) &= C_u \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left\{ (4\nu-3) \ln \frac{r}{c} + \sin^2 \varphi \right\} r \, dr \, d\varphi \frac{1}{\pi r_0^2} \\ &= C_u \left\{ (4\nu-3) \ln \frac{r_0}{c} - (2\nu-1) \right\} \end{aligned}$$

$$G_{12}(I,I) = G_{21}(I,I) = C_u \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sin \varphi \cos \varphi \, r \, dr \, d\varphi \frac{1}{\pi r_0^2} = 0$$

Der Radius  $r_0$  kann dabei so gewählt werden, daß die Berechnung der Elemente grundsätzlich entfallen kann. Mit

$$(4\nu-3) \ln \frac{r_0}{c} = (2\nu-1) \quad \text{bzw.} \quad \ln r_0 = \frac{2\nu-1}{4\nu-3} \ln c \tag{5.46}$$

folgt



$$G_{11} = G_{22} = 0 \quad (5.47)$$

Das Gleichungssystem vereinfacht damit sich zu

$$\begin{vmatrix} \mathbf{G}(A,A) & \mathbf{G}(A,I) \\ \mathbf{G}(I,A) & \mathbf{0} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{p}(A) \\ \mathbf{p}(I) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{H}(A,A) & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}(I,A) & \mathbf{I} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u}(A) \\ \mathbf{u}(I) \end{vmatrix} = \mathbf{0} \quad (5.48)$$

Die so erhaltene Matrix  $\mathbf{G}$  ist im allgemeinen nicht-singulär, so daß ihre Inversion genauso möglich ist wie die der Ursprungsmatrix  $\mathbf{G}(A,A)$ . Für die Aufstellung der Massenmatrizen werden die Aufpunkte der Ansatzfunktionen nun ebenfalls zusätzlich in die Innenknoten gelegt, so daß sich auch die Matrizen  $\hat{\mathbf{U}}$  und  $\hat{\mathbf{P}}$  entsprechend vergrößern. Die weitere Vorgehensweise stimmt dann wieder mit der bisher beschriebenen überein.

### 5.3 Volumenkräfte

Die statische Gleichgewichtsbeziehung im Punkt  $X$  unter Berücksichtigung der Volumenkräfte lautet

$$\sigma_{ij,j}(X) + b_i(X) = 0 \quad (5.49)$$

Die Anwendung der Methode der gewichteten Residuen mit der Fundamentallösung als Wichtungsfunktion auf diese Beziehung führt auf

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \int_{\Omega} \mathbf{U}_{ki}^*(A,X) \sigma_{ij,j}(X) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{U}_{ki}^*(A,X) b_i(X) d\Omega \\ &= \mathbf{G}_{ki}(A,K) \mathbf{p}_i(K) - \mathbf{H}_{ki}(A,K) \mathbf{u}_i(K) + \mathbf{B}_i(K) = 0 \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\text{mit } \mathbf{B}_i(A) = \int_{\Omega} \mathbf{U}_{ki}^*(A,X) b_i(X) d\Omega$$

In Matrixschreibweise lautet diese Beziehung dann

$$\mathbf{G} \mathbf{p} - \mathbf{H} \mathbf{u} + \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (5.51)$$

Die Berechnung des in  $\mathbf{B}_i(A)$  enthaltenen Gebietsintegrals kann grundsätzlich mittels einer numerischen Gebietsintegration, also zum Beispiel der zweidimensionalen Gauß-Quadratur, erfolgen. Näheres hierzu findet sich in der Literatur [17].

In den Fällen konstanter Beschleunigung oder Rotation läßt sich das Integral jedoch auch problemlos in ein Randintegral überführen. Die Fundamentallösung wird hier wieder wie beim C-Ansatz über eine Pseudo-Spannungsfunktion dargestellt.

$$U_{ki}^* = \tilde{\sigma}_{kij,j} \quad (5.52)$$

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes kann das Gebietsintegral dann für den Fall konstanter Beschleunigung

$$b_i(X) = 1(X) \rho \ddot{u}_i = \text{const.} \quad (5.53)$$

direkt in ein Randintegral überführt werden

$$\begin{aligned} B_i(A) &= \rho \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{kij,j}(A,X) 1(X) d\Omega \ddot{u}_i \\ &= \rho \int_{\Gamma} \tilde{p}_{ki}(A,X) 1(X) d\Gamma \ddot{u}_i \end{aligned} \quad (5.54)$$

Die Berechnung der Volumenkräfte infolge Gravitation respektive Rotation ist auch über die Massenmatrix möglich. Der Volumenkraftvektor ergibt sich in diesem Fall zu

$$B = M \ddot{u} \quad (5.55)$$

Nur bei Verwendung des konsistenten Ansatzes ist der so erhaltene Lastvektor **B** mit dem aus Gl. (5.54) identisch.

#### 5.4 Kombination mit der Methode der Finiten Elemente

Die Systemgleichung der FEM hat allgemein die in Gleichung (5.56) dargestellte Form.

$$M_F \ddot{u} + K_F u = f \quad (5.56)$$

mit	$M_F$	FEM-Massenmatrix
	$K_F$	FEM-Stifigkeitsmatrix
	$u$	Knoten-Verschiebungen
	$f$	Knoten-Ersatzkräfte

Die REM mit konstanter Massenmatrix liefert dagegen eine Systemgleichung der Form

$$\mathbf{G} \mathbf{p} = \mathbf{H} \mathbf{u} + \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \quad (5.57)$$

mit	$\mathbf{G}, \mathbf{H}$	REM-Systemmatrizen
	$\mathbf{M}$	REM-Massenmatrix
	$\mathbf{u}$	Knoten-Verschiebungen
	$\mathbf{p}$	Knoten-Randspannungen

Um die beiden Methoden miteinander kombinieren zu können, muß zunächst der Zusammenhang zwischen den Randspannungen und den hierzu äquivalenten Knoten-Ersatzkräften hergestellt werden. Aus der Bedingung, daß die virtuelle äußere Arbeit der Ersatzkräfte mit derjenigen der Randspannungen identisch ist, erhält man die Beziehung

$$\delta A^a = \delta u_1(K) f_1(K) \stackrel{!}{=} \int_{\Gamma} \delta u_1(X) p_1(X) d\Gamma \quad (5.58)$$

Mit den Ansatzfunktionen für  $u$  und  $p$

$$\begin{aligned} u_1(X) &= \Phi^u(X, K) u_1(K) \\ p_1(X) &= \Phi^p(X, K) p_1(K) \end{aligned} \quad (5.59)$$

geht diese Gleichung über in

$$\begin{aligned} \delta u_1(K) f_1(K) &= \delta u_1(K) \int_{\Gamma} \Phi^{uT}(K, X) \Phi^p(X, L) d\Gamma p_1(L) \\ &= \delta u_1(K) T(K, L) p_1(L) \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\text{mit } T(K, L) = \int_{\Gamma} \Phi^{uT}(K, X) \Phi^p(X, L) d\Gamma$$

Der gesuchte Zusammenhang läßt sich also für beliebiges  $\delta u$  darstellen als

$$f_1(K) = T(K, L) p_1(L) \quad (5.61a)$$

In Matrixschreibweise erhält man

$$\mathbf{f} = \mathbf{T} \mathbf{p} \quad (5.61b)$$

Der Übergang der REM zu der gewünschten Darstellungsweise geschieht nun durch Linksmultiplikation von Gleichung (5.57) mit  $T G^{-1}$ . Man erhält

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{T} \mathbf{p} = \mathbf{T} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{u} + \mathbf{T} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{K}' \mathbf{u} + \mathbf{M}' \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\text{mit } \mathbf{K}' = \mathbf{T} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}$$

$$\mathbf{M}' = \mathbf{T} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{M}$$

Die so berechneten REM-Steifigkeits- und -Massenmatrizen sind im allgemeinen im Gegensatz zu den FEM-Matrizen voll besetzt und nicht-symmetrisch. Eine Bandstruktur der Matrizen läßt sich hier nur durch Anwendung der Substruktur-Technik (Kap. 4.9) erzielen. Weiterhin besteht die Möglichkeit, die Matrizen zwangsweise zu symmetrisieren [17,38]. Dazu kann eine Fehlerfunktion  $f_{ij}$  als Abweichung zwischen den Koeffizienten der unsymmetrischen Matrix  $\mathbf{K}'$  und der gesuchten symmetrischen Matrix  $\mathbf{K}''$  definiert werden:

$$f_{ij} = \frac{1}{2} \left( (k_{ij} - k'_{ji}) + (k_{ji} - k'_{ij}) \right) \quad (5.63)$$

Die Anwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate auf diese Funktion  $f_{ij}$  führt schließlich auf eine Gleichung zur Berechnung von  $\mathbf{K}''$ , die sich analog auch zur Berechnung einer symmetrischen Massenmatrix  $\mathbf{M}''$  einsetzen läßt.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'' &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{K}' + \mathbf{K}'^T \right) \\ \mathbf{M}'' &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{M}' + \mathbf{M}'^T \right) \end{aligned} \quad (5.64)$$

Die Vorteile dieser neuen Matrizen liegen neben der Kombinationsmöglichkeit mit Standard-Finite-Element-Programmen allgemein in einem geringeren Speicherplatzbedarf und der Anwendungsmöglichkeit spezieller, rationeller Programmbausteine für symmetrische Matrizen. Andererseits tritt durch diesen Übergang auf eine symmetrische Form aber auch ein wesentlicher Nachteil auf. So wird die Bedingung, daß Starrkörperverschiebungen keine Kraftreaktionen hervorrufen dürfen, von der neuen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}''$  im Gegensatz zu  $\mathbf{K}'$  nicht mehr zwangsläufig erfüllt. Die willkürliche Zwangssymmetrisierung verursacht daher in vielen Fällen eine Verschlechterung der Rechenergebnisse.

## **6. Berechnungen im Frequenzbereich und Modalanalyse**

Die in Kap. 5 vorgestellten, frequenzabhängigen Formulierungen werden einander in Beispielen gegenübergestellt, um Aussagen über ihre Genauigkeit und ihr Lösungsverhalten treffen zu können.

### **6.1. Frequenzabhängige Matrizen**

Die Randelement-Formulierung mit frequenzabhängiger Fundamentallösung liefert allgemein das bereits in Gl. (5.9) wiedergegebene Gleichungssystem

$$\mathbf{G}(\omega) \mathbf{p}(\omega) - \mathbf{H}(\omega) \mathbf{u}(\omega) + \mathbf{b}(\omega) = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

Zur Unterscheidung gegenüber den Näherungsansätzen wird diese Vorgehensweise hier als F-Ansatz bezeichnet.

#### **6.1.1. Systemantwort auf harmonische Erregung**

Die Systemgleichung der frequenzabhängigen Randelement-Formulierung läßt sich unter Berücksichtigung der vorgegebenen Randbedingungen analog Gl. (4.21) umstellen zu

$$\mathbf{A}(\omega) \mathbf{x}(\omega) = \mathbf{r}(\omega) \quad (6.2)$$

Auflösen dieses Gleichungssystems nach den Unbekannten  $\mathbf{x}(\omega)$  liefert die Systemantwort auf eine harmonische Erregung mit der Frequenz  $\omega$ .

#### **6.1.2. Berechnung von Eigenfrequenzen**

Eigenfrequenzen sind die charakteristischen Frequenzen, in denen ein mechanisches System ohne äußere Erregungen schwingen kann. Eine kontinuierliche Anregung des Systems in einer solchen Eigenfrequenz führt theoretisch zu unendlich großen Schwingungsamplituden. Eine Anregung in der unmittelbaren Nähe einer Eigenfrequenz verursacht endliche Auslenkungen, die wesentlich größer sein können als die des gleichen Systems unter äquivalenter statischer Belastung.

Die Ermittlung der Eigenfrequenzen kann daher einerseits dadurch erfolgen, daß man das Gleichungssystem (6.2) für verschiedene Erregerfrequenzen aufstellt und die jeweilige Systemantwort mit der statischen Lösung vergleicht. Andererseits ist es möglich, die Eigenschaften des Systems ohne äußere Erregung näher zu betrachten. Durch Weglassen der rechten Seite wird die Schwingungsgleichung (6.2) in ein Eigenwertproblem überführt

$$\mathbf{A}(\omega) \mathbf{x}(\omega) = \mathbf{0} \quad (6.3)$$

Diese Gleichung wird nur dann erfüllt, wenn die Determinante der Matrix  $\mathbf{A}$  zu null wird

$$\det \mathbf{A}(\omega) = 0 \quad (6.4)$$

Da die Matrix  $\mathbf{A}$  nicht linear von  $\omega$  abhängig ist, besteht jedoch nicht die Möglichkeit zur Anwendung eines Standard-Eigenwertlösers. Vielmehr wird es erforderlich, die Matrix für verschiedene  $\omega$  immer wieder neu aufzustellen und für jede der so erhaltenen Matrizen die Determinante neu zu berechnen.

Diese einander ähnlichen, iterativen Vorgehensweisen bringen, wie man leicht erkennt, einen erheblichen Rechenaufwand mit sich. Wenn z.B. für die Eingrenzung einer einzigen Eigenfrequenz lediglich zehn Rechengänge notwendig wären, so bedeutete dies, daß die Berechnung der ersten 20 Eigenfrequenzen bereits das Aufstellen und das Lösen von 200 komplexen Gleichungssystemen erfordern würde. Darüberhinaus besteht keine Gewähr, daß sich höhere Eigenfrequenzen mit der hier beschriebenen Methode überhaupt auffinden lassen.

## 6.2. Konstante Matrizen

### 6.2.1. Reduktion des Gleichungssystems

Das Gleichungssystem der REM mit konstanter Massenmatrix hat, wie in den vorstehenden Kapiteln hergeleitet, allgemein die Form

$$\mathbf{G} \mathbf{p} - \mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{b} \quad (6.5a)$$

Unterteilung der Systemmatrizen entsprechend ihren Randbedingungen führt auf die Darstellungsweise

$$\begin{vmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \bar{\mathbf{p}}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{vmatrix} \quad (6.5b)$$

Auf  $\Gamma_1$  sind wieder die Randverschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}_1$  vorgeschrieben, auf  $\Gamma_2$  die Randspannungen  $\bar{\mathbf{p}}_2$ . Die Anzahl der dynamischen Freiheitsgrade entspricht nun wie bei der FEM der Größe des Vektors  $\mathbf{u}_2$ , die dynamische Berechnung erfolgt daher auch nur innerhalb dieser Verschiebungsfreiheitsgrade. Das Gleichungssystem muß also dementsprechend reduziert werden. Dazu wird zunächst der obere Teil nach  $\mathbf{p}_1$  aufgelöst:

$$\mathbf{p}_1 = (\mathbf{G}_{11})^{-1} \left\{ -\mathbf{G}_{12} \bar{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{H}_{11} \bar{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{H}_{12} \mathbf{u}_2 + \mathbf{M}_{11} \bar{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{M}_{12} \mathbf{u}_2 - \mathbf{b}_1 \right\} \quad (6.6a)$$

Einsetzen in den unteren Teil liefert dann

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{21} (\mathbf{G}_{11})^{-1} \left\{ -\mathbf{G}_{12} \bar{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{H}_{11} \bar{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{H}_{12} \mathbf{u}_2 + \mathbf{M}_{11} \bar{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{M}_{12} \mathbf{u}_2 - \mathbf{b}_1 \right\} \\ + \mathbf{G}_{22} \bar{\mathbf{p}}_2 - \mathbf{H}_{21} \bar{\mathbf{u}}_1 - \mathbf{H}_{22} \mathbf{u}_2 = \mathbf{M}_{21} \bar{\mathbf{u}}_1 + \mathbf{M}_{22} \mathbf{u}_2 - \mathbf{b}_2 \end{aligned} \quad (6.6b)$$

Durch entsprechendes Zusammenfassen erhält man das reduzierte System-Gleichungssystem

$$\tilde{\mathbf{H}}_{22} \mathbf{u}_2 + \tilde{\mathbf{M}}_{22} \dot{\mathbf{u}}_2 = \tilde{\mathbf{G}}_{22} \bar{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{H}}_{21} \bar{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{M}}_{21} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_1 + \tilde{\mathbf{b}}_2 \quad (6.6c)$$

mit den neuen Matrizen und Vektoren

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_{22} &= \mathbf{H}_{22} - \mathbf{G}_{21} (\mathbf{G}_{11})^{-1} \mathbf{H}_{12} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{22} &= \mathbf{M}_{22} - \mathbf{G}_{21} (\mathbf{G}_{11})^{-1} \mathbf{M}_{12} \\ \tilde{\mathbf{G}}_{22} &= \mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{21} (\mathbf{G}_{11})^{-1} \mathbf{G}_{12} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{21} &= \mathbf{H}_{21} - \mathbf{G}_{21} (\mathbf{G}_{11})^{-1} \mathbf{H}_{11} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{21} &= \mathbf{M}_{21} - \mathbf{G}_{21} (\mathbf{G}_{11})^{-1} \mathbf{M}_{11} \\ \tilde{\mathbf{b}}_2 &= \mathbf{b}_2 - \mathbf{G}_{21} (\mathbf{G}_{11})^{-1} \mathbf{b}_1 \end{aligned}$$

Die bekannten Belastungen werden nun nochmals in einem neuen Vektor  $\mathbf{b}_2^*$  zusammengefaßt, so daß sich die Gleichung in weiter verkürzter Form darstellen läßt als

$$\tilde{\mathbf{H}}_{22} \mathbf{u}_2 + \tilde{\mathbf{M}}_{22} \dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{b}_2^* \quad (6.6d)$$

$$\text{mit } \mathbf{b}_2^* = \tilde{\mathbf{G}}_{22} \bar{\mathbf{p}}_2 - \tilde{\mathbf{H}}_{21} \bar{\mathbf{u}}_1 - \tilde{\mathbf{M}}_{21} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_1 + \tilde{\mathbf{b}}_2$$

Die Indizes werden aus Gründen der Übersichtlichkeit in den folgenden Ausführungen weggelassen. Die so vereinfachte Schreibweise der Gleichung stimmt formal mit der der FEM überein

$$\mathbf{H} \mathbf{u} + \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{b} \quad (6.7)$$

Das nun allein in den Verschiebungsfreiheitsgraden  $\mathbf{u}$  vorliegende Gleichungssystem kann wie bei FEM-Systemen einer Eigenfrequenz- bzw. Modalanalyse unterzogen werden. Die Systemantwort wird dabei für eine beliebige Erregerfrequenz  $\Omega$  berechnet. D.h., für den Verschiebungs- und den Belastungsvektor werden hier harmonische Ansätze in Abhängigkeit dieser Frequenz gemacht.

$$\mathbf{b}(t) = \hat{\mathbf{b}} e^{i\Omega t} \quad (6.8a)$$

$$\mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{u}} e^{i\Omega t} \quad (6.8b)$$

Damit lautet das System

$$(\mathbf{H} - \Omega^2 \mathbf{M}) \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{b}} \quad (6.9)$$

### 6.2.2. Berechnung von Eigenfrequenzen

Bei einer Eigenfrequenzanalyse wird das System ohne äußere Belastung untersucht. Weglassen der rechten Seite in Gl. (6.9) führt auf das allgemeine Eigenwertproblem

$$(\mathbf{H} - \omega_1^2 \mathbf{M}) \mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad (6.10)$$

mit  $\omega_1$  : i-te Eigenkreisfrequenz  
 $\mathbf{x}_1$  : i-ter Eigenvektor

Linksmultiplikation mit der Inversen von  $\mathbf{M}$  führt auf das spezielle Problem

$$(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{H} - \omega_1^2 \mathbf{I}) \mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \quad (6.11)$$



Hierbei wird nicht über  $i$  summiert! Die Eigenfrequenzen und -vektoren werden nun durch Anwendung eines geeigneten Eigenwertlösers, wie z.B. von Engeln-Müllges und Reutter [33] angegeben, berechnet. Zu beachten ist dabei, daß alle Matrizen im Gegensatz zu denen der FEM im allgemeinen nicht-symmetrisch und nicht unbedingt positiv definit bzw. positiv semi-definit sind. Es können daher komplexe, physikalisch nicht sinnvolle Eigenfrequenzen auftreten.

### 6.3. Modalanalyse für REM mit konstanten Matrizen

Die Eigenwerte werden nun in der Diagonalmatrix  $\omega^2$ , die Eigenformen spaltenweise in der Rechtsmodalmatrix  $\Phi_R$  zusammengefaßt. Es gilt

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{H} \Phi_R - \Phi_R \omega^2 = \mathbf{0} \quad (6.12)$$

$$\text{mit } \omega^2 = \text{diag} [ \omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2, \dots ]$$

$$\Phi_R = [ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots ]$$

Linksmultiplikation mit der Inversen der Modalmatrix, der Linksmodalmatrix, führt nun auf

$$\Phi_L \mathbf{M}^{-1} \mathbf{H} \Phi_R - \omega^2 = \mathbf{0} \quad (6.13)$$

$$\text{mit } \Phi_L = \Phi_R^{-1}$$

D.h., durch diese Rechts-Links-Multiplikation wird die Matrix  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{H}$  in die Diagonalmatrix der Eigenwerte umgewandelt. Diese Beziehung wird jetzt auf die Schwingungsgleichung (6.7) angewendet. Mit der Substitution

$$\mathbf{u} = \Phi_R \mathbf{q} \quad (6.14)$$

erhält man zunächst

$$\mathbf{H} \Phi_R \mathbf{q} + \mathbf{M} \Phi_R \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b} \quad (6.15)$$

Multiplikation mit  $\Phi_L \mathbf{M}^{-1}$  und Einsetzen der Beziehung (6.13) führt nun zu einer Entkopplung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \Phi_L M^{-1} H \Phi_R q + \ddot{q} &= \Phi_L M^{-1} b \\ &= \omega^2 q + \ddot{q} = \Phi_L M^{-1} b \end{aligned} \quad (6.16)$$

Durch diese Ähnlichkeitstransformation ist das Differential-Gleichungssystem in n unabhängige Differentialgleichungen überführt worden. Ihre Lösungen lassen sich in Matrixschreibweise darstellen als

$$q(t) = \cos(\omega t) q_0 + \sin(\omega t) \omega^{-1} \dot{q}_0 + \int_0^t \sin(\omega(t-\tau)) \omega^{-1} \Phi_L M^{-1} b(\tau) d\tau$$

$$\text{mit } \cos(\omega t) = \text{diag} [ \cos(\omega_1 t), \cos(\omega_2 t), \dots ] \quad (6.17)$$

$$\sin(\omega t) = \text{diag} [ \sin(\omega_1 t), \sin(\omega_2 t), \dots ]$$

$$\omega^{-1} = \text{diag} [ \frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{\omega_2}, \dots ]$$

Rücksubstitution liefert den gesuchten Schwingungsverlauf  $u(t)$

$$\begin{aligned} u(t) &= \Phi_R q(t) = u_a(t) + u_s(t) \\ &= \Phi_R \cos(\omega t) \Phi_L u_0 + \Phi_R \sin(\omega t) \omega^{-1} \Phi_L \dot{u}_0 \\ &\quad + \Phi_R \int_0^t \sin(\omega(t-\tau)) \omega^{-1} \Phi_L M^{-1} b(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\text{mit } u_0 = u(0)$$

$$\dot{u}_0 = v_0 = v(0)$$

Die allgemeine Lösung  $u_a$ , d.h. die Systemantwort infolge von Anfangsverschiebungen  $u_0$  und -geschwindigkeiten  $v_0$ , läßt sich nun für einen beliebigen Zeitpunkt  $t$  direkt berechnen, während die spezielle Lösung  $u_s$  ein zusätzliches Integral beinhaltet.

### 6.3.1 Systemantwort auf harmonische oder konstante Erregung

Einsetzen des harmonischen Ansatzes für die Lastfunktion

$$\mathbf{b}(t) = e^{i\Omega t} \hat{\mathbf{b}} \quad (6.19)$$

in die spezielle Lösung der Schwingungs-Differentialgleichung (6.18) führt auf

$$\mathbf{u}_s = \Phi_R \int_0^t \sin(\omega(t-\tau)) \omega^{-1} \Phi_L e^{i\Omega\tau} d\tau \mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{b}} \quad (6.20)$$

Die Lösung dieses Integrals für beliebiges  $\Omega$  lautet

$$\mathbf{u}_s = \Phi_R \left( \mathbf{I} e^{i\Omega t} - \cos(\omega t) - i\Omega \omega^{-1} \sin(\omega t) \right) \left( \omega^2 - \mathbf{I} \Omega^2 \right)^{-1} \Phi_L \mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{b}} \quad (6.21)$$

Die Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u}$  läßt sich somit für jeden beliebigen Zeitpunkt  $t$  direkt ohne Auswertung des Zeitintegrals berechnen. Einen Sonderfall stellt dabei nur der Fall der Anregung in einer Eigenfrequenz, also  $\Omega = \omega_1$ , dar. Die Inversion der Diagonalmatrix in der zweiten Klammer durch Kehrwertbildung ist hier nicht mehr möglich, so daß für das betreffende Diagonalelement eine Grenzwertbetrachtung durchgeführt werden muß.

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow \omega} \left\{ \frac{e^{i\Omega t} - \cos(\omega t) - i\Omega \omega^{-1} \sin(\omega t)}{\omega^2 - \Omega^2} \right\} \\ = \frac{t \sin(\omega t)}{2\omega} + i \left\{ \frac{\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)}{2\omega^2} \right\} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Im Fall konstanter Belastung für  $t \geq 0$ , also auch im Fall einer sprunghaft auf-gebrachten Last, reduziert sich die spezielle Lösung aus Gl. (6.21) wegen  $\Omega = 0$  auf

$$\mathbf{u}_s = \Phi_R \left( \mathbf{I} - \cos(\omega t) \right) \omega^{-2} \Phi_L \mathbf{M}^{-1} \hat{\mathbf{b}} \quad (6.23)$$

Im Gegensatz zur statischen Berechnung ist die Untersuchung verschieblicher Systeme mit der Modalanalyse problemlos möglich, da letztere keine Inversion der REM-Steifigkeitsmatrix erfordert. Die Systemantwort eines solchen Systems infolge konstanter Erregung ( $\Omega = 0$ ) wird dabei wieder über eine Grenzwertbetrachtung möglich.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \frac{1 - \cos(\omega t)}{\omega^2} \right\} = \frac{t^2}{2} \quad (6.24)$$

Aus Gl. (6.13) folgt auch

$$\omega^{-2} \Phi_L M^{-1} = \Phi_L H^{-1} \quad (6.25)$$

Die spezielle Lösung (6.23) kann daher statt mit der Massenmatrix  $M$  hier auch als Funktion der Steifigkeitsmatrix  $H$  bzw. der statischen Problemlösung  $u_{\text{stat}}$  beschrieben werden.

$$u_s = \Phi_R (I - \cos(\omega t)) \Phi_L H^{-1} \hat{b} = \Phi_R (I - \cos(\omega t)) \Phi_L u_{\text{stat}} \quad (6.26)$$

### 6.3.2. Systemantwort auf schrittweise konstante Erregung

Zur numerischen Berechnung des Integrals der speziellen Lösung wird der betrachtete Zeitbereich in gleichlange Zeitschritte  $\Delta t$  unterteilt. Innerhalb jedes Schrittes wird die Lastfunktion  $b$  durch einen konstanten Wert angenähert.

$$b(t) = \bar{b}_n = \frac{b(t_n) - b(t_n - \Delta t)}{2} \quad \text{für } [t_n - \Delta t \leq t \leq t_n] \quad (6.27)$$

Die spezielle Lösung kann dann durch eine Summe dargestellt werden

$$\begin{aligned} u_s &= \Phi_R \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sin(\omega(t-\tau)) d\tau \omega^{-1} \Phi_L M^{-1} \bar{b}_n \right\} \\ &= \Phi_R \sum_{n=1}^N \left\{ \left[ \cos(\omega(t-\tau)) \right]_{t_{n-1}}^{t_n} \omega^{-2} \Phi_L M^{-1} \bar{b}_n \right\} \\ &= \Phi_R \left\{ \sin(\omega t) \sum_{n=1}^N \left( \sin(\omega t_n) - \sin(\omega t_{n-1}) \right) \omega^{-2} \Phi_L M^{-1} \bar{b}_n \right. \\ &\quad \left. + \cos(\omega t) \sum_{n=1}^N \left( \cos(\omega t_n) - \cos(\omega t_{n-1}) \right) \omega^{-2} \Phi_L M^{-1} \bar{b}_n \right\} \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\text{mit } t_n = n \Delta t$$

$$t_{n-1} = (n-1) \Delta t$$

Grenzwertbildung für Starrkörpermoden ( $\omega = 0$ ) führt hier auf die Summenglieder

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left\{ \left[ \cos(\omega(t-\tau)) \right]_{t_{n-1}}^{t_n} \omega^{-2} \right\} = t \Delta t + \frac{t_{n-1}^2 - t_n^2}{2} \quad (6.29)$$

### 6.3.3. Rechnung mit verminderter Modalordnung

Die Anzahl der berechenbaren Eigenfrequenzen entspricht immer der der dynamischen, also trägheitsbehafteten Freiheitsgrade des zugrundeliegenden Rechenmodells. Dabei zeigen die unteren Eigenfrequenzen und -formen grundsätzlich eine bessere Übereinstimmung mit dem realen Systemverhalten als die höheren, die teilweise erhebliche "Fehler" aufweisen. Bei den hier verwendeten REM-Ansätzen äußert sich dies u.a. im Auftreten komplexer Eigenfrequenzen, die bei mathematisch korrekter Betrachtung zu einem Aufklingen der zugehörigen Moden führen können.

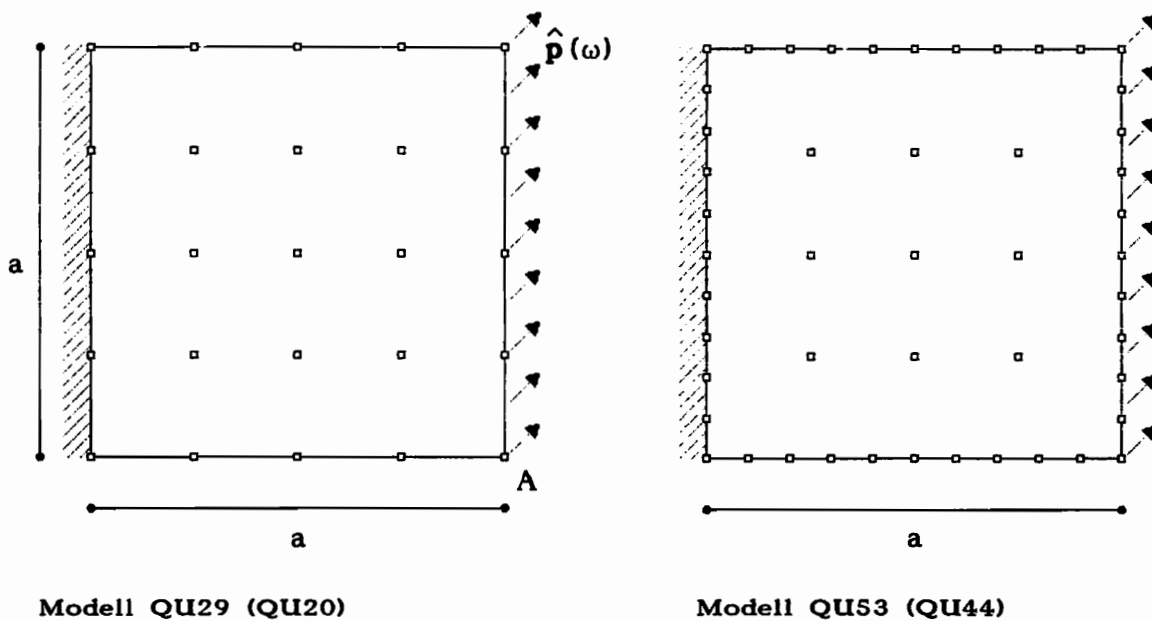
Andererseits besitzen diese höheren Eigenformen meistens ohnehin einen deutlich geringeren Anteil an der Systemantwort als die unteren, so daß es in vielen Fällen sinnvoll und auch ausreichend ist, nur die unteren in die Berechnung eingehen zu lassen. Bei der Modalanalyse geschieht dies nun durch einfaches Weglassen ("Streichen") der entsprechenden Spalten der Rechts-Modalmatrix  $\Phi_R$ , der Zeilen der Links-Modalmatrix  $\Phi_L$  sowie der Zeilen und Spalten der Diagonalmatrizen von  $\omega$ .

## 6.4. Beispiele zur Eigenfrequenzberechnung

### 6.4.1. Quadratische Kragsscheibe

Am Beispiel einer quadratischen Kragsscheibe soll eine Aussage über die Genauigkeit der mit den verschiedenen REM-Formulierungen ermittelten Eigenfrequenzen getroffen werden. Zu diesem Zweck werden zwei verschiedene Rand-Diskretisierungen, teilweise mit zusätzlichen Innenknoten, verwendet (Abb. 6.1):

- QU20 mit 8 Elementen und 20 Randknoten
- QU29 mit 8 Elementen und 20 Rand- und 9 Innenknoten
- QU44 mit 20 Elementen und 44 Randknoten
- QU53 mit 20 Elementen und 44 Rand- und 9 Innenknoten



Systemkennwerte:

$$a = 0,50 \text{ m}$$

$$E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$$

$$\nu = 0,33$$

$$\rho = 7850 \text{ kgm}^{-3}$$

ESZ

Abb.6.1: Rechenmodelle der Quadratscheibe

Der Rand aller Modelle wird mit äquidistanten, geraden 3-Knoten-Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen diskretisiert, wobei in den Eckpunkten jeweils Doppelknoten eingesetzt werden.

Zunächst wird das 20-Knoten-Modell mit der frequenzabhängigen Formulierung untersucht, wobei der rechte Rand des Modells durch eine unter einem Winkel von  $45^\circ$  angreifende, konstante Randspannung  $\hat{p}(\omega)$  belastet wird (Abb. 6.1). Die Berechnung der Horizontalverschiebung  $\text{Re}(\hat{u}_1(\omega))$  im Punkt A für 34 verschiedene Frequenzen  $\omega$  liefert den in Abb. 6.2 dargestellten Frequenzgang, aus dem sich die ersten vier Eigenfrequenzen identifizieren lassen.

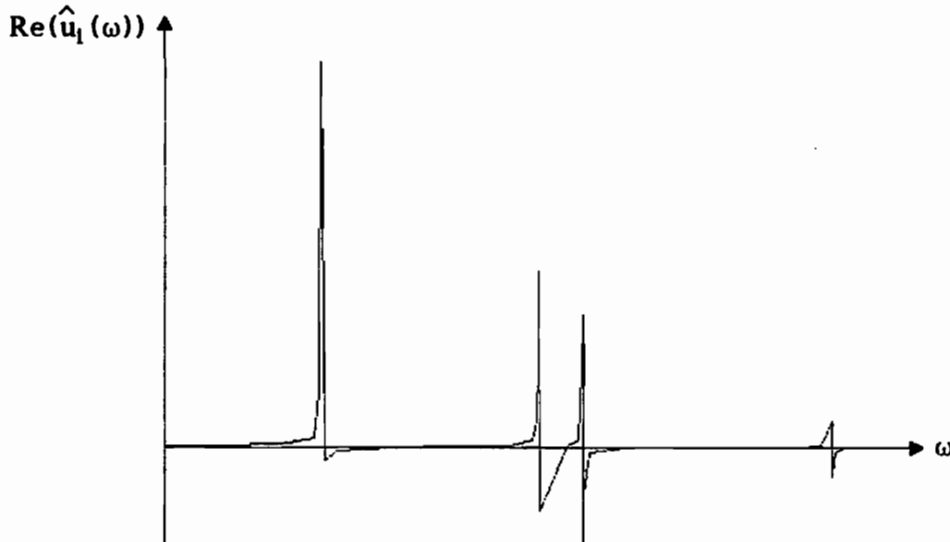


Abb. 6.2: Frequenzgang

Es muß in diesem Zusammenhang nochmals darauf hingewiesen werden, daß die REM bei Verwendung der komplexen, frequenzabhängigen Fundamentallösung mit Ausnahme des Grenzfalles  $\omega = 0$  grundsätzlich eine komplexe Systemantwort liefert. D.h., daß auch rein reelle Belastungen hier komplexe Verschiebungsamplituden hervorrufen. Obwohl es sich um ein ungedämpftes, endliches System handelt, kommt es also zu einer Phasenverschiebung zwischen Erregungs- und Antwortverlauf, deren Ursache letztlich nur in einer ungenauen Wiedergabe des exakten Systemverhaltens durch das Rechenmodell zu vermuten ist.

Die Größe der auftretenden Phasenverschiebungen ist, wie weitere Beispielrechnungen mit der Kragsscheibe gezeigt haben, von der Wahl der Randeinteilung und der betrachteten Frequenz abhängig. Beim 20-Knoten-Modell beträgt sie bei der höchsten hier betrachteten Frequenz  $\omega = 30.000\text{s}^{-1}$  ca.  $2^\circ$ , während sie oberhalb von  $40.000\text{s}^{-1}$  rapide ansteigt. Durch eine Verfeinerung der Randeinteilung, d.h. durch den Übergang vom 20- auf das 44-Knoten-Modell, wird die Phasenverschiebung bei  $\omega = 100.000\text{s}^{-1}$  von ca.  $40^\circ$  auf ca.  $6^\circ$  reduziert.

Aus dieser Beobachtung kann geschlossen werden, daß ein direkter Zusammenhang zwischen der gewählten System-Diskretisierung und der höchsten damit darstellbaren Frequenz besteht. So läßt sich mit einem Randelement mit quadratischem bzw. zwei Elementen mit linearem Ansatz mit Sicherheit keine höhere Rand-Schwingungsform als die einer Sinus-Halbwellen hinreichend genau beschreiben. Kobayashi [18] schreibt in diesem Zusammenhang ebenfalls, daß zur Darstellung der kürzesten auftretenden Wellenlänge mindestens vier Randknoten verwendet werden müssen.

Die kürzesten, vorkommenden Wellen sind die Oberflächen- bzw. Rayleigh-Wellen, die bei berandeten Gebieten zusätzlich zu den Druck- und Scherwellen auftreten. Ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit wird durch die Rayleigh-Gleichung bestimmt [48]:

$$\left(\frac{c_R}{c_2}\right)^6 - 8 \left(\frac{c_R}{c_2}\right)^4 + 8 \frac{2-\nu}{1-\nu} \left(\frac{c_R}{c_2}\right)^2 - \frac{8}{1-\nu} = 0 \quad (6.30)$$

Außerdem gilt:

$$0,87 c_2 \leq c_R \leq 0,96 c_2 \quad (6.31)$$

Die Länge einer Rayleigh-Welle beträgt damit mindestens

$$l_R = c_R T = c_R \frac{2\pi}{\omega} = 0,87 c_2 \frac{2\pi}{\omega} \quad (6.32)$$

Das vorgenannte Kriterium, daß der Abstand  $\Delta l$  zwischen zwei Randknoten maximal ein Viertel der Länge einer Rayleigh-Welle betragen darf, führt dann zu der Abschätzung

$$\Delta l \leq \frac{1}{4} l_R = 0,87 c_2 \frac{\pi}{2\omega} \quad (6.33)$$

bzw.

$$\omega \leq \omega_{\max} = 1,37 \frac{c_2}{\Delta l} \quad (6.34)$$

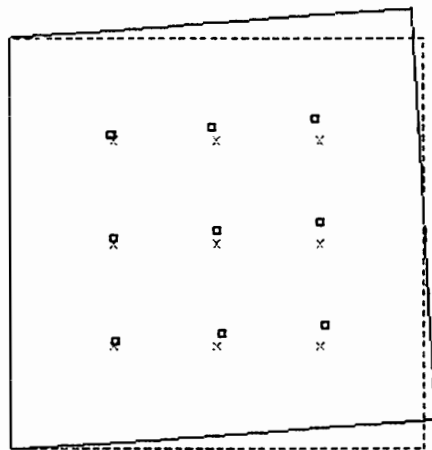
Im vorliegenden Beispiel der Quadratscheibe mit 20 Randknoten beträgt diese Frequenz  $\omega_{\max} = 34.300 \text{ s}^{-1}$ . Dieser Zusammenhang bestätigt die bereits genannte Feststellung, daß hier oberhalb von  $40.000 \text{ s}^{-1}$  deutliche Phasenverschiebungen und damit eine unsaubere Wiedergabe des Systemverhaltens auftreten.



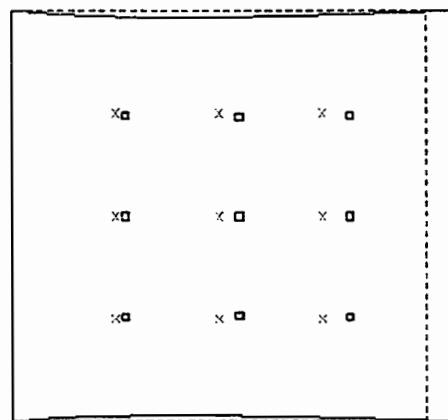
Geschlossene Gebiete wie die betrachtete Kragsscheibe ermöglichen keine Ausstrahlung der Wellen ins Unendliche. Es stellt sich die Frage, ob sich das Systemverhalten geschlossener Gebiete unter Verwendung des Realteils der Fundamentallösung bereits korrekt beschreiben läßt, oder ob der Imaginärteil und damit das Einhalten der Sommerfeldschen Ausstrahlbedingung auch hier berücksichtigt werden muß. Es wird daher zunächst eine rein reelle Vergleichsrechnung am Beispiel des 20-Knoten-Modells durchgeführt. Zur Unterscheidung wird diese Vorgehensweise hier als  $F_r$ -Ansatz bezeichnet.

Die beiden Modelle QU20 und QU44 ohne zusätzliche Innenknoten werden weiterhin mit den drei vorgestellten Ansätzen der REM mit konstanter Massenmatrix untersucht. Dabei zeigt sich, daß die Resultate des A- und des C-Ansatzes für zunehmende Knotenzahl nahezu übereinstimmen (Tab. 6.1). Die Berechnung der Modelle QU29 und QU53 mit Innenknoten erfolgt daraufhin nur noch mit dem N- und dem A-Ansatz, eine Erweiterung des C-Ansatzes für Innenknoten wird nicht durchgeführt.

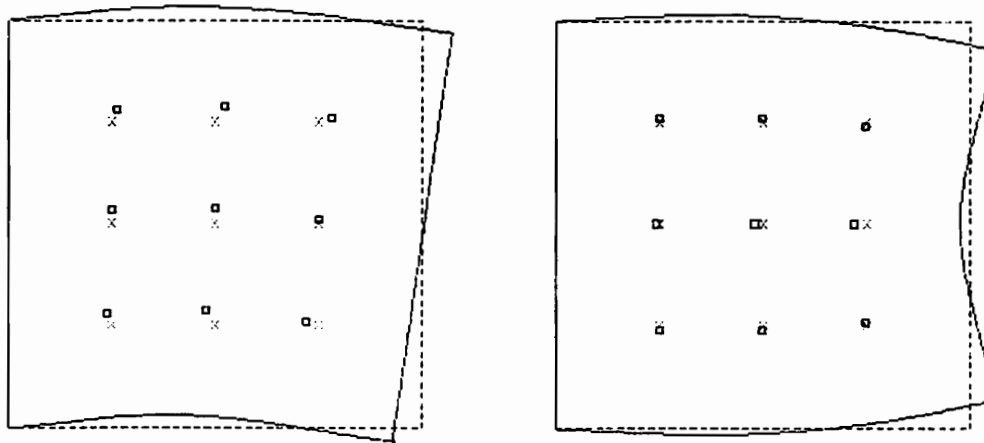
Die dabei mittels eines numerischen Eigenwertlösers für nicht-symmetrische Matrizen berechneten Eigenformen und -frequenzen sind in Abb. 6.3 am Beispiel des Modells QU53 mit A-Ansatz graphisch dargestellt.



1. Eigenform:  $\omega_1 = 6746 \text{ s}^{-1}$



2. Eigenform:  $\omega_2 = 16460 \text{ s}^{-1}$



3. Eigenform:  $\omega_3 = 18380 \text{ s}^{-1}$

4. Eigenform:  $\omega_4 = 29770 \text{ s}^{-1}$

Abb. 6.3: Eigenformen der Klagscheibe

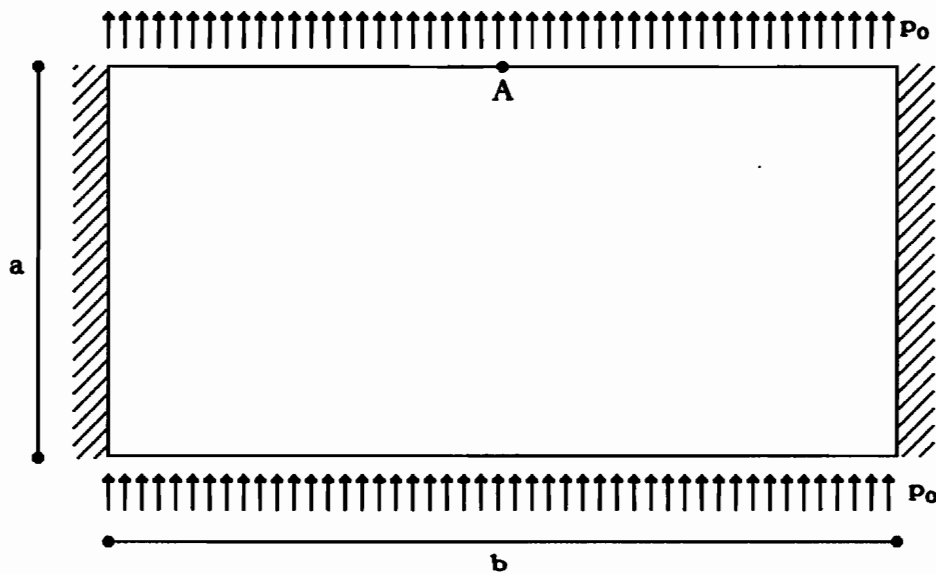
Knoten	Ansatz	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\overline{ \Delta\omega }$	kompl. Eigenfr.	erste n reelle Eigenfr.
20	$F_k$	6800	16270	18160	29020	-	-	-
20	$F_r$	6810	16370	18210	29230	0,4 %	-	-
100	D.u.W.	6768	16210	18010	28330	1,0 %	-	-
20	N	6609	16550	20450	32040	6,9 %	4	13
44	N	6546	16430	20130	31000	5,6 %	20	7
29	N	6758	16310	18290	29510	0,8 %	8	14
53	N	6689	16240	18120	28750	0,7 %	22	8
20	A	6850	17220	19390	31780	5,7 %	0	alle
44	A	6788	17150	19210	30760	4,3 %	0	alle
29	A	6804	16510	18540	30550	2,2 %	6	13
53	A	6746	16460	18380	29770	1,4 %	0	alle
20	C	6850	17200	19310	31090	5,0 %	0	alle
44	C	6788	17150	19210	30750	4,3 %	4	26

Tab. 6.1: Eigenfrequenzen der Klagscheibe

In Tab. 6.1 werden die mit den unterschiedlichen Modellen ermittelten ersten vier Eigenfrequenzen der quadratischen Klagscheibe den Ergebnissen gegenübergestellt, die von Dirr und Waller [30] mittels eines 100-Knoten-Gitterrost-Modells berechnet worden sind. Die mittleren Abweichungen der Eigenfrequenzen werden dabei auf die REM-Lösung mit frequenzabhängigen, komplexen Systemmatrizen ( $F_k$ -Ansatz) bezogen. Desweiteren enthält die Tabelle die Anzahl der auftretenden, unerwünschten komplexen Eigenfrequenzen.

#### 6.4.2. Zweiseitig eingespannte Rechteckscheibe

Dieses Beispiel behandelt die in Abb. 6.4 dargestellte, zweiseitig eingespannte Rechteckscheibe, die auf ihren verschieblichen Rändern durch konstante Randspannungen in positiver  $y$ -Richtung belastet wird.



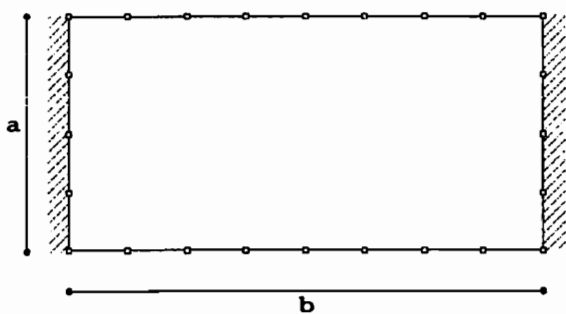
Systemkennwerte:

$a = 0,50 \text{ m}$	$E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^{-2}$	$\nu = 0,33$
$b = 1,00 \text{ m}$	$\rho = 7.850 \text{ kgm}^{-3}$	ESZ

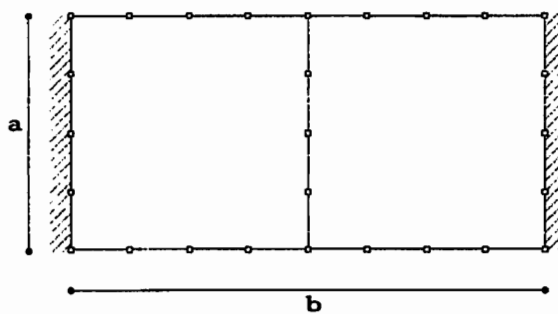
Abb. 6.4: Zweiseitig eingespannte Rechteckscheibe

Die Berechnung erfolgt zunächst wieder mit der frequenzabhängigen Fundamentallösung mit und ohne Imaginärteil. Darüberhinaus wird der Einfluß zusätzlicher Innenknoten auf die Genauigkeit der ermittelten Eigenfrequenzen näher untersucht. Den Rechnungen werden dabei unter ausschließlicher Verwendung des linearen Näherungsansatzes (N) und des Ansatzes mit Fundamentallösung (A) vier verschiedene Diskretisierungen zugrunde gelegt:

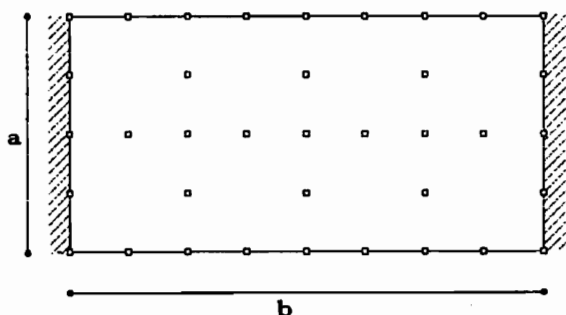
- RZ28 mit 12 Elementen und 28 Randknoten
- RZ41 mit 12 Elementen, 28 Rand- und 13 Innenknoten
- RZ49 mit 12 Elementen, 28 Rand- und 21 Innenknoten
- RZ40 mit 2 Substrukturen, 16 Elementen und 40 Randknoten



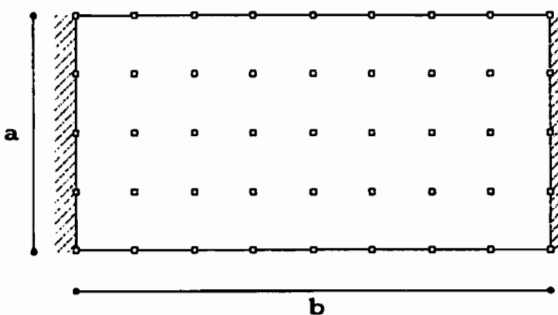
Modell RZ28



Modell RZ40



Modell RZ41

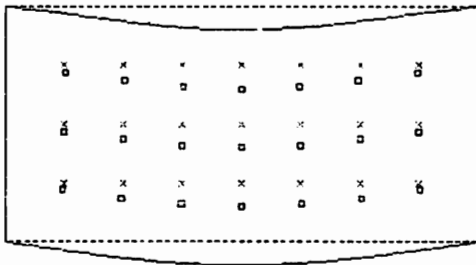


Modell RZ49

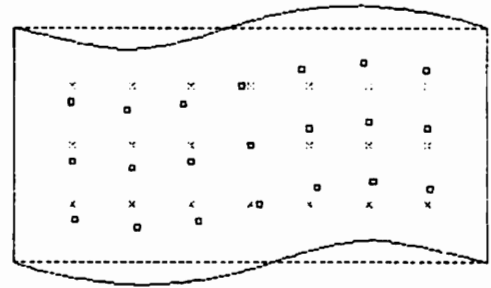
Abb. 6.5: Rechenmodelle der zweiseitig eingespannten Rechteckscheibe

Der Rand aller Modelle wird mit äquidistanten, geraden 3-Knoten-Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen diskretisiert, wobei in den Eckpunkten jeweils wieder Doppelknoten verwendet werden. Das Modell RZ40 besteht aus zwei quadratischen Teilgebieten, die in ihrer Elemententeilung jeweils mit dem Modell QU20 übereinstimmen.

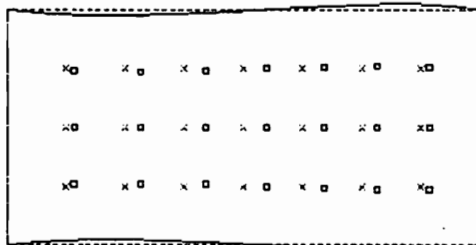
Die ersten vier Eigenfrequenzen und -formen sind am Beispiel des Modells RZ49 in Abb. 6.6 graphisch dargestellt. In Tab. 6.2 sind die Ergebnisse wieder Referenzwerten von Dirr und Waller [30] gegenübergestellt, die diese mittels eines 45-Knoten-Gitterrost-Modells berechnet haben.



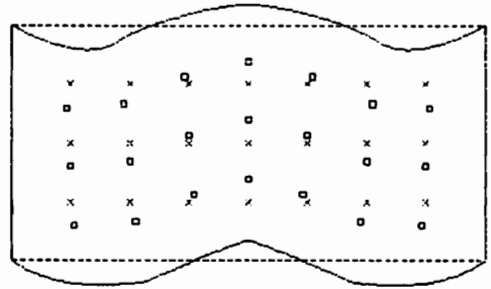
1. Eigenform:  $\omega_1 = 8143 \text{ s}^{-1}$



2. Eigenform:  $\omega_2 = 16115 \text{ s}^{-1}$



3. Eigenform:  $\omega_3 = 16312 \text{ s}^{-1}$



4. Eigenform:  $\omega_4 = 26441 \text{ s}^{-1}$

Abb. 6.6: Eigenformen der zweiseitig eingespannten Rechteckscheibe

Knoten	Ansatz	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$ \Delta\omega $	kompl. Eigenfr.	erste n reelle Eigenfr.
28	$F_k$	8149	16000	16280	26110	-	-	-
28	$F_r$	8155	16030	16300	26180	0,2 %	-	-
45	D.u.W.	8368	16112	16199	25156	1,9 %	-	-
28	N	8357	18331	17152	33419	12,6 %	8	5
40	N	8371	18841	16917	31041	10,8 %	16	5
41	N	8132	16235	16283	27077	1,3 %	10	25
49	N	8143	16115	16312	26441	0,6 %	4	38
28	A	8330	17381	19549	30581	12,0 %	0	alle
40	A	8012	18633	16487	31761	10,3 %	2	20
41	A	8194	16430	16788	27513	2,9 %	2	39
49	A	8175	16291	16519	26981	1,7 %	6	24

**Tab. 6.2: Eigenfrequenzen der zweiseitig eingespannten Scheibe**

Die in Abb. 6.4 dargestellte Randspannung  $p_0$  wird nun zum Zeitpunkt  $t=0$  sprunghaft aufgebracht (Heaviside-Lastfunktion). Zugrunde gelegt wird dabei das Rechenmodell RZ28 mit 28 Randknoten, von denen 14 verschieblich sind.

$$p(t) = \begin{cases} p_0, & \text{für } t \geq 0 \\ 0, & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Der Schwingungsverlauf des Systems infolge dieser Belastung wird mittels der Modalanalyse berechnet. Der Verlauf der vertikalen Verschiebung des Punktes A ist unter Verwendung aller Moden in Abb. 6.7a und für eine reduzierte Modalordnung  $m=7$  in Abb. 6.7b wiedergegeben. Um ein aufklingendes Verhalten der in den höheren Moden auftretenden, komplexen Eigenfrequenzen zu vermeiden und den Rechenaufwand zu reduzieren, werden die Imaginärteile dieser Frequenzen vernachlässigt, d.h. zu null gesetzt. Die Verschiebung infolge einer gleich großen, statischen Belastung ist jeweils gestrichelt eingezeichnet.

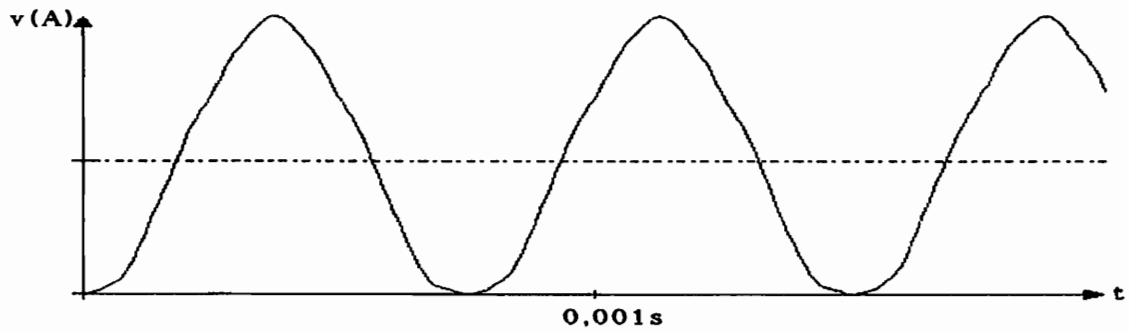


Abb. 6.7a: Verschiebungsverlauf Punkt A, Modalordnung  $m=28$

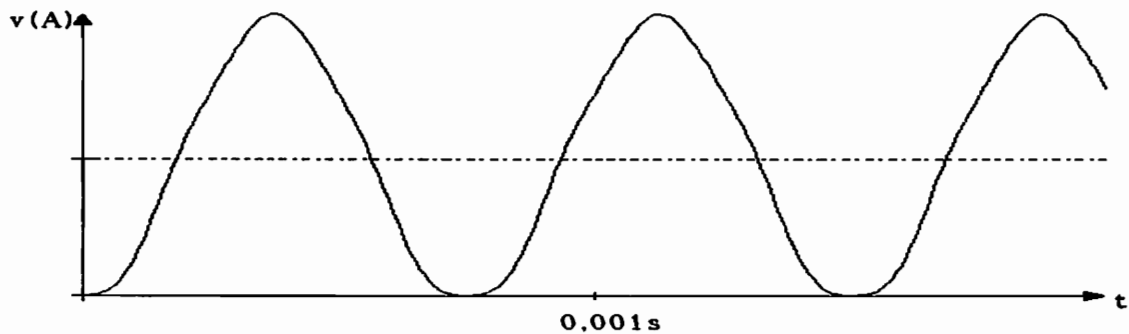
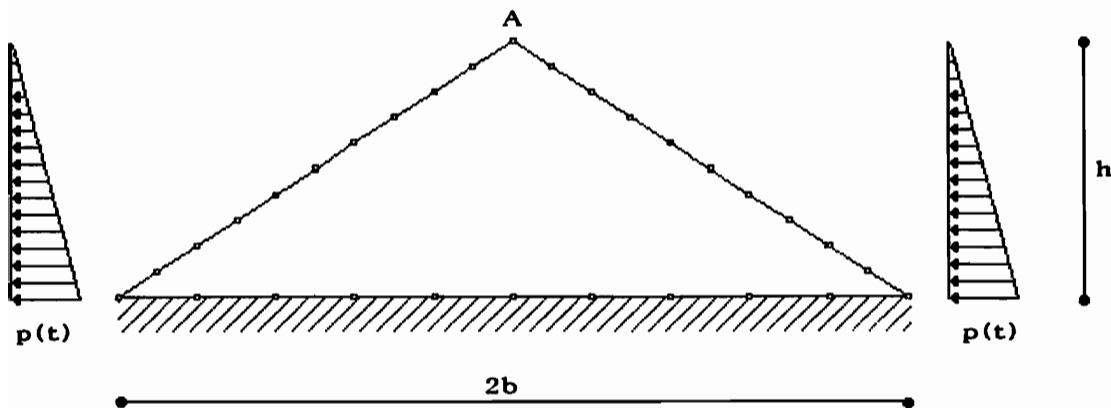


Abb. 6.7b: Verschiebungsverlauf Punkt A, Modalordnung  $m=7$

Der Vergleich der beiden Schwingungsverläufe verdeutlicht, daß das System durch die aufgebrauchte Belastung vorwiegend in seiner ersten Eigenfrequenz ( $\omega_1 = 8357 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_1 = 0,00075 \text{ s}$ ) angeregt wird, so daß hier eine Berücksichtigung der ersten sieben Moden als ausreichend angesehen werden kann.

### 6.4.3. Erddamm

In Abb. 6.8 ist das Rechenmodell eines Erddamms wiedergegeben, der durch mit der Höhe abnehmende, in horizontaler Richtung angreifende Randspannungen belastet wird. Das Rechenmodell besteht aus 15 Elementen mit quadratischem Ansatz und 32 Randknoten.



**Systemkennwerte**

$b = 45$                        $G = 1$                        $\nu = 0,45$   
 $h = 30$                           $\rho = 10^{-6}$                       EVZ

**Abb. 6.8: Erddamm**

Die ersten 15 Eigenfrequenzen des Damms wurden von Clough and Chopra [26] mit einem FEM-Modell aus 100 Dreiecks-Elementen mit 55 Freiheitsgraden berechnet. Eine Vergleichsrechnung mit einem REM-Modell aus 30 konstanten Elementen im Frequenzbereich wurde von Chuang [18,25] durchgeführt.

Frequenz	F <sub>k</sub> -Ans.	Clough	Chuang	N-Ans.	$\Delta(N)$	A-Ans.	$\Delta(A)$
$\omega_1$	77,7	77,1	77,8	79,7	+ 2,6 %	80,9	+ 4,1 %
$\omega_2$	125,0	125,2	125,0	146,9	+17,5 %	132,1	+ 5,7 %
$\omega_3$	144,5	146,0	145,3	{ 200,9 }	+39,0 %	159,3	+10,2 %
$\omega_4$	183,5	193,1	183,7				
$\omega_5$	202,2	201,2	202,3	{ 269,8 }	+33,4 %	224,0	+10,8 %
$\omega_6$	229,5	231,0	224,7				

**Tab. 6.3: Eigenfrequenzen des Damms**



Die ersten sechs Eigenfrequenzen des Damms werden hier sowohl mit der frequenzabhängigen (komplexen) Fundamentallösung iterativ ermittelt als auch aus den Systemgleichungen mit konstanter Massenmatrix nach dem N- und dem A-Ansatz berechnet und den Resultaten von Clough and Chopra und von Chuang gegenübergestellt (Tab. 6.3). Die hier nicht wiedergegebenen Resultate einer zusätzlichen Rechnung mit dem C-Ansatz stimmen annähernd mit denen des A-Ansatzes überein.

Die Ergebnisse von Chuang (BEM) unterscheiden sich im Mittel um nur 0,5%, die der FEM-Analyse um 1,4% von den eigenen Resultaten mit frequenzabhängigem Ansatz, während die Näherungslösungen mit konstanten REM-Systemmatrizen hier Abweichungen von durchschnittlich 9,0% (A-Ansatz), 9,5% (C-Ansatz) bzw. 19,9% (N-Ansatz) liefern.

Die Schwingungsantwort der Dammkrone (Punkt A) des Modells mit A-Ansatz infolge einer harmonischen Erregung

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \sin(\Omega t) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \text{mit } \Omega = 100 \text{ s}^{-1}$$

ist in Abb. 6.9 wiedergegeben. Die Berechnung erfolgt mittels der Modalanalyse mit allen und vergleichsweise mit nur den beiden ersten Moden. Die so erhaltenen Zeitverläufe sind nahezu identisch.

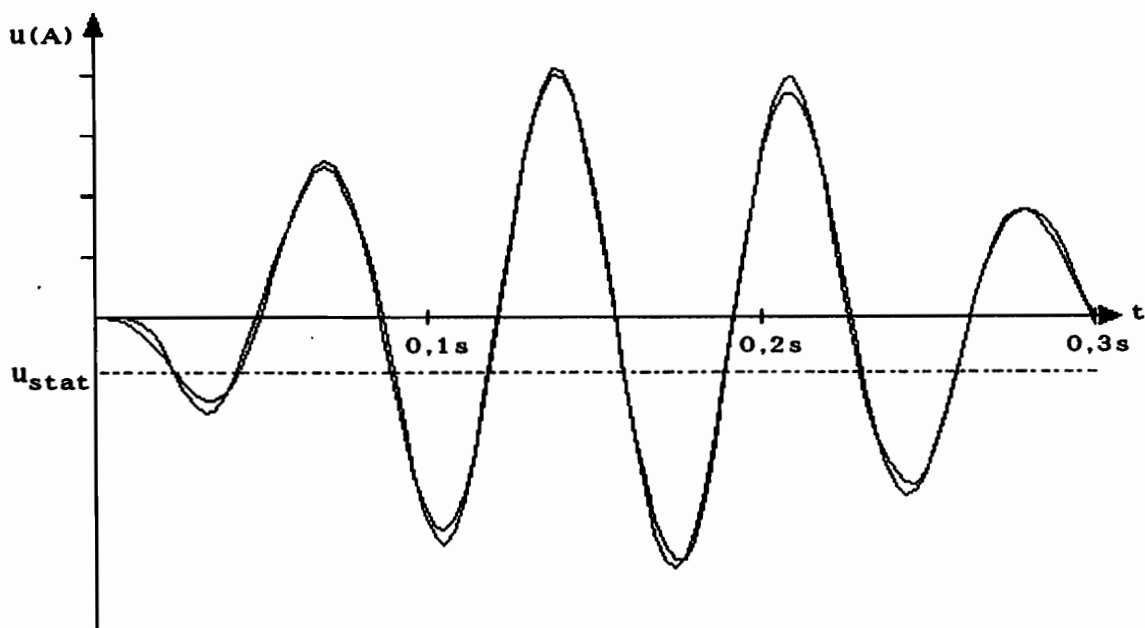


Abb. 6.9: Horizontalschwingungen der Dammkrone

#### 6.4.4. Bewertung

Mit der komplexen, frequenzabhängigen Fundamentallösung läßt sich in allen Beispielen auch mit vergleichsweise groben Randeinteilungen eine sehr gute Übereinstimmung des Systemverhaltens im Bereich der unteren Eigenfrequenzen mit den Vergleichslösungen aus der Literatur erzielen. So weichen z.B. die ersten vier Eigenfrequenzen der REM-Kragscheibe mit 20 Knoten im Mittel nur 1,0% von denen des 100-Knoten-Gitterrost-Modells ab.

Wie die beiden ersten Beispiele zeigen, hat die Berücksichtigung des Imaginärteils der frequenzabhängigen Fundamentallösung allgemein nur untergeordneten Einfluß auf die Schwingungsantwort der betrachteten Systeme. Während der Rechenzeit- und Speicherplatzbedarf durch Vernachlässigung des Imaginärteils etwa halbiert wird, beträgt die damit verbundene mittlere Abweichung der betrachteten Eigenfrequenzen in beiden Fällen weniger als 0,4%.

Die Suche nach den Eigenfrequenzen bleibt jedoch aufwendig, und die Berechnung einer zeitabhängigen Lösung wird grundsätzlich erst durch eine Transformation der Belastung in den Frequenzbereich, komplexe Berechnung im Frequenzbereich und anschließende Rücktransformation in den Zeitbereich möglich.

Einfacher in der Handhabung und weniger rechenzeitintensiv sind im Vergleich dazu die Näherungsverfahren mit konstanten Massenmatrizen, die zur direkten Anwendung von Eigenwertlösern und Zeitintegrationsverfahren geeignet sind. Bei identischer Randeinteilung weichen ihre Ergebnisse jedoch deutlich von denen der frequenzabhängigen Formulierung ab. Weder durch eine Verfeinerung der Randeinteilung noch durch eine Substrukturierung läßt sich hier eine zufriedenstellende Übereinstimmung erzielen.

Eine wesentliche Verbesserung der Ergebnisse wird hier durch die Einführung zusätzlicher Innenknoten erreicht, die wie die Randknoten über dynamische Freiheitsgrade verfügen. In Verbindung mit einer verfeinerten Randeinteilung ließen sich die mittleren Abweichungen der ersten vier Eigenfrequenzen damit in den beiden ersten Beispielen von 5,7 bis 12,6% auf 0,6 bis 1,7% reduzieren. Anders als von Nardini und Brebbia [57-61] angeführt, die die Verwendung zusätzlicher Innenknoten nur zur Approximation höherer Moden für erforderlich halten, wird hierdurch deutlich, daß diese Vorgehensweise für eine hinreichend genaue Wiedergabe aller, also auch der untersten Eigenfrequenzen, offensichtlich unumgänglich ist.

Zusammenfassend kann an dieser Stelle gesagt werden, daß sich mit den Näherungsverfahren durch Einführung zusätzlicher Rand- und Innenknoten annähernd dieselbe Rechengenauigkeit erzielen läßt wie unter Verwendung der "exakten", frequenzabhängigen Fundamentallösung. Trotz der damit verbundenen größeren Eingabe-Datensätze ist der Rechenaufwand jedoch letztlich wesentlich geringer, da die Systemmatrizen bei Verwendung der Näherungsverfahren insgesamt nur ein einziges Mal aufgestellt werden müssen, während das frequenzabhängige Verfahren ihre erneute Aufstellung für jede einzelne betrachtete Frequenz erfordert. Die Entscheidung, welchem Verfahren für die weiteren Berechnungen der Vorzug zu geben ist, wird aus diesen Gründen zugunsten der Näherungsverfahren getroffen.

Ein wesentliches, negatives Qualitätsmerkmal der Näherungslösungen ist das Auftreten komplexer, physikalisch nicht sinnvoller Eigenfrequenzen. In diesem Zusammenhang weisen Nardini und Brebbia darauf hin, daß die berechneten Eigenwerte generell zwar komplex seien, die komplexen Frequenzen aber nur in höheren Moden auftreten würden. Deutliche Gegenbeispiele hierzu sind die Ergebnisse der 53-Knoten-Kragscheibe und des 38-Knoten-Erddamms: Bei Verwendung des Nardini-Ansatzes sind hier bereits die 8. von 88 bzw. die 2. von 38 vorhandenen Eigenfrequenzen komplex, insgesamt treten in jedem der beiden Beispiele 22 komplexe Moden auf.

Als sehr vorteilhaft erweist sich in diesem Zusammenhang der in dieser Arbeit hergeleitete A-Ansatz, der den Einfluß der Massenträgheiten durch Überlagerung statischer Fundamentallösungen annähert. Die so berechneten Systeme weisen in fast allen vorliegenden Beispielen weniger unerwünschte, komplexe Moden auf als bei Verwendung des von Nardini vorgeschlagenen, linearen N-Ansatzes. Darüberhinaus treten diese auch erst im Bereich höherer Frequenzen auf.

Abschließend kann somit festgestellt werden, daß eine Eigenfrequenzanalyse mittels der Randelementmethode mit konstanten Systemmatrizen nicht ganz so problemlos ist, wie sie in den Veröffentlichungen von Nardini und Brebbia dargestellt wird. Der wesentliche Vorteil gegenüber der Finite-Element-Methode, nämlich die ausschließliche Diskretisierung des Randes mit einer entsprechend geringeren Anzahl von Systemfreiheitsgraden, wird durch die hier oftmals erforderliche Einführung zusätzlicher Innenknoten abgeschwächt.

Ein weiterer Vorteil der REM bleibt jedoch auf jeden Fall auch bei dynamischen Berechnungen erhalten: Die Einteilung in Elemente erfolgt nach wie vor nur auf dem Rand, die Platzierung der Innenknoten ist nicht an irgendwelche Elemente im Innern der betrachteten Struktur gebunden und erhöht die Anzahl der benötigten Randelemente somit nicht. Der Eingabe-Datensatz bleibt daher im Vergleich zur FEM sehr übersichtlich und ist innerhalb kürzester Zeit zu erstellen.

Wie das zweite und dritte Beispiel zeigen, läßt sich die Modalanalyse vorteilhaft auch bei REM-Rechenmodellen mit konstanter Massenmatrix einsetzen. So ist es in vielen Fällen, insbesondere bei harmonischen Erregungen, vollkommen ausreichend, nur eine geringe Anzahl von Moden in die Berechnung eingehen zu lassen. Wegen des nicht-symmetrischen Aufbaus der Systemmatrizen werden zwar zusätzliche Rechenschritte notwendig, die prinzipiellen Vorteile dieses Verfahrens bleiben jedoch erhalten.

## 7. Berechnung mit Zeitschrittverfahren

Zur Berechnung des zeitabhängigen Verlaufes der Verschiebungen  $u(t)$  infolge einer bekannten, zeitabhängigen Belastung  $b(t)$  können neben der Modalanalyse numerische Integrationsverfahren benutzt werden. Im Rahmen dieser Arbeit sind dies die drei direkten Integrationsverfahren:

- Newmark-Verfahren,
- Wilson- $\Theta$ -Verfahren,
- Houbolt-Verfahren,

Das dynamische REM-Gleichungssystem wird zur Anwendung dieser Verfahren zunächst ebenfalls in der in Kap. 6.1 dargestellten Weise auf die Anzahl der dynamischen Freiheitsgrade reduziert. Die Ausgangsgleichung für die Integration im Zeitbereich lautet dann in vereinfachter Schreibweise

$$\mathbf{H} \mathbf{u}(t) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{b}(t) \quad (7.1)$$

Bei den direkten Integrationsverfahren wird diese Gleichung nun direkt, d.h. ohne Transformation der Matrizen in eine andere Form, Schritt für Schritt integriert. D.h., aus den bekannten Größen zum Zeitpunkt  $t$  oder zu einem früheren Zeitpunkt werden die Größen zum darauffolgenden Zeitpunkt  $t+\Delta t$  in einem Schritt berechnet. Die entsprechenden Gleichungen findet man bei Bathe und Wilson [8].

### 7.1 Das Newmark-Verfahren

Nach der Wahl eines geeigneten Zeitschrittes  $\Delta t$  wird zunächst die effektive Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{H}}$  gebildet

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} \quad (7.2)$$

Um unbedingte Stabilität zu gewährleisten, muß dabei für die Parameter  $\alpha$  und  $\delta$  folgender Bereich eingehalten werden

$$\begin{aligned} \delta &\geq 0,5 \\ \alpha &\geq 0,25 (0,5 + \delta)^2 \end{aligned}$$

Mit der effektiven Belastung  $\hat{\mathbf{b}}$  um Zeitpunkt  $t+\Delta t$

$$\hat{\mathbf{b}}_{t+\Delta t} = \mathbf{b}_{t+\Delta t} + \mathbf{M} \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{u}_t + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + \left( \frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \mathbf{u}_t \right) \quad (7.3a)$$

ergeben sich die Verschiebungen und ihre Ableitungen zu diesem Zeitpunkt dann zu

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{H}^{-1} \hat{\mathbf{b}}_{t+\Delta t} \quad (7.3b)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + \left( 1 - \frac{1}{2\alpha} \right) \mathbf{u}_t \quad (7.3c)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \ddot{\mathbf{u}}_t + \Delta t (1-\delta) \ddot{\mathbf{u}}_t + \delta \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \quad (7.3d)$$

## 7.2 Das Wilson- $\Theta$ -Verfahren

Nach der Wahl eines geeigneten Zeitschrittes  $\Delta t$  wird zunächst wieder die effektive Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{H}}$  gebildet

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \frac{6}{\Theta^2 \Delta t^2} \mathbf{M} \quad (7.4)$$

Um unbedingte Stabilität zu gewährleisten, muß dabei für den Parameter  $\Theta$  folgende Bedingung eingehalten werden

$$\Theta \geq 1,37$$

Die effektive Belastung zum Zeitpunkt  $t+\Theta\Delta t$  berechnet sich zu

$$\hat{\mathbf{b}}_{t+\Theta\Delta t} = \mathbf{b}_t + \Theta (\mathbf{b}_{t+\Delta t} - \mathbf{b}_t) + \mathbf{M} \left( \frac{6}{\Theta^2 \Delta t^2} \mathbf{u}_t + \frac{6}{\Theta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + 2 \mathbf{u}_t \right) \quad (7.4a)$$

Die Verschiebungen zum Zeitpunkt  $t+\Theta\Delta t$  ergeben sich dann zu

$$\mathbf{u}_{t+\Theta\Delta t} = \mathbf{H}^{-1} \hat{\mathbf{b}}_{t+\Theta\Delta t} \quad (7.4b)$$

Die Verschiebungen und ihrer Ableitungen zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$  werden jetzt folgendermaßen berechnet

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \frac{6}{\Theta^3 \Delta t^2} (\mathbf{u}_{t+\Theta\Delta t} - \mathbf{u}_t) - \frac{3}{\Theta^2 \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + \left(1 - \frac{3}{\Theta}\right) \mathbf{u}_t \quad (7.4d)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{u}}_t) \quad (7.4e)$$

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + 2\ddot{\mathbf{u}}_t) \quad (7.4f)$$

### 7.3 Das Houbolt-Verfahren

Nach der Wahl eines geeigneten Zeitschrittes  $\Delta t$  wird zunächst wieder die effektive Steifigkeitsmatrix  $\hat{\mathbf{H}}$  gebildet

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \quad (7.5)$$

Das Houbolt-Verfahren ist für jedes beliebige  $\Delta t$  unbedingt stabil. Die effektive Belastung zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$  berechnet sich zu

$$\hat{\mathbf{b}}_{t+\Delta t} = \mathbf{b}_{t+\Delta t} + \mathbf{M} \frac{1}{\Delta t^2} (5 \mathbf{u}_t - 4 \mathbf{u}_{t-\Delta t} + \mathbf{u}_{t-2\Delta t}) \quad (7.6a)$$

Die Verschiebungen und ihre Ableitungen zum Zeitpunkt  $t+\Delta t$  können jetzt berechnet werden:

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{H}^{-1} \hat{\mathbf{b}}_{t+\Delta t} \quad (7.6b)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2 \mathbf{u}_{t+\Delta t} - 5 \mathbf{u}_t + 4 \mathbf{u}_{t-\Delta t} - \mathbf{u}_{t-2\Delta t}) \quad (7.6c)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{11}{6} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - 3 \mathbf{u}_t + \frac{3}{2} \mathbf{u}_{t-\Delta t} - \frac{1}{3} \mathbf{u}_{t-2\Delta t} \right) \quad (7.6d)$$

Die Anwendung der Houbolt-Verfahren erfordert für jeden Zeitpunkt  $t$  die Kenntnis der Werte  $\mathbf{u}_{t-\Delta t}$  und  $\mathbf{u}_{t-2\Delta t}$ . Die Berechnung in den beiden ersten Zeitschritten ist daher nur dann problemlos möglich, wenn sich das System vorher in Ruhe befindet. Andernfalls muß eine Startrechnung mit einem anderen Verfahren, z.B. Newmark, zur Ermittlung von  $\mathbf{u}_{\Delta t}$  und  $\mathbf{u}_{2\Delta t}$  durchgeführt werden.

## 7.4 Beispiele

### 7.4.1 Einmassenschwinger

Zur Gegenüberstellung der drei vorgestellten Verfahren wird der in Abb. 7.1 dargestellte Einmassenschwinger herangezogen, der durch eine zum Zeitpunkt  $t=0$  sprunghaft aufgebrachte Kraft belastet wird.

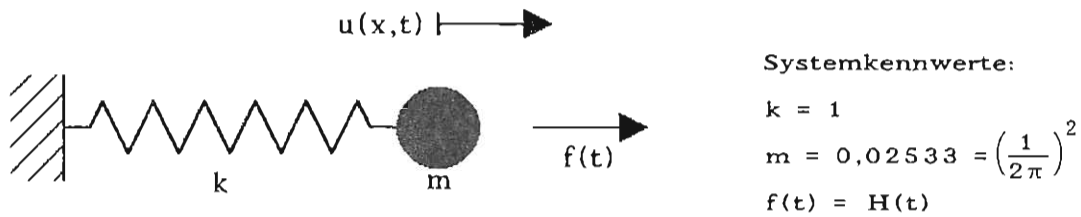


Abb. 7.1: Einmassenschwinger

Die Schwingungsgleichung dieses Systems

$$k u(t) + m \ddot{u}(t) = f(t) = H(t) \quad (7.7)$$

hat als exakte Lösung die Funktion

$$u(t) = 1 - \cos(2\pi t) \quad (7.8)$$

In den Abbildungen 7.2 bis 7.6 sind die mit dem Newmark-, Wilson- $\Theta$ - und dem Houbolt-Verfahren für jeweils 200 Zeitschritte à  $\Delta t = 0,05s$  berechneten Schwingungsverläufe wiedergegeben. Der Verlauf der exakten Lösung aus Gl. (7.8) ist zum Vergleich gepunktet eingezeichnet.

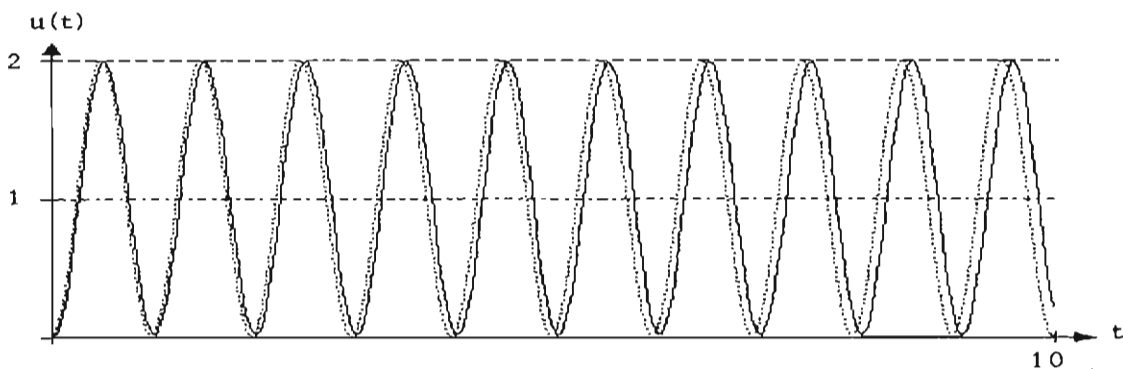


Abb. 7.2: Zeitantwort Newmark-Verfahren ( $\delta=0,5, \alpha=0,25$ )



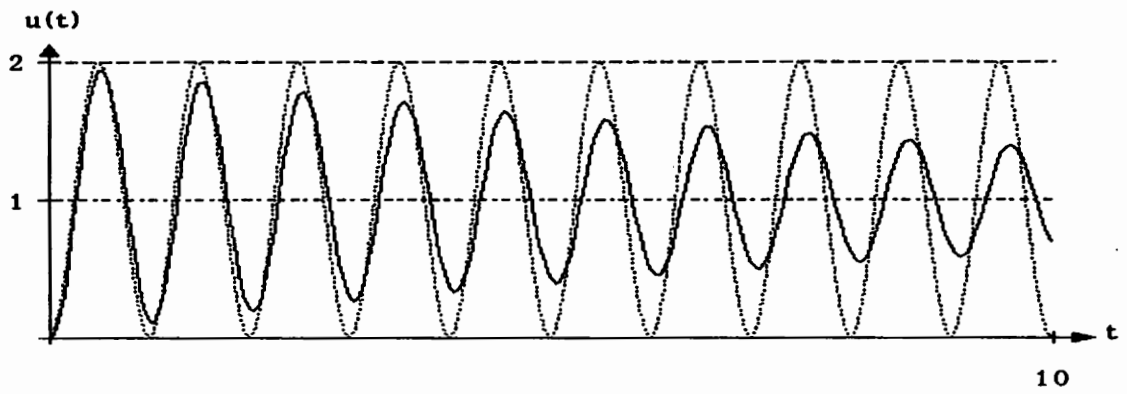


Abb. 7.3: Zeitantwort Newmark-Verfahren ( $\delta=0,6$ ,  $\alpha=0,3025$ )

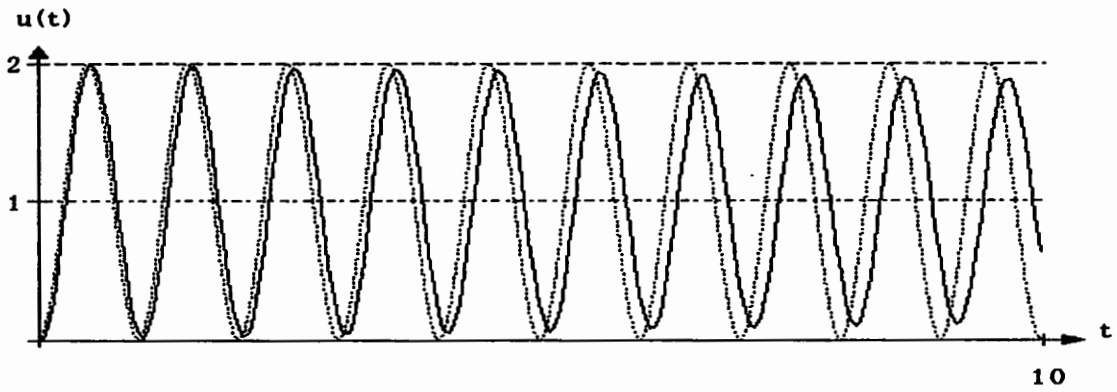


Abb. 7.4: Zeitantwort Wilson- $\Theta$ -Verfahren ( $\Theta=1,37$ )

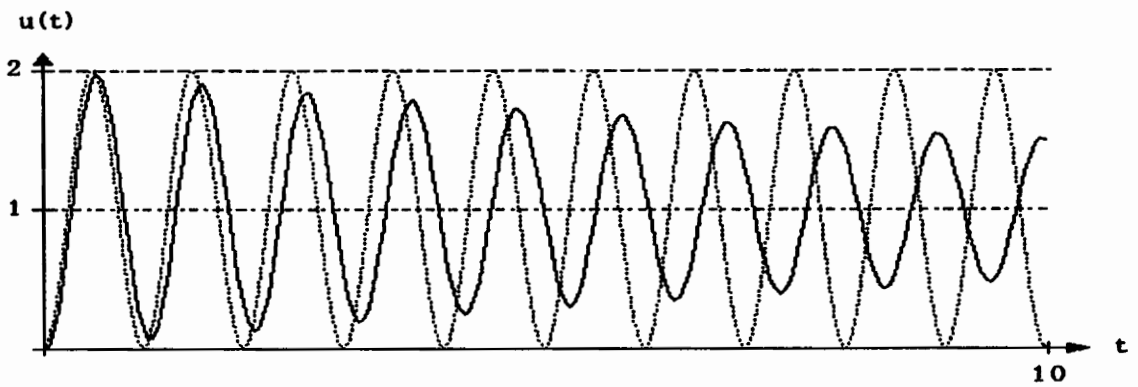


Abb. 7.5: Zeitantwort Wilson- $\Theta$ -Verfahren ( $\Theta=2,00$ )

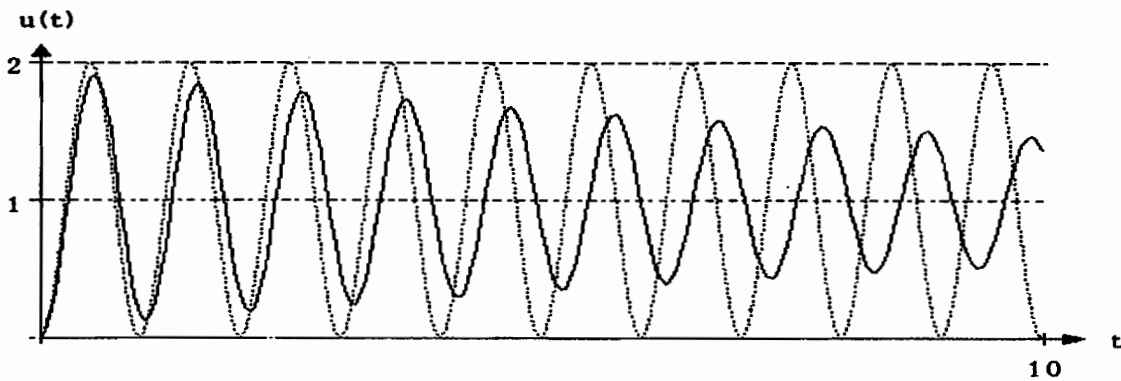


Abb. 7.6: Zeitantwort Houbolt-Verfahren

Das unterschiedliche Verhalten der drei Zeitintegrationsverfahren wird hier deutlich.

- Beim Newmark-Verfahren tritt für  $\delta=0,5$  und beliebiges  $\Delta t$  keinerlei Amplitudenabfall, sondern nur eine Periodenverlängerung auf. Die Wahl eines größeren Wertes für  $\delta$  verursacht einer numerische Dämpfung der Amplitude, wobei die Periodendauer jedoch unverändert bleibt.
- Das Wilson- $\Theta$ -Verfahren besitzt bei identischer Schrittweite  $\Delta t$  und  $\Theta=1,37$  eine etwas größere Periodenverlängerung als das Newmark-Verfahren und zusätzlich einen geringen Amplitudenabfall. Größere Werte von  $\Theta$  führen neben einem Amplitudenabfall zu einer deutlichen Periodenverlängerung.
- Beim Houbolt-Verfahren sind sowohl die Periodenverlängerung als auch der Amplitudenabfall wesentlich größer im Vergleich zum Newmark-Verfahren mit  $\delta=0,5$  und zum Wilson- $\Theta$ -Verfahren mit  $\Theta=1,37$ .

#### 7.4.2. Zweiseitig eingespannte Rechteckscheibe

Der Schwingungsverlauf der bereits mit der Modalanalyse untersuchten zweiseitig eingespannten Rechteckscheibe (Abb. 6.4) infolge zum Zeitpunkt  $t=0$  sprunghaft aufgebrachtener Streckenlasten wird nun mittels der vorgestellten Zeitintegrationsverfahren berechnet. Die in den Abbildungen 7.7 bis 7.11 wiedergegebenen Schwingungsverläufe der Vertikalverschiebung des Punktes A wurden mit dem Newmark-, dem Wilson- $\Theta$ - und dem Houbolt-Verfahren für jeweils 200 Zeitschritte  $\Delta t=10\mu s$ , also einen Gesamtzeitraum von  $2000\mu s$ , berechnet. Die Vergleichs-

lösung der modalen Analyse mit allen Eigenformen, aber unter "Vernachlässigung" der Imaginärteile komplexer Eigenfrequenzen, ist zum Vergleich gepunktet eingezeichnet.

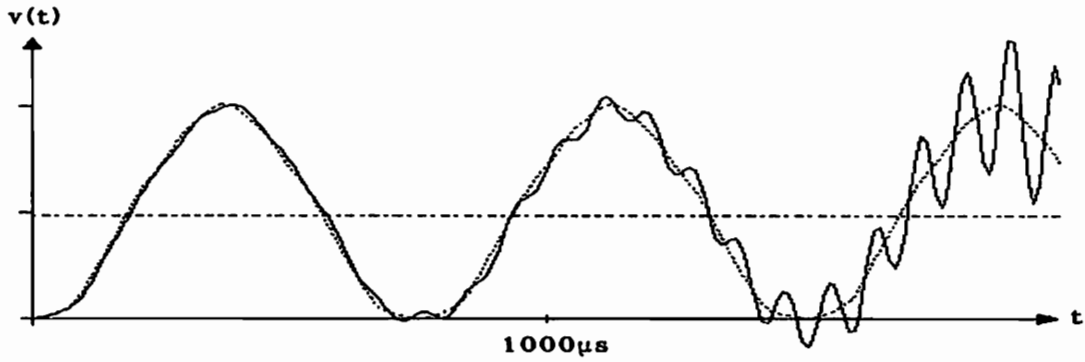


Abb. 7.7: Zeitantwort Newmark-Verfahren ( $\delta=0,5$ ,  $\alpha=0,25$ )

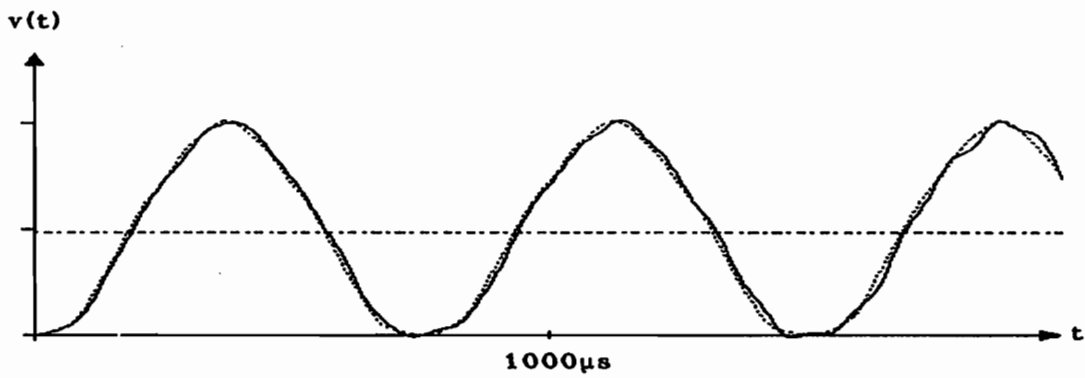


Abb. 7.8: Zeitantwort Wilson- $\Theta$ -Verfahren ( $\Theta=1,37$ )

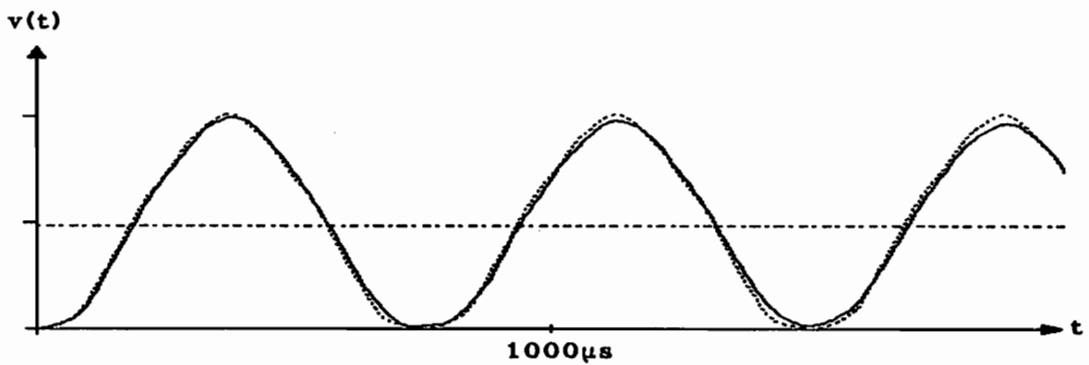


Abb. 7.9: Zeitantwort Newmark-Verfahren ( $\delta=0,6$ ,  $\alpha=0,3025$ )

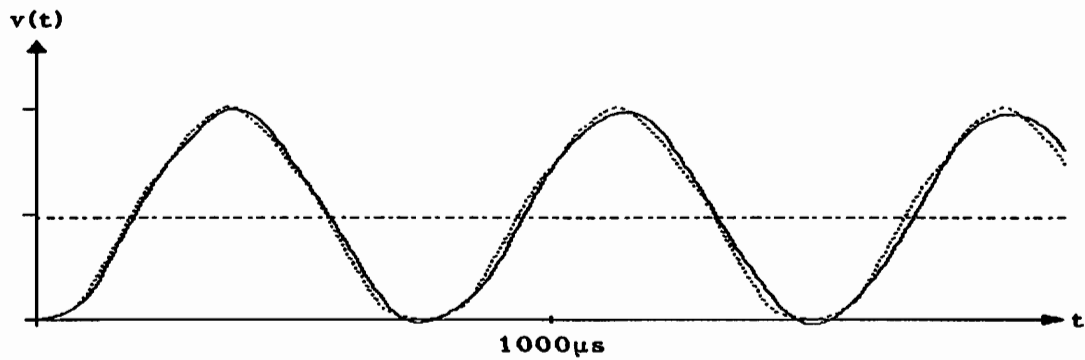


Abb. 7.10: Zeitantwort Wilson- $\Theta$ -Verfahren ( $\Theta=2,00$ )

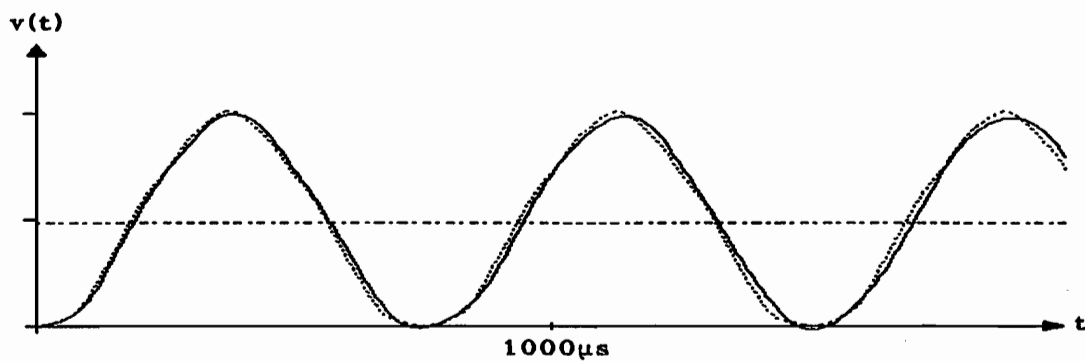


Abb. 7.11: Zeitantwort Houbolt-Verfahren

Der mit dem Newmark-Verfahren mit  $\delta=0,5$ , also ohne jede numerische Amplitudendämpfung berechnete Schwingungsverlauf zeigt ein stark aufklingendes Verhalten einer der Oberschwingungen. Da das Newmark-Verfahren für alle Parameter  $\delta \geq 0,5$  unbedingt stabil ist, kann die Ursache hierfür nur in den Eigenschaften der konstanten REM-Matrizen liegen. So besitzt das verwendete Rechenmodell in der Tat insgesamt 8 komplexe, also physikalisch unsinnige Eigenfrequenzen und -formen (Tab. 6.2), von denen hier diejenigen mit der Eigenfrequenz  $\text{Re}(\omega) = 74701\text{s}^{-1}$  ( $T=84,1\mu\text{s}$ ) zum Schwingen angeregt werden. Auch bei Verwendung des Wilson- $\Theta$ -Verfahrens mit  $\Theta=1,37$  kommt es zu einem, innerhalb des betrachteten Zeitbereiches allerdings wesentlich geringeren, Aufklingen der komplexen Moden.

Die gezielte Ausnutzung der numerischen Dämpfungseigenschaften der verschiedenen Integrationsverfahren unterbindet dagegen ein aufklingendes Verhalten der physikalisch unsinnigen Eigenfrequenzen. So liefern das Newmark- mit  $\delta=0,60$ , das Wilson- $\Theta$ - mit  $\Theta=2,00$  und das Houbolt-Verfahren im vorliegenden Beispiel eine deutlich bessere Übereinstimmung mit der Vergleichslösung aus der Modalanalyse.

### 7.4.3. Bewertung

Bei der Untersuchung dynamischer Systeme mittels der REM mit konstanter Massenmatrix muß der Wahl eines geeigneten Zeitintegrationsverfahrens offensichtlich besondere Beachtung geschenkt werden. So haben Nardini und Brebbia in den von ihnen veröffentlichten Beispielen [16,18,58] ausschließlich das Houbolt-Verfahren verwendet und die komplexen Oberschwingungen dabei durch eine entsprechende Wahl der Zeitschritte herausgefiltert. Loeffler und Mansur [50,51] haben umfangreiche Studien hinsichtlich der Anwendungsmöglichkeit numerischer Zeitintegrationsverfahren durchgeführt und sind ebenfalls zu dem Schluß gekommen, daß das Houbolt-Verfahren für die Berechnung von Schwingungs- bzw. Wellenausbreitungsproblemen mit der REM am besten geeignet sei.

In den hier durchgeführten Beispielrechnungen zeigt sich jedoch eine gewisse Überlegenheit des Newmark-Verfahrens. Bei gleicher Schrittweite  $\Delta t$  besitzt es grundsätzlich eine geringere Periodenverlängerung als die beiden anderen Verfahren und bietet darüberhinaus die Möglichkeit, die Größe der numerischen Dämpfung nicht wie beim Houbolt-Verfahren über die Schrittweite, sondern direkt über die Wahl eines geeigneten Parameters  $\delta$  zu beeinflussen.

Die Frage, welchem Verfahren zur Berechnung der Schwingungsantwort der hier verwendeten REM-Modelle der Vorzug zu geben ist, läßt sich klar zugunsten der Modalanalyse entscheiden, da keines der verwendeten Zeitschrittverfahren eine Stabilität des Schwingungsverlaufes gewährleistet. Während man bei Verwendung der Modalanalyse die ungenauen, höheren und ggf. aufklingenden Eigenformen gezielt eliminieren kann, ist ein Herausfiltern dieser Moden bei den Zeitschrittverfahren erst durch Ausprobieren verschiedener Schrittweiten respektive Integrationsparameter möglich, so daß die Modalanalyse letztlich auch hinsichtlich der erforderlichen Rechenzeit das vorteilhaftere Verfahren ist.

### 8. Die REM in der elasto-statischen Bruchmechanik

Die Berechnung ebener RiBprobleme mit numerischen Methoden macht es erforderlich, das spezielle Lösungsverhalten an den RiBspitzen m3glichst exakt wiederzugeben. Bei der Randelementmethode k3nnen zu diesem Zweck verschiedene Wege beschritten werden:

- Verwendung von Standard-Elementen
- Verwendung spezieller Randelemente (Viertelpunkt-Elemente)
- Verwendung spezieller Fundamentall3sungen (Greensche Funktionen)

Die Verwendung von Standard-Elementen mit linearen oder quadratischen Ansatzfunktionen erfordert eine sehr feine Randunterteilung in der N3he der RiBspitzen. Mit speziellen RiBspitzen-Elementen (Viertelpunkt-Elemente) l3sst sich dagegen sogar mit vergleichsweise groben RiBdiskretisierungen eine h3here Genauigkeit der Ergebnisse erzielen. Letztere wurden in der Vergangenheit bereits zur Untersuchung unterschiedlichster RiBprobleme eingesetzt [11,31,55,73,74]. Alternativ hierzu besteht noch die M3glichkeit, spezielle Randelemente mit h3heren Polynomans3tzen zu verwenden, wie sie von Tanaka und Itoh [77] vorgestellt worden sind.

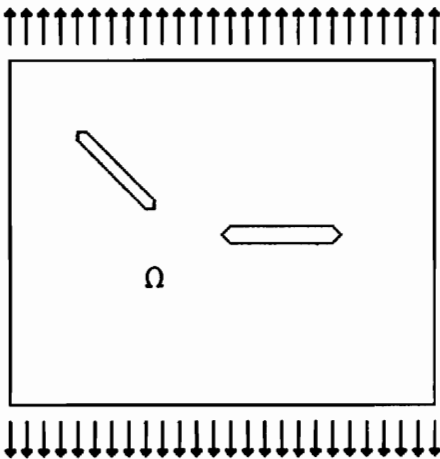


Abb. 8.1: RiBproblem

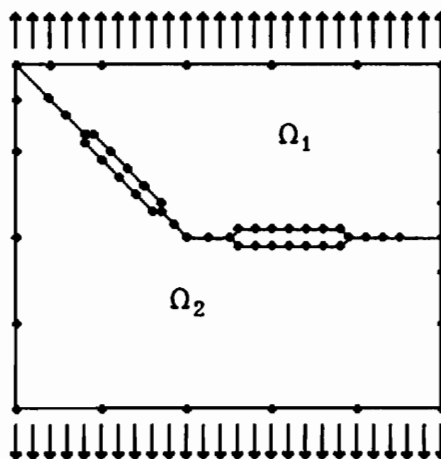


Abb. 8.2: Diskretisierung mit Substrukturtechnik

Die Behandlung nicht-symmetrischer Probleme (Abb. 8.1) erfolgte dabei in allen Arbeiten ausschlieBlich unter Anwendung der Substruktur-Technik. M3gliche Ungenauigkeiten der numerischen Randintegration machten es hierbei grunds3tzlich

erforderlich, die einander gegenüberliegenden Flanken eines Risses unterschiedlichen Teilgebieten zuzuordnen, wobei der gemeinsame Innenrand zweier Teilgebiete jeweils durch die zwischen ihnen liegende Reißachse führt (Abb. 8.2).

Eine andere Möglichkeit besteht darin, anstelle der Kelvin-Lösung eine spezielle, problemangepaßte Fundamentallösung einzusetzen: unter Verwendung der Green'schen Funktion der unendlichen Scheibe mit Griffith- oder halbunendlichem RiB wird das RiBverhalten exakt wiedergegeben, eine Diskretisierung der RiBänder kann entfallen [56]. Die Berechnung von abknickenden oder Mehrfach-Rissen erfordert jedoch auch hier die Anwendung der Substruktur-Technik (Abb. 8.3).

Die in dieser Arbeit vorgestellte analytische Randintegration ermöglicht es nun, gänzlich auf die Substruktur-Technik und den damit verbundenen zusätzlichen Aufwand bei der Erstellung der Eingabe-Datensätze und bei der numerischen Berechnung zu verzichten (Abb. 8.4).

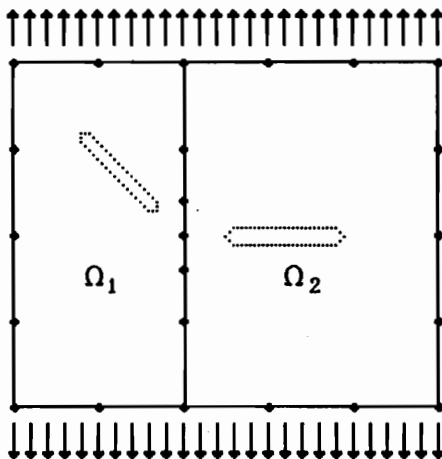


Abb. 8.3: Diskretisierung mit spezieller Fundamentallösung

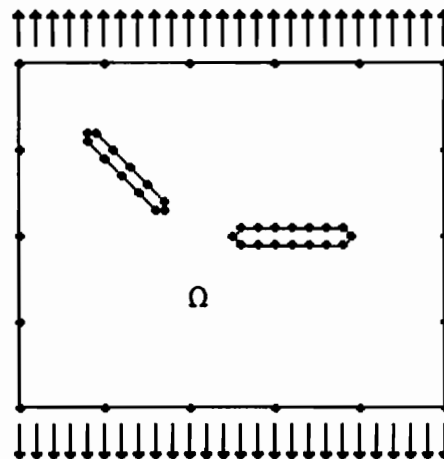


Abb. 8.4: Diskretisierung mit analytischer Randintegration

Zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren aus den Ergebnissen der REM-Analyse kann wiederum zwischen verschiedenen Vorgehensweisen unterschieden werden:

- Berechnung der K-Faktoren aus Verschiebungswerten
- Berechnung der K-Faktoren aus Spannungswerten
- Berechnung der K-Faktoren durch Auswertung des J-Integrals

Eine Gegenüberstellung der Berechnung aus Verschiebungswerten und aus dem J-Integral wurde von Eichenauer [32] durchgeführt. Er gibt an, daß die Genauigkeit der J-Integral-Formulierung in starkem Maße von der Wahl des Integrationsweges abhängt und dabei Streuungen bis zu 20% auftreten. Da diese Vorgehensweise darüberhinaus eine Nachlaufrechnung in zusätzlichen Innenpunkten erfordert, wird sie hier nicht weiter verfolgt.

### 8.1 Viertelpunkt-Elemente

Der Verschiebungsverlauf der RiBränder eines Griffith-Risses (Abb. 3.2) wird wesentlich von einer  $\sqrt{r}$ -Charakteristik bestimmt und läßt sich aus diesem Grund mit Standard-Elementen, die lineare oder quadratische Ansatzfunktionen besitzen, nur unzureichend wiedergeben. Wesentlich besser geeignet sind hier sogenannte Viertelpunkt-Elemente (Quarter-Point-Elemente), die einen  $\sqrt{r}$ -Term in ihren Ansatzfunktionen aufweisen (Abb. 8.5 ).

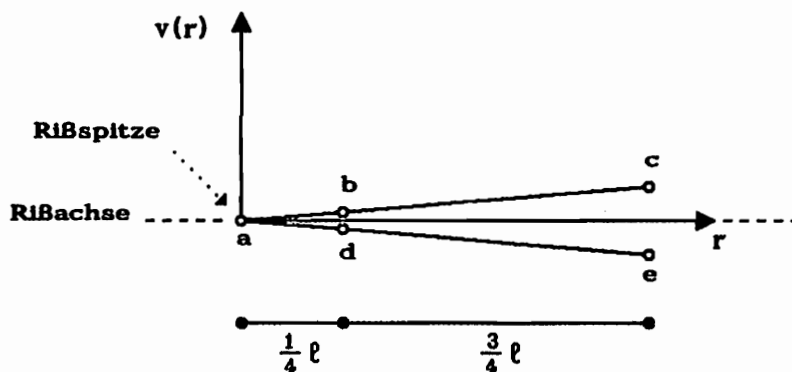


Abb. 8.5: Viertelpunkt-Elemente

Der Verschiebungsverlauf eines solchen Elementes mit den Knoten a, b und c lautet

$$v(r) = v_a + \sqrt{\frac{r}{\ell}} (-3v_a + 4v_b - v_c) + \frac{r}{\ell} (2v_a - 4v_b + 2v_c) \quad (8.1)$$

Durch die Verwendung singulärer Ansatzfunktionen für die Spannungen läßt sich mit sogenannten TSQP-Elementen (Traction-Singular-Quarter-Point-Elements) die  $(1/\sqrt{r})$ -Charakteristik der Spannungsverläufe an der Rißspitze ebenfalls wesentlich besser wiedergeben als mit anderen Elementen. Zu beachten ist, daß der Spannungsverlauf anstelle mittels der tatsächlichen, singulären Randspannungsverlaufes  $p(r)$  hierbei durch nicht-singuläre Ersatzwerte  $\tilde{p}(r)$  beschrieben wird: .



$$p_i(r) = \sqrt{\frac{\ell}{r}} \tilde{p}_i(r) \quad (8.2)$$

Mit dieser Beziehung lautet der Randverlauf

$$p(r) = \sqrt{\frac{\ell}{r}} \tilde{p}_a + (-3\tilde{p}_a + 4\tilde{p}_b - \tilde{p}_c) + \sqrt{\frac{r}{\ell}} (2\tilde{p}_a - 4\tilde{p}_b + 2\tilde{p}_c) \quad (8.3)$$

Diese Ansatzfunktionen der Viertelpunkt-Elemente sollen nun genutzt werden, um zur Beurteilung des Rißverhaltens Spannungsintensitätsfaktoren aus den Ergebnissen der REM-Berechnung zu ermitteln.

## 8.2 Berechnung von K-Faktoren aus den Rißrandverschiebungen

Die Näherungsformel zur Berechnung der Rißrandverschiebung in unmittelbarer Nähe der Rißspitze eines symmetrisch belasteten Risses hat die bereits in Kap. 3 wiedergegebene Form

$$v = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa+1) \quad (8.4)$$

Blandford et al. [11] (b) haben erstmals eine 2-Punkt-Verschiebungsformel zur Ermittlung der K-Faktoren aus den Knotenverschiebungen der QP-Randelemente angewendet, die zuvor von Tracey [78] für Finite-QP-Elemente aufgestellt wurde. Durch Gleichsetzen des  $\sqrt{r}$ -Terms der Verschiebungsgleichung (8.1) mit der Näherung (8.4) erhält man

$$v(r) = \frac{K_I^{bl}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa+1) = \sqrt{\frac{r}{\ell}} (-3v_a + 4v_b - v_c) \quad (8.5)$$

Auflösen nach  $K_I^{bl}$  liefert für  $v_a = 0$

$$K_I^{bl} = \frac{2\mu}{\kappa+1} \sqrt{\frac{2\pi}{\ell}} (4v_b - v_c) \quad (8.6)$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, K-Faktoren direkt mit der einfachen Näherungsformel (8.4) aus den Knotenverschiebungen der Rißrandelemente zu berechnen. Diese Formel gilt jedoch nur für die unmittelbare Umgebung der Rißspitze. Um hinreichend genaue Ergebnisse zu gewährleisten, ist es erforderlich, den so erhaltenen Zusammenhang zwischen dem Abstand  $r$  und  $K(r)$  für den Punkt der

Rißspitze, d.h. für  $r=0$ , zu extrapolieren. Sollen mehr als zwei Knotenverschiebungen in die Berechnung eingehen, kann man zu diesem Zweck eine Regressionsgerade durch die berechneten Werte legen. Unter Verwendung der Methode der kleinsten Fehlerquadrate gibt Eichenauer [32] für diese Ersatzgerade

$$K(r) = K(0) + m \cdot r \quad (8.7a)$$

folgende Formel zur Berechnung der Steigung an

$$m = \frac{N \cdot \sum (r \cdot K) - \sum r \cdot \sum K}{N \cdot \sum (r^2) - (\sum r)^2} \quad (8.7b)$$

Der Grenzwert  $K(0)$  ergibt sich dann zu

$$K(0) = \frac{\sum K - m \cdot \sum r}{N} \quad (8.7c)$$

Wenn man jedoch nur zwei Knotenverschiebungen berücksichtigt, so kann man diese Prozedur umgehen [35]. Umstellen der Näherungsformel Gl. (8.4) liefert

$$K_I(r) = \frac{4\mu}{1+\kappa} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} v(r) \quad (8.8)$$

Einsetzen der Knotenverschiebungen  $v_b$  und  $v_c$  des QP-Elementes führt direkt auf

$$K_I^*(\ell) = \frac{4\mu}{1+\kappa} \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} v_c = K_I^*(0) + m \ell \quad (8.9)$$

$$K_I^*\left(\frac{\ell}{4}\right) = \frac{4\mu}{1+\kappa} \sqrt{\frac{2\pi}{\ell}} v_b = K_I^*(0) + m \frac{\ell}{4}$$

Auflösen dieses Gleichungssystems nach  $K_I^*(0)$  ergibt

$$K_I^*(0) = \frac{4\mu}{1+\kappa} \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{3} (8v_b - v_c) \quad (8.10)$$

Im Fall  $v_a \neq 0$  erhält man aus der Beziehung, daß Starrkörperbewegungen keine Spannungen verursachen dürfen, den erweiterten Zusammenhang

$$K_I^*(0) = \frac{4\mu}{1+\kappa} \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{3} (8v_b - v_c - 7v_a) \quad (8.11a)$$

Dieselbe Vorgehensweise liefert auch die Beziehung für die Verschiebungen  $u$  in  $x_1$ -Richtung:

$$K_{II}^*(0) = \frac{4\mu}{1+\chi} \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{3} (8u_b - u_c - 7u_a) \quad (8.11b)$$

Bei nicht-symmetrischen Rißverformungen müssen die Verschiebungen beider Rißflanken in die Berechnung eingehen. Einsetzen der Mittelwerte der Verschiebungen von je zwei gegenüberliegenden Knotenpunkten unter Berücksichtigung der Vorzeichen führt auf die erweiterten Zusammenhänge:

$$K_I^* = \frac{4\mu}{1+\chi} \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{6} (8(v_b - v_d) - (v_c - v_e)) \quad (8.12)$$

$$K_{II}^* = \frac{4\mu}{1+\chi} \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}} \frac{1}{6} (8(u_b - u_d) - (u_c - u_e))$$

Um die Genauigkeit dieser Formeln im Vergleich mit der von Blandford et al. abzuschätzen, werden die exakten Rißrandverschiebungen des Griffith-Risses in der unendlichen Scheibe unter einachsigen Zug nach Gl. (3.5) in diese Formeln eingesetzt. Mit

$$v_c = \frac{1+\chi}{4\mu} K_I \sqrt{\frac{2a\ell - \ell^2}{\pi a}} \quad (8.13a)$$

$$v_b = \frac{1+\chi}{4\mu} K_I \sqrt{\frac{8a\ell - \ell^2}{16\pi a}} \quad (8.13b)$$

besteht folgender Zusammenhang zwischen den Näherungen und der exakten Lösung:

$$K_I^* = K_I \left\{ \frac{8}{3} \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\ell}{32a}} - \frac{1}{3} \sqrt{1 - \frac{\ell}{2a}} \right\} \quad (8.13c)$$

$$K_I^{bl} = K_I \left\{ 4 \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\ell}{32a}} - \sqrt{1 - \frac{\ell}{2a}} \right\} \quad (8.13d)$$

Die so ermittelten relativen Abweichungen der beiden Näherungsformeln sind in Tab. 8.1 wiedergegeben. Unabhängig davon, wie gut das verwendete QP-Element die exakten Randverschiebungen anzunähern vermag, vergrößert sich der Fehler des ermittelten K-Faktors bei Verwendung der Blandford-Formel (bl) um bis zu 16%, während die eigene Formel (\*) einen maximalen Fehler von 1,15% aufweist.

$\ell/a$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\left  \frac{K_I^* - K_I}{K_I} \right $	0	0,03 %	0,14 %	0,35 %	0,67 %	1,15 %
$\left  \frac{K_I^{bl} - K_I}{K_I} \right $	0	2,62 %	5,49 %	8,69 %	12,28 %	16,37 %

Tab. 8.1: relative Abweichungen der Näherungen in Abhängigkeit von  $\ell$

### 8.3 Berechnung von K-Faktoren aus den Spannungsverläufen

Spannungsintensitätsfaktoren können auch über den singulären Spannungsverlauf in der Umgebung der Rißspitze berechnet werden. Zu diesem Zweck wird zunächst wieder die Näherungsformel in der Rißachse in unmittelbarer Umgebung der Rißspitze aufgestellt. Umstellen von Gl. (3.6a) führt auf die Grenzwertbeziehung für die Rißspitze, d.h. für  $r=0$

$$K_I(r=0) = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{2\pi r} \sigma_{yy}(r) \right\} \quad (8.14)$$

Martinez und Dominguez [55] (ma) haben eine Näherungsformel zur Berechnung zweidimensionaler K-Faktoren aufgestellt, indem sie den Randspannungsverlauf des spannungssingulären Viertelpunkt-Elementes parallel zur  $x_1$ -Achse in diese Näherung eingesetzt haben:

$$\begin{aligned} K_I^{ma}(r=0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{2\pi r} \left( \sqrt{\frac{\ell}{r}} \tilde{p}_{2a} + (-3\tilde{p}_{2a} + 4\tilde{p}_{2b} - \tilde{p}_{2c}) + \sqrt{\frac{r}{\ell}} (2\tilde{p}_{2a} - 4\tilde{p}_{2b} + 2\tilde{p}_{2c}) \right) \right\} \\ &= \tilde{p}_{2a} \sqrt{2\pi \ell} \end{aligned} \quad (8.15)$$

Der Zusammenhang zwischen dem  $K_{II}$ -Faktor und dem Ersatzwert der Randspannung in  $x_1$ -Richtung lautet analog

$$K_{II}^{ma} = \tilde{p}_{1a} \sqrt{2\pi\ell} \quad (8.16)$$

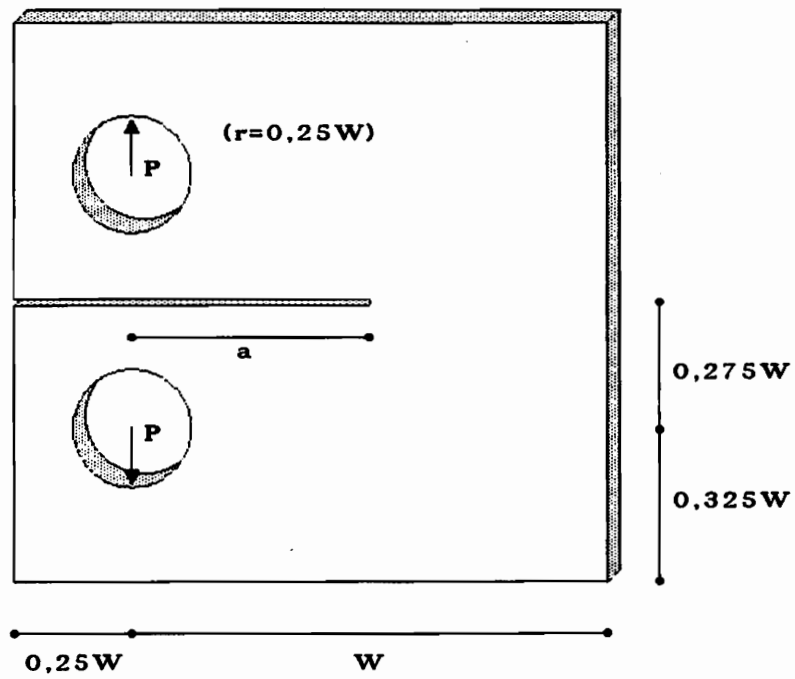
Alternativ hierzu besteht wieder die Möglichkeit, die einfache Näherungsformel in der Ribachse für eine beliebige Anzahl von Knotenspannungen anzuwenden und den Wert in der Rißspitze dann mittels einer linearen Extrapolation zu bestimmen. Sollen nur die drei Spannungswerte des TSQP-Elementes berücksichtigt werden, so führt die Regressionsgerade auf

$$K_I^{**} = \sqrt{2\pi\ell} \frac{1}{26} \left\{ 17 \tilde{p}_{2a} + 12 \tilde{p}_{2b} - 3 \tilde{p}_{2c} \right\} \quad (8.17)$$

## 8.4 Beispiele für statische K-Faktoren

### 8.4.1 CT-Probe

Die Standard-Kompakt-Zugprobe bzw. CT-Probe (compact tension) nach ASTM-Norm hat die in Abb. 8.6 dargestellte Form. Wegen der vorhandenen Symmetrien genügt es, eine Hälfte der Probe für die statische Berechnung zu diskretisieren. Abb. 8.7 gibt das hier verwendete Rechenmodell mit 50 Randknoten und 24 Elementen wieder. An der Rißspitze werden je ein QP- und ein TSQP-Element der Länge  $\ell=5$  mm ( $a/\ell=0,10$ ) verwendet, alle anderen Randelemente besitzen quadratische Ansatzfunktion und jeweils drei Knoten. Die Öffnung wird durch vier Teilkreis-Elemente dargestellt und die angreifende Einzellast durch eine quivalente Randspannung ersetzt.



**Systemkennwerte:**

**W = 100 mm**

**E = 10 Nmm<sup>-2</sup>**

**P = 125 N**

**B = 1 mm**

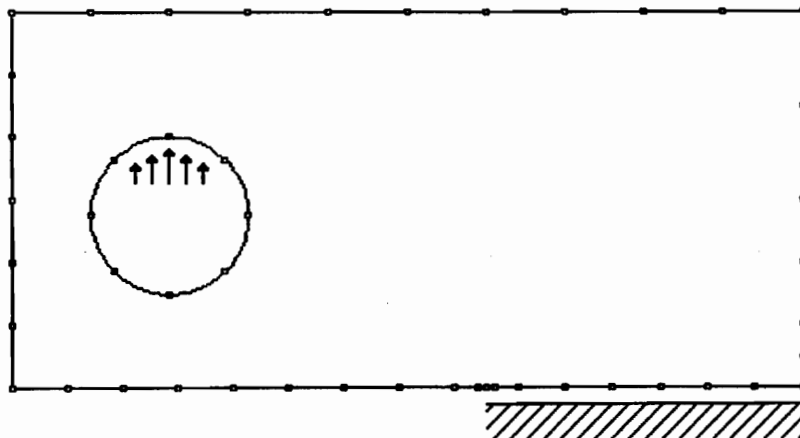
**ν = 0,2**

**a = 50 mm**

**EVZ**

**r = 25 mm**

**Abb. 8.6: CT-Probe**



**Abb. 8.7: Rechenmodell der CT-Probe**

Von Heckel [41] wird der Spannungsintensitätsfaktor in Abhängigkeit der Rißlänge mit einer Genauigkeit von  $\pm 0,5\%$  für Rißlängen  $0,2 \leq a/W \leq 1,0$  angegeben zu

$$K_I = \frac{P}{B W^{0,5}} \frac{2+\alpha}{(1+\alpha)^{1,5}} \left( 0,886 + 4,64\alpha - 13,32 \alpha^2 + 14,72\alpha^3 - 5,6\alpha^4 \right)$$

mit  $\alpha = \frac{a}{W}$

Einsetzen der Systemkennwerte liefert:

$$K_I = 120,74 \text{ Nmm}^{-1,5}$$

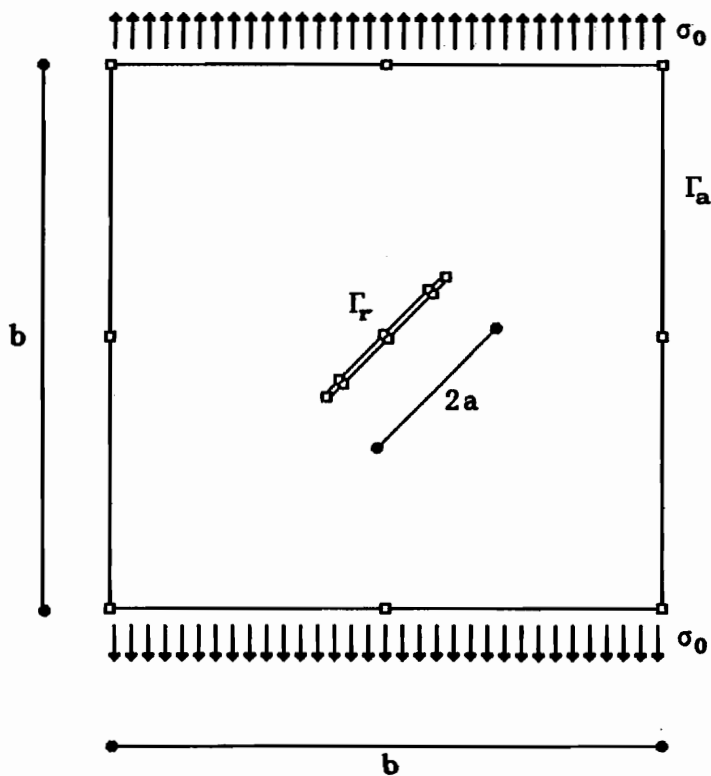
Die mit den vorgestellten Gleichungen berechneten Faktoren sind in Tab. 8.2 zusammengefaßt.

	$K_I$	$\Delta K_I$
Blandford (bl)	116,22	-3,74 %
Martinez (ma)	118,99	-1,45 %
neu (*)	120,25	-0,41 %
neu (**)	119,76	-0,81 %

Tab. 8.2: K-Faktoren der CT-Probe

#### 8.4.2 Schräger Riß in der unendlichen Scheibe unter Zug

Es sollen die Spannungsintensitätsfaktoren an einem Griffith-Riß berechnet werden, der durch konstante, unter einem Winkel von  $45^\circ$  im unendlichen angreifende Zugspannungen belastet wird. Zu diesem Zweck wird das in Abb. 8.8 dargestellte Rechenmodell verwendet.



Systemkennwerte:

$a = 60 \text{ mm}$                        $\nu = 0,2$   
 $b = 800 \text{ mm}$                       ESZ

Abb. 8.8: Griffith-Riß in der unendlichen Scheibe unter  $45^\circ$  (nicht maßstäblich)

Der Rand im Unendlichen wird durch insgesamt vier Randelemente mit quadratischen Ansatzfunktionen und Doppelknoten in den Eckpunkten abgebildet. Für die RiBoberfläche werden verschiedene Elementeteilungen verwendet, um eine Aussage über die Abhängigkeit zwischen RiBdiskretisierung und Genauigkeit der Ergebnisse treffen zu können:

- SI04 mit 4 QP-Elementen
- SI08 mit 4 QP- und 4 Elementen mit quadratischem Ansatz
- SI12 mit 4 QP- und 8 Elementen mit quadratischem Ansatz
- SI16 mit 4 QP- und 12 Elementen mit quadratischem Ansatz

Bei Knoten, die identische Koordinaten besitzen, aber keine Doppelknoten sind, können Probleme bei der Berechnung der Diagonalterme der Matrix  $\mathbf{H}$  auftreten. Die einander gegenüberliegenden Randknoten der beiden RiBflanken sind daher



nicht exakt in der Ribachse, sondern unmittelbar daneben angeordnet, wie es in Abb. 8.9 am Beispiel des Modells SI08 dargestellt ist. Die Standard-Elemente liegen hier parallel zueinander, die Viertelpunkt-Elemente treffen in den Ribspitzen zusammen.

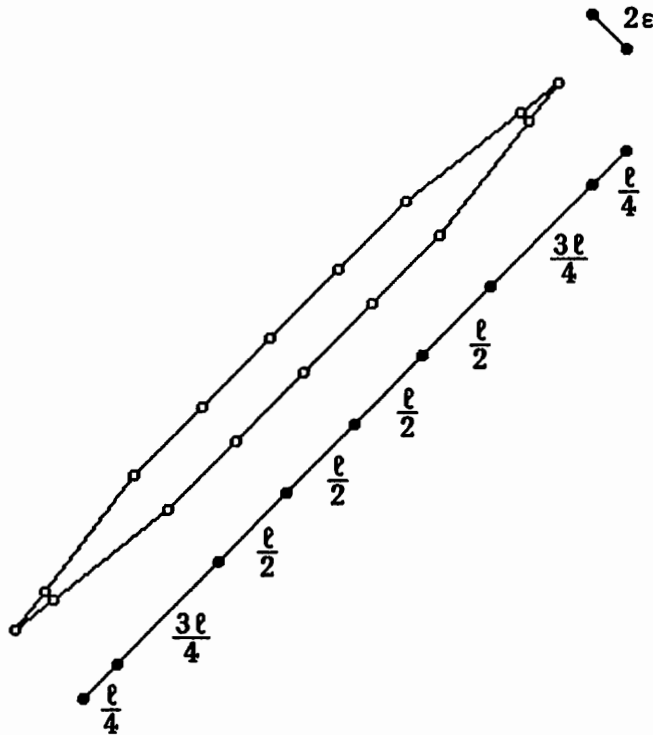


Abb. 8.9: Diskretisierung eines Risses mit 8 Elementen

Vergleichsrechnungen haben gezeigt, daß der Einfluß des Ribflankenabstandes  $\epsilon$  auf die Genauigkeit der Rechenergebnisse im gesamten Bereich  $0,0001 \ell \leq \epsilon \leq 0,01 \ell$  kleiner als etwa 0,2% ist, so daß diesem Punkt bei Verwendung der analytischen Randintegration keine weitere Beachtung geschenkt werden muß. In diesem und den folgenden Beispielen wird er zu etwa einem tausendstel der Elementlänge gewählt:

$$\epsilon \approx 0,001 \ell$$

Die exakten Spannungsintensitätsfaktoren des dargestellten Ribproblems sind bekannt [37]. In dimensionsloser Form lauten sie

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi a}} = 0,50$$

$$F_{II} = \frac{K_{II}}{\sigma \sqrt{\pi a}} = 0,50$$

Mit der eigenen (\*) und der von Blandford (bl) verwendeten Zweipunkt-Verschiebungsformel aus den Ergebnissen der REM-Berechnung ermittelte Spannungsintensitätsfaktoren sind für die verwendeten Rechenmodelle in Tab. 8.3 zusammengefaßt. Abb. 8.10 gibt den Betrag der prozentualen Abweichung in Abhängigkeit des Verhältnisses von Rißlänge  $a$  zu Elementlänge  $\ell_E$  wieder. Aus beiden ist ersichtlich, daß die mit der eigenen Zweipunkt-Formel berechneten Spannungsintensitätsfaktoren für eine zunehmende Elementanzahl sehr schnell gegen die exakten Werte konvergieren. Nur acht Elemente, also zwei Elemente pro Rißlänge  $a$ , sind hier ausreichend, um eine Genauigkeit von etwa 1% zu erzielen, während die Blandford-Formel selbst bei doppelter Elementanzahl noch Abweichungen von mehr als 3% liefert.

Modell	$F_I^*$	$\Delta K_I^*$	$F_{II}^*$	$\Delta K_{II}^*$	$F_I^{bl}$	$\Delta K_I^{bl}$	$F_{II}^{bl}$	$\Delta K_{II}^{bl}$
SI 04	0,4845	-3,1 %	0,4697	-6,1 %	0,5747	14,9 %	0,5575	11,5 %
SI 08	0,4967	-0,7 %	0,4942	-1,2 %	0,5336	6,7 %	0,5307	6,1 %
SI 12	0,4984	-0,3 %	0,4971	-0,6 %	0,5224	4,5 %	0,5208	4,2 %
SI 16	0,4991	-0,2 %	0,4982	-0,4 %	0,5170	3,4 %	0,5159	3,2 %

Tab. 8.3: Spannungsintensitätsfaktoren des Risses unter  $45^\circ$

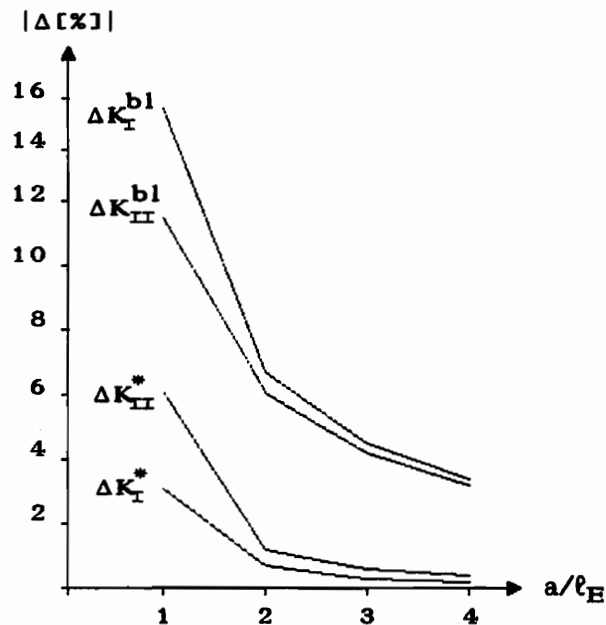
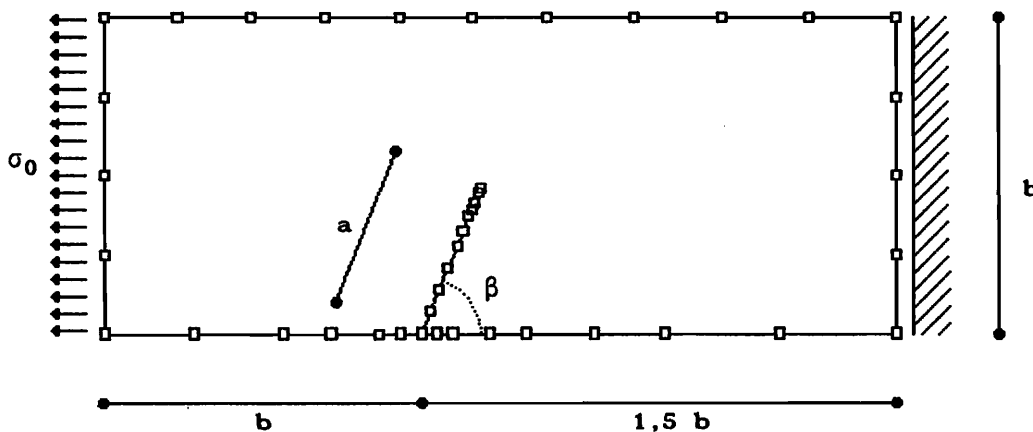


Abb. 8.10: Prozentuale Abweichungen in Abhängigkeit der Elementanzahl

#### 8.4.4. schräger Randriß in gezogenem Streifen

Die Verformungen des in Abb. 8.11 dargestellten, gezogenen Streifens mit schrägem Randriß unter einem Winkel von  $67,5^\circ$  werden mit einem Modell aus 26 Randelementen und 56 Randknoten berechnet. In den vier Eckpunkten sind wegen der sich sprunghaft ändernden Randbedingungen Doppelknoten angeordnet, die beiden RiBränder werden mit je vier 3-Knoten-Standard-Elementen und je einem Viertel-punkt-Element an der Rißspitze abgebildet.

Dieses Problem wurde für eine Rißlänge von  $a=0,3b$  bereits von Eichenauer mit der REM untersucht. Er verwendete dazu ein aus zwei Substrukturen bestehendes System mit insgesamt 38 Elementen, deren gemeinsamer Rand in der Verlängerung der Rißachse liegt. Die von ihm mittels linearer Regression aus den Rißrandverschiebungen ermittelten K-Faktoren besitzen eine Genauigkeit von ca. 1-2% gegenüber Vergleichswerten aus dem Compendium of Stress Intensity Factors [71], die von Wilson [82] mit einem Randkollokationsverfahren berechnet worden sind.



Systemkennwerte:

$a = 60 \text{ mm}$                        $\nu = 0,20$   
 $b = 120 \text{ mm}$                       EVZ  
 $\beta = 67,5^\circ$

Abb. 8.11: Gezogener Streifen mit schrägem Randriß

Unter der angegebenen Belastung verformt sich das System in der in Abb. 8.12 dargestellten Form

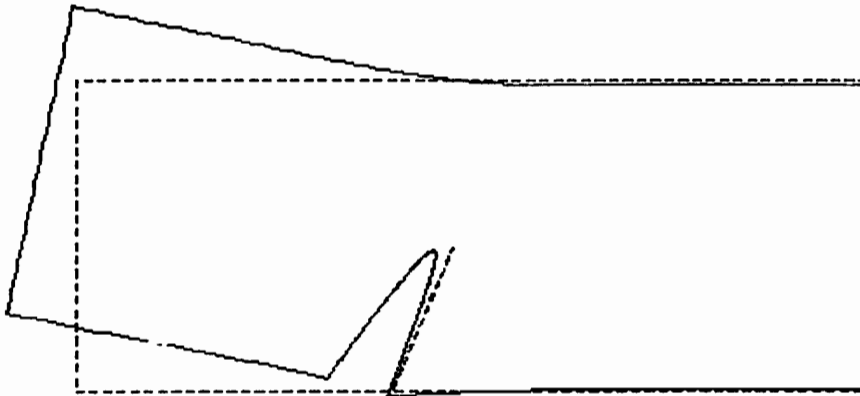


Abb. 8.12: Verformtes System mit klaffendem RiB

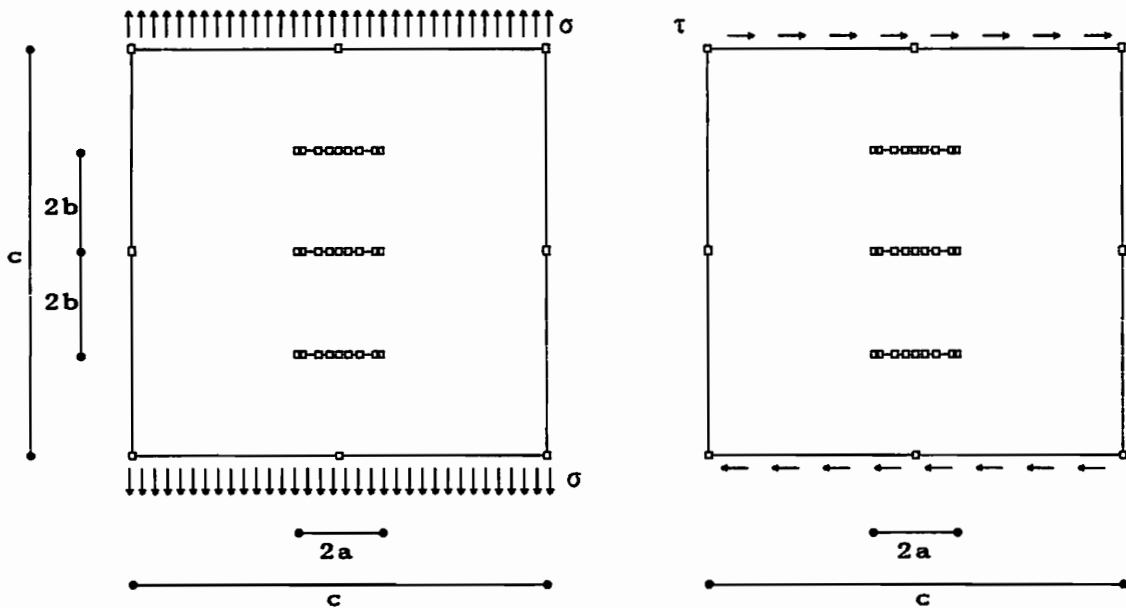
Die berechneten Spannungsintensitätsfaktoren weisen eine maximale Abweichung von 0,3% gegenüber den Vergleichswerten von Wilson auf (Tab. 8.4).

$F_I$	$F_I^*$	$\Delta F_I^*$	$F_{II}$	$F_{II}^*$	$\Delta F_{II}^*$
2,258	2,265	0,3 %	0,494	0,495	0,2 %

Tab. 8.4: Spannungsintensitätsfaktoren des gezogenen Streifens

#### 8.4.5. Parallele Mehrfachrisse und Zug und Schub

Drei parallele, gleichlange Risse werden durch im Unendlichen angreifende Zug- und Schubspannungen belastet. Das in Abb. 8.13 dargestellte Rechenmodell besteht aus 28 Randelementen mit 60 Randknoten. In den Eckpunkten befinden sich Doppelknoten, jeder RiB besteht aus vier Standard- und vier Viertelpunkt-Elementen ( $l/a = 0,50$ ).



Systemkennwerte:

- a = 40 mm                       $\nu = 0,20$
- b = 80 mm                      EVZ
- c = 800 mm

Abb. 8.13: Parallele Mehrfachrisse unter Zug und Schub (nicht maßstäblich)

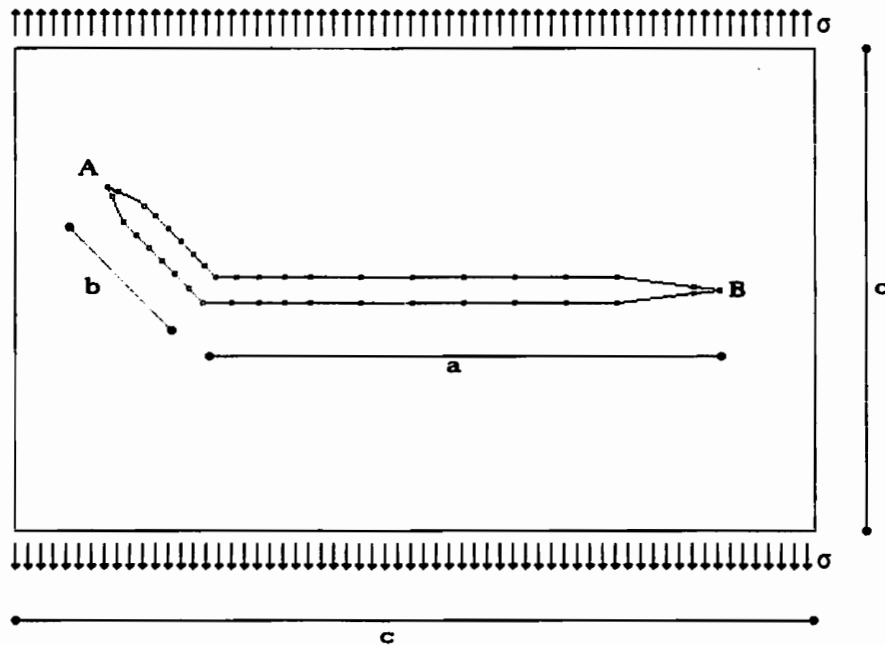
Die dimensionslosen K-Faktoren aus der REM-Berechnung weichen maximal um 0,4% von den im Compendium of Stress Intensity Factors veröffentlichten Werten von Isida [44,45] ab (Tab. 8.5).

Lastfall	RiB	$F_I$	$F_I^*$	$\Delta F_I^*$	$F_{II}$	$F_{II}^*$	$\Delta F_{II}^*$
Zug	mitte	0,862	0,864	+0,2 %	---	0,000	---
	außen	0,915	0,916	+0,1 %	---	0,015	---
Schub	mitte	---	0,000	---	1,035	1,031	-0,4 %
	außen	---	0,021	---	---	1,017	---

Tab. 8.5: Parallele Risse unter Zug und Schub

### 8.4.6. Abgeknickter RiB

Ein unter einem Winkel von  $45^\circ$  abgeknickter RiB in der unendlichen Scheibe wird durch konstante Zugspannungen beansprucht. Der waagerechte RiBbereich wird durch 12, der diagonale RiBbereich durch 8 Randelemente unterschiedlicher Längen dargestellt. Die unendliche Scheibe wird durch ein Quadrat aus 4 Elementen angenähert, deren Länge ca. der 30fachen RiBlänge entspricht (Abb. 8.14).



Systemkennwerte:

$a = 14,1421$                        $E = 10$   
 $b = 0,2 a$                           $\nu = 0,2$   
 $c = 400$

Abb. 8.14: Abgeknickter RiB (nicht maßstäblich)

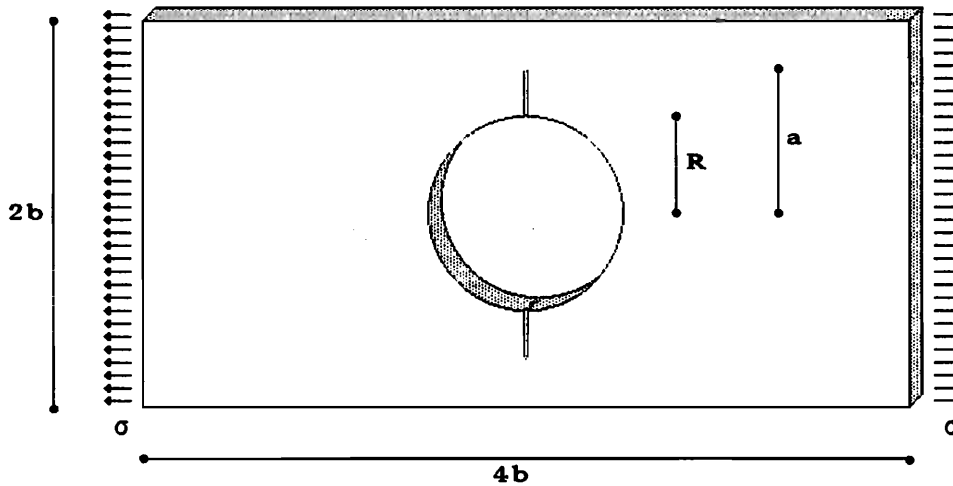
Als Vergleichswerte werden die von Mews (me) [56] mit einem REM-Modell aus 80 Elementen unter Verwendung Greenscher Funktionen und Substruktur-Technik berechneten K-Faktoren herangezogen (Tab. 8.7). Die maximale Differenz beträgt 1,1%.

Riß	$F_I^{me}$	$F_I^*$	$\Delta F_I^*$	$F_{II}^{me}$	$F_{II}^*$	$\Delta F_{II}^*$
A	0,4514	0,4527	+0,3%	0,4214	0,4168	-1,1%
B	0,7522	0,7500	-0,3%	0,0213	0,0212	-0,5%

Tab.8.7: K-Faktoren des abgeknickten Risses

### 8.4.6. Kerbrißproblem

In Abb. 8.15 ist eine gezogene Rechteckscheibe mit zwei Rissen an einer kreisförmigen Öffnung dargestellt.



Systemkennwerte:

- a = 45
- b = 60
- R = 30
- $\nu = 0,30$
- EVZ

Abb. 8.15: Kerbrißproblem

Die Spannungsintensitätsfaktoren dieses Kerbrißproblems wurden von Newman [62] mittels eines Randkollokationsverfahrens berechnet und sind im Compendium of Stress Intensity Factors [71] für verschiedene Längenverhältnisse mit einer Genauigkeit von 1% wiedergegeben. Für  $a = 0,75b$  und  $R = 0,5b$  erhält man

$$K_I = 1,99 \sigma \sqrt{\pi a}$$

Wegen der doppelten Symmetrie ist es ausreichend, nur ein Viertel des Systems zu diskretisieren. Das hier verwendete Rechenmodell besteht aus 36 Randlelementen mit 78 Knoten (Abb. 8.16). An der Ribspitze wird je ein QP- und ein TSQP-Element verwendet ( $l/a=0,25$ ), bei den übrigen Elementen handelt es sich um geradlinige bzw. Kreisbogen-Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen.

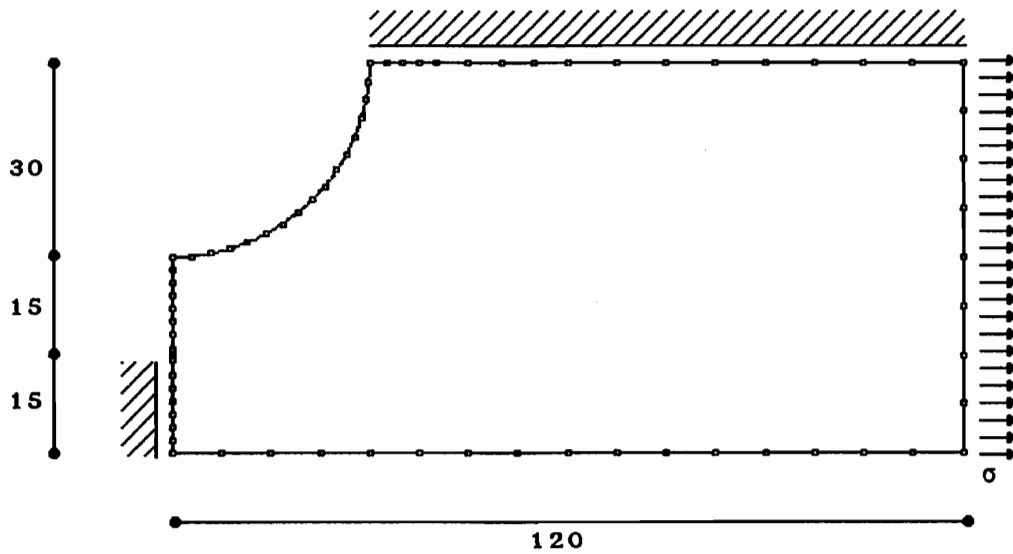


Abb. 8.16: Rechenmodell des Kerbrißproblems

Aus den mit der REM berechneten Knotenverschiebungen erhält man durch Einsetzen in die Zwei-Punkt-Verschiebungsformeln die in Tab. 8.8 wiedergegebenen Faktoren. Die Abweichung der eigenen Ergebnisse beträgt hier 0,2%.

	$F_I$	$\Delta K_I$
Blandford (bl)	1,977	-0,7 %
Geis (*)	1,985	-0,2 %

Tab. 8.8: K-Faktoren des Kerbrißproblems



### 8.4.7. Teilweise schließender Randriß

Es wird untersucht, inwieweit das vorgestellte Verfahren auch zur Untersuchung teilweise schließender Risse geeignet ist. In Abb. 8.17 ist eine symmetrische Rechteckscheibe mit Randriß unter Biegebeanspruchung dargestellt.

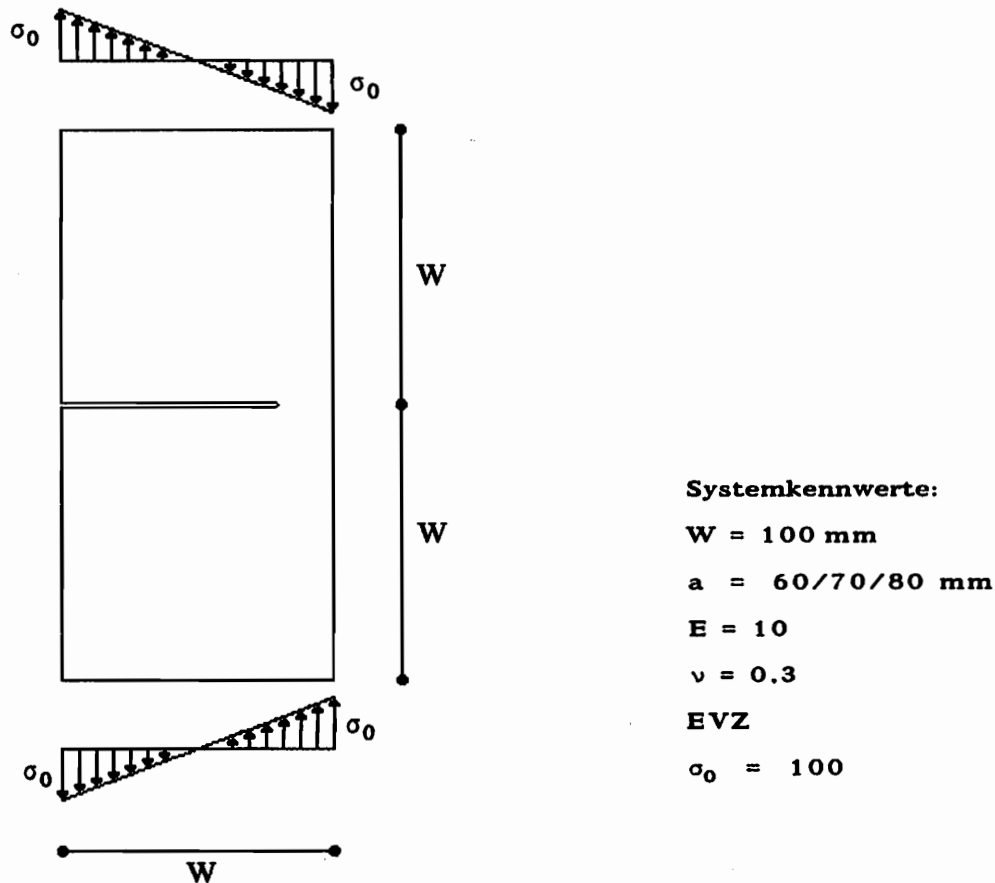


Abb. 8.17: Rechteckscheibe mit Randriß unter Biegung

Für positives  $\sigma_0$  öffnet sich der Riß, für negatives  $\sigma_0$  und  $a > 0,5W$  wird der Riß teilweise geschlossen. Eine iterative Änderung der Randbedingungen und Verschiebung der Knotenpunkte auf dem Rißrand ermöglicht es, die Länge  $c$  der auftretenden Kontaktzone zu bestimmen. Entscheidendes Kriterium ist dabei, daß zwischen den in Kontakt befindlichen Rißflanken nur Druckkräfte übertragen werden können.

Wegen der vorhandenen Symmetrie ist es wieder ausreichend, nur die obere Hälfte der Struktur zu diskretisieren. Die Rechenmodelle für den Fall von positivem  $\sigma_0$  bestehen aus jeweils 53 Knoten (Abb. 8.18). Für negatives  $\sigma_0$  erfolgt eine Verfeinerung der Randeinteilung in der Rißachse, die Modelle besitzen 64 Knoten (Abb. 8.19).

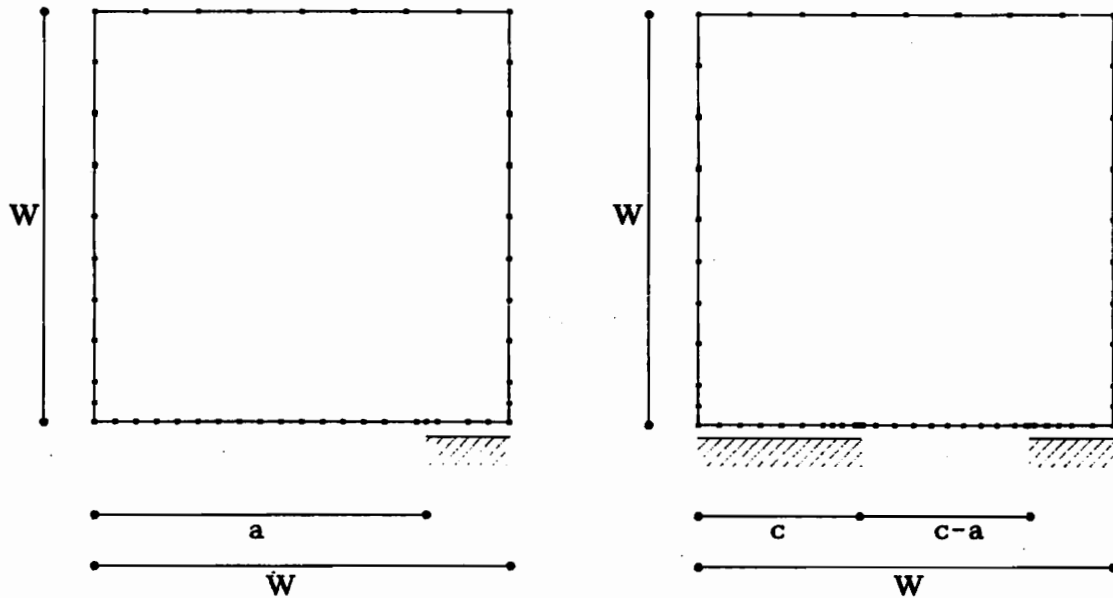


Abb. 8.18: Modell für klaffenden RiB

Abb. 8.19: Modell für schließenden RiB

Für positives Biegemoment und Rißlängen  $a \geq 0,6W$  gibt Wilson [83] einen Näherungsausdruck zur Berechnung des K-Faktors an:

$$K_I = 3,99 \frac{M}{(b-a)^{1,5}}$$

Die so berechneten Werte werden in Tab. 8.9 zunächst den eigenen Ergebnissen gegenübergestellt.

a/W	$K_I$ Wilson	$K_I$ REM	$\Delta$
0,6	2629	2638	+0,3 %
0,7	4047	4060	+0,3 %
0,8	7435	7461	+0,3 %

**Tab. 8.9: Scheibe mit klaffendem RiB**

Für negatives  $\sigma_0$  wurde dieselbe Problemstellung von Karami und Fenner [47] mit einer Multi-Domain-BEM für unterschiedliche RiBlängen untersucht, wobei die zugehörigen K-Faktoren über eine J-Integral-Formulierung berechnet wurden. In Tab. 8.10 werden ihre Ergebnisse mit den eigenen Resultaten verglichen.

a/W	c			$K_I^- / K_I^+$		
	K.u.F	REM	$\Delta$	K.u.F.	REM	$\Delta$
0,6	0,49	0,468	-4,5 %	0,0231	0,0230	-0,4 %
0,7	0,44	0,431	-2,0 %	0,0443	0,0437	-1,4 %
0,8	0,39	0,388	-0,5 %	0,0526	0,0468	-11,0 %

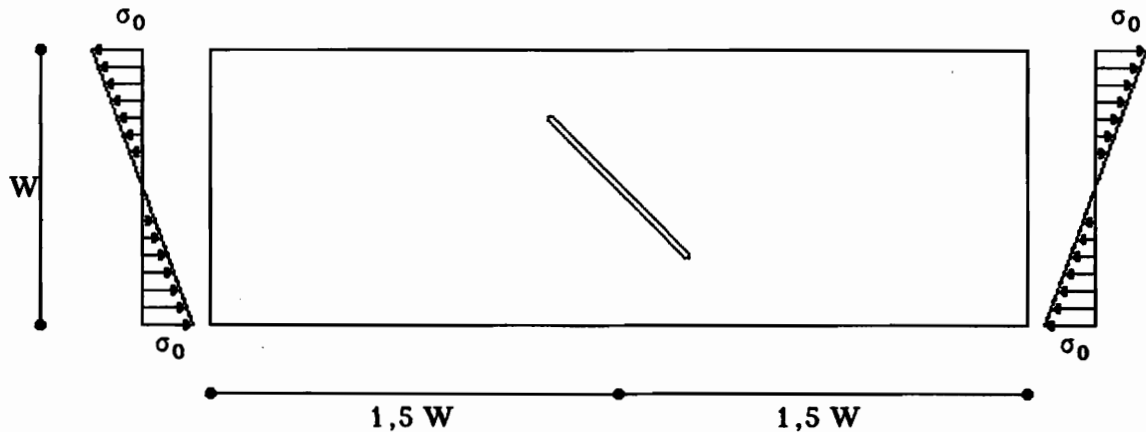
**Tab. 8.10: Teilweise schließender RandriB**

Die Ergebnisse des Modells mit klaffendem RiB stimmen sehr gut mit denen von Wilson überein, der für seine Formel einen maximalen Fehler von 1% angibt. Für den teilweise schließenden RiB treten dagegen relative Abweichungen von bis zu 11% auf.

#### 8.4.8. Teilweise schließender, schräger InnenriB

Das Beispiel eines schrägen Innenrisses in einer Rechteckscheibe unter Biegebeanspruchung (Abb. 8.20) wurde sowohl von Karami und Fenner [47] als auch von Mews [56] untersucht. Die Länge der Kontaktzone wird nun durch iterative Verschiebung der sich schließenden RiBspitze ermittelt. Entscheidendes Kriterium

ist dabei, daß der Spannungsintensitätsfaktor an dieser Stelle zu null wird. Diese Vorgehensweise ist nur dann möglich, wenn die Reibung zwischen den in Kontakt befindlichen Rißflanken so groß ist, daß sich diese nicht gegeneinander verschieben können. Das verwendete Rechenmodell besteht aus 34 Elementen und 72 Knoten, wobei der Riß durch 16 Elemente dargestellt wird (Abb. 8.21).



Systemkennwerte:

$W = 240$                        $E = 10$                        $\sigma_0 = 100$   
 $a = 84,85$                        $\nu = 0,2$   
 EVZ

Abb. 8.20: Teilweise schließender, schräger RiB

In Tab. 8.10 werden die eigenen Resultate den Ergebnissen von Karami und Fenner gegenübergestellt, wobei letztere zunächst in die hier verwendete, dimensionslose Form umgerechnet worden sind.

	K.u.F.	REM	$\Delta(\text{REM})$	$\Delta(\text{Mews})$
c	0,6 a	0,59 a	- 2 %	- 3 %
$F_I$	0,171	0,152	-11 %	-10 %
$F_{II}$	0,187	0,138	-26 %	-25 %

Tab. 8.10: schräger RiB

Die Ausdehnung  $c$  der Kontaktzone stimmt für alle drei Berechnungen gut überein. Die berechneten Spannungsintensitätsfaktoren liegen jedoch deutlich unterhalb der Referenzwerte von Karami und Fenner, zeigen dafür aber eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Mews.

#### **8.4.6. Bewertung**

Am Beispiel der CT-Probe zeigt sich bereits, daß sich statische Spannungsintensitätsfaktoren mit den neuen, hier vorgestellten Verschiebungs- und Spannungsformeln (8.10-8.12, 8.17) mit großer Genauigkeit berechnen lassen. Auch die Ein-Knoten-Spannungsformel (8.15) von Martinez und Dominguez liefert gute Ergebnisse, während das Resultat der Formel (8.6) von Blandford et al. mit einem Fehler von mehr als 4% nicht zufriedenstellend ist. Diese Tendenz wird durch die Ergebnisse des Kerbrißproblems bestätigt. Zwar treten hier bei Verwendung der Blandford-Formel (8.6) nicht so große Abweichungen auf wie im ersten Beispiel, jedoch liefert die eigene Verschiebungsformel (8.10-8.12) wiederum eine bessere Übereinstimmung mit den Vergleichswerten.

Der Vorteil der analytischen Randintegration wird in den nicht-symmetrischen Beispielen deutlich. Ohne die sonst übliche Verwendung zusätzlicher Innenränder in der Rißachse (Substruktur-Technik) [11,32,73], die die korrekte Wiedergabe der Rißrandverschiebungen negativ beeinflussen können, konnte hier eine sehr gute Übereinstimmung der berechneten Spannungsintensitätsfaktoren mit Vergleichswerten aus der Literatur erzielt werden. Die oft vertretene Auffassung, die Verschiebungswerte in unmittelbarer Nähe der Rißspitze seien höchst ungenau und dürften daher nicht in die Rechnung eingehen, kann nicht bestätigt werden. Bei den nicht-symmetrischen Innenrißproblemen mit bereichsweise konstanter Randlast war eine Diskretisierung mit nur 2 Elementen pro Rißlänge  $a$ , beim Randrißproblem mit 5 Elementen ausreichend, um die gesuchten Spannungsintensitätsfaktoren mit einer Genauigkeit von ca. 1% zu bestimmen.

Auch nicht-symmetrische Problemstellungen mit teilweise schließenden Rissen lassen sich mit der hier verwendeten Vorgehensweise iterativ lösen, wie das letzte der Beispiele zeigt. Unter Verwendung von 4 Elementen pro Rißlängen traten hier im Vergleich zu den Ergebnissen von Mews Abweichungen von nur ca 1% auf.

## **9. Die REM in der elasto-dynamischen Bruchmechanik**

Bei der Betrachtung dynamisch beanspruchter Bauteile ist zunächst zwischen harmonischen und schlagartig aufgebrachten Belastungen zu unterscheiden. Während ein harmonisch erregtes System nach Beendigung des Einschwingvorgangs in der Erregerfrequenz mitschwingt, stellt sich die Schwingungsantwort infolge schlagartiger Belastung i.a. als Überlagerung mehrerer Eigenformen und -frequenzen dar [79]. Bei gekerbten oder gerissenen Bauteilen ist letztere von besonderem Interesse, da die hieraus resultierenden Spannungsüberhöhungen oftmals deutlich über den äquivalenten statischen Werten liegen.

Rißprobleme unter dynamischer Belastung können weiterhin in zwei Klassen unterteilt werden. Beim stationären Problem bleibt die Länge des Risses über den betrachteten Zeitraum konstant, während sich der Riß beim instationären Problem ausbreitet.

Wie im statischen Fall sind analytische Lösungen auch bei dynamisch beanspruchten Rissen nur für einige wenige Sonderfälle bekannt, es existieren jedoch keine allgemeinen Lösungen für begrenzte Lösungsgebiete (reale Bauteile). Hier besteht neben einer experimentellen Vorgehensweise, die eine recht aufwendige Meßtechnik erfordert, nur die Möglichkeit zur numerischen Behandlung des Problems.

Die meisten Veröffentlichungen, die sich mit der Untersuchung dynamisch beanspruchter Risse in begrenzten Gebieten beschäftigen, beschränken sich dabei auf ebene, symmetrische Problemstellungen, die im Mode I belastet werden. Ergebnisse experimenteller Untersuchungen von Kerbschlagbiegeproben (Dreipunktbiegeproben) stammen u.a. von Böhme und Kalthoff [12,13] und von Wich [81]. Numerische Berechnungen von Kerbschlagbiegeproben oder Zugproben mit Innen- oder Außenriß mittels FEM oder FDM finden sich in den Arbeiten von Pries [68], Mall [52], Peuser [65] und Wich [81]. Kraft [48] hat zusätzlich ein Mode II-Problem sowie Kerb- und Kerbrißprobleme mit der FEM untersucht. Ein Beitrag zur Anwendung der REM auf diesem Gebiet stammt von Dominguez und Gallego [31], die eine Zugprobe mit symmetrischem Innenriß mit einer Formulierung im Zeitbereich untersucht haben.

Wie die vorstehenden Beispiele gezeigt haben, lassen sich Spannungsintensitätsfaktoren statisch belasteter Bauteile mit der REM unter Verwendung spezieller Rißspitzenelemente auch bei vergleichsweise grober Randeinteilung mit hoher Genauigkeit berechnen. Durch Kombination mit den beschriebenen Randelement-Verfahren

mit konstanter Massenmatrix wird diese Vorgehensweise nun zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens verschiedener Scheiben mit RiB eingesetzt.

### 9.1 Beispiele für dynamische K-Faktoren

Experimentelle Untersuchungen des RiBverhaltens unter dynamischer Beanspruchung werden meist mit dem sogenannten Kerbschlagbiegeversuch durchgeführt, dessen prinzipieller Aufbau in Abbildung 9.1 wiedergegeben ist.

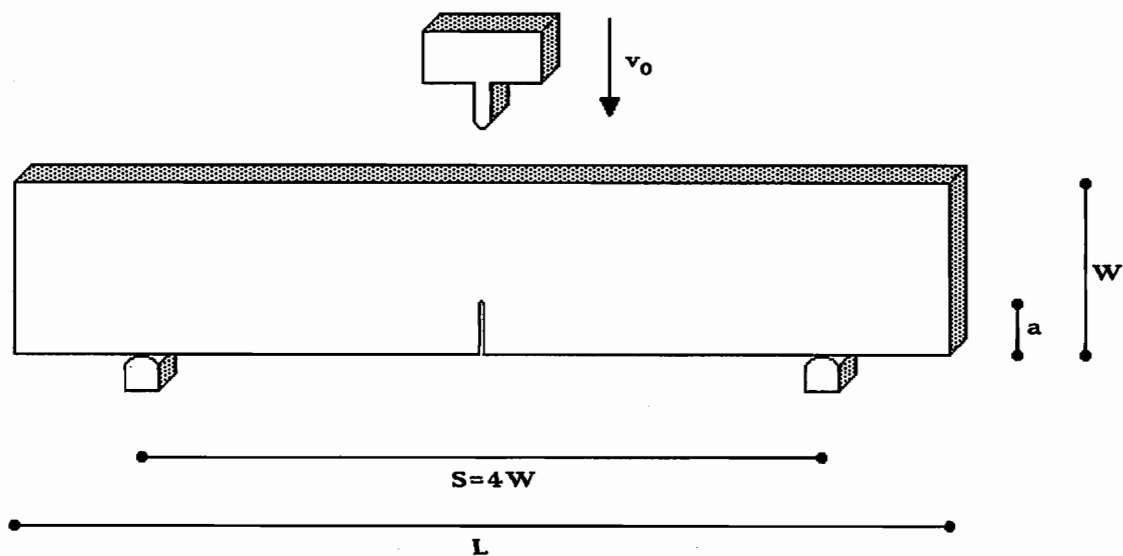


Abb. 9.1: Kerbschlagbiegeversuch

Die Beanspruchung erfolgt dabei durch das Aufschlagen eines Hammers auf die Probe. Grundsätzlich zu unterscheiden ist hier zwischen Versuchsanordnungen mit und ohne Widerlager. Weitere, für das Systemverhalten wesentliche Parameter sind die Abmessungen des Probekörpers, die Nachgiebigkeit der Auflager sowie die Kennwerte des verwendeten Hammers.

#### 9.1.1 Kerbschlagbiegeprobe ohne Auflager

Das Verhalten einer "frei fliegenden" Dreipunktbiegeprobe, die mittels eines speziellen Versuchsaufbaus gegen ein mittiges Lager geschossen wird, wurde von Wich [81] näher untersucht. Die Probe aus einer Aluminiumlegierung hatte dabei folgende Systemkennwerte:

$W = 40 \text{ mm}$	$E = 73000 \text{ N mm}^{-2}$	$\nu = 0,32$
$L = 168 \text{ mm}$	$\rho = 2795 \text{ kg m}^{-3}$	<b>EVZ</b>
$a = 20 \text{ mm}$		

Zur Wahl einer geeigneten Randeinteilung erfolgt zunächst eine statische Berechnung. Der K-Faktor einer gleichartigen aufgelagerten Probe wurde von Brown und Srawley [22] mittels Randkollokation mit einer maximalen Abweichung von 1% ermittelt und kann wieder dem Compendium of Stress Intensity Factors entnommen werden. Für eine Kraft  $F = 500\text{N}$  erhält man den Wert

$$K_I = 839,7 \text{ N mm}^{-1.5}$$

Wegen des symmetrischen Systemaufbaus und der symmetrischen Belastung genügt es, für die numerische Berechnung nur eine Hälfte des Systems zu diskretisieren (Abb. 9.2).

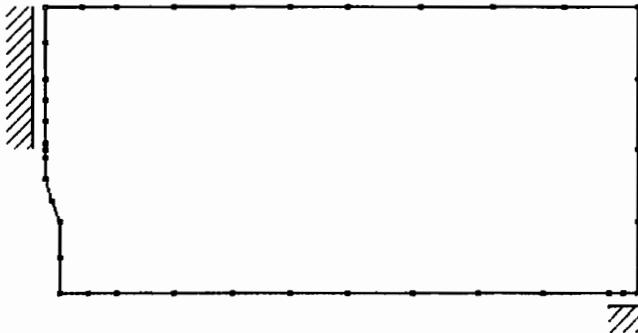


Abb. 9.2: Rechenmodell W40 der Biegeprobe

Dieses Rechenmodell mit 40 Randknoten, 17 Elementen mit quadratischem Ansatz und je einem QP- und einem TSQP-Element der Länge  $\ell = 4\text{mm}$  ( $a/\ell = 0,20$ ) an der Rißspitze liefert unter Verwendung der Zwei-Punkt-Verschiebungsformel den statischen Spannungsintensitätsfaktor

$$K_I^* = 836,7 \text{ N mm}^{-1.5} \quad [ -0,4\% ]$$

Die Übereinstimmung dieser Werte mit dem Vergleichswert ist sehr gut, so daß dieselbe Rißdiskretisierung auch für die dynamische Untersuchung verwendet wird.



Die in den Abbildungen 9.3 bis 9.5 dargestellten Rechenmodelle mit jeweils 38 Randknoten sind entsprechend der verwendeten Versuchsanordnung in y-Richtung frei verschieblich, so daß die Auflagerkräfte  $A(t)$  entfallen.

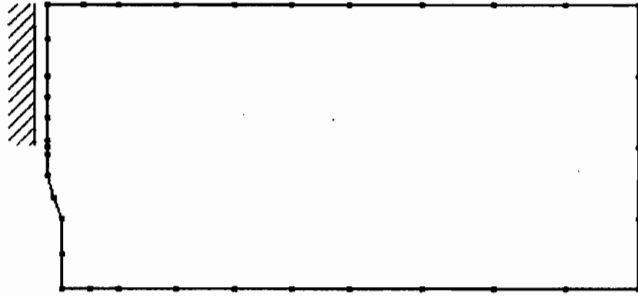


Abb. 9.3: Modell W38 mit 38 Randknoten

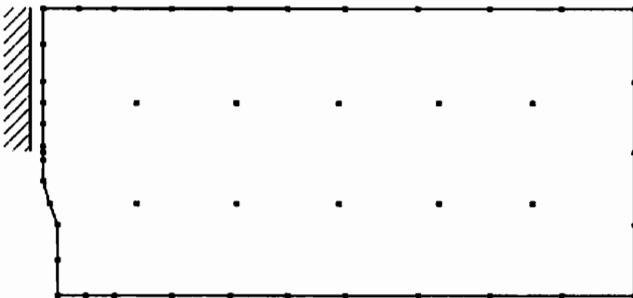


Abb. 9.4: Modell W48 mit 38 Rand- und 10 Innenknoten

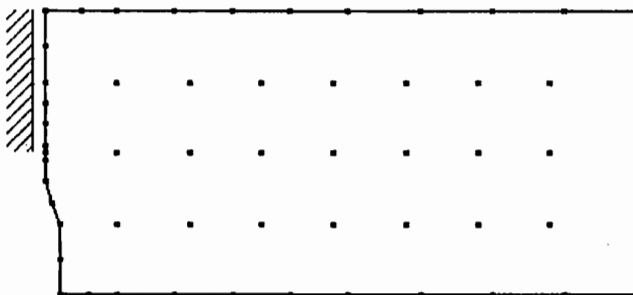


Abb. 9.5: Modell W59 mit 38 Rand- und 21 Innenknoten

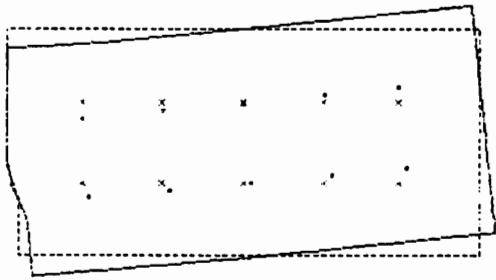
Zunächst werden die Eigenfrequenzen und -formen dieser drei Modelle berechnet und mit denjenigen verglichen, die Wich [81] mittels eines Finite-Element-Modells aus 76 8-Knoten-Scheibenelementen mit insgesamt 269 Knotenpunkten berechnet hat (Tab. 9.1).

Modell	FEM	W38	W38	W48	W48	W59
Ansatz	-	N	A	N	A	A
Knoten	269	38	38	48	48	59
$\omega_1$	0	1	1	1	1	1
$\omega_2$	25421	0,964	0,977	0,972	0,976	0,976
$\omega_3$	84459	0,999	1,004	0,986	0,989	0,987
$\omega_4$	151827	1,006	1,003	0,973	0,986	0,981
$\omega_5$	227689	1,080	1,046	1,002	1,012	1,000
$\omega_6$	274766	1,111	1,089	1,009	1,022	1,003
$\omega_7$	322998	1,119	1,106	1,030	1,043	1,017
$ \Delta\omega $	-	5,04%	3,87%	1,57%	1,80%	0,94%
kompl. $\omega$	0	32	4	32	4	14
1.kompl. $\omega$	-	7	37	13	48	30

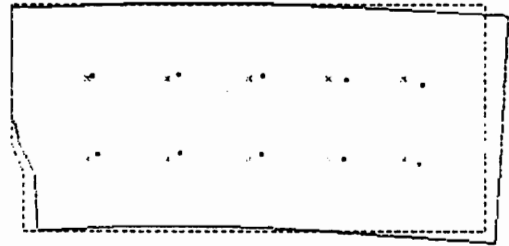
**Tab. 9.1: Eigenfrequenzen der Biegeprobe**

Die Tabelle enthält die ersten sieben Eigenkreisfrequenzen aus der Arbeit von Wich (Spalte 2). Für die REM-Modelle wird jeweils das Verhältnis gegenüber diesen Referenzwerten angegeben (Spalten 3-7). Es ist erkennbar, daß die Einführung der zusätzlichen Innenknoten bei identischer Randeinteilung zu einer wesentlich höheren Genauigkeit der 5. bis 7. Eigenfrequenz führt. Auffallend ist weiter, daß der A-Ansatz deutlich weniger komplexe Eigenfrequenzen liefert als der Nardini-Ansatz, die zudem in höheren Moden auftreten. Die Eigenformen des Modells W48 mit A-Ansatz sind in Abb. 9.6 wiedergegeben.

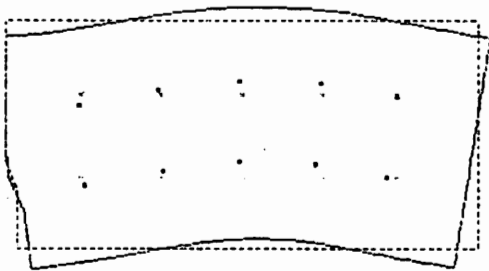
Der Kraftverlauf  $F(t)$  wurde von Wich für eine mit einer Geschwindigkeit von  $3,97\text{ms}^{-1}$  gegen das Widerlager geschossene Probe gemessen (Abb. 9.7) und der resultierende Spannungsintensitätsfaktor  $K_T(t)$  dann mittels der FEM aus den Knotenverschiebungen und -spannungen in Rißnähe berechnet.



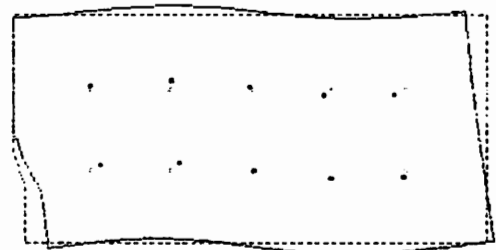
$$\omega_2 = 24818 \text{ s}^{-1}$$



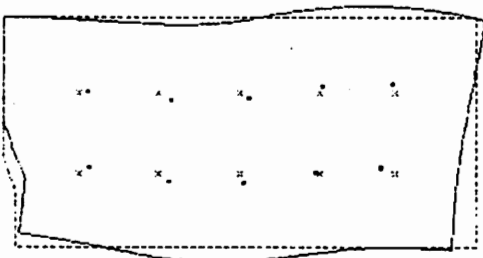
$$\omega_3 = 83530 \text{ s}^{-1}$$



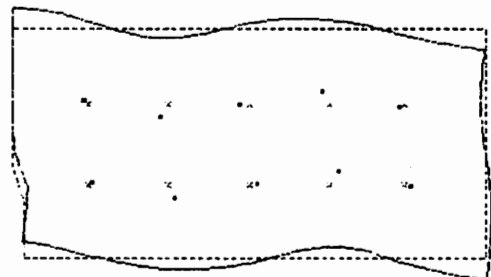
$$\omega_4 = 149716 \text{ s}^{-1}$$



$$\omega_5 = 230440 \text{ s}^{-1}$$



$$\omega_6 = 280824 \text{ s}^{-1}$$



$$\omega_7 = 336940 \text{ s}^{-1}$$

Abb. 9.6: Eigenformen der Biegeprobe

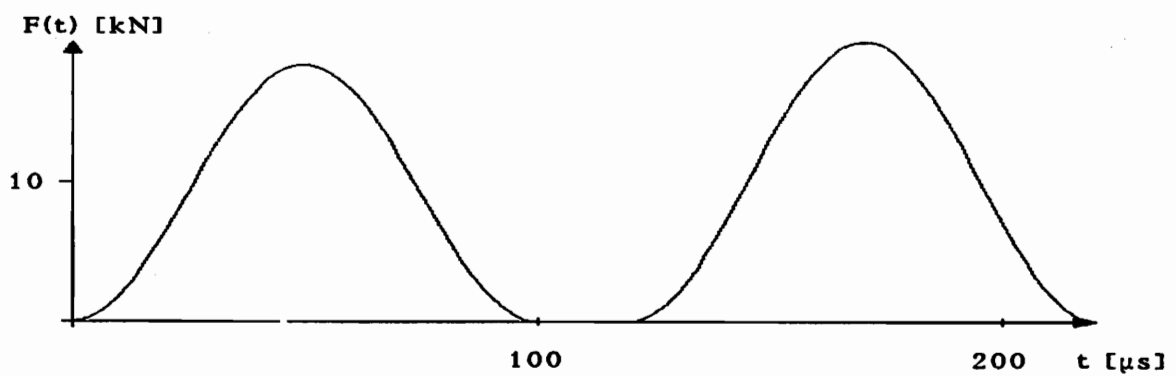


Abb. 9.7: Kraftverlauf am Widerlager

Dieser Kraftverlauf wird nun durch 200 innerhalb einer Schrittweite von  $\Delta t = 1,1 \mu\text{s}$  jeweils konstante Werte angenähert. Der hieraus resultierende, mit der REM-Modalanalyse berechnete Spannungsintensitätsfaktors  $K_{\perp}^*(t)$  des Modells W38 mit A-Ansatz, Modalordnung  $m = 10$ , ist in Abb. 9.8 den von Wich mit der FEM ermittelten Werten gegenübergestellt.

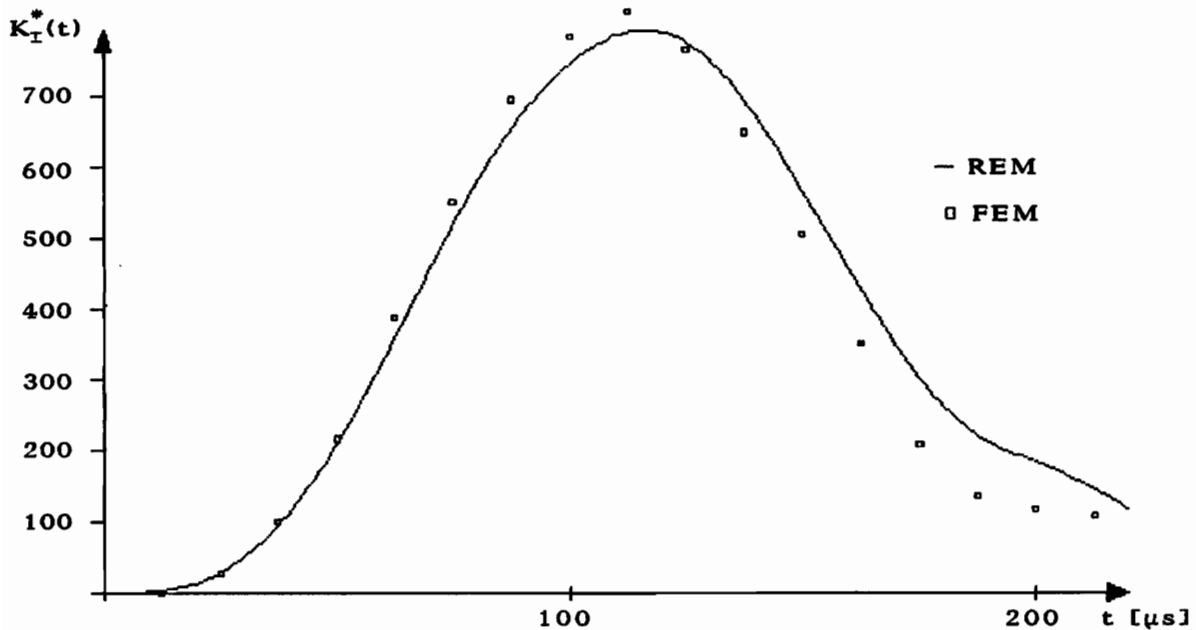


Abb. 9.8: Zeitverlauf des Spannungsintensitätsfaktors, Modalordnung  $m=10$

Während Wich ein Maximum von ca.  $820 \text{ Nmm}^{-1,5}$  berechnet hat, liefert die REM

$$\max K_{\perp}^*(t) = 796 \text{ Nmm}^{-1,5} \quad [ -2,9\% ]$$

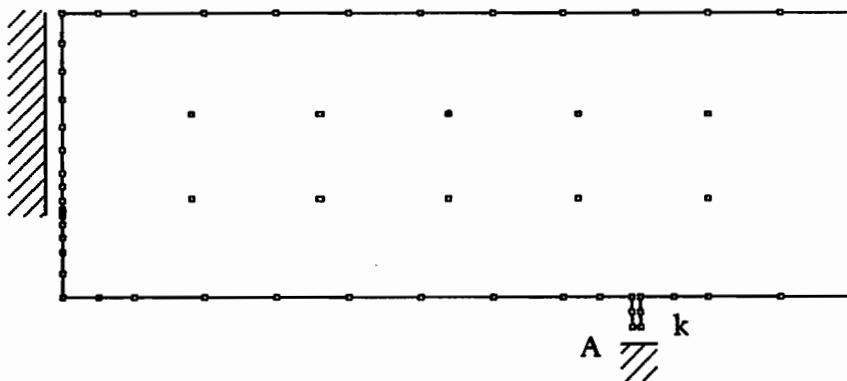
Der mit der REM berechnete K-Faktor-Verlauf stimmt qualitativ gut mit den Vergleichswerten überein, zeigt jedoch eine geringe zeitliche Verschiebung, die auf die Abweichung der zweiten Eigenfrequenz ( $T_2 = 247 \mu\text{s}$ ) zurückzuführen ist. Die größte Abweichung tritt bei  $t = 180 \mu\text{s}$  auf und beträgt etwa  $75 \text{ Nmm}^{-1,5}$  bzw. 9% des Maximalwertes. Die Ursache hierfür liegt möglicherweise in geringen Unterschieden der Randdiskretisierung der beiden Rechenmodelle respektive einer ungenauen Wiedergabe des Kraftverlaufs, der aus einer Abbildung in der Arbeit von Wich abgelesen wurde.

### 9.1.2. Kerbschlagbiegeprobe mit Auflagern

Schlagreaktionskurven verschiedener Kerbschlagbiegeproben mit Auflagern wurden von Böhme und Kalthoff [12,13] am Fraunhofer Institut für Werkstoffmechanik experimentell ermittelt. Für die Vergleichsrechnung wurde eine Probe mit verlängerten Probenenden gewählt, da diese im Gegensatz zu den kurzen Proben während des Versuchsablaufs nur unwesentlich von den Widerlagern abhebt. Die Federsteifigkeit des Lagers wird von Böhme [12] angegeben als

$$K_{\text{Lager}} \approx 7.600 \text{ N mm}^{-1}$$

Das Rechenmodell der Probe (Abb. 9.9) besteht aus 26 Randelementen und 66 Knotenpunkten. Die Federeigenschaften des Auflagers werden durch eine Erweiterung des Rechenmodells um ein kleines Teilgebiet  $\Omega^+$  berücksichtigt.



Systemkennwerte:

$W = 100 \text{ mm}$	$E = 3380 \text{ N mm}^{-2}$	$\nu = 0,33$
$L = 550 \text{ mm}$	$\rho = 1216 \text{ kg m}^{-3}$	EVZ
$a = 30 \text{ mm}$	$k = 7,6 \text{ kN mm}^{-1}$	

Abb. 9.9: Rechenmodell der Kalthoff-Probekörper

Nach Srawley berechnet sich der statische Spannungsintensitätsfaktor des untersuchten Probekörpers zu

$$K_I = 6,085 \frac{P}{B \sqrt{W}}$$

Die REM-Untersuchung liefert hier

$$K_I^* = 6,044 \frac{P}{B \sqrt{W}} \quad [ -0,7 \% ]$$

Die dynamische Berechnung erfolgt nun mit dem von Böhme und Kalthoff gemessenen Kraftverlauf an der Spitze eines Hammers mit einer Masse von 4,9 kg, der mit einer Geschwindigkeit von  $1 \text{ ms}^{-1}$  auf die Probe aufschlägt (Abb. 9.10). In Abb. 9.11 ist der mit der Modalanalyse mit einer Modalordnung  $m=20$  berechnete  $K_I(t)$ -Verlauf den experimentellen Ergebnissen von Böhme und Kalthoff gegenübergestellt.

Böhme und Kalthoff haben festgestellt, daß es bei vielen in der dynamischen Werkstoffprüfung verwendeten Probeabmessungen zu Kontaktverlusten zwischen Probe und Auflagern kommt. In diesen Fällen kann die Darstellung der Lagereigenschaften durch ein einfaches Feder-Modell zu einer Verfälschung der Ergebnisse führen. Eine korrekte Wiedergabe ist dann nur noch durch eine Einbeziehung der Kontaktbedingungen in das Rechenmodell möglich, woraus eine nicht unerhebliche Steigerung des Rechenaufwands resultiert. Wie aus Abb. 9.12 ersichtlich ist, hebt die hier untersuchte Probe jedoch nur unwesentlich von den Auflagern ab, so daß der zu erwartende Einfluß auf die Systemantwort gering ist. Die Lagereigenschaften werden daher über den gesamten Zeitbereich durch das oben genannte Feder-Modell angenähert.

Die Übereinstimmung des experimentell ermittelten und des mit der Modalanalyse berechneten  $K_I(t)$ -Verlaufs kann als gut bezeichnet werden. Der rechnerische Maximalwert beträgt  $119 \text{ Nmm}^{-1}$  und liegt damit ca. 4% über dem experimentell ermittelten Wert. Die Abweichungen zwischen den zeitlichen Verläufen liegen mit maximal etwa 10% innerhalb desselben Genauigkeitsbereiches, den sowohl Wich als auch Peuser beim Vergleich zwischen ihren numerisch und experimentell ermittelten Ergebnissen festgestellt haben. Ursachen für diese Unterschiede können neben eventuell vorhandenen Meßfehlern sowohl in numerischen Ungenauigkeiten als auch in einer ungenauen Beschreibung des gesamten Systemverhaltens durch das Rechenmodell liegen.

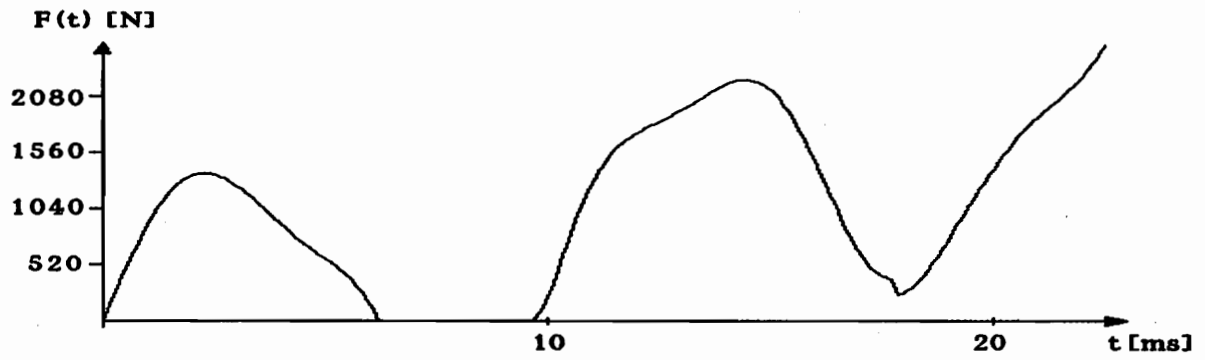


Abb. 9.10: Kraftverlauf an der Hammerspitze

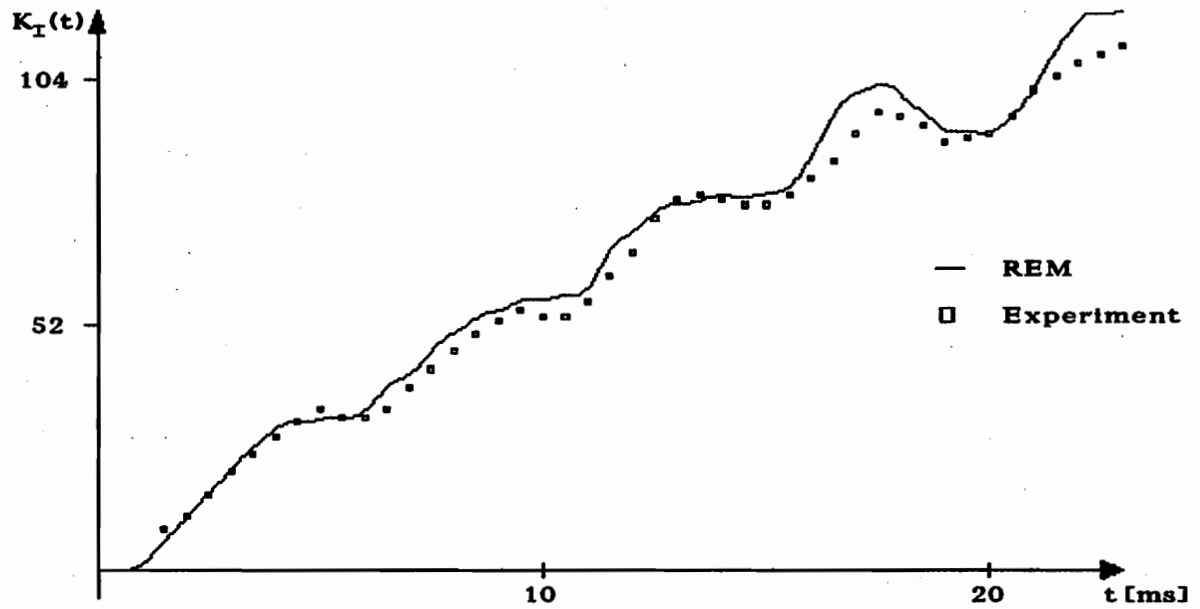


Abb. 9.11:  $K_T(t)$ , Modalordnung  $m=20$

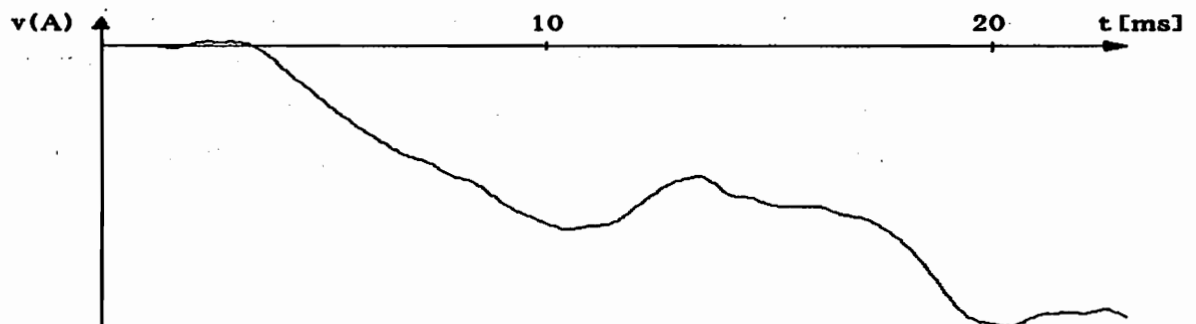
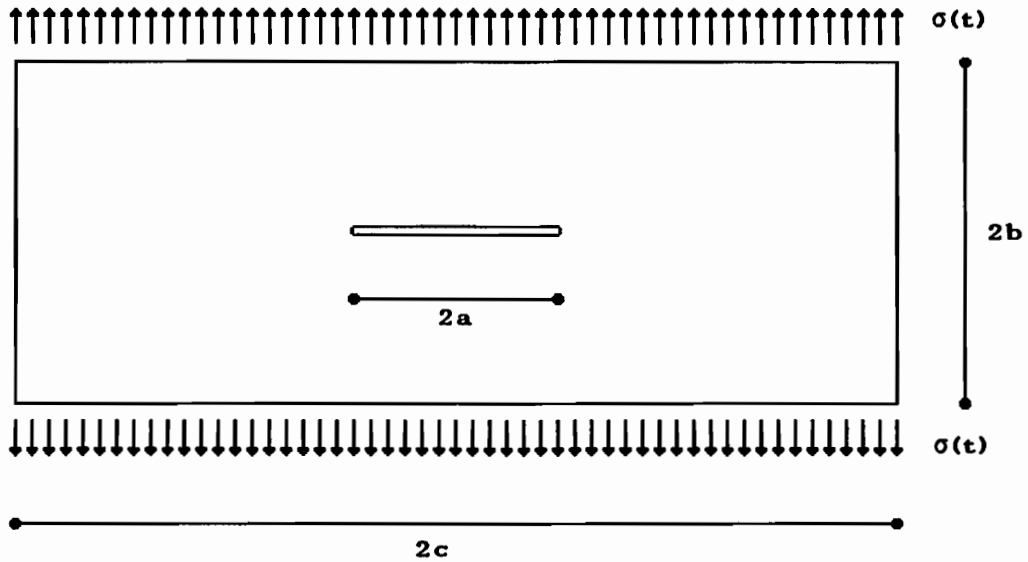


Abb. 9.12: Verschiebungsverlauf am Widerlager

### 9.1.3. Rechteckscheibe mit Innenriß

Das Verhalten der in Abb. 9.12 dargestellten Rechteckscheibe unter stoßartig aufgebrachtener Belastung wurde von Kraft [48] näher untersucht.



Systemkennwerte:

$a = 12 \text{ mm}$	$E = 7596,4 \text{ Nmm}$	$\nu = 0,292$
$b = 20 \text{ mm}$	$\rho = 24500 \text{ kg m}^{-3}$	EVZ
$c = 52 \text{ mm}$		

Abb. 9.12: Rechteckscheibe mit Innenriß

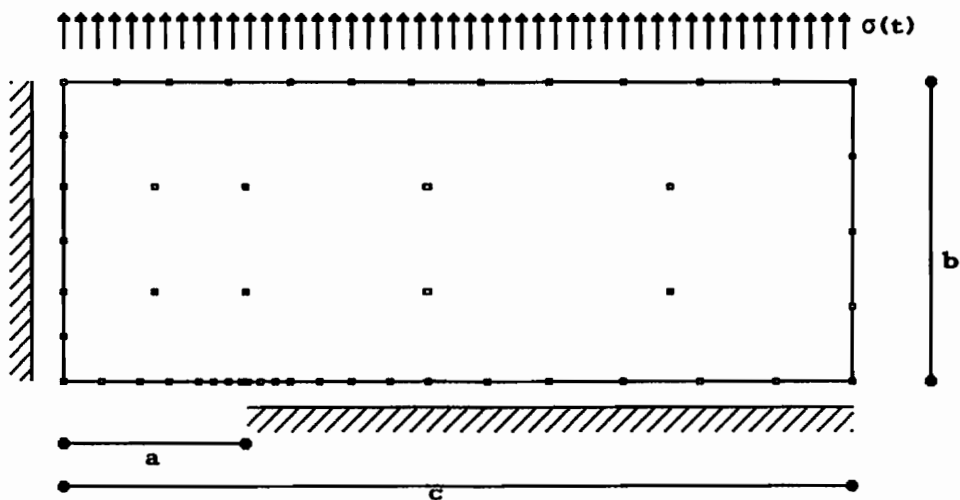


Abb. 9.13: Rechenmodell



Wegen der vorhandenen Symmetrien ist es für die Berechnung ausreichend, nur ein Viertel des Systems zu diskretisieren (Abb. 9.13). Das verwendete Modell besteht aus 22 Randelementen mit 49 Rand- und 8 Innenknoten. Dabei befinden sich an der Rißspitze wieder ein QP- und ein TSQP-Element mit einer Länge von je  $\ell = 1\text{mm}$  ( $\ell/a = 0,083$ ).

Für eine konstante Belastung  $\sigma_0 = 10\text{kN/mm}$  stimmt der erstmals von Isida [44] mittels Randkollokation ermittelte statische Spannungsintensitätsfaktor, der im Compendium of Stress Intensity Factors wiedergegeben ist, mit dem von Kraft berechneten Wert überein:

$$K_I = 1,354 \sigma_0 \sqrt{\pi a} = 83.135 \text{ Nmm}^{-1,5}$$

Aus den Rißrand-Knotenverschiebungen des hier verwendeten REM-Modells berechnet sich der Wert

$$K_I^* = 1,353 \sigma_0 \sqrt{\pi a} = 83.053 \text{ Nmm}^{-1,5} \quad [ -0,10\% ]$$

Die Abweichung ist wieder äußerst gering, so daß dasselbe Modell auch der dynamischen Berechnung zugrunde gelegt werden soll. Als Vergleichslösung dient der von Kraft mit einem FEM-Modell aus 356 Elementen mit 1554 Freiheitsgraden berechnete Zeitverlauf des Spannungsintensitätsfaktors  $K_I(t)$  infolge sprungartig aufgebrachtter Belastung (Abb. 9.14). Die REM-Lösung erfolgt mittels der Modalanalyse mit einer Modalordnung  $m = 16$ .

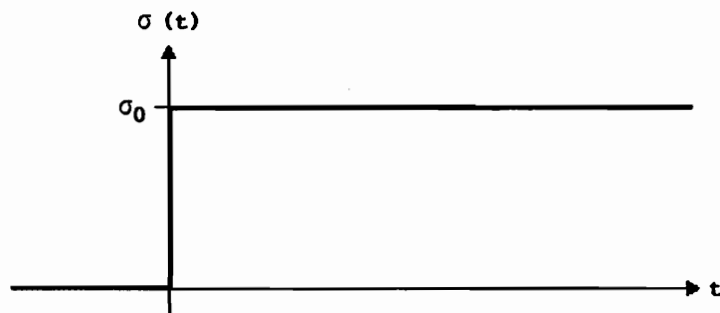


Abb. 9.14: Heaviside-Lastfunktion -  $\sigma = \sigma_0 H(t)$

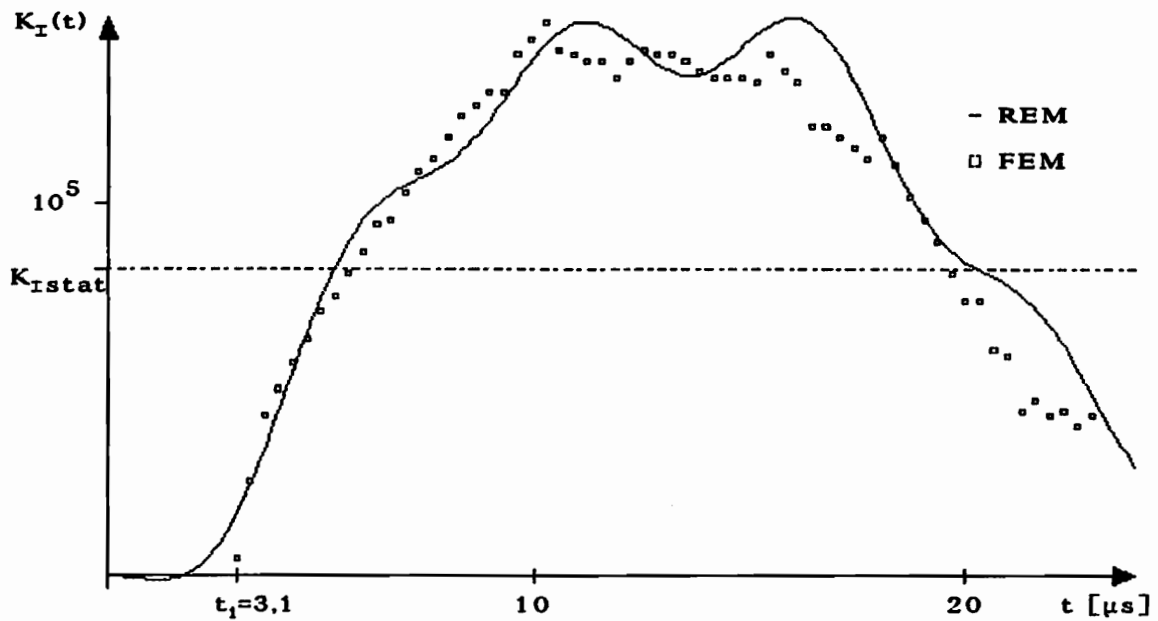


Abb. 9.15: Spannungsintensitätsfaktor  $K_{I\text{dyn}}$  für Modalordnung  $m=16$

Der Maximalwert des von Kraft berechneten Spannungsintensitätsfaktors beträgt

$$\max K_{I\text{dyn}} = 2,44 \sigma \sqrt{\pi a} = 149.800 \text{ Nmm}^{-1,5}$$

Aus dem Zeitverlauf der Knotenverschiebungen des REM-Modells erhält man (Abb. 9.15)

$$\max K_{I\text{dyn}}^* = 2,44 \sigma \sqrt{\pi a} = 150.838 \text{ Nmm}^{-1,5} \quad [ +0,7\% ]$$

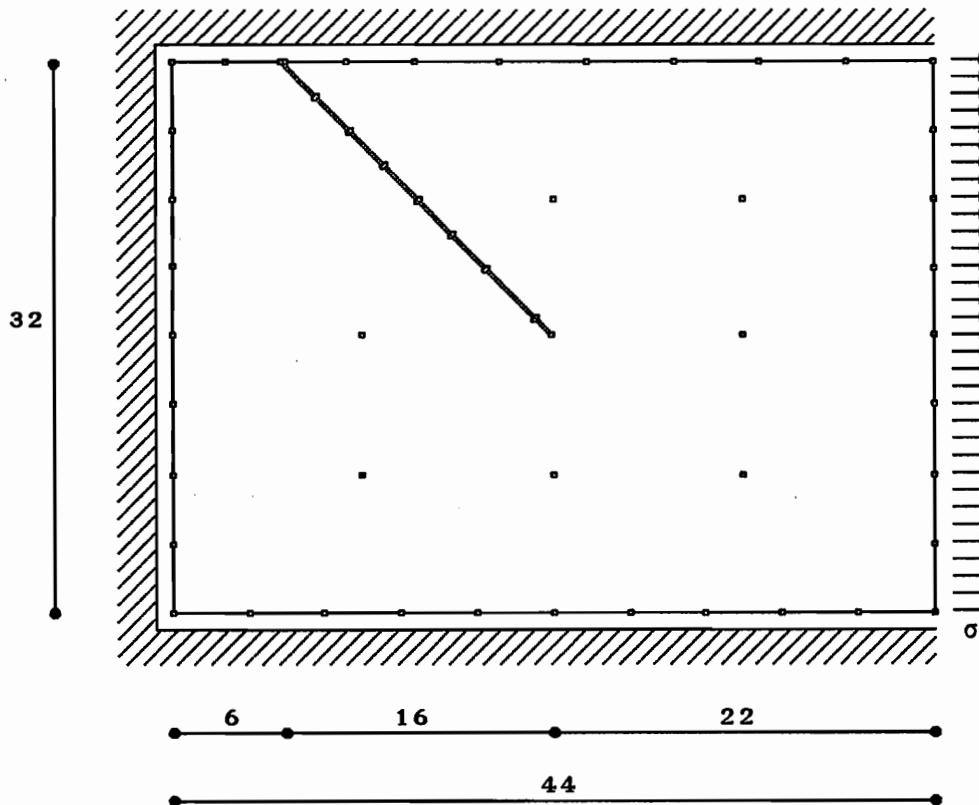
Daraus berechnet sich ein Stoßfaktor

$$\varphi_{sI} = \frac{\max K_{I\text{dyn}}}{K_{I\text{stat}}} = 1,82$$

Bis zum Auftreten dieses Wertes bei etwa  $t = 11 \mu\text{s}$  zeigen beide Verläufe eine gute Übereinstimmung mit einer größten Abweichung von ca.  $8 \text{ kNmm}^{-1,5}$  [5%]. Danach treten größere Differenzen bis etwa  $30 \text{ kNmm}^{-1,5}$  [20%] auf.

### 9.1.4. Rechteckscheibe mit schrägem Randriß

Die in Abb. 9.16 dargestellte Rechteckscheibe mit schrägem Randriß unter  $45^\circ$  wurde wiederum von Kraft mit einem FE-Modell aus 428 Elementen mit 1818 Freiheitsgraden untersucht. Für die Berechnung mit der REM wird ein Modell aus 26 Elementen mit 58 Rand- und zusätzlich 7 Innenknoten gewählt.



Systemkennwerte:

$$a = 22,63 \text{ mm}$$

$$E = 75.964 \text{ N mm}^{-2}$$

$$\nu = 0,286$$

$$\rho = 24.500 \text{ kg m}^{-3}$$

EVZ

Abb. 9.16: Rechteckscheibe mit schrägem Randriß

Die statischen Spannungsintensitätsfaktoren werden von Kraft angegeben als

$$K_{\text{I}} = 0,74 \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$K_{\text{II}} = 0,474 \sigma \sqrt{\pi a}$$

Die REM mit Zweipunkt-Verschiebungsformel liefert

$$K_I^* = 0,731 \sigma \sqrt{\pi a} \quad [ -1,2\% ]$$

$$K_{II}^* = 0,462 \sigma \sqrt{\pi a} \quad [ -2,5\% ]$$

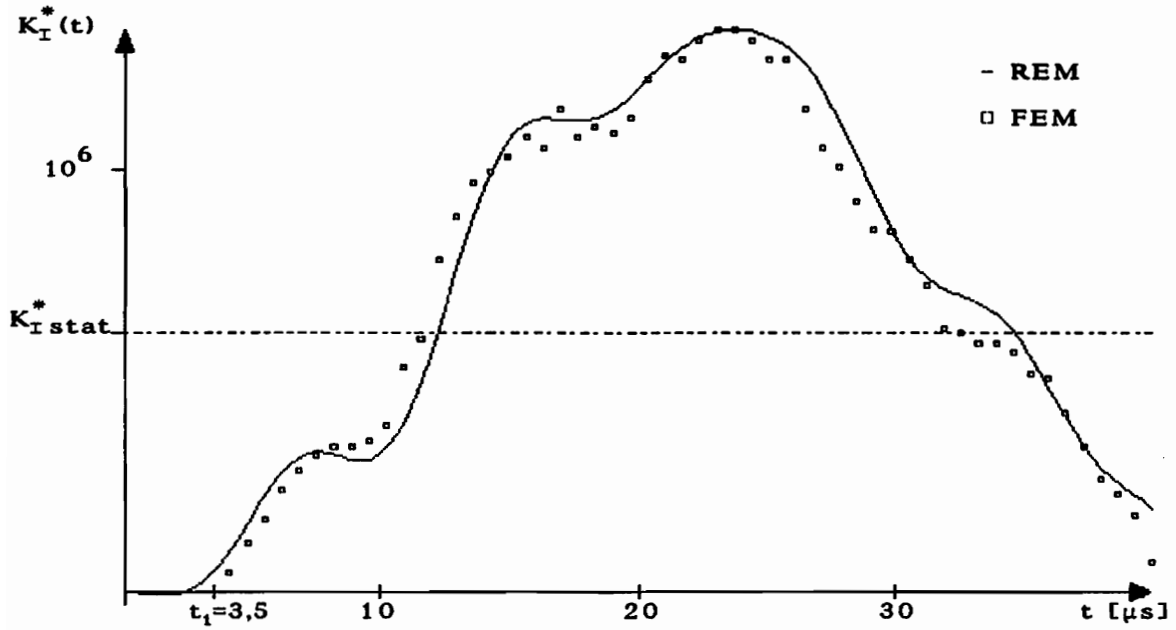


Abb. 9.17: Faktor  $K_I(t)$  für Modalordnung  $m=12$

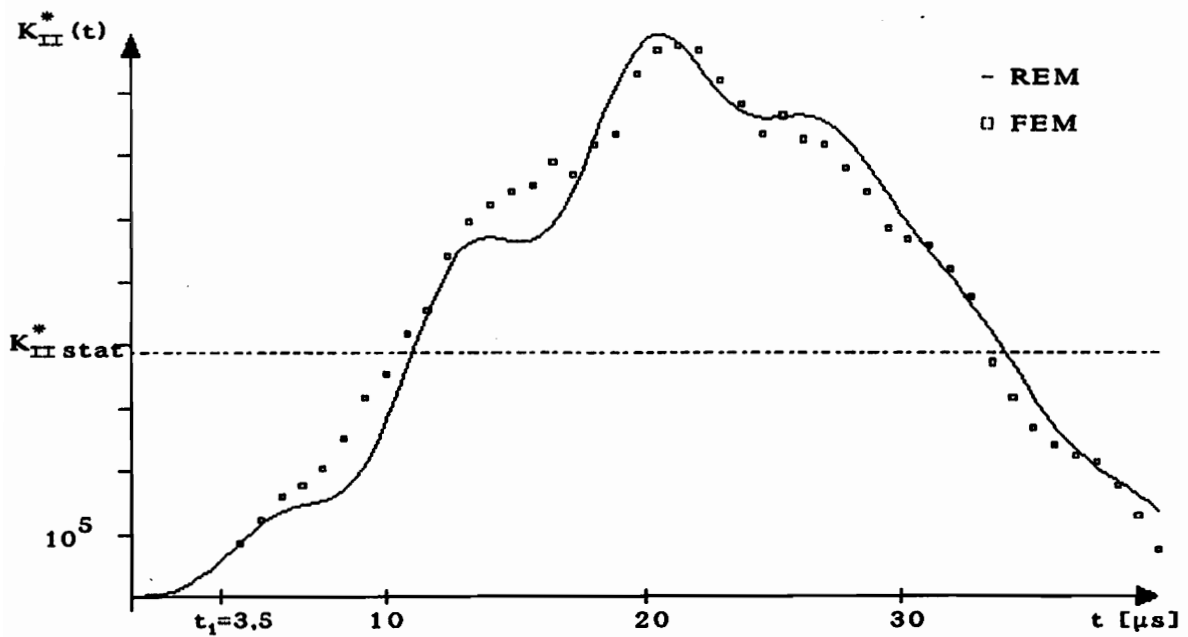


Abb. 9.18: Faktor  $K_{II}(t)$  für Modalordnung  $m=12$

In den Abb. 9.17 und 9.18 sind die zeitlichen Verläufe der beiden K-Faktoren infolge sprunghaft aufgebrachtener Belastung für eine Modalordnung  $m=12$  wiedergegeben und den Ergebnissen von Kraft (FEM) gegenübergestellt.

Die Maximalwerte der dynamischen K-Faktoren wurden von Kraft berechnet zu

$$K_{I \max} = 1,6 \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$K_{II \max} = 1,05 \sigma \sqrt{\pi a}$$

Die REM liefert

$$K_{I \max}^* = 1,581 \sigma \sqrt{\pi a} \quad [ -1,2\% ]$$

$$K_{II \max}^* = 1,057 \sigma \sqrt{\pi a} \quad [ +0,7\% ]$$

Die Stoßfaktoren lauten damit

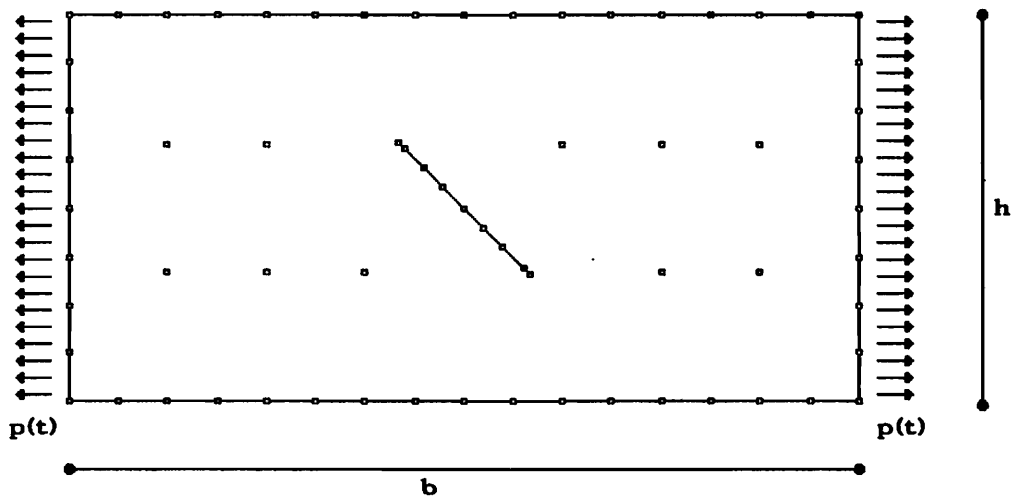
$$\varphi_{sI} = 2,16$$

$$\varphi_{sII} = 2,29$$

Der  $K_I(t)$ -Verlauf zeigt eine insgesamt gute Übereinstimmung mit den Vergleichswerten, während beim  $K_{II}(t)$ -Verlauf deutliche Unterschiede auftreten. Die größten Abweichungen betragen jeweils ca. 12% der zugehörigen Maximalwerte.

### 9.1.5. Schräger Innenriß

Die in Abb. 9.19 dargestellte Rechteckscheibe mit schrägem Innenriß wurde von Chen und Wilkins [23] mit einem Differenzenverfahren mit 1800 Elementen untersucht. Das hier verwendete Rechenmodell besteht aus 32 Randelementen mit insgesamt 68 Rand- und 10 Innenknoten.



**Systemkennwerte:**

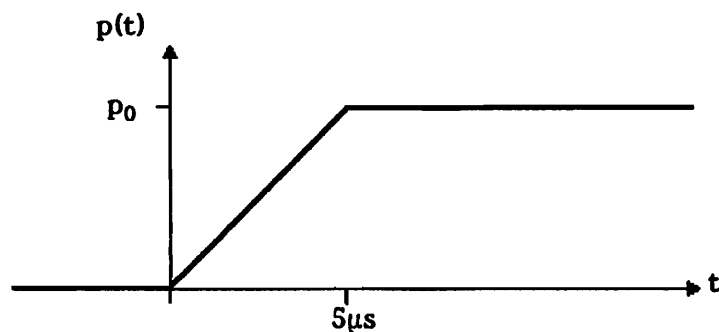
$a = 7,07 \text{ mm}$	$E = 200 \text{ GPa}$	$\nu = 0,3$
$b = 60 \text{ mm}$	$\rho = 5 \text{ Mg m}^{-3}$	<b>EVZ</b>
$h = 30 \text{ mm}$		

**Abb. 9.19: Rechteckscheibe mit schrägem Innenriß**

Die statischen Spannungsintensitätsfaktoren des REM-Modells stimmen mit einer Genauigkeit von ca. 1% mit den von Wilson [84] berechneten Werten überein, die von Rooke und Cartwright für eine gezogene Scheibe gleicher Breite mit einer Länge von  $b=75\text{mm}$  angegeben werden. Für eine Randbelastung  $p_0=100\text{N}$  ergeben sie sich zu

$$K_{\text{I}}^* = 278,66 \text{ N mm}^{-1,5} = 0,591 \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$K_{\text{II}}^* = 250,18 \text{ N mm}^{-1,5} = 0,531 \sigma \sqrt{\pi a}$$



**Abb. 9.20: Rampen-Funktion**

Die Zugspannungen auf dem Rand werden nun mit der in Abb. 9.20 wiedergegebenen Zeitfunktion aufgebracht und die resultierenden Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  aus den zeitlichen Verläufen der Rißrandverschiebungen berechnet (Abb. 9.21, 9.22).

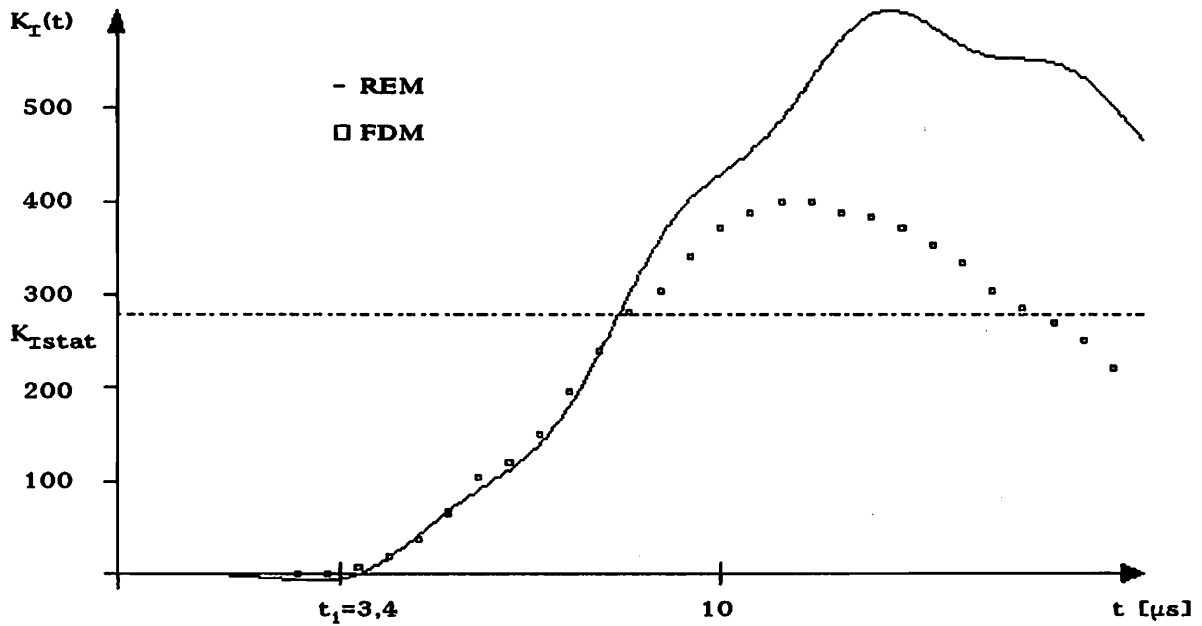


Abb. 9.21: Spannungsintensitätsfaktor  $K_I(t)$

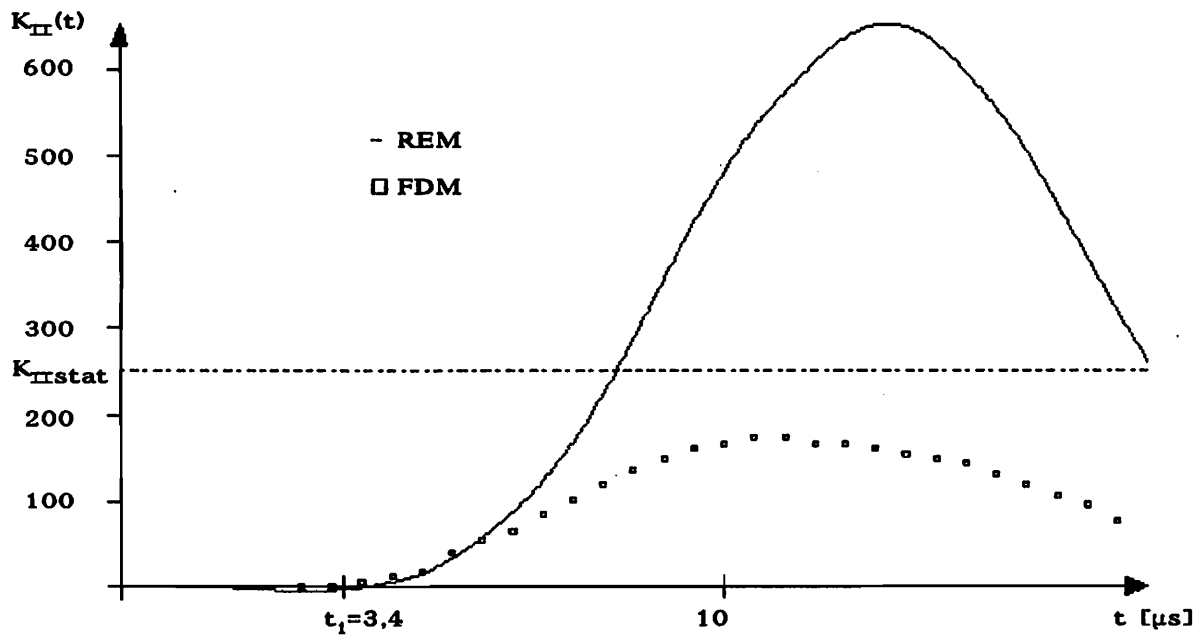


Abb. 9.22: Spannungsintensitätsfaktor  $K_{II}(t)$

Die dynamischen Maxima ergeben sich zu

$$\max K_{\text{Idyn}} = 605 \text{ N mm}^{-1,5}$$

$$\max K_{\text{IIIdyn}} = 652 \text{ N mm}^{-1,5}$$

Die mit der Randelementmethode ermittelten Zeitverläufe stimmen nur tendenziell mit der Vergleichslösung von Chen und Wilkins überein und erreichen beide wesentlich größere Maximalwerte. Die Stoßfaktoren liegen mit

$$\varphi_{s\text{I}} = 2,17$$

$$\varphi_{s\text{II}} = 2,61$$

in derselben Größenordnung wie in dem vorstehenden Beispiel der Scheibe mit schrägem Randriß, so daß die Richtigkeit der verwendeten Referenzlösung in Frage zu stellen ist.

#### 9.1.6. Bewertung

Die vorliegenden Beispiele zeigen, daß eine Modellierung der RiBoberfläche mit 3 bis 5 Randelementen pro RiBlänge ausreichend ist, um sowohl eine gute Übereinstimmung der statischen Spannungsintensitätsfaktoren als auch der unteren Eigenfrequenzen mit Vergleichslösungen aus der Literatur zu gewährleisten. Während die zeitlichen Verläufe der K-Faktoren teilweise deutliche Abweichungen aufweisen, stimmen die Maximalwerte der dynamischen K-Faktoren wiederum erstaunlich gut mit den Referenzlösungen überein. Bei Verwendung deutlich größerer Randeinteilungen und einer erheblich geringeren Anzahl von Freiheitsgraden liegt die Abweichung hier in den ersten vier Beispielen jeweils unter 3%.

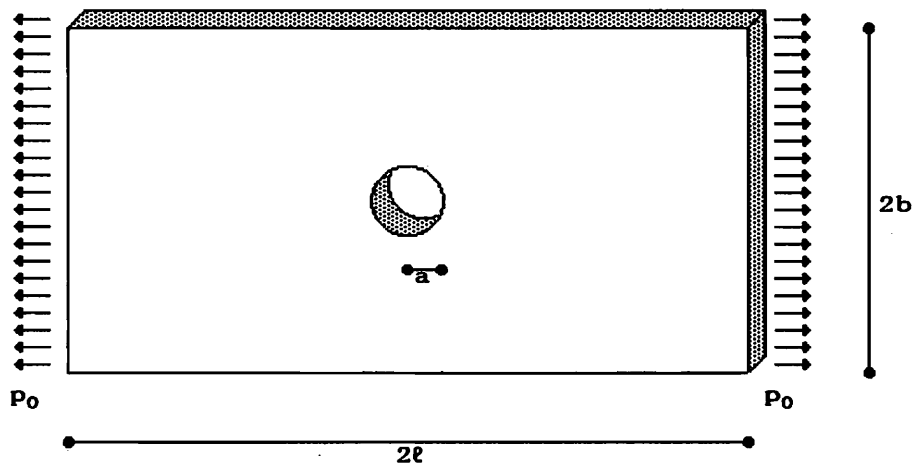


## 10. Kerb- und Kerbrißprobleme

Abschließend soll das vorgestellte Verfahren noch auf je ein Kerb- und ein Kerbrißproblem angewendet werden.

### 10.1 Rechteckscheibe mit Kreislocher

Die in Abb. 10.1 dargestellte Rechteckscheibe mit Kreisloch wird durch einachsige Zugspannungen  $p_0$  belastet.



Systemkennwerte:

$a = 20 \text{ mm}$	$E = 210.000 \text{ N mm}^{-2}$	$\nu = 0,3$
$b = 100 \text{ mm}$	$\rho = 7,85 \text{ g cm}^{-3}$	ESZ
$l = 200 \text{ mm}$		

Abb. 10.1: Rechteckscheibe mit Kreisloch

Wegen der vorhandenen doppelten Symmetrie wird wieder nur ein Viertel der Scheibe diskretisiert. Das so erhaltene Rechenmodell besteht aus 30 Randelementen mit 65 Rand- und 12 Innenknoten (Abb. 10.2).

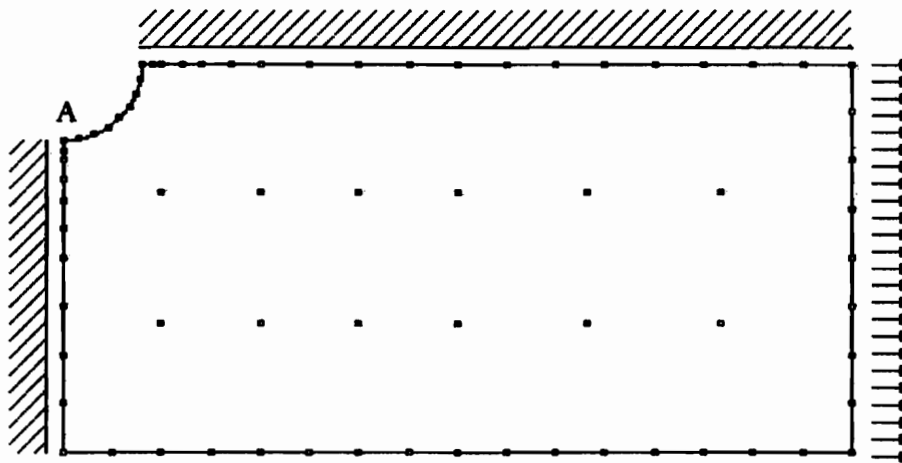


Abb. 10.2: Rechenmodell

Der Quotient aus der Randspannung  $\sigma_{ss}$  an der Kerbe und der Zugspannung  $p_0$  wird allgemein als Kerbfaktor bezeichnet. Der Kerbfaktor des beschriebenen Beispiels wurde erstmals von Howland [42] bestimmt und u.a. von Piltner und Taylor [67] mit speziellen Randelementen sowie von Kraft [48] mit der FEM berechnet:

Howland:  $\sigma_{ss}(A) = 3,14 p_0$

Piltner:  $\sigma_{ss}(A) = 3,141 p_0$  [+0,03%]

Kraft:  $\sigma_{ss}(A) = 3,13 p_0$  [-0,32%]

Die REM liefert hier zwei verschiedene Werte, und zwar sowohl den direkt berechneten Wert der Randspannung  $p_1$  im Punkt A als auch die Spannung  $\sigma_{ss}(A)$  als Funktion der Knotenverschiebungen des angrenzenden Kreisbogen-Elementes:

aus dem Spannungsverlauf:  $\sigma_{ss} = 3,128 p_0$  [-0,38%]

aus dem Verschiebungsverlauf:  $\sigma_{ss} = 3,192 p_0$  [+1,66%]

Der Zeitverlauf dieses Spannungswertes infolge einer sprunghaft aufgebrachtten Belastung wurde von Kraft mit einem FEM-Modell mit 986 Freiheitsgraden berechnet und wird in Abb. 10.3 dem eigenen Lösungsverlauf gegenübergestellt.

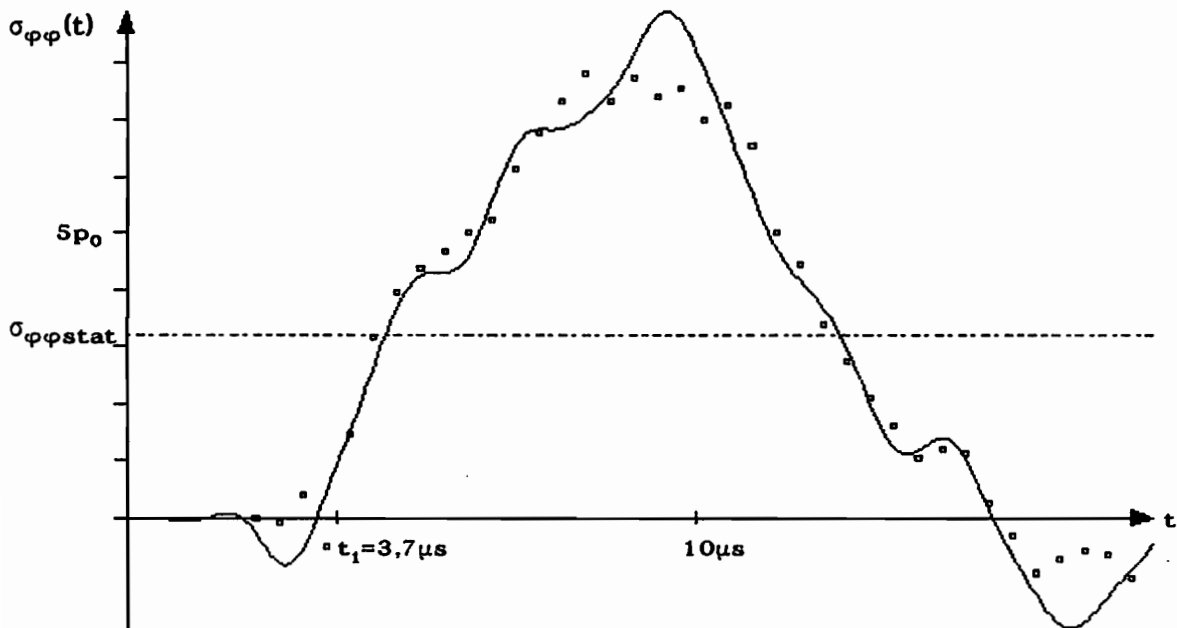


Abb. 10.3: Zeitverlauf der Randspannung  $\sigma_{\varphi\varphi}(A)$ , Modalordnung  $m=40$

Der mit der REM berechnete Zeitverlauf zeigt eine weitgehend gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung von Kraft. Im Bereich des Maximums, daß zwischen  $t=9$  und  $t=10\mu s$  auftritt, weichen beide Verläufe jedoch deutlich voneinander ab. So hat Kraft eine Maximalspannung von

$$\max \sigma_{ss} (\text{Kraft}) = 7,87 p_0$$

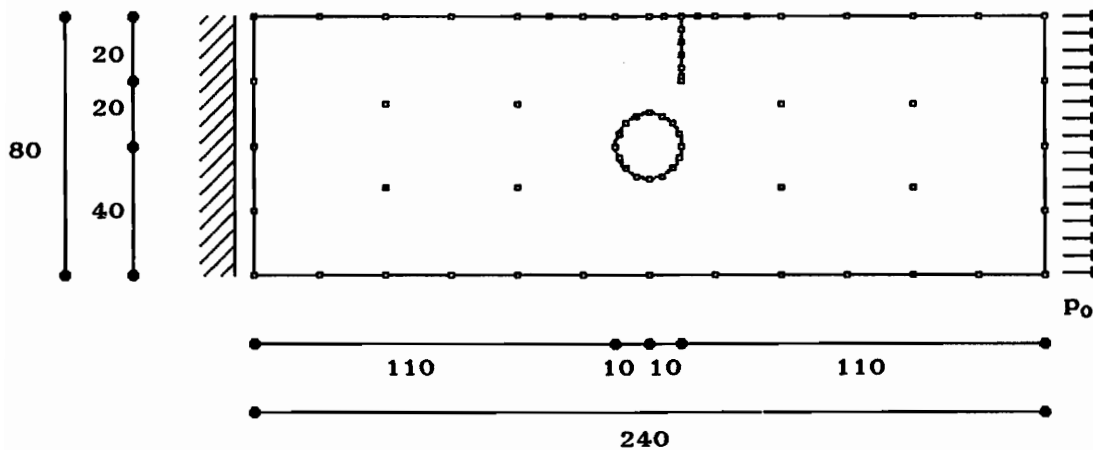
ermittelt, während die REM den Wert

$$\max \sigma_{ss} (\text{REM}) = 8,93 p_0 [+13,5\%]$$

liefert. Zu beachten ist, daß in beiden Fällen bereits vor dem Eintreffen der ersten Longitudinalwelle zum Zeitpunkt  $t_1=3,7\mu s$  Spannungswerte im Punkt A auftreten. Dieses Phänomen ist hier wie in den anderen Beispielen auf verschiedene Unzulänglichkeiten der verwendeten Rechenmodelle zurückzuführen. So kann es z.B. bei der FEM infolge uneinheitlicher Elementnetze zu unechten Wellenreflektionen kommen, während die REM aufgrund der verwendeten Gebiets-Ansätze höhere Eigenformen allgemein nur unzureichend wiedergeben kann.

## 10.2 Streifen mit Kreiskerbe und Randriß

In Abb. 10.2 ist ein gezogener Streifen mit mittiger Kreiskerbe und einem Randriß dargestellt, der wiederum von Kraft mit einem FEM-Modell mit 2350 Freiheitsgraden untersucht worden ist. Das hier verwendete REM-Modell (KL78) besteht aus 33 Randelementen mit 70 Rand- und 8 zusätzlichen Innenknoten. Der Riß ist dabei durch 6, die Kreiskerbe durch 8 Elemente dargestellt.



### Systemkennwerte:

$a = 20 \text{ mm}$                        $E = 210.000 \text{ N mm}^{-2}$                        $\nu = 0,3$   
 $\rho = 7,85 \text{ g cm}^{-3}$                        $\text{EVZ}$

Abb. 10.4: Kerbrißproblem, Modell KL78

Um eine Aussage über den Einfluß der Kreiskerbe und des Randrisses auf das Systemverhalten treffen zu können, werden insgesamt vier verschiedene Rechenmodelle verwendet:

- KL78: mit Kreiskerbe, mit Riß
- KL64: ohne Kreiskerbe, mit Riß
- KL60: mit Kreiskerbe, ohne Riß
- KL46: ohne Kreiskerbe ohne Riß

Die statischen Spannungsintensitätsfaktoren werden von Kraft angegeben als:

$$K_{I \text{ stat}} = 1,86 \rho_0 \sqrt{\pi a}$$

$$K_{II \text{ stat}} = 0,08 \rho_0 \sqrt{\pi a}$$

Die eigene Rechnung liefert für das Modell KL78 mit Kreiskerbe:

$$K_{I \text{ stat}} = 1508,8 \text{ N mm}^{-1,5} = 1,90 \rho_0 \sqrt{\pi a} \quad [+ 2\%]$$

$$K_{II \text{ stat}} = 72,5 \text{ N mm}^{-1,5} = 0,09 \rho_0 \sqrt{\pi a} \quad [+15\%]$$

Für das Modell KL64 ohne Kreiskerbe erhält man analog:

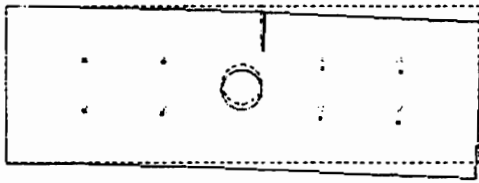
$$K_{I \text{ stat}} = 1185,0 \text{ N mm}^{-1,5} = 1,49 \rho_0 \sqrt{\pi a}$$

$$K_{II \text{ stat}} = 0,4 \text{ N mm}^{-1,5} = 0,00 \rho_0 \sqrt{\pi a}$$

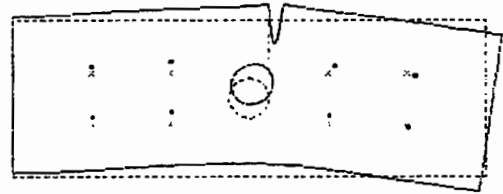
Modell	KL46	KL60	KL64	KL78
Kreiskerbe	nein	ja	nein	ja
Randriß	nein	nein	ja	ja
$\omega_1$	6936	6918	6715	6705
$\omega_2$	29809	30161	26211	25920
$\omega_3$	35647	34969	34722	33918
$\omega_4$	64871	62566	60892	57772
$\omega_5$	102717	99659	98798	96396
$\omega_6$	109496	106482	104516	100914
$\omega_7$	140004	139398	137359	133944
$\omega_8$	160028	147866	150512	143260

**Tab. 10.1: Eigenfrequenzen des gezogenen Streifens**

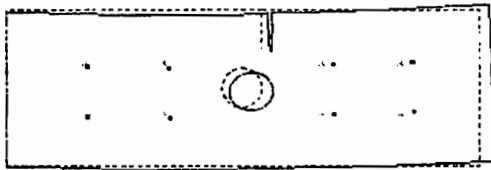
Die Eigenfrequenzen der vier Rechenmodelle sind in Tab. 10.1 wiedergegeben. Dabei ist deutlich erkennbar, daß die beiden ersten Eigenfrequenzen nahezu ausschließlich durch den Randriß beeinflusst werden, während die höheren Frequenzen sowohl vom Riß als auch von der Kreiskerbe abhängig sind. Insgesamt kann festgestellt werden, daß die Eigenfrequenzen des Kerbrißproblems zwischen 3% und 15% unter denen des ungerissenen, ungekerbten Streifens liegen. Die ersten 8 Eigenformen des Modells KL78 sind in Abb. 10.5 graphisch dargestellt.



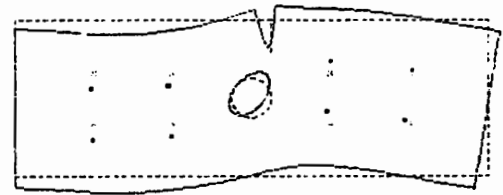
1. Eigenform:  $\omega_1 = 6705 \text{ s}^{-1}$



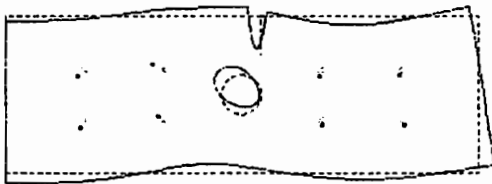
2. Eigenform:  $\omega_2 = 25920 \text{ s}^{-1}$



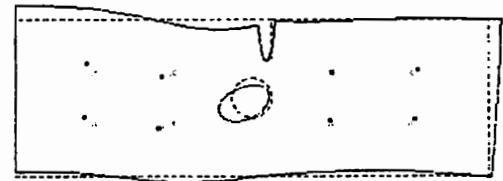
3. Eigenform:  $\omega_3 = 33918 \text{ s}^{-1}$



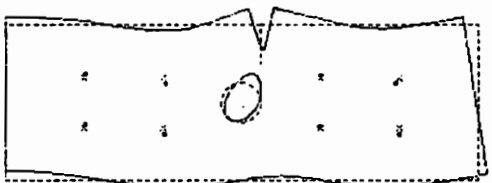
4. Eigenform:  $\omega_4 = 57772 \text{ s}^{-1}$



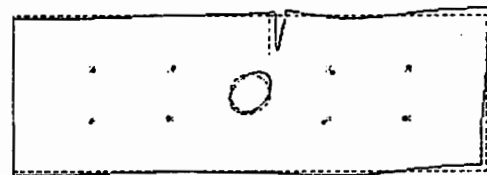
5. Eigenform:  $\omega_5 = 96396 \text{ s}^{-1}$



6. Eigenform:  $\omega_6 = 100914 \text{ s}^{-1}$



7. Eigenform:  $\omega_7 = 133944 \text{ s}^{-1}$



8. Eigenform:  $\omega_8 = 143260 \text{ s}^{-1}$

Abb. 10.5: Eigenformen des Kerbrißproblems

Der mit der Modalanalyse (Modalordnung  $m=10$ ) berechnete dynamische Spannungsintensitätsfaktor  $K_I(t)$  des Kerbriß-Modells KL78 infolge einer sprunghaft aufgetragenen Belastung wird in Abb. 10.6 dem von Kraft berechneten Zeitverlauf gegenübergestellt. Zum Vergleich ist zusätzlich der mit der REM berechnete Verlauf des Modells KL64 mit Riß, aber ohne Kerbe eingezeichnet.

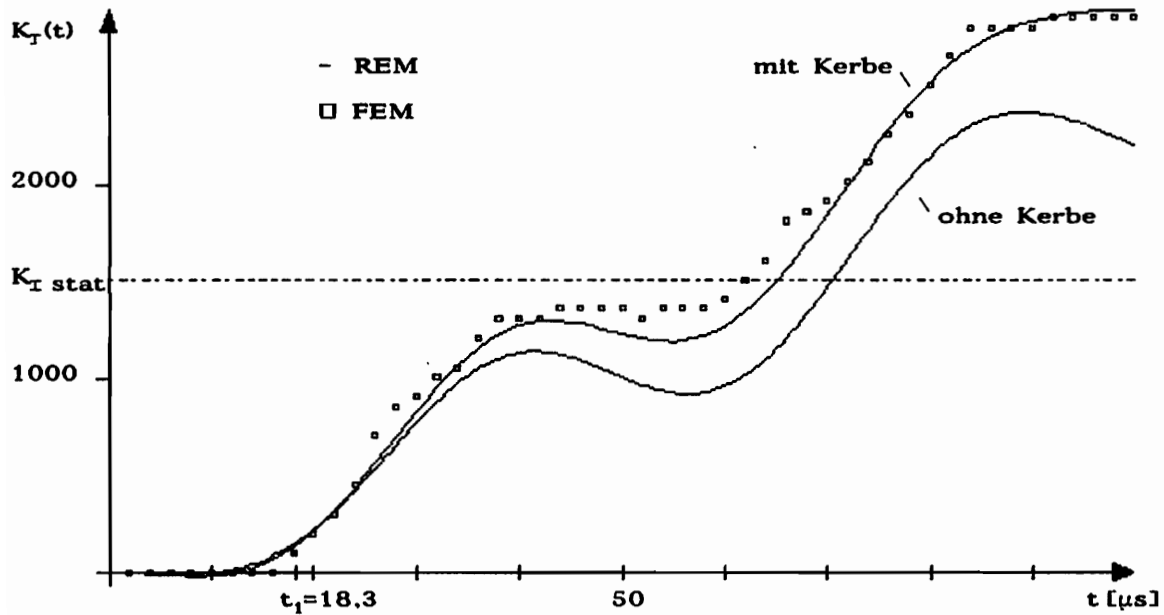


Abb. 10.6: Spannungsintensitätsfaktor  $K_I(t)$

Der Maximalwert des Spannungsintensitätsfaktors  $K_I(t)$  und damit der Stoßfaktor werden von Kraft angegeben zu:

$$K_{I \max} = 3,63 p_0 \sqrt{\pi a}$$

$$\varphi_{SI} = 1,94$$

Die REM-Modalanalyse liefert hier:

$$K_{I \max} = 2917 \text{ Nmm}^{-1,5} = 3,68 p_0 \sqrt{\pi a} \quad [+1,3\%]$$

$$\varphi_{SI} = 1,93 \quad [-0,32\%]$$

Für das Modell ohne Kreiskerbe (KL64) erhält man analog:

$$K_{I \max} = 2381 \text{ N mm}^{-1,5} = 3,00 p_0 \sqrt{\pi a}$$

$$\varphi_{SI} = 2,02$$

Die Übereinstimmung der Ergebnisse mit der Referenzlösung kann vor allem im Hinblick auf die wesentlich gröbere Diskretisierung des REM-Modells als gut bezeichnet werden. Die Abweichungen des statischen als auch des maximalen dynamischen Spannungsintensitätsfaktor betragen weniger als 2%.



### 11. Programmtechnische Realisierung

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen erfolgten mit speziell zu diesem Zweck erstellten Fortran-Programmen. Das Programm REM2D dient dabei der Untersuchung elastischer Scheiben mit der REM unter Verwendung der statischen Fundamentallösung und verschiedener Näherungsverfahren zur Aufstellung einer Massenmatrix, während das Programm REM2DF mit der frequenzabhängigen, komplexen Lösung arbeitet. Die Struktur dieser beiden Programmtypen ist in Abb. 11.1 schematisch dargestellt, die Funktionen ihrer Subroutines sind in Tab. 11.1 zusammengefaßt.

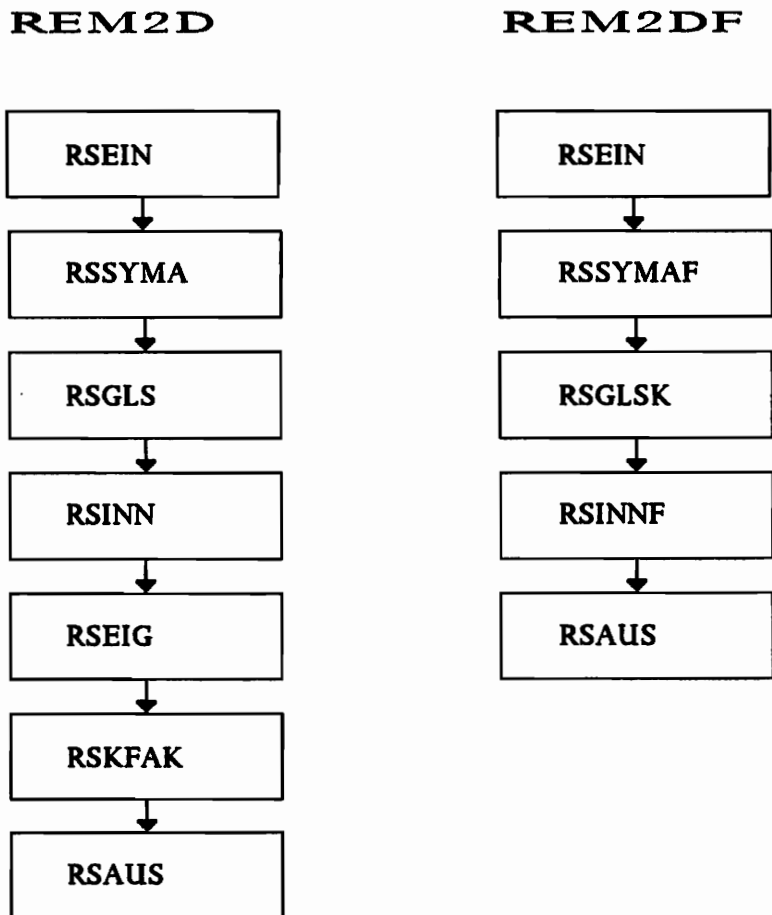


Abb. 11.1: Programm-Aufbau

Subroutine	Funktion
RSEIN	Einlesen des Datensatzes
RSSYMA	Aufstellung der Systemmatrizen <b>G</b> , <b>H</b> und <b>M</b>
RSSYMAF	Aufstellen der frequenzabhängigen Matrizen <b>G</b> ( $\omega$ ) und <b>H</b> ( $\omega$ )
RSGLS	Berechnung der statischen Lösung ( <b>p</b> <sub>1</sub> und <b>u</b> <sub>2</sub> )
RSGLSK	Berechnung der frequenzabhängigen, komplexen Lösung
RSINN	Berechnung der statischen Lösung in Innenknoten ( <b>u</b> und $\sigma$ )
RSINNK	Berechnung der frequenzabhängigen Lösung in Innenknoten
RSEIG	Aufstellen der Gleichung $(\mathbf{H}_{22} - \omega^2 \mathbf{M}_{22}) \mathbf{u}_2 = \mathbf{b}_2$ und Berechnung der Eigenfrequenzen und -formen
RSKFAK	Berechnung statischer K-Faktoren aus Knotenverschiebungen
RSAUS	Ausgabe der Ergebnisse in die Eingabedatei

Tab. 11.1: Subroutines der REM-Programme

Zur Berechnung und graphischen Darstellung der Schwingungsverläufe aus den mit REM2D aufgestellten Rechenmodellen dienen die Programme RETST (Time-Step-Verfahren) und REMOD (Modalanalyse). Die graphische Darstellung der statischen Lösung und der Eigenformen erfolgt mit dem Programm REFORM.

Beim Aufbau der Maske für die Ein- und Ausgabe-Dateien wurde besonderer Wert auf Übersichtlichkeit und eindeutige Zuordbarkeit der darin erhaltenen Daten gelegt. Als Beispiel hierfür soll die in Abb. 11.2 dargestellte quadratische Scheibe unter Zugbeanspruchung mit vier Randelementen mit linearen Ansatzfunktion dienen. Die zugehörige Datei, die von allen vorgenannten Programmen gemeinsam benutzt wird, ist in Abb. 11.3 wiedergegeben. Die verwendeten Rechenparameter (analytische Integration, Protollausdruck, ggf. Gaußpunkte, additive Konstante, TSQP-Elemente, Massen-Ansatzfunktion), die Materialkennwerte, Knotenkoordinaten und die Element-Knoten-Zuordnungen können direkt aus der Datei abgelesen werden. Zu bemerken ist dabei, daß in den Eckpunkten wegen der sich sprunghaft ändernden Randbedingungen Doppelknoten angeordnet worden sind.

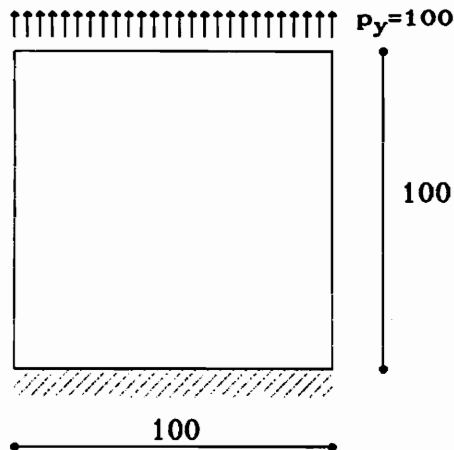


Abb. 11.2: Quadratscheibe

```

*****
*** Datei :      REMO.DAT
*** Titel  :      QUADRAT-SCHEIBE
*****
*** Randknoten      :      8   *** Constante      :      0.00   ***
*** Innenknoten     :      1   *** Massenansatz   :      N     ***
*** Randlelemente  :      4   *** Protokoll      :      N     ***
*** Teilgebiete     :      1   *** Integration   :      A     ***
*** NGauss          :      36  *** TSQP-Elemente :      N     ***
*** Zustand         :      EVZ
*** E-Moduli        : 1000.000000
*** Ro * 10**8      : 1000.000000
*** Nue             :      .200000
*****
I Geb  X[m]  Y[m]  Ux[m]  Uy[m]  Kx  Ky      Px      Py
1  1    0.000  0.000  0.000  .000  P  P    0.000  0.000
2  1    0.000  0.000  0.000  0.000  U  U  -31.125 -99.576
3  1   100.000  0.000  0.000  0.000  U  U   31.125 -99.576
4  1   100.000  0.000  .000    -0.000  P  P    0.000  0.000
5  1   100.000  100.000  -1.400  9.459  P  P    0.000  0.000
6  1   100.000  100.000  -1.400  9.459  P  P    0.000  100.000
7  1    0.000  100.000  1.400  9.459  P  P    0.000  100.000
8  1    0.000  100.000  1.400  9.459  P  P    0.000  0.000
I Geb  X[m]  Y[m]  Ux[m]  Uy[m]      Sxx      Syy      Txy
9  1   50.000  50.000  .000    4.450      5.019  101.979  .000
*****
*** Elementzuordnung
I  Geb  Kn1  Kn2  Kn3
1  1    2    3    0
2  1    4    5    0
3  1    6    7    0
4  1    8    1    0
*****

```

Abb. 11.3: Aufbau einer Ein-/Ausgabe-Datei

## **12. Zusammenfassung und Ausblick**

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Anwendung der Randelementmethode auf ebene Probleme der linearen Elastodynamik und der linear-elastischen Bruchdynamik.

Das in diesem Zusammenhang entwickelte Berechnungs-Programm REM2D wertet alle auftretenden Integrale über geradlinige Randelemente mit konstanten, linearen, quadratischen und Quadratwurzel-Ansatzfunktionen analytisch aus. Diese Vorgehensweise ermöglicht es, numerische Ungenauigkeiten, wie sie vor allem bei randnahen Knoten auftreten, auszuschließen und somit nicht-symmetrische und Mehrfach-Rißprobleme ohne Einführung einer Substrukturierung zu untersuchen. Durch die Verwendung von Doppelknoten können sich sprunghaft ändernde Randbedingungen respektive unstetige Randspannungsverläufe darüberhinaus exakt wiedergegeben werden.

Bei der dynamischen Untersuchung wird unterschieden zwischen Randelementformulierungen mit frequenzabhängigen Fundamentallösungen und Systemmatrizen und solchen, die unter Verwendung einer statischen Fundamentallösung und geeigneter Ansatzfunktionen auf konstante Steifigkeits- und Massenmatrizen ähnlich einer FEM-Formulierung führen. Letztere ermöglichen sowohl die Anwendung der modalen Analyse als auch beliebiger Zeitintegrationsverfahren zur Berechnung von Schwingungs- und Spannungsverläufen. Nach geeigneter Transformation können die Matrizen auch mit FEM-Gleichungssystemen kombiniert werden.

Die auf diese Weise berechneten Zeitlösungen zeigen jedoch nicht immer ein stabiles Verhalten. Die Ursache hierfür liegt in der Beschaffenheit der Näherungsansätze, mit denen die Massenmatrix gebildet wird. So sind höhere Moden, die sich mit den gewählten Ansätzen nur ungenau wiedergeben lassen, oftmals auch bei ungedämpften Systemen mit komplexen Eigenfrequenzen behaftet, was zu einem physikalisch nicht korrekten Aufklingen des Schwingungsverlaufes führen kann. Der Wahl der Gebiets-Ansatzfunktionen muß daher zunächst besondere Beachtung geschenkt werden. Anstelle der von Nardini und Brebbia zusammen mit dem Verfahren konstanter REM-Massenmatrizen vorgestellten, linearen Funktionen hat sich hier besonders die Anwendung der statischen Fundamentallösung zur Darstellung der Trägheitseinflüsse bewährt.

Da sich das Auftreten komplexer Eigenformen aber auch hiermit nicht gänzlich ausschließen läßt, muß bei der Anwendung von Zeitschrittverfahren neben der unbedingten Stabilität des Verfahrens selbst auch eine numerische Dämpfung dieser unerwünschten Moden gewährleistet sein. Als unproblematischer und oftmals auch weniger intensiv an Rechenzeit hat sich dagegen die Anwendung der Modalanalyse auf die konstanten REM-Gleichungssysteme erwiesen. Hierbei besteht die Möglichkeit, nach der Lösung des Eigenwertproblems nur noch bestimmte Moden in die weitere Berechnung eingehen zu lassen, so daß der Einfluß aller ungenauen, höheren Moden vollkommen eliminiert werden kann.

Als Maß für die Singularität der Spannungsverteilung an einer Rißspitze und damit für die Versagenswahrscheinlichkeit des rißbehafteten Bauteils werden in der linear-elastischen Bruchmechanik meist die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{\text{I}}$ ,  $K_{\text{II}}$  und  $K_{\text{III}}$  verwendet. Mit speziellen Rißspitzen-Elementen, wie sie auch bei FEM-Anwendungen gebräuchlich sind, läßt sich der singuläre Spannungsverlauf in Rißnähe und auch der Verlauf der Rißrandverschiebungen wesentlich besser wiedergeben als mit Standard-Randelementen. Die gesuchten Spannungsintensitätsfaktoren lassen sich dabei durch Einsetzen in einfache, hier vorgestellte Formeln direkt aus den Knotenverschiebungen oder -spannungen dieser Elemente mit hoher Genauigkeit berechnen. Auf eine vor allem bei dynamischen Berechnungen aufwendige Auswertung eines Riceschen Linienintegrals (J-Integrals) kann damit verzichtet werden.

Die Kombination dieser Rißspitzenelemente mit dem Verfahren der konstanten REM-Massenmatrizen ermöglicht es nun, zeitabhängige Spannungsintensitätsfaktoren ebenfalls direkt aus den mit der Modalanalyse berechneten Zeitverläufen der Randknotenverschiebungen zu ermitteln. Auf diese Weise läßt sich selbst bei Verwendung grober Randeinteilungen und damit einer sehr geringen Anzahl dynamischer Freiheitsgrade eine zufriedenstellende Übereinstimmung der Ergebnisse mit verschiedenen Referenzlösungen erzielen. Aufgrund seines vergleichsweise geringen Arbeitsspeicherplatz-Bedarfs ist das hier beschriebene Verfahren somit auch zum rationellen Einsatz auf kleineren Rechnern (PCs) geeignet.

Das vorrangige Ziel zukünftiger Untersuchungen sollte es sein, verbesserte Gebietsansatzfunktionen zu finden, die sowohl eine exaktere Beschreibung der Massenträgheitskräfte gewährleisten als auch das Auftreten komplexer Eigenfrequenzen mit allen daraus resultierenden Nachteilen verhindern. Erst dadurch wird es möglich werden, auch Zeitintegrationsverfahren, die wie beispielweise das Newmark-Verfahren keine numerische Amplitudendämpfung beinhalten, sinnvoll anzuwenden und Systeme zu untersuchen, die auch in höheren Moden zu Schwingungen angeregt werden. Weitere Möglichkeiten bestehen in der Übertragung des Verfahrens auf Rißausbreitungs- respektive auf dreidimensionale Probleme.

### 13. Literatur

- 1 **Abramowitz, M., Stegun, I., Handbook of mathematical functions, National Bureau of Standards, Washington D.C., Dover, New York 1965**
- 2 **Ahmad, S., Banerjee, P.K., Free Vibration Analysis using Particular Integrals, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 112, No. 7, 1986**
- 3 **Ahmad, S., Banerjee, P.K., Multi-Domain BEM for two-dimensional problems of elastodynamics, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, 1988, S. 891-911**
- 4 **Antes, H., Anwendung der Methode der Randelemente in der Elastodynamik und der Fluidodynamik, Teubner-Verlag, Stuttgart 1988**
- 5 **Antes, H., A boundary element procedure for transient wave propagations in two-dimensional isotropic elastic media, Finite Elements in Analysis and Design 1, S. 313-322, 1985**
- 6 **Antes, H., Ottenstreuer, M., Schmid, G., Randelemente, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Mitteilung Nr. 82-2, Bochum 1982**
- 7 **Banerjee, P.K., Butterfield, R., Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill, London 1981**
- 8 **Bathe, K.J., Wilson, E.L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1976**
- 9 **Bausinger, R., Kuhn, G., Die Boundary Element Methode - Theorie und industrielle Anwendung, Expert Verlag, Ehningen 1987**
- 10 **Becker, P., Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1984**
- 11 **Blandford, G.E., Ingraffea, A.R. Liggett, J.A., Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations using the Boundary Element Method, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 17, 1981, S. 387-404**

- 12 **Böhme, W.**, Experimentelle Untersuchungen dynamischer Effekte beim Kerbschlagbiegeversuch, Dissertation TU Darmstadt 1985
- 13 **Böhme, W., Kalthoff, J.F.**, Experimentelle und theoretische Untersuchung des dynamischen Spannungsfeldes stoßbeanspruchter Scheiben mit Riss, Bericht W5/84, Fraunhofer Institut für Werkstoffmechanik, Freiburg 1984
- 14 **Brebbia, C.A.**, The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London 1978
- 15 **Brebbia, C.A., Walker, S.**, Boundary Element Techniques in Engineering, Newnes-Butterworths, London 1980
- 16 **Brebbia, C.A., Nardini, D.**, Dynamic analysis in solid mechanics by an alternative boundary element procedure, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 2, No. 4, 1983
- 17 **Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C.**, Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1984
- 18 **Brebbia, C.A. (Ed.)**, Topics in Boundary Element Research, Vol. 2: Time-Dependent and Vibration Problems, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1985
- 19 **Brebbia, C.A., Nardini, D.**, Solution of Parabolic and Hyperbolic Time Dependent Problems using Boundary Elements, Comp. & Maths. with Applications, 1986
- 20 **Broek, D.**, Elementary Engineering Fracture Mechanics, Noordhoff International Publishing, Leyden 1974
- 21 **Bronstein, I., Semandjajew, K.A.**, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Thun 1979
- 22 **Brown, W.F., Srawley, J.E.**, STP 410, ASTM, 1966



- 23 **Chen, Y.M., Wilkins, M.L.**, Numerical analysis of dynamic crack problems, in: Mechanics of fracture 4, Elastodynamic crack problems, Ed: G.C. Sih, Noordhoff, Leyden 1977
- 24 **Chuang, P.H.**, Application of boundary element methods in elastodynamics, M.Sc. Dissertation, University of Southampton, 1981
- 25 **Clough, R.W., Chopra, A.K.**, Earthquake stress analysis in earth dams, Proc. ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, 92, S. 197-211, 1966
- 26 **Cole, D.M., Kosloff, D.D., Minster, J.B.**, A numerical boundary integral equation for elastodynamics, Int. Bull. Seis. Soc. Amer., 68, S. 1331-1357, 1978
- 27 **Cruse, T.A, Rizzo, F.J.**, A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 22, S. 244-259, 1968
- 28 **Cruse, T.A**, A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem II, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 22, S. 341-355, 1968
- 29 **Cruse, T.A**, Numerical solutions in three dimensional elastostatics, Int. Journal of Solids and Structures, 5, S. 1259-1274, 1969
- 30 **Dirr, B., Waller, H.**, Zum Problem der Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenformen elastischer ebener Kontinua, Ingenieur-Archiv, 43, S. 74-91, 1974
- 31 **Dominguez, J., Gallego, R.**, Factores dinamicos de intensidad de tension en problemas elasticos transitorios, Universidad de Sevilla 1989
- 32 **Eichenauer, H.**, Beitrag zur Berechnung linear elastischer ebener Strukturen mit der Methode der Randelemente unter besonderer Berücksichtigung der Bruchmechanik, Dissertation, TU Graz 1983
- 33 **Engeln-Müllges, G., Reutter, F.**, Numerische Mathematik für Ingenieure, B.I.-Verlag, Mannheim Wien Zürich 1987

- 34 **v. Estorff, O.**, Zur Berechnung der dynamischen Wechselwirkung zwischen Bauwerken und ihrer Umgebung mittels zeitabhängiger Randintegralgleichungen, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1986
- 35 **Geis, M.**, Anwendung der Randelementmethode zur Untersuchung ebener, elastodynamischer Rißprobleme, ZAMM 70, 1989 (erscheint)
- 36 **Griffith, A.A.**, The phenomena of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A221, S. 163-198, 1921
- 37 **Hahn, H.G.**, Bruchmechanik, Teubner Studienbücher: Mechanik, Stuttgart 1976
- 38 **Haisheng, R.**, The Symmetric Dynamic Boundary Element Method (SDBEM) for Transient Elastodynamic Analysis, in: Boundary Elements X, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1988
- 39 **Hartmann, F.**, Computing the C-Matrix in non-smooth Boundary Points, in: New Developments in Boundary Element Methods, Butterworths, London, S. 367-379, 1980
- 40 **Hartmann, F.**, Methode der Randelemente, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1987
- 41 **Heckel, K.**, Einführung in die technische Anwendung der Bruchmechanik, Carl Hanser Verlag, München Wien 1983
- 42 **Howland, R.C.J.**, On the stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension, Phil. Trans. Roy. Soc., London, A 229, 49-86, 1930
- 43 **Huh, Y.**, Die Anwendung der Randelementmethode zur Untersuchung der dynamischen Wechselwirkung zwischen Bauwerk und geschichtetem Baugrund, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1986
- 44 **Isida, M.**, Int. Journal of fracture Mechanics, 7, S. 301, 1971
- 45 **Isida, M.**, Bull. JSME, 13, S.635, 1970

- 46 **Kanarachos, A., Provatidis, Ch.**, Performance of Mass Matrices for the BEM Dynamic Analysis of Wave Propagation Problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63, S. 155-165, 1987
- 47 **Karami, G., Fenner, R.T.**, Analysis of mixed mode fracture and crack closure using the boundary integral equation method, *Int. Journal of Fracture*, 30, S. 13-29, 1986
- 48 **Kraft, W.W.**, Untersuchung zweidimensionaler elastodynamischer Spannungskonzentrations- und Rißprobleme, *VDI-Fortschrittsberichte Reihe 18, Nr. 31*, VDI-Verlag, Düsseldorf 1986
- 49 **Kuhn, G., Löbel, G., Potrč, I.**, Kritisches Lösungsverhalten der direkten Randelementmethode bei logarithmischem Kern, *ZAMM* 67, 1987
- 50 **Loeffler, C.F., Mansur, W.J.**, Analysis of Time Integration Schemes for Boundary Element Applications to Transient Wave Propagation Problems, in: *Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer*, Southampton 1987
- 51 **Loeffler, C.F., Mansur, W.J.**, Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Potential Problems in Infinite Domains, in: *Boundary Elements X*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1988
- 52 **Mall, S.**, Finite Element Analysis of Stationary Cracks in Time Dependent Stress Fields, in: *Numerical Methods in Fracture Mechanics*, Eds. Owen, D.R.J., Luxmoore, A.R., Pineridge Press, Swansea 1980
- 53 **Manolis, G.D., Beskos, D.E.**, Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and Laplace transform, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17, S. 573-599, 1981
- 54 **Mansur, W.J., Brebbia, C.A.**, Transient elastodynamics using a time stepping technique, in: *Boundary Elements*, S. 677-698, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1983
- 55 **Martinez, J., Dominguez, J.**, On the Use of Quarter-Point Boundary Elements for Stress Intensity Factor Computations, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20, S. 1941-1950, 1984

- 56 **Mews, H.**, Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren mittels der Boundary-Element-Methode unter Verwendung von Greenschen Funktionen, Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg 1988
- 57 **Nardini, D., Brebbia, C.A.**, A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements, in: Boundary Elements IV, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1982
- 58 **Nardini, D., Brebbia, C.A.**, Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method, in: Boundary Elements V, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1983
- 59 **Nardini, D., Brebbia, C.A.**, A new approach to free vibration analysis using boundary elements, Appl. Math. Modelling 7, S. 157-162, 1983
- 60 **Nardini, D., Brebbia, C.A.**, The Solution of Parabolic and Hyperbolic Problems Using an Alternativ Boundary Element Formulation, in: Boundary Elements VII, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1985
- 61 **Nardini, D., Brebbia, C.A.**, Transient Boundary Element Elastodynamics Using the Dual Reciprocity Method and Modal Superpostion, in: Boundary Elements VIII, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1986
- 62 **Newman, J.C.**, NASA TN D-6376, 1971
- 63 **Niwa, Y., Kobayashi, S., Yokota, Y.**, Application of integral equation methods to the determination of static and steady-state dynamic stresses around cavities of arbitrary shape, Proc. Japan Soc. Civil Eng., 195, S. 27-35, 1971
- 64 **Ottenstreuer, M.**, Ein Beitrag zur Darstellung der Wechselwirkung zwischen Bauwerk und Baugrund unter Verwendung des Verfahrens der Randelemente, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1981
- 65 **Peuser, A.**, Ein Beitrag zur Analyse stationärer und instationärer dynamischer Rißprobleme, Dissertation, TU Darmstadt 1983

- 66 **Piltner, R.**, Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1982
- 67 **Piltner, R., Taylor, R.L.**, A boundary-element algorithm using compatible boundary displacements and tractions, Report No. UCB/SEMM-88/19, University of California, Berkeley 1988
- 68 **Pries, H.**, Ein Beitrag zur rechnerischen Behandlung dynamischer Probleme der Bruchmechanik, Dissertation, TU Braunschweig 1979
- 69 **Rice, J.R.**, A Path Independent Integral and Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, Journal of Applied Mechanics, S. 379-386, 1968
- 70 **Rizzo, F.J.**, An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, Quart. Appl. Math., 25, S. 83-95, 1967
- 71 **Rooke, D.P., Cartwright, D.J.**, Compendium of Stress Intensity Factors, Hillington Press, Uxbridge, Middx 1976
- 72 **Sládek, J., Sládek, V.**, Dynamic Stress Intensity Factors Studied by Boundary Integro-differential Equations, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 23, S. 919-928, 1986
- 73 **Smith, R.N.L.**, The solution of mixed-mode fracture problems using the Boundary Element Method, Vortrag auf der Boundary Elements IX Conference, Stuttgart 1987
- 74 **Smith, R.N.L.**, From Rags to Riches? - Developments in the BEM for the Solution of Elastic Fracture Problems, in: Boundary Elements X, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1988
- 75 **Snyder, M.D., Cruse, T.A.**, Crack Tip Stress Intensity Factors in Finite Anisotropic Plates, Technical Report AFML-TR-73-209, Ohio 1973
- 76 **Sommerfeld, A.**, Partielle Differentialgleichungen der Physik, Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt 1978

- 77 **Tanaka, M., Itoh, H.**, A New Family of Crack Elements for Stress Intensity Factor Computation in Elastostatics by Boundary Element Method, in: Boundary Elements VIII, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1986
- 78 **Tracey, D.M.**, Discussion of 'On the Use of isoparametric Finite Elements in linear Fracture Mechanics' by R.S. Barsoum, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 11, S. 401-402, 1977
- 79 **Waller, H., Krings, W.**, Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim Wien Zürich 1975
- 80 **Watson, G.N.**, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, University Press, Cambridge 1944
- 81 **Wich, G.**, Ein Beitrag zur Ermittlung von Rißzähigkeiten bei schlagartiger Belastung, Dissertation, TU München 1986
- 82 **Wilson, W.K.**, Research Report 69-1E7-FMECH-R1, Westington Research Laboratories, Pittsburgh 1969
- 83 **Wilson, W.K.**, Engineering fracture Mechanics, 2, 169, 1970
- 84 **Wilson, W.K.**, J. bas. Engng., 93, 685, 1971

## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalem Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:  
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity

- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells



- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorie unter Berücksichtigung großer Rotationen

- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowsky/H. Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotations-symmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 J. Makowski/H. Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

Nr. 67 Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der  
Randelementmethode



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 67**