



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Herbert Diehl

Ein Materialmodell zur
Berechnung von
Hochgeschwindigkeitsdeformationen
metallischer Werkstoffe unter
besonderer Berücksichtigung der
Schädigung durch Scherbänder

Heft Nr. 66



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum

HERBERT DIEHL

EIN MATERIALMODELL ZUR BERECHNUNG VON HOCH-
GESCHWINDIGKEITSDEFORMATIONEN METALLISCHER WERKSTOFFE
UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER SCHÄDIGUNG
DURCH SCHERBÄNDER

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 66

Juli 1989

Herausgeber :

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Universität-Gh Kassel und am Lehrstuhl für Mechanik I der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof.Dr.-Ing.O.T.Bruhns danke ich für die Betreuung und für die Übernahme des Referates. Herrn Prof.em.Dr.-Ing.Th.Lehmann danke ich für die Übernahme des Korreferates.

Meine früheren akademischen Lehrer an der TH Darmstadt, Prof.Dr.-Ing.D.Gross und Prof.Dr.-Ing.P.Haupt, haben mein Interesse an der Mechanik geweckt und gefördert; hierfür danke ich ihnen.

Meinem langjährigen Kollegen Dipl.-Ing. W.Fornefeld sei herzlich gedankt für die ideale Zusammenarbeit. Mein Dank gilt ferner allen Angehörigen der Mechanik - Institute in Kassel und Bochum, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Abschließend danke ich der Fraunhofer-Gesellschaft für die finanzielle Förderung und Herrn Dr.-Ing.C.-P.Woidneck (BMVg) für seine Hilfe bei der Abwicklung des Forschungsvorhabens.

Bochum, im Juli 1989

Herbert Diehl

Referenten:

Prof.Dr.-Ing.O.T.Bruhns
Prof.em.Dr.-Ing.Th.Lehmann

Tag der Einreichung : 04.04.1989
Tag der mündlichen Prüfung : 27.06.1989

© 1989 Dr.-Ing. Herbert Diehl
Platanenweg 7
4630 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie) bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Kurzfassung

Die Untersuchung hochdynamisch belasteter metallischer Werkstoffe gibt Aufschluß über gravierende Strukturänderungen: Das Material ist fragmentiert als Folge der Entstehung, des Wachstums und der Vereinigung von Mikrodefekten (Scherbänder, Poren, Risse) und die Fragmente werden durch Versetzungsbewegung zusätzlich inelastisch verformt.

Das repräsentative Volumenelement eines derart deformierten Körpers ist ein Polykristall ΔV , der anfänglich eine endliche Zahl von Mikrodefekten enthält. Solange deren Linearabmessung kleiner als $\sqrt[3]{\Delta V}$ ist, kann das Materialverhalten durch eine inkrementelle Kontinuums-Damage-Theorie beschrieben werden. Ist diese Voraussetzung aufgrund des Defektwachstums ab einer Zeit t^* verletzt, dann sprechen wir von der Entstehung eines Makrodefekts, dessen Wachstum mit Methoden der Bruchmechanik zu beschreiben ist.

Nach einer ausführlichen Literaturübersicht in Teil A entwickeln wir in Teil B1 dieser Arbeit eine für $t < t^*$ gültige Kontinuumstheorie. Es handelt sich um eine Innere-Variable-Theorie mit folgenden Merkmalen:

- Es werden inelastische Deformationen und Strukturänderungen infolge von Versetzungsmechanismen und von Scherbandprozessen berücksichtigt.
- Zu den inneren Variablen gehören ein Damage-Tensor \mathbf{Z} sowie Größen τ, ϑ zur Charakterisierung lokaler Spannungskonzentrationen und Temperaturerhöhungen.
- Versetzungs- (Scherband-) Prozesse unterliegen Nebenbedingungen im (σ, Θ) -Raum $((\tau, \vartheta)$ -Raum).
- Die Evolutionsgesetze sind thermodynamisch konsistent bzgl. der Clausius-Duhem-Ungleichung.
- Das System aus Bilanz- und Materialgleichungen ist quasilinear und hyperbolisch.
- Die Zeit t^* sowie Anfangsgröße und Orientierung des Makro-Scherbandes \mathcal{M} werden durch die Kontinuums-Damage-Theorie bestimmt.

In Teil B2 wird eine globale thermodynamische Analyse für \mathcal{M} durchgeführt und eine Materialgleichung für die Wachstumsgeschwindigkeit wird abgeleitet.

Die Eigenschaften der Kontinuums-Damage-Theorie werden in Teil C durch numerische Testrechnungen, u.a. zur Wellenausbreitung, veranschaulicht. Die Testrechnungen umfassen Dehnungsraten von 10^{-5} sec^{-1} bis 10^5 sec^{-1} .

Abstract

The microscopic study of metallic materials subjected to high strain rate deformations reveals a highly disordered substructure: The material is subdivided by processes of nucleation, growth and coalescence of various microdefects (shear-bands, cracks, voids), the fragments suffer inelastic deformations due to dislocation motion.

The representative volume element of the material under consideration is a polycrystal ΔV , initially containing a finite number of microdefects. As long as the linear dimension of the microdefects is less than $\sqrt[3]{\Delta V}$, an incremental continuum damage theory may be used to describe the behavior of the material. If this condition is violated due to defect growth (at $t = t^*$ say), a macrodefect is said to be nucleated, the growth of which has to be treated with fracture mechanics concepts.

Following an extensive literature review in part A, we develop in part B1 of this paper a continuum damage theory valid for $t < t^*$. It is an internal variable theory with the following features:

- Inelastic deformations and structural changes due to dislocation motion and micro shearband formation are taken into account.
- Among the internal variables are averages τ, ϑ of local stress concentrations and hot spots, respectively and a second order damage tensor Z .
- Dislocation processes are subjected to yield conditions and loading conditions in (σ, Θ) -space .
- Damage processes are governed by the behaviour at local stress concentrations and therefore are subjected to yield and loading conditions in (τ, ϑ) -space.
- Evolution laws are thermodynamically consistent with respect to the Clausius-Duhem-inequality.
- The set of balance laws and evolution laws constitutes a quasilinear hyperbolic system.
- Time t^* and initial geometry (shape, area, orientation) of the macro shearband \mathcal{M} are determined by the continuum damage theory.

In part B2 the so-called global thermodynamical analysis is applied to the growth of \mathcal{M} and a constitutive equation for the growth velocity is derived.

In part C the features of the continuum damage theory are illustrated by numerical examples, e.g. simulation of uniaxial wave propagation. Strain rates vary between 10^{-5} sec^{-1} and 10^5 sec^{-1} .

INHALTSVERZEICHNIS

ZIELE DER ARBEIT - INHALTSANGABE	1
---	----------

TEIL A - EINFÜHRUNG IN DIE PROBLEMSTELLUNG

A.1. Literaturübersicht - Teil 1: Experimentelle Befunde	5
A.2. Literaturübersicht - Teil 2: Untersuchungen zur Wellenausbreitung	19
A.3. Literaturübersicht - Teil 3: Versetzungstheoretische Aspekte der Hochgeschwindigkeitsdeformationen	22
A.4. Literaturübersicht - Teil 4: Theoretische Untersuchungen zu Mikro- und Makro-Scherbändern	26
A.5. Erste Folgerungen für die Anwendung der Kontinuumsphysik bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen	28
A.6. Literaturübersicht - Teil 5: Kontinuumsmodelle zur Beschreibung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen	31
A.7. Weitere Folgerungen für die Anwendung der Kontinuumstheorie	43

TEIL B : ENTWICKLUNG EINES MATERIALMODELLS

Teil B1: Die Kontinuums-Damage-Theorie für Phase 1

B1.1. Einige Bezeichnungen	44
B1.2. Identifikation der inneren Variablen und Prozeßvariablen der Kontinuums-Damage-Theorie für Hochgeschwindigkeitsdeformationen	49
B1.3. Ansätze für die Evolutionsgesetze	63
B1.4. Aufstellung und Auswertung der Clausius-Duhem-Ungleichung	73
B1.5. Versagenskriterien	87
B1.6. Zusammenstellung der Materialgleichungen (Modellversionen 1.1. und 1.2.)	94

B1.7. Erweiterung von Modell 1.2. zur Beschreibung großer Deformationen (Modell 1.2.LD)	101
---	-----

Teil B2: Beschreibung der Ausbreitung eines Makro-Scherbandes in Phase 2

B2.1. Einleitung	118
B2.2. Thermodynamische Restriktionen für das Wachstum von \mathcal{M}	120
B2.3. Eine thermodynamisch zulässige Gleichung für c	132
B2.4. Zur effizienten Berechnung der Integrale G_1 , G_2	134
B2.5. Das Materialmodell für \mathcal{M}	136
B2.6. Zusammenfassung der Materialgleichungen von Modell 2.1. - Untersuchung des inkrementellen RWP's	138

TEIL C: ERGEBNISSE VON TESTRECHNUNGEN MIT MODELL 1.2. IN PHASE 1

C.1. Bemerkungen zur Anpassung der Materialfunktionen und Materialparameter	142
C.2. Testrechnungen - Teil1: Simulation kleiner homogener Deformationen	143
C.3. Testrechnungen - Teil2: Simulation großer inhomogener Deformationen mit Wellenausbreitung	154

ZUSAMMENFASSUNG UND ABSCHLIESSENDE BEMERKUNGEN 163

ANHANG

Anh.1. Zur Interpretation des Damage-Tensors	166
Anh.2. Zur Beschreibung des Übergangs von athermischen zu thermisch aktivierten Versetzungsmechanismen	169
Anh.3. Der Ansatz (B.91,92) für den Spannungskonzentrationstensor τ	175

Anh.4. Das Verhalten der Felder der Kontinuums-Damage-Theorie in der Nähe eines Makro-Scherbandes bei kleinen Deformationen in \mathcal{B} und \mathcal{M} 176

Anh.5. Zusammenstellung der Materialfunktionen und Materialparameter für Modell 1.2. 183

LITERATURVERZEICHNIS 187

SACHWORTVERZEICHNIS 198

* * *

ABKÜRZUNGEN

HGD	Hochgeschwindigkeitsdeformation
g.a.	geschwindigkeitsabhängig
g.u.	geschwindigkeitsunabhängig
MiSB	Mikro-Scherband
MaSB	Makro-Scherband
CDU	Clausius-Duhem-Ungleichung
2.HS	zweiter Hauptsatz der Thermodynamik
SRI	Stanford Research Institute
IFAM	Fraunhofer-Institut f. angew. Materialforschung Bremen
HNS	Hauptnormalspannung
HSS	Hauptschubspannung
HAS	Hauptachsensystem
CFC	Contained fragmented cylinder
AOC	Axis of compression
CRP	Chain rule property
LEBM	Linearelastische Bruchmechanik
SHB	Hopkinson - Balken
RSW	Rotationsschlagwerk
TEM	Transelektronen - Mikroskop
SZ	Spannungszustand
RVE	Repräsentatives Volumenelement ΔV
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit

NOTATION

$$\mathbf{a} \rightarrow a_k$$

$$\text{tr } \mathbf{A} \rightarrow A_{kk}$$

$$\mathbf{A} \rightarrow A_{kr}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{B} \rightarrow A_{krsp} B_{sp}$$

$$\mathbf{A} \rightarrow A_{krsp}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{b} \rightarrow A_{kr} b_r$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rightarrow A_{kr} B_{kr}$$

$$\mathbf{A}^I = \mathbf{A} - \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{A}) \mathbf{1}$$

$\mathbf{1}, \mathbf{1}$ Einheitstensoren

$$\mathbf{A}^T \mathbf{b} \rightarrow A_{rk} b_r$$

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} \rightarrow e_i f_i$$

$$\mathbf{e} \times \mathbf{f} \rightarrow \varepsilon_{ijk} e_j f_k, \varepsilon_{ijk} = \text{Permutationssymbol}$$

$$\mathbf{e} * \mathbf{f} \rightarrow e_i f_k$$

[x] : Literaturstelle Nummer x , Literaturverzeichnis S.187 - 197

[[ξ]]: Sprung einer Größe ξ an einer Unstetigkeitsfläche

\underline{w} : n-tupel von Zahlen (im Unterschied zu einem Vektor \mathbf{w})

Es wird fast ausschließlich die symbolische Schreibweise benutzt. Bei Verwendung der Indexschreibweise beziehen sich die Komponenten a_i , A_{kr} usw. auf eine kartesische Basis \mathbf{b}_k .

ZIELE DER ARBEIT - INHALTSANGABE

I) Die vorliegende Arbeit entstand während des ersten fünfjährigen Bearbeitungszeitraums eines mit einer Laufzeit von zehn Jahren geplanten Forschungsvorhabens über das Werkstoffverhalten polykristalliner Materialien bei hochdynamischer Beanspruchung und seine Modellierung durch konstitutive Gleichungen. Die Ziele des Projekts sind:

- a) Entwicklung eines allgemeinen theoretischen Rahmens für die Beschreibung solcher Hochgeschwindigkeitsdeformationen (HGDen) mit Methoden der Kontinuumsmechanik unter besonderer Berücksichtigung von Versagenskriterien
- b) Herleitung eines mit a) verträglichen Werkstoffmodells
- c) Konkretisierung des Modells durch Angabe von Materialfunktionen und Materialparametern
- d) Verifikation der Modelleigenschaften durch numerische Simulation
- e) Implementierung des Werkstoffmodells in ein parallel zu entwickelndes FEM-Programm.

Die Fortschritte bei der Bearbeitung dieser Probleme wurden in regelmäßig erschienenen Berichten dargelegt, siehe Nr. [1]-[5] des Literaturverzeichnisses. In der vorliegenden Arbeit stehen die Ziele a),b),d) im Vordergrund; die Anpassung der Materialfunktionen und über Teil C dieser Arbeit hinausgehende Simulationsrechnungen findet man in den genannten Berichten. Eine vertiefende Erörterung der Anpassungsstrategie ist ebenso Gegenstand der demnächst erscheinenden Dissertation von *W.Fornefeld* wie die Umsetzung des Modells in ein FE-Programm.

II) Teil A der Arbeit enthält zunächst die Ergebnisse einer Literaturrecherche. Der darin gegebene Überblick über experimentelle Befunde sowie über bislang entwickelte Materialmodelle wird ergänzt durch Folgerungen über die Anforderungen an ein verbessertes Materialmodell. Teil A ist recht umfangreich, da es bislang noch keine deutschsprachige Einführung in die Problematik der Modellierung von HGDen gibt; der mit dem Problemkreis vertraute Leser mag die Literaturrecherche überschlagen und nur die Folgerungen lesen.

Im Vorgriff auf Teil A sei ein grundlegendes Ergebnis dieser Voruntersuchungen mitgeteilt: Das Verhalten von Metallen bei HGDen wird entscheidend durch ihren Reinheitsgrad beeinflusst. Lokale Störungen durch mehrdimensionale Gitterfehler verursachen die Entstehung von Mikroporen, Mikrorissen und/oder Mikro-Scherbändern (je nach Beanspruchungsart), deren Wachstum letztlich zur Fragmentierung des Körpers führt. Entstehung und Wachstum solcher Defekte ist an sich nicht typisch für HGDen; dort treten die Defekte jedoch sehr rasch und bei kleinen mittleren Dehnungen auf, während man sie bei langsamen Prozessen wenn überhaupt erst nach großen Deformationen oder unter extrem niedrigen Temperaturen bemerkt.

In dieser Arbeit verstehen wir unter Fragmentierung sowohl Materialtrennung durch Rißbildung als auch die Unterteilung des Körpers in gering deformierte Bereiche, die durch Zonen lokalisierter Deformationen begrenzt sind. Fragmentierung in diesem Sinne tritt, erwünscht oder unerwünscht, bei fast allen HGDen auf. Eine Disziplin, die sich mit der Untersuchung solcher Phänomene beschäftigt, könnte man als "Fragmentierungsmechanik" (als Oberbegriff der Bruchmechanik) bezeichnen. Während die Bruchmechanik bei langsamen Deformationen aber nur vergleichsweise selten und in Extremfällen zur Analyse von Strukturen bemüht werden muß, bildet die "Fragmentierungsmechanik" einen wesentlichen Bestandteil jeder Berechnung einer HGD. Das Einsetzen der Fragmentierung bedeutet, daß sich Makrodefekte (Makrorisse oder Makro-Scherbänder) im Körper ausbreiten und dessen Topologie verändern. Gleichzeitig endet damit der Gültigkeitsbereich der klassischen Kontinuumsmechanik.

Wir bezeichnen mit $t = 0$ den Belastungsbeginn und mit $t = t^*$ den Beginn der Fragmentierung. Das Intervall $[0, t^*]$ bezeichnen wir mit Phase 1, das Intervall (t^*, ∞) mit Phase 2.

Für Phase 1 wird dann in Teil B1 dieser Arbeit eine Kontinuums-Damage-Theorie entwickelt. Deren Aufgabe ist es, neben der Berechnung von Cauchy-Spannung σ , absoluter Temperatur Θ usw. auch Kriterien für die Entstehung eines Makrodefekts \mathcal{M} und dessen Anfangsgestalt zu liefern, so daß die Berechnung der HGD in Phase 2 mit einem durch Elemente der Fragmentierungsmechanik ergänzten Modell fortgesetzt werden kann. Die Kontinuums-Damage-Theorie soll darüber hinaus auch für langsame Prozesse anwendbar sein.

Die Kontinuums-Damage-Theorie wird hier zunächst nur für kleine Verzerrungen formuliert (Kap.B1.1-B1.6) und erst in Kap.B1.7 auf große Deformationen erweitert. Die anfängliche Beschränkung auf kleine Deformationen erfolgt nicht nur aus Gründen der Bequemlichkeit: Ist t^* klein genug und interessiert man sich nur für Phase 1, so genügt oft eine Theorie kleiner Deformationen [25].

III) Wir wollen nun begründen, warum das Problem der Scherbandbildung für vertiefende Untersuchungen ausgewählt wurde. Das Einsetzen lokalisierter Scherungen ist sowohl für den Theoretiker als auch für den Konstrukteur von Bedeutung: Für den Materialtheoretiker ist es repräsentativ für eine Klasse inelastischer Deformationen mit akkumulierender Materialschädigung. Zu dieser Klasse gehören auch Prozesse mit Poren- oder Rißbildung. Da sich Risse oft entlang von Scherbändern ausbreiten, ist die Kenntnis von Scherbändern auch für die Bruchmechanik von Interesse.

Auch wenn es nicht zum Bruch kommt, beeinflussen lokalisierte Scherungen das Verhalten von Strukturen, wie die Untersuchung einer Panzerplatte als einfachstem Beispiel einer Schutzeinrichtung gegen Projektil zeigt. "Projektil" steht

hier als Oberbegriff für Geschosse im engeren ballistischen Sinne wie auch für schnell fliegende Bruchstücke (engl. "striker") defekter Maschinenteile. Um das Projektil abzubremsen, muß dessen kinetische Energie in elastische Formänderungsenergie, latente Energie und Wärme in der Panzerplatte umgewandelt werden; man spricht von Energieaufnahme der Platte. Durch die Lokalisierung der Deformation in Scherbändern wird die Energieaufnahme aber stark reduziert. Es muß also versucht werden, die Lokalisierung zu verhindern. Diese Arbeit soll zum Verständnis der die Lokalisierung beeinflussenden Effekte beitragen.

IV) Die Kontinuums-Damage-Theorie aus Teil B1 ist eine inkrementelle Innere-Variable-Theorie. Wir unterscheiden innere Variable \mathcal{D}_k (\mathcal{D}_k) zur Beschreibung versetzungsinduzierter (damageinduzierter) Prozesse. In Kap.B1.2 werden diese Variablen eingeführt, z.T. als Ergebnis einer approximativen Homogenisierung der Mikrofelder im Innern eines repräsentativen Volumenelementes ΔV . In Kap.B1.3 werden Ansätze für die Evolutionsgesetze eingeführt, die in Kap.B1.4 auf ihre thermodynamische Konsistenz hin untersucht werden. Die Clausius-Duhem-Ungleichung (CDU) wird als mathematische Formulierung des Irreversibilitätspostulats akzeptiert.

Mit dem Ziel, die Modellbildung bis zur Anwendbarkeit in FE-Programmen voranzutreiben verbindet sich die Notwendigkeit, die Materialfunktionen innerhalb eines bestimmten Anwendungsbereichs möglichst einfach zu wählen. Dieser vielleicht in Teil B nicht immer klar zutage tretende Grundsatz wird bei der Auswertung der CDU besonders deutlich, da wir uns von vornherein auf eine spezielle Approximation des thermodynamischen Potentials (hier der Enthalpie g) beschränken.

In Kap.B1.5 werden Versagenskriterien und Kriterien für die Entstehung eines Makro-Scherbandes erörtert. In Kap.B1.6 werden die Ergebnisse zusammengefaßt. Das so hergeleitete Modell bezeichnen wir mit Modell 1.1. Eine vereinfachte Version 1.2 wird ebenfalls angegeben. Bei der Kennzeichnung der Modellversionen bezieht sich die erste Ziffer stets auf die Phase, in der das betreffende Modell gilt. Teil B1 endet in Kap.B1.7 mit der Erweiterung von Modell 1.2 zur Beschreibung großer Deformationen. Diese Version wird mit Modell 1.2.LD bezeichnet ("large deformations").

V) In Teil B2 wird das hier vorgestellte Konzept zur Beschreibung von HGDen abgeschlossen mit der Einführung von Modell 2.1, welches das Wachstum eines einzelnen Makro-Scherbandes \mathcal{M} beschreibt. Hierzu ist die Angabe einer Materialgleichung für die Wachstumsgeschwindigkeit c des Scherbandrandes erforderlich. Einschränkungen für c ergeben sich aus einer Formulierung des 2.HS für eine im Grenzfall infinitesimale Umgebung des Scherbandrandes; c wird als Funktion integraler Größen über diese Umgebung dargestellt. Die Vorgehensweise orientiert sich stark an den Methoden der Bruchmechanik. In dieser Arbeit beschränken wir uns auf den einfachsten Fall geradliniger Scherbandausbreitung in

einem Körper \mathcal{B} , welcher nur kleine Deformationen erleidet. Die entsprechenden Verallgemeinerungen werden in [5] behandelt.

VI) Die in Teil C beschriebenen Ergebnisse von Testrechnungen beziehen sich nur auf Modell 1.2 bzw. 1.2.LD. Die Materialparameter gelten für ein fiktives Vergleichsmaterial, dessen Verhalten für eine große Klasse realer metallischer Werkstoffe repräsentativ ist. Der Kunstgriff der Einführung des Vergleichsmaterials ist notwendig, da die zur Anpassung von Modell 1.2 benötigten Versuche bislang nicht vollständig an realen Materialien durchgeführt wurden. Die Testrechnungen umfassen

- homogene, nichtisotherme, nichtradiale, nichtmonotone Prozesse mit Dehnungsraten zwischen 10^{-5} sec^{-1} und 10^5 sec^{-1} .
- Untersuchungen zur Wellenausbreitung bei einachsigen Spannungszuständen.

TEIL A : EINFÜHRUNG IN DIE PROBLEMSTELLUNG

A.1. Literaturübersicht - Teil 1: Experimentelle Befunde

A.1.1. Beispiele für Hochgeschwindigkeitsdeformationen - Beschreibung von Experimenten

I) I) In diesem Kapitel sollen einige Beispiele für HGDen vorgestellt werden. Vorbehaltlich einer präziseren Begriffsbildung in Kap.A.5 wollen wir zunächst unter einer HGD einen Prozeß verstehen, bei dem Dehnungsraten $|\dot{\epsilon}| > 10^2 \text{ sec}^{-1}$ erreicht werden.

II) Das wachsende Interesse an theoretischen Grundlagen und praktischem Einsatz von HGDen äußert sich in der großen Zahl von Tagungen zu diesem Problemkreis (z.B. [6]-[18]) und einer neuen Zeitschrift, dem International Journal of Impact Engineering. Technische Bedeutung haben HGDen im Zusammenhang mit

- Ballistik (Auslegung von Panzerungen, Geschossen)
- Entwicklung von Schutzeinrichtungen (z.B. im Zusammenhang mit crash-Tests)
- Hochgeschwindigkeitsumformung (Schneiden, Sprengplattieren)
- Herstellung neuer Werkstoffe (z.B. dynamisches Verdichten).

Bzgl. der Details sei auf die Literatur verwiesen. Wir interessieren uns hier in erster Linie für diejenigen HGDen, die der Untersuchung des Materialverhaltens dienen. Informationen über das Verhalten dynamisch belasteter Strukturen und einfache Berechnungsmethoden findet man in [25],[40]-[44]. Wir kommen darauf in Kap.A.6.5. nochmals kurz zurück.

III) Wir beschränken uns ferner auf die Untersuchung von Metallen und metallischen Legierungen. Vor allem im Flugzeugbau gewinnen Metall-Kunststoff- und Metall-Keramik-Composites an Bedeutung, der systematischen Auswertung der zahllosen Versuche an Composites fehlt aber noch die ordnende Hand einer auch für dynamische inelastische Prozesse gültigen Kontinuumstheorie der Composites.

II) I) Die experimentelle Untersuchung des Verhaltens von Metallen bei HGDen begann Ende der vierziger Jahre; aus dieser Zeit seien die Arbeiten von *Taylor* [19] und von *v.Karman & Duwez* [20] zur Ermittlung der sog. „dynamischen Fließspannung“ erwähnt.

II) Bei diesem sog. Taylor-Test wird ein stumpfes kreiszylindrisches Projektil gegen eine „starre“ Wand geschossen. Näherungsannahmen über Spannungszustand und Wellenausbreitung erlauben es dann, einen Wert der Fließspannung zu ermitteln. An diesem Versuch sind bereits drei typische Merkmale aller HGD-Experimente zu erkennen:

- a) Die Proben erleiden inhomogene Deformationen .
- b) Es ist nur eine iterative Vorgehensweise möglich, d.h. zur Versuchsauswertung muß man bereits Annahmen über das Materialverhalten treffen.
- c) Für die Auswertung werden nur Mittelwerte (zeitlich und/oder räumlich) herangezogen. Der zeitliche Verlauf lokaler Werte ist oft der Messung nicht zugänglich.

III) In den folgenden Abschnitten werden diejenigen Experimente kurz beschrieben, auf denen wir bei der Formulierung der Theorie aufbauen. Bzgl. meßtechnischer Details sei auf die Spezialliteratur verwiesen. Allgemein läßt sich sagen, daß Experimente zum Hochgeschwindigkeitsverhalten von Metallen sehr viel arbeitsintensiver, teurer und fehleranfälliger sind als die dem Materialtheoretiker eher vertrauten homogenen Zug-Druck-Versuche zum Verhalten von Metallen bei quasi-statischer Beanspruchung. Aus diesem Grund hat sich eine Arbeitsteilung zwischen Theoretikern und Experimentatoren entwickelt, die freilich durch die übliche Verzögerung beim Austausch von Informationen sowie durch räumliche Trennung der Wissenschaftler oft hinderlich ist.

IV) Die anzusprechenden Experimente lassen sich u.a. dadurch klassifizieren, ob die unter b) oder c) angesprochenen Fehlerquellen klein gehalten werden. So lassen sich z.B. durchaus lokale Werte ermitteln (d.h. kleiner Fehler bei c)), wenn man Annahmen über die Wellenausbreitung (Anzahl der Wellenfronten, Ausbreitungsgeschwindigkeit, Dispersion) und damit über das Materialverhalten trifft (mögliche Fehler bei b)). Dies trifft auf Experimente mit dem Hopkinson-Balken und den flat-plate-impact test zu. Bei anderen Versuchen, z.B. mit dem Rotationsschlagwerk, erfolgt die Messung hingegen über ein Zeitintervall $\delta t \gg l/c_{\min}$, wobei l die Probenlänge und c_{\min} die kleinste Wellengeschwindigkeit ist. Dadurch kann zwar auf Annahmen zu b) verzichtet werden, aber man kann eben auch nur Mittelwerte der Dehnungsrate und der Spannung miteinander verknüpfen. Es sei angemerkt, daß sich diese beiden Grenzfälle der Versuchsdurchführung auch analog beim Verhalten dynamisch belasteter Strukturen und bei den Berechnungsmethoden finden lassen; *Belytschko* ([21],p.56) spricht von

- "wave propagation problems"
- "inertial (structural dynamics) problems".

v) Eine andere Möglichkeit zur Klassifikation von Experimenten besteht in der Unterscheidung zwischen der Messung phänomenologischer Größen wie (mittlerer) Spannung, (mittlerer) Dehnung einerseits und der Messung der Änderung der Materialstruktur durch Versetzungen, Zwillinge, Scherbänder, Poren, Risse andererseits. Die Bestimmung der Materialstruktur erfolgt erst im Anschluß an eine HGD, ist deshalb weniger störungsanfällig und verwendet meist die bei quasistatischen Prozessen erprobten Verfahren. Eine Ausnahme hievon stellt u.U. die Bestimmung der mittleren Versetzungsdichte N dar; $N(\epsilon)$ ist bei HGDen größer als

bei langsamen Prozessen und der Abstand von Versetzungen wird kleiner als die Auflösung von TEMen [22].

Neuere Übersichtsartikel über experimentelle Methoden sind [23],[24].

III) Der Hopkinson-Balken (Split-Hopkinson-(Pressure)-Bar), SHPB,SHB

I) Beim SHB wird die Probe zwischen 2 elastische Stäbe plaziert; in einen der Stäbe (input-bar) wird eine Welle eingeleitet. In der ursprünglichen Version war der SHB nur zur Druckbeanspruchung geeignet (\Rightarrow SHPB); durch geschickte Lasteinleitung und Probengeometrie können auch Zug- oder Schubbeanspruchungen und sogar mehrachsige Beanspruchungen [32] erzeugt werden. Fig.A.1. aus [46] zeigt das Aufbauprinzip eines SHB's mit einer allerdings nur selten eingesetzten Scherprobe. Durch die Länge der Balken und den Ort der DMS kann man beeinflussen, ob eine einzelne Wellenfront aufgezeichnet wird oder Mittelwerte über mehrere Wellendurchgänge [33]. Unter in [22] erläuterten Bedingungen stellt sich näherungsweise ein einachsiger Spannungszustand ein.

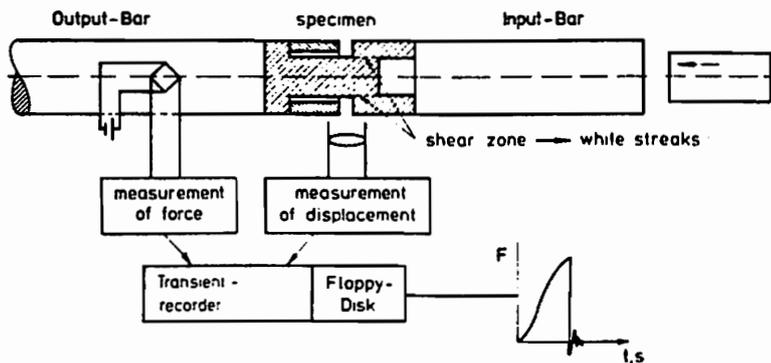


Fig.A.1

II) In Fig.A.2,A.3 sind typische Ergebnisse aus SHB-Versuchen qualitativ aufgetragen (Druckspannungen sind positiv gezählt; $\sigma, \epsilon, \dot{\epsilon}, \theta$ sind zeitliche Mittelwerte)

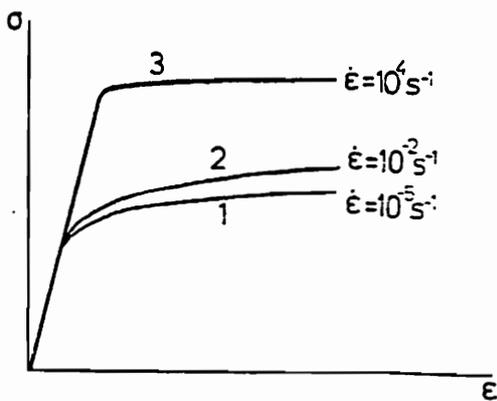


Fig.A.2

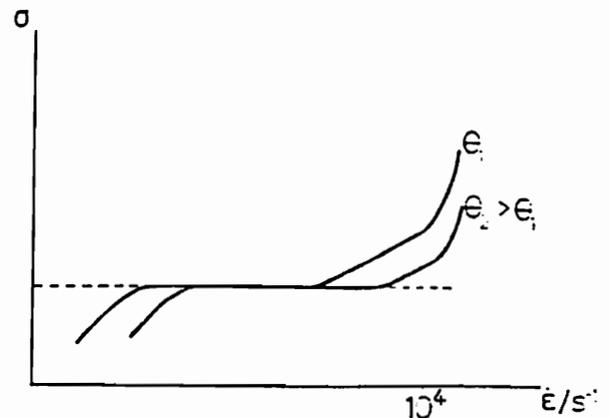


Fig.A.3.

Solches Verhalten wurde für zahlreiche Werkstoffe beobachtet, z.B. verschiedene austenit. Stähle, Aluminium ([47],Abb.1,12),[48]; Kupfer, Armco-Eisen (Lindholm

in [6]); Nitronic 40-Stahl [22], hochfeste Stähle [49]. Ähnliche Beziehungen zwischen Spannung und Verzerrung wurden auch bei Torsionsbeanspruchung von verschiedenen Titanlegierungen festgestellt [50].

III) Die σ - ε -Kurven sind gekennzeichnet durch:

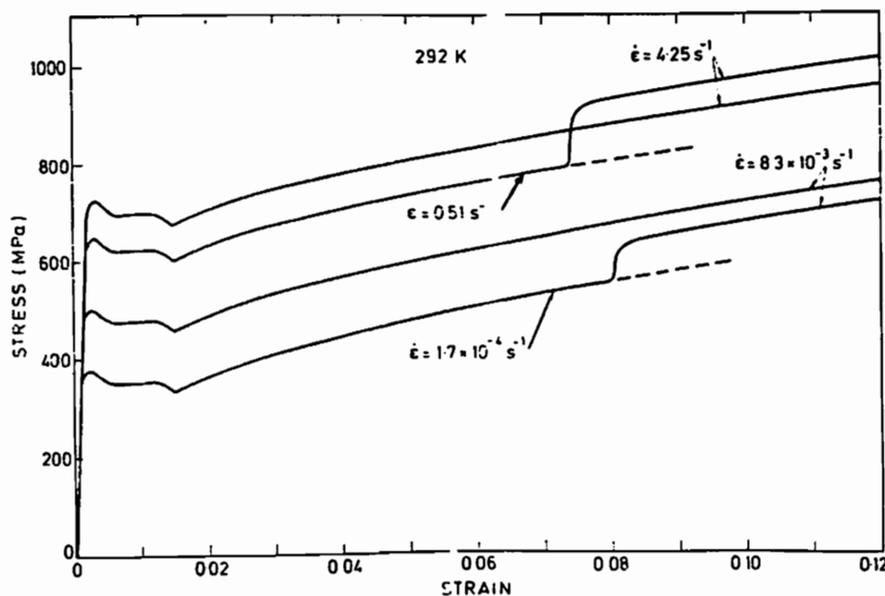
- Ein Anwachsen der Proportionalitätsgrenze σ_0 mit $\dot{\varepsilon}$ und Θ^{-1} .
- Ein Anwachsen der Kurven $\sigma(\varepsilon; \dot{\varepsilon}, \Theta)$ mit $\dot{\varepsilon}$ und Θ^{-1} .
- Eine Abnahme des Tangentenmoduls E_t mit $\dot{\varepsilon}$, was voraussichtlich auf nichtisotherme Prozeßführung und mögliche Schädigung zurückzuführen ist.
- Punktsymmetrie zu $(\sigma, \varepsilon) = (0, 0)$ für Spannungen $\sigma/E \ll 1$.
- Einen stetigen Verlauf von E_t , d.h. $E_t(\sigma_0/E) = E$.

IV) Die σ - $\dot{\varepsilon}$ -Kurven sind gekennzeichnet durch

- Anwachsen mit ε
- 3 Bereiche mit $\sigma(\dot{\varepsilon}) \approx \text{konst.}$, $\sigma(\dot{\varepsilon}) \approx \log \dot{\varepsilon}$, $\sigma(\dot{\varepsilon}) \approx \dot{\varepsilon}$. Aus in Kap.A.3. erläuterten Gründen sprechen wir von athermischer, thermisch aktivierter, viskos gedämpfter Versetzungsbewegung (VA, VT, VD)

Bei der Interpretation der Bilder ist zu beachten, daß jeder Versuch mit $\dot{\varepsilon} \approx \text{konst.}$ und $\Theta \approx \text{konst.}$ eine Kurve in Fig.A.2 liefert, jedoch nur einen Punkt in Fig.A.3.

v) Der SHB wird auch für sog. strain-rate-jump-tests benutzt, bei denen Einflüsse rasch wechselnder Dehnungsraten untersucht werden sollen ("strain rate history effects"). Fig.A.4 aus [47] zeigt, daß die σ - ε -Kurven nach dem $\dot{\varepsilon}$ -Wechsel sowohl ober- als auch unterhalb der Kurve des durchgängig schnellen Prozesses liegen können. Der Regelfall scheint zu sein, daß die σ - ε -Kurve nachher



Strain-Rate Jump Tests on Molybdenum

Fig.A.4.

unterhalb derjenigen der hohen Dehnungsrate liegt [26]. Eine weitere Übersicht über Geschwindigkeitswechselfersuche findet man in der Einleitung der Arbeit von *Korzen* [89].

IV) Flat-plate-impact Tests (siehe Fig.A.5)

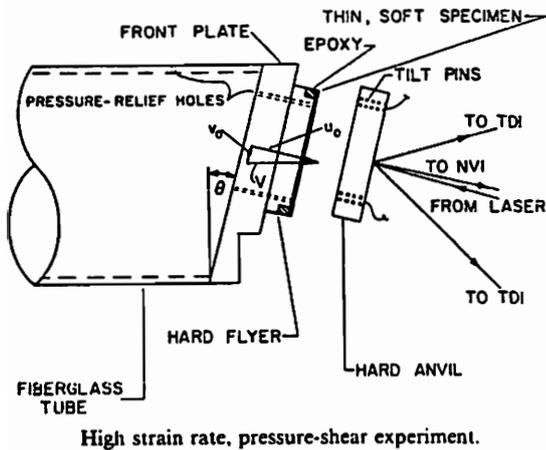


Fig.A.5

Dieser Versuch wurde vor allem von *Clifton* und Mitarbeitern entwickelt [26], [31],[50],[51]. Gegenüber dem SHB hat er den Vorteil, daß die Voraussetzungen der Theorie (hier: einachsiger Verzerungszustand) leichter zu erfüllen sind, vor allem dann, wenn durch die Probenform ("star shape") der Einfluß von Wellenreflexionen gemildert wird. Je nach Anstellwinkel lassen sich auch Schereinflüsse erfassen. Der flat-plate-impact Test ist wegen des dreiachsigen Spannungszustandes hervorragend geeignet, das Materialverhalten bei ballistischer Beanspruchung (hohe Drücke $\tau\sigma/E \approx 1$,

kleine Schubspannungen $\|\sigma^I\|/E \ll 1$) zu erfassen. Die Komplexität des Spannungszustandes verhindert aber, daß die Ergebnisse des flat-plate-impact Tests in der bei Werkstoffwissenschaftlern üblichen einfachen Weise mit wenigen Parametern charakterisiert werden können. Deshalb wird dieser Versuch überwiegend zur Untersuchung von Wellenphänomenen in wenigen ausgewählten Materialien benutzt und nicht zur Klassifizierung verschiedener Werkstoffe.

V) Andere Versuche zur Ermittlung von σ - ε -Kurven

i) Expanding-Ring Test [52]

Die Ergebnisse unterscheiden sich nicht qualitativ von den mit dem SHB ermittelten Kurven.

ii) Rotationsschlagwerk [49] (RSW)

Das RSW wurde am IFAM (Fraunhofer-Institut in Bremen) entwickelt und ermöglicht die Untersuchung einachsiger Zugspannungszustände für Dehnungsraten bis 10^5 sec^{-1} . Es ergänzt die Versuche zur Druckbeanspruchung mit dem SHB. Auf den Ergebnissen des RSW beruht die Feststellung, daß innerhalb des Anwendungsbereichs von RSW, SHB kein gravierender Unterschied zwischen Zug- und Druckverhalten der Probe besteht.

VI) Weiterentwicklungen des Taylor-Tests gegenüber den Versuchen von *Taylor*

i) Die Weiterentwicklungen beruhen zum einen auf einer verbesserten Auswertung für konventionelle Aufprallgeschwindigkeiten [53], zum andern auf einer Erhöhung

der Aufprallgeschwindigkeit zur Untersuchung von Bruch- und Scherbandphänomenen [54] im Projektil. Mit Scherbändern werden wir uns in Kap.A.1.3. noch ausführlicher beschäftigen.

II) Fig.A.6. aus [53] gibt einen Eindruck von den Verformungen bei einem Aufprall mit 70m/sec (bis ca. 10m/sec würde sich die Probe elastisch verhalten).

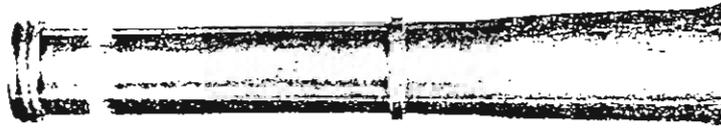


Fig.A.6

Gemessen wurden Radialdehnungen von ca. 30% und Erwärmungen von ca. 100 K für eine Probe aus einer weichen Aluminiumlegierung.

VII) Durchschlagversuch

Eine andere Weiterentwicklung des Taylor-Tests ist der Durchschlagversuch, bei dem sich das Target ebenfalls verformt. Primäres Ziel dieses Versuchs ist die Bestimmung des "ballistic limit" $v_{BL} = \frac{1}{2}(v_{PP} + v_{CP})$; dabei ist v_{PP} die höchste gemessene Geschwindigkeit mit partieller Penetration und v_{CP} die kleinste Geschwindigkeit mit vollständiger Penetration [55]. Der Materialwissenschaftler erhält Information über Versagensmechanismen. Fig.A.7. aus [56] zeigt den Aufprall eines

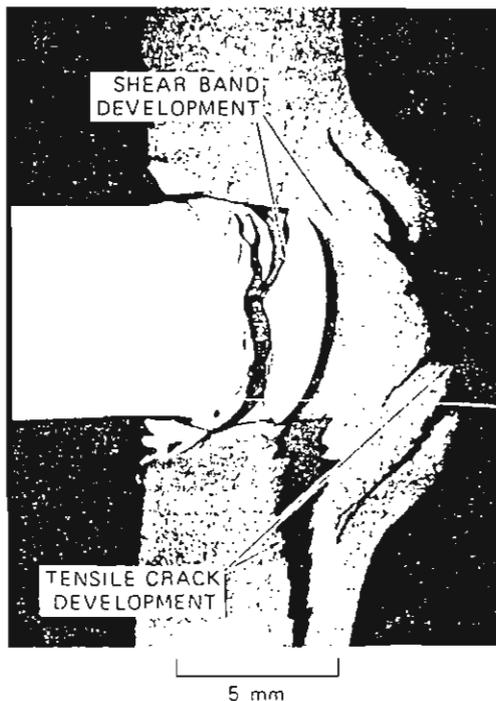


Fig.A.7.

stumpfen Stahlgeschosses auf eine Stahlplatte. Die Platte versagt durch "plugging"

infolge der Scherbandbildung und "spalling" infolge der bei der Wellenreflexion unter Zugbelastung entstandenen Risse. Die in Fig.A.8. dargestellte Tabelle aus [13],p.166 gibt einen Überblick über die bei steigender Aufprallgeschwindigkeit beobachteten Phänomene.

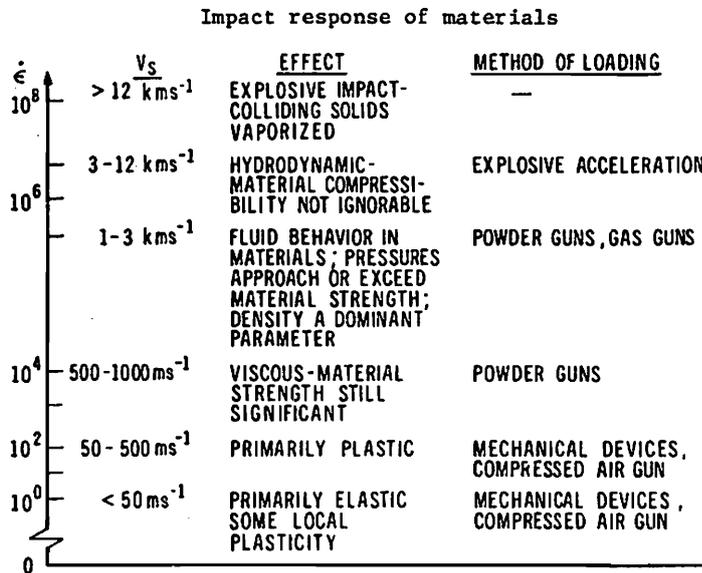


Fig.A.8.

A.1.2. Experimente zur Mikromechanik von HGDen - Teil 1 : Versetzungsmechanismen

I) Es gibt eine große Zahl von Veröffentlichungen über das Verhalten von Versetzungen bei HGDen. Untersucht werden

- Zunahme der Versetzungsdichte [51]
- Versetzungsstruktur (z.B. Bildung von Zellen) [57]
- Dichte der beweglichen Versetzungen ([58]-[60])
- Einfluß der Zwillingsbildung [57]
- Latente Energie ("stored energy")
- Gültigkeit der Orowan-Kinematik, d.h. es wird gefragt, ob sich Versetzungen nur in ihrer Gleitebene oder auch senkrecht dazu bewegen, wie man dies bei höheren Temperaturen erwartet.

In allen Fällen wird die (mittlere) Versetzungsdichte nur durch einen Skalar N gemessen. Wir haben im Bericht [3] bereits ausführlich über die Literaturrecherche zu Versetzungsmechanismen berichtet, weshalb wir uns hier kurz fassen können.

II) Informationen zur Versetzungsdichte N

Die Ergebnisse von Messungen der Versetzungsdichte N werden üblicherweise in der Form $N = N(\epsilon, \dot{\epsilon})$ angegeben und es wird

$$\frac{\partial N}{\partial \dot{\epsilon}}(\epsilon, \dot{\epsilon}) > 0$$

beobachtet, wie z.B. der Vergleich von Daten aus [51],[62] zeigt und wie durch Untersuchungen in [22] erhärtet wird.

III) Versetzungsstruktur

Die räumliche Verteilung von Versetzungen ist sehr viel homogener als bei entsprechender Dehnung und langsamer Prozeßführung, da die Versetzungen keine Zeit haben, stabile Multipole zu bilden. Kommt es dennoch zur Bildung von Versetzungszellen, so sind diese kleiner als die Zellen bei langsamen Deformationen [57]. Aufgrund der hohen Spannungen und der geringen Zeit, in der benachbarte Gleitebenen wechselwirken können, kommt es zum Gleiten auch auf ungünstig orientierten Gleitebenen (Mehrfachgleiten) [63].

IV) Dichte der beweglichen Versetzungen N_{mob}

Die Dichte N_{mob} der beweglichen Versetzungen läßt sich experimentell für $\dot{\epsilon} < 8 \cdot 10^3 \text{ sec}^{-1}$ und $\Theta < 500 \text{ K}$ aus der Messung der Dämpfung von Ultraschallwellen bestimmen ([58]-[60]). Es zeigt sich

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\epsilon}} \left(\frac{N_{mob}}{N} \right) < 0$$

mit $N_{mob}/N \approx 10^{-2}$ für langsame Prozesse und $N_{mob}/N \approx 10^{-3}$ für die schnellsten der untersuchten Prozesse. Dieses Ergebnis wird in [61] bestätigt.

V) Einige weitere Ergebnisse

I) Mit zunehmender Dehnungsrate steigt auch die Dichte der Zwillingsversetzungen [57], vor allem in Materialien mit niedriger Stapelfehlerenergie.

II) Latente Energie

Die Bestimmung der stored energy bei HGDen ist mühsam. Ein auf der Röntgenprofilanalyse beruhendes Verfahren ist derzeit an der TU Karlsruhe in Entwicklung. Die Beobachtung der Defektverteilung im Anschluß an eine HGD läßt erwarten, daß auch bei HGDen max. 10 % der plastischen Arbeit gespeichert werden, siehe auch [26]. Hierzu folgende Plausibilitätsbetrachtung:

In erster Näherung läßt sich die in den Eigenspannungsfeldern von Versetzungen gespeicherte Energie durch eine Abhängigkeit der inneren Energie von der mittleren Versetzungsdichte N beschreiben. Das ist aber nur zulässig, wenn das Mikrofeld N_m im Volumenelement nicht allzu stark schwankt. Bei inhomogener Versetzungsverteilung sind die Bereiche hoher Versetzungsdichte ihrerseits Eigenspannungsquellen, deren Beitrag zur stored energy durch andere Verfestigungsvariablen (z.B. kinematische Verfestigung X) zu beschreiben ist. Wie zuvor gesehen, ist bei schnellen Prozessen die Versetzungsverteilung homogener und N ist höher; man kann erwarten, daß der von N abhängige Anteil der stored energy zunimmt,

der von den anderen Variablen abhängige Anteil hingegen abnimmt. Man kann nun annehmen, daß sich diese Änderungen die Waage halten und so zu der Behauptung aus [26] gelangen. Es ist aber auch zu vermuten, daß bei HGDen ein höherer Beitrag der 3D-Gitterfehler zur stored energy hinzukommt.

III) Es ist offenbar nicht möglich experimentell zu entscheiden, ob mit zunehmender Prozeßgeschwindigkeit Quergleiten oder Klettern von Versetzungen an Bedeutung gewinnt.

A.1.3. Experimente zur Mikromechanik von HGDen -

Teil 2: Materialschädigung, insbesondere Scherbandbildung

I) Die heute bekannten Erkenntnisse über Schädigung bei HGDen verdanken wir den am SRI durchgeführten Experimenten ([24],[54],[56],[64]-[68]). Die Ergebnisse sind: Abhängig von Materialeigenschaften und von der Belastungsart entsteht Schädigung durch Erzeugung, Wachstum und Vereinigung unterschiedlicher Mikrodefekte wie Mikrorisse, Mikroporen, Mikro-Scherbänder (MiSBs).

II) I) Fig.A.7 zeigte bereits die Verteilung von (Makro-) Scherbändern und (Makro-) Rissen beim Durchschlagversuch. In Fig.A.9 aus [68] ist die Umgebung



Fig.A.9

des Einschußkanals nochmals vergrößert dargestellt. Der Körper ist durch Risse und Scherbänder partitioniert, die Fragmente werden zusätzlich durch versetzungsinduzierte Verzerrungen verformt. Die inelastischen Verformungen kommen

also durch Mechanismen mit unterschiedlichen charakteristischen Längen zustande, nämlich durch

- damageinduzierte Verformungen (mikrolokalisierte Scherungen, Abgleitungen an Mikrorissen, Riß- und Porenöffnung) mit charakteristischer Länge $l \geq d$ (d = Korndurchmesser)
- versetzungsinduzierte Verformungen durch verschiedene Versetzungsmechanismen mit charakteristischer Länge $l \ll d$.

ii) Es gilt zu zeigen, daß dies tatsächlich eine Materialeigenschaft darstellt und nicht nur mit den Makrospannungskonzentrationen längs der Berandung des Projektilkopfes zusammenhängt. Hierzu werden Experimente mit hohen Dehnungsraten aber ohne Makrospannungskonzentrationen durchgeführt.

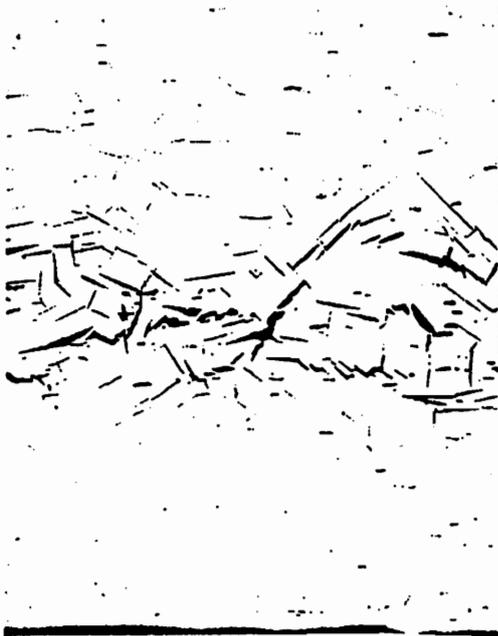


Fig. A.10

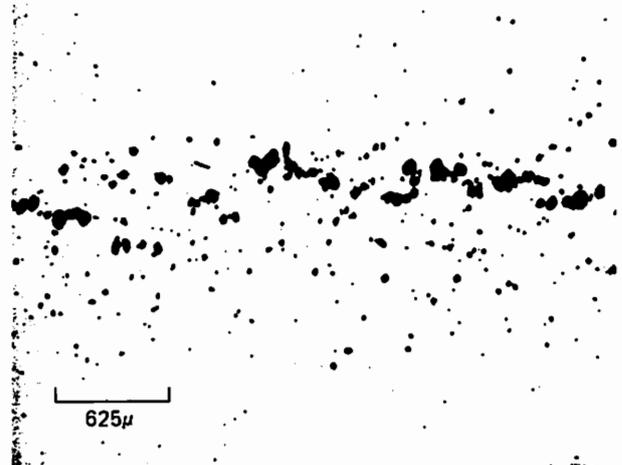


Fig.A.11

In Fig.A.10, A.11 ist die Schädigung durch Mikrorisse und Mikroporen nach dem Durchgang einer Wellenfront dargestellt. Zur Untersuchung der Scherbandbildung dient der sog. CFC-Test (ontained fragmented cylinder), Fig.A.12 aus [66]. Die gesamte Anordnung ist etwa 10 cm lang und hat einen Durchmesser von 20 cm. Versuchsparameter sind die Wandstärke des äußersten Zylinders und die Stärke der Sprengladung. Es werden Dehnungsraten bis ca. 10^4 sec^{-1} erzeugt. Die Auswertung erfordert aber einige Zusatzannahmen.

iii) Für die Entstehung der Mikrodefekte werden sog. "weak spots" verantwortlich gemacht. Darunter sind 3D-Gitterfehler wie Inklusionen, bereits vorhandene Mikrorisse, Hohlräume an "multiple grain junctions" zu verstehen. Über deren Rolle bei der Schädigungsevolution ergibt sich folgendes Bild:

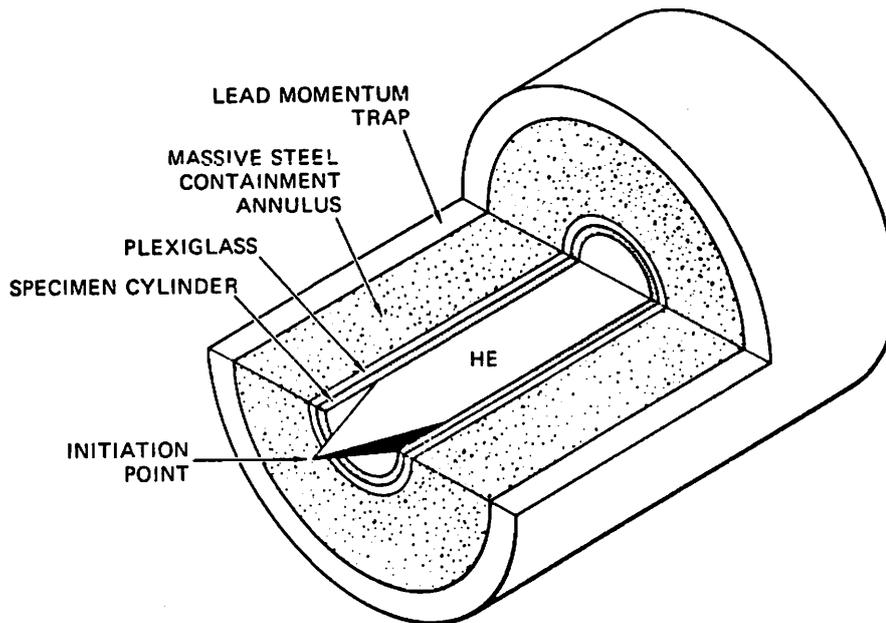


Fig.A.12 CFC-Test

- Bei langsamen Prozessen werden lokale Spannungskonzentrationen durch lokale Versetzungsbewegung abgebaut, die dabei entstandene Wärme wird dabei durch Wärmeleitung rechtzeitig abgeführt, so daß eine quasihomogene Temperaturverteilung entsteht.
- Bei etwas schnelleren Prozessen werden lokale Spannungskonzentrationen zwar abgebaut, die Wärme wird aber nicht rechtzeitig abgeführt und es kann zu lokaler Entfestigung durch sog. "adiabatic heating" kommen.
- Bei noch schnelleren Prozessen werden auch die Spannungskonzentrationen nicht mehr abgebaut, weil die Versetzungsbewegung (wegen der endlichen Versetzungsgeschwindigkeit w) nicht mehr der Belastung folgen kann. Es kann dann lokal zum Bruch oder zur lokalen Scherung kommen.
- Bei extrem schnellen Prozessen sind die Spannungen überall so hoch, daß die Spannungskonzentrationen keine besondere Rolle mehr spielen und es zu homogener Defekterzeugung kommt [57].

Mit diesen Vorstellungen läßt sich erklären, warum

- die Schädigung bei HGDen schon bei kleinen mittleren Dehnungen einsetzt
- besonders reine Metalle im Gegensatz zu Legierungen erst später versagen.

III) Spezielle Informationen über Mikro-Scherbänder (MiSBs)

I) Die schon mehrfach angesprochene Unterscheidung zwischen MiSBs und Makro-Scherbändern (MaSBs) ist insofern willkürlich, als sie von der Wahl eines repräsentativen Volumenelementes (RVE) ΔV abhängt. MiSBs sind in ΔV enthalten, MaSBs hingegen nicht. In den meisten Fällen ist ΔV ein Polykristall.

II) Scherbänder sind in das Material eingelagerte Flächen (nicht notwendig Ebenen) mit einer reduzierten Aufnahmefähigkeit von Schubbeanspruchungen. Die wichtigsten Parameter eines Scherbandes sind Fläche A , Wachstumsrate \dot{A} , Dicke h , Scherwinkel γ (die Deformation im Innern des Scherbandes wird als einfache Scherung definiert) und Normalenvektor \mathbf{e} . Zur Beschreibung einer Scherbandverteilung sind ein Maß der Scherbanddichte sowie Mittelwerte und Standardabweichung der zuvor eingeführten Größen heranzuziehen. Ein Maß für die Scherbanddichte ist z.B. die Anzahl der Scherbänder pro Volumeneinheit oder die Summe aller Scherbandflächen pro Volumeneinheit. In vielen Fällen ist die Entstehung eines Scherbandes mit einem Phasenübergang verbunden ("transformed band", "white band"). Ein solches Scherband ist in Fig.A.13 aus [46] abgebildet, man müßte es als MaSB bezeichnen.



Fig.A.13.

III) Die Anzahl der MiSBs nach einer HGD beträgt 10^3 cm^{-3} bis 10^5 cm^{-3} , die Größe schwankt zwischen einigen μm und der Abmessung von ΔV .

IV) Unter dynamischer Druckbeanspruchung zeigen alle am SRI untersuchten Materialien Scherbandbildung [68], nämlich zahlreiche Stähle, Aluminium, Kupfer, verschiedene Titanlegierungen, Armco Eisen, Beryllium.

V) Bzgl. der Orientierung ist festzustellen, daß MiSBs anfänglich längs HSS - Ebenen mit betragsgrößter Schubspannung ausgerichtet sind. Dies folgt aus dem CFC-Test.

IV) Spezielle Informationen über Makro-Scherbänder

i) Informationen über MaSBs erhält man aus dem Taylor-Test und dem Durchschlagversuch mit "plugging", Fig.A.6,A.7. Beide Prozesse sind näherungsweise radial.

ii) Die Entwicklung einer Scherbandverteilung bis hin zum MaSB läßt sich aufgrund der experimentellen Befunde folgendermaßen darstellen:

1. Entstehung von MiSBs an "weak spots", wobei die MiSBs entlang der HSS-Ebenen mit maximaler Schubbeanspruchung ausgerichtet sind.
2. Wachstum aller MiSBs, solange sie sich noch nicht durch ihre Spannungsfelder gegenseitig beeinflussen.

Ohne den Spannungszustand zwischen mehreren MiSBs genau zu kennen läßt sich doch plausibel machen, daß bevorzugt kollinear angeordnete MiSBs wachsen. In Fig. A.14 ist dies illustriert. In dem dargestellten Körper wachsen bevorzugt die MiSBs „1“ und „2“, da „3“ in die angedeutete Entlastungszone \mathcal{E}_1 gerät, sobald „1“ wächst.

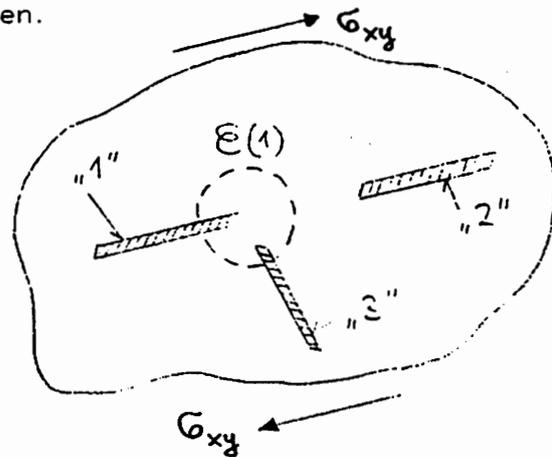


Fig.A.14

3. Das Wachstum konzentriert sich auf eine ausgezeichnete Ebene mit Normale \mathbf{n} . Bei radialer Belastung ist auch dies eine HSS-Ebene.
4. In ΔV entsteht ein MaSB \mathcal{M}^* zur Zeit $t^* = t^*(\Delta V)$. Es bildet eine Tangentialebene an die i.a. gekrümmte spätere Makro-Scherfläche.

iii) Fig.A.15 aus [54] zeigt Scherbrüche, die sich beim Taylor-Test entlang von MaSBs im Projektil ausgebreitet haben. Die MaSBs bilden eine Kegelfläche. Die Ergebnisse von Durchschlagversuchen sind nochmals in Fig.A.16 skizziert. Unter Beachtung der Zylindersymmetrie läßt sich sagen: Ein MaSB bildet einen um α geneigten Kegelstumpf, wobei α auch negativ sein kann. Wegen $\sigma_{r,z} \neq 0$ ist das Zylinderkoordinatensystem kein HAS, so daß \mathcal{M} auch nicht auf einer Zylinderfläche zu erwarten ist.

iv) In den beiden unter iii) angesprochenen Fällen ist das noch gesuchte Kriterium für die Entstehung von \mathcal{M} auf einer Untermenge $\mathcal{S}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ erfüllt, z.B. auf der Randkurve des Projektilquerschnitts, siehe Fig.A.16. Bei anderen Belastungen, wie z.B. dem schrägen Durchschlagversuch ist das Kriterium hingegen nur in einem Punkt erfüllt.

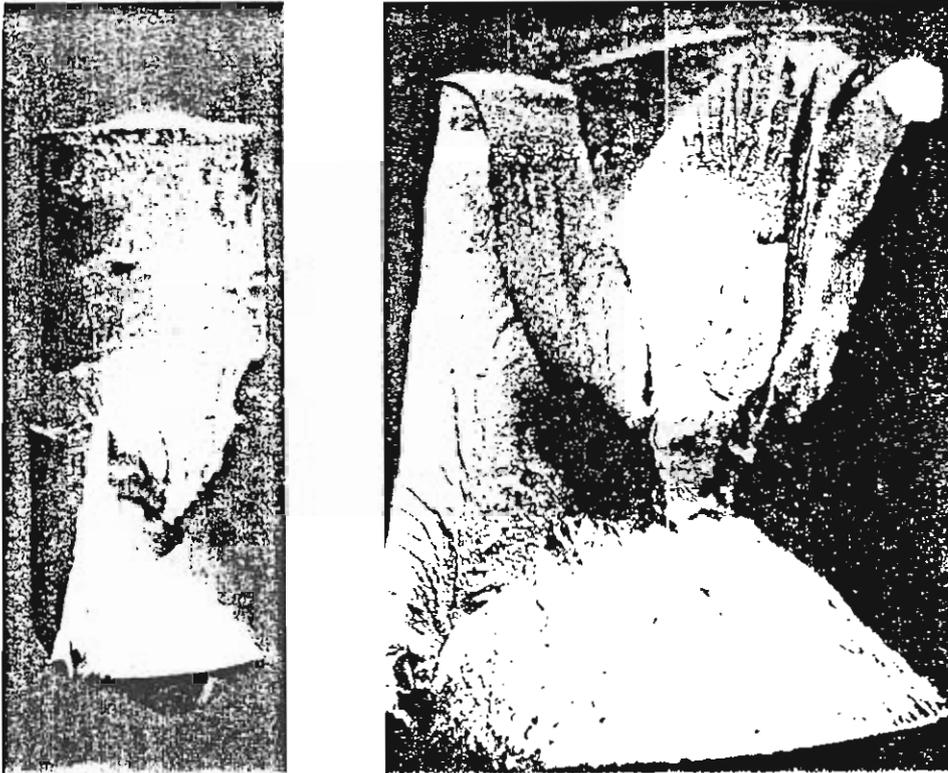


Fig.A.15

v) In beiden Fällen aus iii) ist das MaSB auf derjenigen HSS-Ebene ausgebildet, die tangential zu einer Kurve verläuft, die die Achse größter Druckspannung AOC umschließt und die AOC ist innerhalb eines gewissen Bereiches konstant. Für die beim CFC-Test auftretenden MaSBs kann man eine solche Feststellung nicht treffen: Blickt man in Richtung der Zylinderachse, so entstehen MaSBs entweder unter $+45^\circ$ oder unter -45° zur Richtung e_1 . Ob die „+“- oder die „-“ -Richtung realisiert wird, scheint nicht determiniert. Die AOC ist nicht räumlich konstant; konstant ist sie nur auf einer Menge vom Maß null, nämlich der achsparallelen Geraden durch den betrachteten Punkt Q.

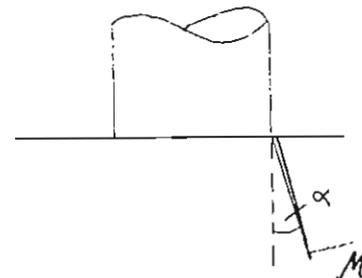


Fig.A.16

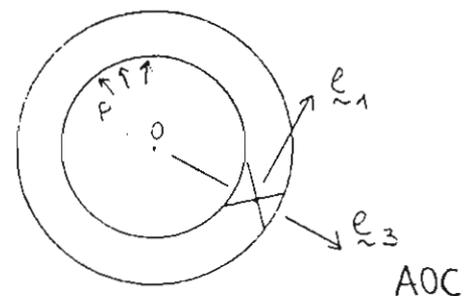


Fig.A.17

vi) Das Verhalten von MaSBs ist (im Gegensatz zur Evolution von MiSBs) Gegenstand von Untersuchungen an mehreren Universitäten und Instituten. Aus deutscher Sicht sind zu erwähnen das IFAM Bremen, das Werkstoffkundeinstitut der RUB und die Arbeitsgruppe für experimentelle Mechanik der RUB. Wichtig sind auch Experimente von *Moss et al.* [79] über die Ausbreitungsgeschwindigkeit von MaSBs.

A.2. Literaturübersicht - Teil 2: Untersuchungen zur Wellenausbreitung

I) Zusammenfassende Darstellungen der Wellenausbreitung in inelastischen Körpern findet man bei *Clifton* [26], *Nowacki* [27], *Cristescu & Suliciu* [28] und *Raniecki* [29]. Die Untersuchungen beschränken sich meist auf

- einachsige Spannungszustände (z.B. einfacher SHB)
- einachsige Verzerrungszustände (z.B. flat plate impact)
- gekoppelte Druck-Torsions-Belastung als Beispiel nichtradialer Belastung (z.B. weiterentwickelter SHB)

Betrachtet man die Untersuchung der Wellenphänomene nur als Hilfsmittel der Materialtheorie, so genügen diese Versuche tatsächlich. Praktisch wichtige Effekte wie Wellenstreuung und -fokussierung werden in eher anwendungsorientierten Lehrbüchern behandelt, z.B. bei *W. Johnson* [40]; siehe aber auch [30]. Wir werden uns meist mit den ersten beiden Fällen beschäftigen, über den dritten Fall (engl. "waves of combined stresses") siehe auch [29],[31].

II) Bei theoretischen Untersuchungen werden Beschleunigungswellen und Wellen mit starker Unstetigkeit, oft (und auch hier) Schockwellen genannt, unterschieden. Die Schockwelle ist eine Idealisierung; experimentell können nur Beschleunigungswellen mit möglicherweise kurzen Anstiegszeiten realisiert werden. Leider wird von Experimentatoren die Unterscheidung zwischen Beschleunigungs- und Schockwellen nicht mit der gebotenen Konsequenz gehandhabt. Ist etwa der Verlauf der Wellenfront nicht exakt bekannt, so wird er „näherungsweise“ durch einen Rechteckverlauf (z.B. $\sigma(t) = \sigma_{max} (H(t) - H(t_1))$, $H(\cdot) =$ Heaviside-Funktion) ersetzt [32] und die tatsächliche Beschleunigungswelle wird zur Schockwelle erklärt. Im Umgang mit experimentellen Daten ist daher Vorsicht geboten.

III) Untersuchung von Beschleunigungswellen

I) Die Untersuchung von Beschleunigungswellen begann in der Zeit nach dem 2. Weltkrieg mit der Frage, ob eine g.a. oder eine g.u. Plastizitätstheorie die Experimente besser wiedergibt. Man beschränkte sich auf einachsige Spannungszustände. Die Ergebnisse sind in den Einleitungen zu [26],[33] sowie in Ch.3-5 aus [28] beschrieben. Geht man davon aus, daß zur Beschreibung der Wellen drei unterschiedliche Typen von Materialgleichungen zur Auswahl stehen, nämlich (abkürzend nur für den einachsigen Fall angegeben, $\langle \dot{\sigma} \rangle$ kennzeichnet Belastung):

a) Deformationstheorie $\sigma = f(\epsilon)$

b) g.u. inkrementelle Plastizität $\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + h_1 \langle \dot{\sigma} \rangle$

c) g.a. inkrementelle Plastizität $\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + h_2 \langle \dot{\sigma} \rangle + \gamma \Phi(\sigma)$,

so kann aus der Theorie der Wellenausbreitung u.a. geschlossen werden:

- Für inkrementelle Belastung, wenn z.B. eine kleine schnelle Deformation einer quasistatischen Beanspruchung überlagert wird, breitet sich die Störung nach a) mit $\sqrt{f'(\varepsilon)/\rho}$ aus, nach b) und c) hingegen mit $\sqrt{E/\rho}$.
- a) und b) lassen "simple wave"-Lösungen zu, bei denen die Gestalt der Wellenfront während der Ausbreitung in ein undeformiertes homogenes Material unverändert bleibt. Nach c) gibt es keine solchen Lösungen. Quantifiziert wird diese Beobachtung durch die sog. Transportgleichung (A.2), siehe [26] und [3],Kap.4. Die Dgl.-Systeme haben nämlich die Form

$$\boxed{\underline{A}(\underline{w}) \underline{w}_t + \underline{B}(\underline{w}) \underline{w}_x + \underline{d}(\underline{w}) = \underline{Q}} \quad (\text{A.1})$$

mit dem Vektor \underline{w} der gesuchten Größen. Ist η eine Koordinate senkrecht zur Kurve $\eta(x,t)=0$ der Wellenfront, so sind Beschleunigungswellen durch einen Sprung $[[\underline{w}_\eta]] \neq 0$ gekennzeichnet. Für die Änderung dieses Sprunges längs $\zeta \perp \eta$, d.h. die Änderung der Steilheit der Wellenfront, läßt sich die Transportgleichung

$$v_0 (\Delta w)_\zeta + v_1 \Delta w + v_2 (\Delta w)^2 = 0 \quad \text{mit } \Delta w := |[[\underline{w}_\eta]]| \quad (\text{A.2})$$

angeben. Bei der Ausbreitung in ein undeformiertes homogenes Medium sind nun $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ für den Fall b); $v_1 \neq 0$ kann nur durch $\underline{d}(\underline{w}) \neq \underline{Q}$ erreicht werden, also nur bei g.a. Materialmodellen.

- Mit der Existenz von "simple wave"-Lösungen hängt auch die Existenz eines sog. Plateaus ($\sigma, v = \text{konst}(x,t)$) zusammen. Das Problem der Plateaubildung ist in der Literatur ausführlich diskutiert, siehe [28],Ch.5 und die dort zitierten Quellen. Gemeint ist folgendes: Wird am Rand eine Belastung der in Fig.A.18 skizzierten Form aufgebracht, so sagt die g.u. Theorie nach b) stets ein Plateau voraus, die g.a. Theorie hingegen nur unter bestimmten Bedingungen an die Materialfunktionen [28]. Zur analytischen Untersuchung der Wellen für eine g.u. Theorie nach b) siehe auch [27], p.46-49.

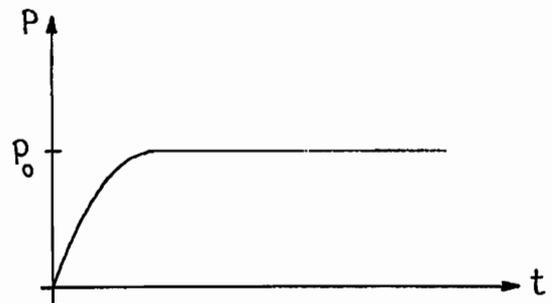


Fig.A.18

- Im Fall $h_2 = 0$ unterscheiden sich die Fälle b),c) hinsichtlich der Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Wellen bei kombinierter Belastung, z.B. Druck/Torsion; siehe hierzu [26],Ch.5.
- Im Fall $h_2 = 0$ besitzt die Matrix \underline{A} in (A.1) Diagonalgestalt und (A.1) läßt sich in Form einer sog. verallgemeinerten Erhaltungsgleichung schreiben [34]:

$$\underline{w}_t + (\underline{F}(\underline{w}))_x + \underline{d}(\underline{w}) = \underline{Q} \quad . \quad (A.3)$$

Diese Darstellung ist eine Voraussetzung für die Untersuchung von Schockwellen und ist bei Modellen mit g.u. Anteilen $\sim h \langle \dot{\sigma} \rangle$ nicht möglich.

II) Ergebnisse von Experimenten

- Versuche von *Bell* (siehe [28]) zeigen, daß sich Störungen in einem bereits plastisch vordeformierten Körper mit $c \approx \sqrt{E/\rho}$ ausbreiten; mögliche Änderungen von E z.B. infolge nichtlinear elastischen Verhaltens oder inelastischer Deformationen sind zwar theoretisch von Bedeutung [26], können bei diesen Versuchen jedoch nicht erfaßt werden, siehe auch [35]. Aufgrund dieser Ergebnisse läßt sich die Deformationstheorie als Materialmodell verwerfen; trotzdem wird sie auch heute noch gelegentlich eingesetzt, vor allem dann, wenn für $f(\epsilon)$ eine sog. „dynamische Kennlinie“ verwendet wird. Das Verfahren scheint zulässig, wenn während des Prozesses die Prozeßgeschwindigkeit nur gering von derjenigen abweicht, die bei der Ermittlung von $f(\epsilon)$ vorgegeben wurde, wenn also keine Störungen der Belastung auftreten, siehe z.B. [33],[35].
- Bzgl. der Existenz eines Plateaus ergibt sich aus der Literatur kein einheitliches Bild; im Experiment wird für manche Materialien und Belastungsniveaus ein Plateau beobachtet [26],[28]. Hinsichtlich der Aussagekraft dieser Ergebnisse zitieren wir *Clifton* [26],p.127 : "The observed wave profiles could also be predicted by a rate dependent theory. *Ripperger & Watson* have shown ... that strain time profiles ... can be predicted to within the accuracy of the experiments by several rate dependent theories corresponding to different choices of the function Φ " (Φ aus c). $\epsilon(t)$ -Messungen aus [28],p.71 sprechen eher für eine g.a. Theorie.
- Auch die Ergebnisse kombinierter Druck/Torsions-Beanspruchung unterstützen eher die g.a. Theorie, auch wenn die Übereinstimmung von Testrechnungen mit dem Experiment nicht befriedigend ist [26]. In einer neueren Arbeit von *Clifton* [31] sowie in [36] wird trotzdem versucht, mit einer verbesserten g.u. Theorie die ausgeprägt nichtradiale Belastung bei dynamischer Druck/Torsions-Beanspruchung zu beschreiben. Die Verbesserungen beruhen darauf, daß eine sog. physikalische Plastizitätstheorie im Sinne von *Lin* [37] zugrundegelegt wird. Das Materialgesetz ergibt sich über eine näherungsweise Homogenisierung mit Hilfe der *Orowan*-Kinematik auf der Ebene der Mikromechanik. Die Fließfläche enthält Ecken und für diese Ecken ergeben sich zusätzliche Möglichkeiten für die Richtungen des plastischen Verzerrungsinkrementes und des Spannungsinkrementes, [31],p.371. Leider ist eine direkte Messung der Spannungstrajektorien nicht möglich; gemessen werden können nur zeitliche Verläufe der Dehnungen und über die Meßgenauigkeit gelten wieder die zuvor zitierten Einschränkungen.

IV) Untersuchungen von Wellen mit starker Unstetigkeit ("Schockwellen")

I) Bei Wellen mit starken Unstetigkeiten konzentrieren sich die experimentellen Untersuchungen auf 2 Phänomene [26]:

- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_s der Schockwelle, die sich insbesondere bei nichtlinear-elastischem Verhalten von einer möglichen Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Beschleunigungswelle unterscheidet.
- Den Abfall des elastischen Vorläufers der Schockwelle (elastic precursor decay).

II) Eine einheitliche Theorie der Schockwellen in Körpern mit inneren Variablen gibt es nicht. Genügen die inneren Variablen α und die Fließregel g.a. Gleichungen der Form

$$\dot{\alpha} = f_1(\alpha, \sigma) \in C \quad (A.4)$$

stellt also das System der Bilanz- und Evolutionsgleichungen eine verallgemeinerte Erhaltungsgleichung (A.3) dar, so verschwindet der Sprung [34]:

$$[[\alpha]] = 0 \quad (A.5)$$

Bei g.u. Gleichungen der Form

$$\dot{\alpha} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} \right\rangle f_2(\alpha, \sigma) \quad (A.6)$$

ist keine Aussage möglich. Auf diesen Umstand haben bereits *Germain & Lee* [38] hingewiesen. Wäre $[[\alpha]]$ allgemein bekannt, so könnte man seinen Einfluß auf c_s und auf den precursor decay untersuchen.

Die g.u. Gleichung (A.6) oder Verallgemeinerungen

$$\dot{\alpha} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} \right\rangle f_2(\alpha, \sigma) + f_3(\alpha, \sigma) \quad (A.7)$$

wären nur unter unsinnig strengen Einschränkungen zugleich lokale Aussagen einer integralen Bilanz von α . In jüngster Zeit wurde versucht, die Evolutionsgleichung für die Versetzungsdichte N zu einer Ausnahme von dieser Regel zu machen: In [39] entwickelt *Stout* eine globale Bilanz für N mit dem Ziel der Berechnung von $[[N]]$ in Schockwellen.

A.3. Literaturübersicht - Teil 3: Versetzungstheoretische Aspekte der Hochgeschwindigkeitsdeformationen

I) Physikalische Deutung der σ - $\dot{\epsilon}$ -Kurven (z.B. Fig.A.3)

I) Wir unterscheiden im folgenden die mittlere versetzungsinduzierte inelastische

Deformation ϵ_v eines Polykristalls ΔV und die mittlere versetzungsinduzierte inelastische Deformation ϵ_{vm} eines Einkristalls $\delta V \subset \Delta V$. Hier und im weiteren kennzeichnet der Index m ein in ΔV erklärtes Mikrofeld.

ii) Für quasistationäres Versetzungsgleiten ist die Verwendung der

$$\text{Orowan-Gleichung} \quad \dot{\epsilon}_{vm} = \sum_{\alpha} \dot{\gamma}_{\alpha} (\mathbf{s}_{\alpha} * \mathbf{n}_{\alpha} + \mathbf{n}_{\alpha} * \mathbf{s}_{\alpha}) \quad (\text{A.8})$$

für die Verformung eines Einkristalls seit langem akzeptiert [69].

$$\dot{\gamma} = b N_{mob} w \quad (\text{A.9})$$

ist die Scherrate. Die Summation erstreckt sich über alle Gleitebenen α (Normale \mathbf{n} , Gleitrichtung \mathbf{s} , Burgersvektor b , mittlere Versetzungsgeschwindigkeit w längs einer Versetzungsschleife, Dichte N_{mob} der beweglichen Versetzungen). Bei kleinen Deformationen können \mathbf{n}, \mathbf{s} als konstant angenommen werden.

iii) Untersuchung der Scherrate $b N_{mob} w$

Für $\dot{\gamma}$ können je nach Art der dominierenden Versetzungshindernisse unterschiedliche Ausdrücke angegeben werden. Eine Übersicht hierüber geben *Frost & Ashby* in [70]. Wir sprechen von

- athermischer Versetzungsbewegung, wenn die Versetzungen durch weitreichende („starke“) Hindernisse gebremst werden (z.B. 3D Gitterfehler, Korngrenzen), die nur durch Erhöhung der in der Gleitebene wirkenden Schubspannung (d.h. durch weitere Belastung) überwunden werden können.
- thermisch aktivierter Versetzungsbewegung, wenn die Versetzungen durch schwache diskrete Hindernisse gebremst werden (z.B. andere Versetzungen); durch thermisch aktivierte Bewegung von Punktfehlern wird die Versetzungslinie so verändert, daß die schwachen Hindernisse durch lokales Klettern oder Quergleiten ohne Belastungssteigerung überwunden werden können.
- durch „viskose“ Dämpfungsmechanismen kontrollierte Versetzungsbewegung, wenn bei sehr hohen Spannungen in der Gleitebene die Versetzungen von diskreten Hindernissen kaum noch beeinflußt werden, jedoch in Wechselwirkung mit dem regulären Gitter zwischen diesen Hindernissen stehen. Es werden in der Literatur verschiedene Dämpfungsmechanismen erörtert, die alle auf dieselbe Verknüpfung von Scherrate und Schubspannung hinauslaufen (siehe [70] und die dort zitierte Literatur).

Die Ergebnisse sind in Fig.A.19 (aus [75]) zusammengestellt. Diese Ergebnisse gilt es nun quantitativ zu formulieren. In [69] wird folgender Ausdruck für $b N_{mob} w$ angegeben:

$$b N_{mob} w = \frac{b^2 N_{mob}}{\exp\left(\frac{\Delta g}{k\Theta}\right) \left\{ 2 v_0 \sinh\left(\frac{\tau^* b l \Delta x}{k\Theta}\right) \right\}^{-1} + \frac{B}{\tau^*}} \quad , \quad (\text{A.10})$$

bN_{mob} ist charakterisiert durch die effektive Schubspannung $\tau^* = \tau - \tau_{\mu}$, d.h. durch die Differenz aus ausgelöster und athermischer Schubspannung (zur Überwindung starker Hindernisse erforderlich), die freie Enthalpie Δg , die einer Versetzung zur Überwindung eines schwachen Hindernisses bei $\tau^* = 0$ zugeführt werden muß, das sogenannte Aktivierungsvolumen $b\lambda \Delta x$, die Debye-Frequenz ν_D , die Boltzmann-Konstante k und den "viscous drag"-Koeffizienten B . Der erste Term im Nenner beschreibt thermisch aktiviertes Gleiten, der zweite durch viskose Dämpfung kontrolliertes Gleiten.

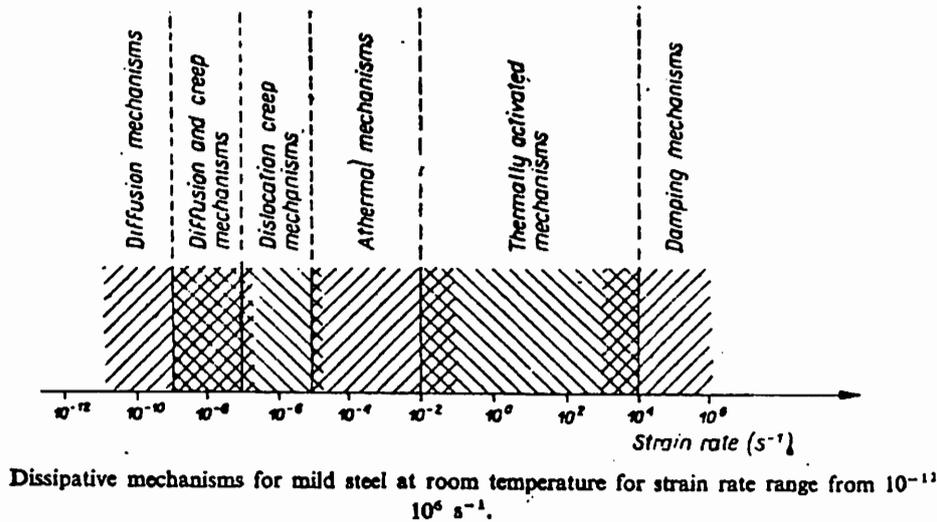


Fig.A.19

Verschiedene Sonderfälle können aus (A.10) abgeleitet werden: Für sehr große τ^* können Versetzungen das Hindernis Δg ohne thermische Aktivierung überwinden und die Scherrate wird durch die Abhängigkeit von w von verschiedenen viskosen Dämpfungseffekten wie Phononenstreuung, Elektronenstreuung usw. bestimmt. Diese Effekte sind in der „Konstanten“ B zusammengefaßt. Kleinere Werte von τ^* führen zu thermisch aktiviertem Gleiten und bei noch kleinerem τ^* (und vernachlässigbaren "back jumps") kann man (A.10) durch eine g.u. Gleichung zur Beschreibung athermischer Versetzungsbewegung ersetzen (siehe [69]).

iv) Obwohl diese Betrachtungen nur für den Einkristall gelten, werden sie auch zur Identifikation der in Fig.A.3. erkennbaren Bereiche $\sigma(\dot{\epsilon}) \approx \text{konst}$, $\sigma(\dot{\epsilon}) \sim \log \dot{\epsilon}$, $\sigma(\dot{\epsilon}) \sim \dot{\epsilon}$ benutzt, wobei der bei $\dot{\epsilon} \approx 10^4 \text{ sec}^{-1}$ zu beobachtende Übergang zu $\sigma \sim \dot{\epsilon}$ mit dem Wechsel von thermisch aktivierter zu viskos gedämpfter Versetzungsbewegung in Verbindung gebracht wird. In jüngster Zeit erheben sich Einwände gegen diese Deutung [22]: Der Anstieg von σ - $\dot{\epsilon}$ -Kurven kann auch durch eine g.a. Änderung der Versetzungsdichte erklärt werden; in diesem Fall ist thermische Aktivierung auch über $\dot{\epsilon} \approx 10^4 \text{ sec}^{-1}$ hinaus dominant [76].

II) Zur Bedeutung der Orowan-Gleichung für die Entwicklung konstitutiver Modelle

1) Aus 4 Gründen ist eine direkte Anwendung der Orowan-Gleichung in einer Kontinuums-Damage-Theorie der HGDen nicht möglich:

- a) Wir interessieren uns später für die Verzerrung ϵ_v von ΔV ; aufgrund der Spannungsfluktuationen in ΔV enthält $\dot{\epsilon}_v$ i.a. Anteile aus den 3 verschiedenen Versetzungsmechanismen.
- b) Die Orowan-Gleichung beschreibt nur Versetzungsgleiten.
- c) Die Orowan-Gleichung enthält nicht den Einfluß von Zwillingversetzungen.
- d) Die Orowan-Gleichung gilt nur für quasistationäre Versetzungsbewegung. Verallgemeinerungen für instationäre Bewegung sind nach *Mecking & Lücke* [71] bzw. *Perzyna & Pecherski* [72] von der Form

$$\dot{\gamma} = b N_{mob} w + b L_f \dot{N}_{mob}^+ \quad (A.11)$$

\dot{N}_{mob}^+ ist die Produktionsrate mobiler Versetzungen, L_f eine freie Weglänge. Es ist wichtig zu beachten, daß der Erzeugungsterm in (A.11) durch athermische Mechanismen kontrolliert wird [72]. Ein anderer Verbesserungsvorschlag für die Beschreibung instationären Verhaltens stammt von *Gilman* [73].

III) Evolutionsgesetze für N, N_{mob}

I) Eine ausführliche Literaturrecherche wurde bereits im Bericht [3], S.21 ff. erarbeitet. Die Ergebnisse sind hier in verkürzter Form wiedergegeben. Die allgemeine Gleichung von *J.M.Kelly* [77]

$$\dot{N} = a_0 + (\lambda_1 - \lambda_2) N_{mob} w - \lambda_3 w N_{mob}^2 \quad (A.12)$$

enthält Beiträge aus Vervielfachung an ortsfesten Quellen, Vervielfachung durch Quergleiten sowie aus Annihilation. *Zslodos & Kovacz* [78] geben die Gleichung

$$\dot{N} = \frac{1}{\alpha_*} \tau \dot{\gamma} \quad , \quad \alpha_* \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ kgm/sec}^2 \quad (A.13)$$

an. Dieser Ansatz ist analog zur Verwendung der plastischen Arbeit $\sigma \cdot \dot{\epsilon}_v$ als Maß isotroper Verfestigung α in phänomenologischen Theorien. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß sich phänomenologisch eingeführte Gleichungen $\dot{\alpha} \sim (\sigma - X) \cdot \dot{\epsilon}_v$ mit einem kinematischen Verfestigungstensor X versetzungstheoretisch offenbar nicht rechtfertigen lassen. Die Einführung von $\sigma - X$ statt σ hat nur formal einen Vorteil bei der Auswertung der Konsistenzbedingung, sofern eine solche in der Theorie erscheint.

II) Über Änderungen von N_{mob} sind in der Literatur nur wenige Ansätze bekannt. Meist wird

$$\frac{N_{mob}}{N} \approx 10^{-2} = \text{konst} \quad (A.14)$$

angenommen, was aber im Widerspruch zu den in [58]-[60] zitierten Experimenten steht. G.u. Gleichungen für N_{mob} und N findet man in [77]. Die in [58]-[60] beobachtete Abnahme von N_{mob}/N bei schnellen Prozessen ist bislang noch nicht quantitativ beschrieben worden.

A.4. Literaturübersicht - Teil 4: Theoretische Untersuchungen zu Mikro- und Makro-Scherbändern

I) In der Literatur findet man fast ausschließlich Veröffentlichungen über das Verhalten isolierter Scherbänder (MaSBs) in einer elastischen oder plastischen „Matrix“. Eine Kontinuumstheorie der MiSBs wurde in den letzten Jahren am SRI entwickelt. Wir wollen sie im Zusammenhang mit anderen Kontinuumsmodellen für HGDen in Kap.A.6 diskutieren. Zunächst wollen wir der Frage nachgehen, ob die Untersuchung isolierter Scherbänder dem Kontinuumsphysiker brauchbare Hinweise zu geben vermag.

II) I) Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Literatur über Scherbänder zu klassifizieren und zwar anhand der

- Bedingungen, unter denen die Scherbänder auftreten,
- Modellierung des Lokalisierungsprozesses.

II) Es erstaunt, daß sich die Untersuchungen von Scherbändern bei langsamen großen Deformationen (z.B. Blechumformung) bzw. bei schnellen kleinen Deformationen weitgehend getrennt entwickelt haben. Mit einer Ausnahme (nämlich der Untersuchung von Änderungen des Typs der beschreibenden Dgl.) unterscheiden sich Ziele und Untersuchungsmethoden.

III) Eine Übersicht über lokalisierte Scherungen bei langsamen Prozessen geben *Rice* [80], *Bruhns* [81], *Asaro* [62]. *Asaro* weist auf den Unterschied zwischen Scherbändern in einzelnen Körnern und Scherbändern im Polykristall hin, der sich auch in den Berechnungsmethoden widerspiegelt. Die Ursache der Scherbänder bei langsamen Prozessen wird in dem Erreichen eines „Gleichgewichtes“ zwischen Verfestigung einerseits und Entfestigung durch Texturbildung (geometric softening) und/oder Porenbildung andererseits gesehen.

IV) Auch über Scherbänder bei HGDen existieren zahlreiche Übersichtsartikel, z.B. [82],[83]. Meist wird die durch quasiadiabatische Erwärmung hervorgerufene thermische Entfestigung als Ursache der Lokalisierung bei schnellen Prozessen angesehen, siehe hierzu auch Kap. A.1.3., Abschnitt II). Von *Burbach* [84] stammt der Vorschlag, Scherbänder bei HGDen als sog. Frenkel'sche Scherungen zu betrachten, bei denen unter extrem hohen lokalen Spannungen und im Gegensatz zur versetzungsinduzierten Verformung ganze kristallographische Ebenen gleichzeitig abgleiten. Die beiden vorgeschlagenen Mechanismen können sinngemäß als „thermisch aktiviert“ bzw. als „athermisch“ bezeichnet werden.

III) I) Die Methoden zur Analyse einzelner Scherbänder lassen sich mit Blick auf die Methoden zur Stabilitätsuntersuchung starrer Körper wie folgt klassifizieren: Man kennt die Gleichgewichtsmethode, bei der die Möglichkeit eines Nachbarzu-

standes untersucht wird, ohne den Prozeß vom Grundzustand in den Nachbarzustand zu betrachten, sowie die kinetische Methode, bei der man die Entwicklung einer Störung mit der Zeit verfolgt. Beide Denkweisen findet man auch bei der Analyse der Scherbänder, wobei die Gleichgewichtsmethode sehr viel häufiger zum Einsatz kommt.

II) Zur Gleichgewichtsmethode gehören alle Untersuchungen, die bereits von der Existenz eines Scherbandes ausgehen und über ein Eigenwertproblem auf kritische Lasten für Lokalisierung führen. Bei quasistatischer Prozeßführung kann man dabei wieder Modelle mit und ohne Anfangsimperfektion unterscheiden (*Bruhns* [81]). Die Scherbänder werden dabei so modelliert, als würden sie nach Erreichen der kritischen Last spontan im ganzen Körper auftreten; dies ist unrealistisch und *Rice* [80] schreibt dazu "occurrences often entail the crack-like propagation of bands ... rather than a more-or-less spatially simultaneous bifurcation into a localized mode ...". Die Annahme spontaner Verzweigung ist nur möglich, wenn die Zeit für die Ausbildung der Lokalisierung klein ist gegen die charakteristische Zeit der Änderung der Steuergrößen. Dies mag bei langsamen Umformprozessen erfüllt sein, aber nicht bei HGDen.

Eine Übersicht über die Berechnung der Bedingungen für die Entstehung einzelner Scherbänder bei HGDen ist in unserem Bericht [5] enthalten. Erwähnt sei hier nur ein Beispiel der Gleichgewichtsmethode: In einer Flut von Veröffentlichungen wird das Anwachsen vorgegebener Störungen einer homogenen Scherung untersucht. Die Art der Störung wird dabei vorgegeben, ohne daß ihre Ursache bekannt wäre. Variiert werden Randbedingungen, Einfluß von Trägheitskräften und Temperatur etc. Die Aussagekraft der Ergebnisse leidet unter der Verwendung unrealistischer Stoffgesetze (verallgemeinerte Deformationstheorie, siehe Kap.A.6), der Beschränkung auf kleine Deformationen und der Beschränkung auf einfache Schubspannungszustände. Der neueste Stand wird im Übersichtsartikel [85] von *Fressengeas & Molinari* beschrieben. Ein „Höhepunkt“ dieser Klasse von Stabilitätsuntersuchungen ist die Berücksichtigung dipolarer Materialien durch *Wright & Batra* [86].

III) Aus den vorangehenden Ausführungen wird deutlich, daß nur eine kinematische Methode realitätsnahe Ergebnisse erwarten läßt. Als erste Schritte in diese Richtung können die Arbeiten von *Grady & Kipp* [87] und *Kuriyama & M.A.Meyers* [88] angesehen werden, siehe hierzu unsere Diskussion in [5].

A.5. Erste Folgerungen für die Anwendung der Kontinuumsphysik bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen

I) Klassifikation von HGDen

i) Wie in Kap.A.1 versprochen soll nun die Definition einer HGD nachgeholt werden. Die Klassifikation thermomechanischer Prozesse kann unter verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen. Die vorbildliche von *Korzen* [89] vorgenommene Einteilung beruht auf dem Verhalten von Steuergrößen bei homogenen Prozessen und läßt sich bei HGDen nicht anwenden, da alle Experimente grundsätzlich inhomogene Prozesse darstellen. In der anwendungsorientierten Literatur (z.B. [40], [55]) erfolgt die Klassifikation anhand globaler Parameter wie mittlere Probenverformung, Targetdicke, Verhältnis aus Aufprallgeschwindigkeit zu ballistischem Limit, Kennzahlen zum Einfluß der Wärmeleitung etc. Schon allein die Aufzählung der Begriffe läßt erkennen, daß hiermit nur schwer eine systematische Auswertung von Versuchen erfolgen kann.

ii) In dieser Arbeit wird vorgeschlagen, die Klassifikation mit Hilfe der Mikromechanik anhand der beteiligten Deformationsmechanismen vorzunehmen. Gerade hinsichtlich der Materialschädigung lassen sich die Mechanismen auch im Anschluß an eine HGD erkennen, also ohne daß technisch schwierige Messungen während der HGD nötig wären. In der bisherigen Literaturübersicht wurden die folgenden 6 Mechanismen angesprochen:

1. Versetzungsmechanismen

1.1. Athermische Versetzungsbewegung, Zwillingsbildung, athermische Mobilisierung von Versetzungen

1.2. Thermisch aktivierte Versetzungsbewegung und Vervielfachung

1.3. Viskos gedämpfte Versetzungsbewegung

2. Damage - Mechanismen

Entstehung, Wachstum, Vereinigung von

2.1. Mikro-Scherbändern (nach kleinen mittleren Verzerrungen)

2.2. Mikro-Rissen (- " -)

2.3. Mikro-Poren (- " -)

und mikrolokalisierte Verformungen.

Ausgeschlossen von der Betrachtung sind Verformungen, die etwa mit Phasenübergängen einhergehen.

Wir sprechen nun von einer HGD, wenn wenigstens einer der Mechanismen 1.3., 2.1., 2.3. aktiviert ist (der Mechanismus 2.2. kann bei spröden Materialien (Fels) auch unter quasistatischer Beanspruchung auftreten und ist deshalb nicht für HGDen typisch). Dieses Kriterium ist materialabhängig und präziser als die pauschale Einteilung des $\dot{\epsilon}$ - Wertebereichs wie in Fig.A.8.

II) Auswahl von ΔV

I) Bei der Auswahl des RVE sind folgende Gesichtspunkte zu beachten:

- ΔV ist so groß, daß es statistisch homogen wird, d.h. $\sqrt[3]{\Delta V}$ ist groß gegen die Abmessungen und den Abstand der Mikrodefekte.
- $\sqrt[3]{\Delta V}$ ist klein gegenüber den charakteristischen Längen L_{ext} der Belastung, so daß das Verhalten der in ΔV enthaltenen Materie durch Mittelwerte ausreichend gut beschrieben wird.

Mit den bekannten MiSB-Abmessungen folgt also, daß ΔV ein Polykristall ist, der eine endliche Zahl von "weak spots" enthält. Ähnliches gilt, wenn wir Schädigung durch Risse oder Poren untersuchen wollen.

Die beiden Anforderungen an ΔV sind konträr und möglicherweise gar nicht erfüllbar, wenn z.B. L_{ext} sehr klein ist. Von diesem Sonderfall abgesehen gibt es aber i.a. einen Bereich

$$\text{meas}(\Delta V_1) \leq \text{meas}(\Delta V) \leq \text{meas}(\Delta V_2) \quad (\text{A.15})$$

zulässiger Volumenelemente ΔV . Die erste Bedingung kann durch Defektwachstum oder -vereinigung verletzt werden. Dies definiert den Zeitpunkt $t^* = t^*(\mathbf{x}^*)$, ab dem in der Umgebung von \mathbf{x}^* die Kontinuums-Damage-Theorie nicht mehr gilt. Werden Risse oder Scherbänder größer als ΔV , so werden dadurch benachbarte Volumenelemente voneinander getrennt und das grundlegende Postulat der Kontinuumsphysik über die Existenz des Deformationsgradienten ist verletzt.

Aus der Sicht des Anwenders eines Berechnungsmodells ist es günstig, wenn mittels geeigneter Wahl von ΔV (sofern gemäß (A.15) überhaupt eine Wahlmöglichkeit besteht) der Zeitpunkt t^* möglichst weit hinausgezögert werden kann, da dann für ein längeres Intervall $[0, t^*]$ die einfachere kontinuumsmechanische Berechnung mit bewährten FE-Methoden möglich ist. Weil man als Materialtheoretiker bei der Modellbildung nicht die praktische Anwendbarkeit des Modells aus dem Auge verlieren sollte, wollen wir diese dritte Forderung hinzufügen:

- ΔV ist stets möglichst groß zu wählen.

Diese Forderung bedeutet z.B., daß wir Damage-Theorien als unzweckmäßig verwerfen wollen, bei denen pro Volumenelement nur ein einzelner Defekt vorgesehen ist [158],[159], selbst wenn diese Theorien einige zusätzliche analytische Untersuchungen erlauben.

II) Die Ungleichung (A.15) läßt sich anhand von Wellenausbreitungsproblemen veranschaulichen. Hier kann man $L_{ext} = v_{imp} c_0 / |\llbracket \dot{v} \rrbracket|$ wählen, wobei v_{imp} die Auf-

prallgeschwindigkeit, c_0 die kleinste Ausbreitungsgeschwindigkeit von Beschleunigungswellen und $[\dot{v}]$ den Beschleunigungssprung an der Wellenfront bedeuten. $[\dot{v}] = v_{imp} / t_r$ ist in Verbindung mit der "rise-time" t_r eine Meßgröße [26]. Schreiben wir $\sqrt[3]{\Delta V} = nd$ als Vielfaches des Korndurchmessers d , so lautet die rechte Ungleichung in (A.15)

$$nd \leq c_0 t_r \quad (A.16)$$

Für typische Werte von c_0, d, t_r wird $n \approx 10, \dots, 100$.

III) Wird v_{imp} erhöht und t_r verringert, so treten unzulässig große Änderungen von σ, Θ usw. über der Länge $\sqrt[3]{\Delta V}$ auf. Zur Beschreibung von ΔV braucht man dann auch Spannungsgradient, Temperaturgradient usw. und im Grenzfall wird eine nichtlokale Theorie erforderlich, wie sie z.B. in [94] benutzt wurde.

III) Einige Folgerungen für die Kontinuums-Damage-Theorie in Phase 1

I) Bei der Formulierung der Kontinuums-Damage-Theorie wollen wir uns von vornherein einschränken durch die Annahmen, daß

- MiSB-Bildung der dominierende Schädigungsmechanismus ist.
- der Einfluß viskos gedämpfter Versetzungsbewegung vernachlässigt werden kann.
- keine homogene Defekterzeugung auftritt, sondern Mikrodefekte nur an "weak spots" entstehen.

Die Theorie soll aber in kontinuierlicher Weise auch die Beschreibung langsamer Deformationen ermöglichen. Nach Fig.A.15 sollen also Dehnungsraten zwischen 10^{-5} sec^{-1} und $10^4 \dots 10^5 \text{ sec}^{-1}$ erfaßt werden können.

II) Bei einer Formulierung für kleine Verzerrungen können wir davon ausgehen, daß jeder aktivierte Deformationsmechanismus additiv zu $\dot{\epsilon}$ beiträgt. Die Arbeitshypothese ist mithin die Gültigkeit der Beziehungen

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_R + \dot{\epsilon}_I \quad \dot{\epsilon}_I = \dot{\epsilon}_V + \dot{\epsilon}_{SB} \quad \dot{\epsilon}_V = \dot{\epsilon}_{VA} + \dot{\epsilon}_{VT} \quad (A.17)$$

Hierbei ist ϵ_R die reversible Verzerrung und ϵ_I die irreversible Verzerrung, die sich aus versetzungs- und scherbändinduzierten Anteilen $\epsilon_V, \epsilon_{SB}$ zusammensetzt, wobei sich die Zerlegung von ϵ_V in Beiträge ϵ_{VA} aus athermischer und ϵ_{VT} aus thermisch aktivierter Versetzungsbewegung aus den Folgerungen a), d) aus Kap.A.3, Abschnitt II) ergibt. Die Fließregeln für $\epsilon_{VA}, \epsilon_{VT}$ sind so einzuführen, daß

- bei langsamen Prozessen $\dot{\epsilon}_V \approx \dot{\epsilon}_{VA}$ (A.18)

eine g.u. Fließregel mit Fließ- und Belastungsbedingung darstellt.

- bei moderaten und schnellen Prozessen $\dot{\epsilon}_v \approx \dot{\epsilon}_{vT}$ (A.19)

durch eine g.a. Fließregel mit Fließbedingung beschrieben wird, die auch inelastische Entlastung (Kriechen, Relaxieren) widergibt. Durch (A.10) ist hierzu die Verwendung eines sog. Überspannungsmodells vom *Perzyna*-Typ [95] motiviert.

- im Übergangsbereich ein kontinuierlicher Übergang von $\dot{\epsilon}_{vA}$ zu $\dot{\epsilon}_{vT}$ stattfindet.

Es gibt verschiedene Konzepte zur gleichzeitigen Berücksichtigung athermischer und thermisch aktivierter Mechanismen, die wir in Kap.A.6.2 und in Anhang 2 noch untersuchen wollen.

III) Bei der Formulierung von Ansätzen für die Evolutionsgleichungen wollen wir uns auf die Mikromechanik stützen. Wegen der in Kap.A.2 erörterten Probleme bei der Meßgenauigkeit von Wellenphänomenen wollen wir solche Phänomene nur zur Kontrolle, aber nicht zur Stoffgesetzentwicklung heranziehen. Eine Übereinstimmung numerischer Experimente mit den Messungen ist nur eine notwendige Bedingung für den Realitätsbezug eines Modells.

IV) Die in Phase 1 gültigen Materialgleichungen sollen außer den üblichen Prinzipien der Materialtheorie (Objektivität, Verträglichkeit mit Bilanzgleichungen,...) noch folgenden Postulaten genügen:

P 1 : Alle zur Beschreibung eines Prozesses erforderlichen Material- und Bilanzgleichungen bilden ein quasilineares hyperbolisches Dgl.-System mit symmetrischen Wellengeschwindigkeiten.

P 2 : Die linke Seite der Clausius-Duhem-Ungleichung (CDU) ist eine stückweise lineare Funktion von $\dot{\sigma}$, $\dot{\theta}$.

Die Bedeutung von P1 ist offenkundig. P2 wurde eingeführt, um bekannte Methoden der Auswertung der CDU beibehalten zu können.

A.6. Literaturübersicht - Teil 5: Kontinuumsmodelle zur Beschreibung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen

I) Vorbemerkung

Die im letzten Kapitel erörterten Folgerungen aus Experimenten sind hilfreich bei der Beurteilung bislang gebräuchlicher Materialmodelle. Grundsätzlich ist nach dem Literaturstudium festzustellen, daß kein einziges für Phase 1 und Phase 2 gültiges Modell existiert. Alle Modelle sind klassische Kontinuumsmodelle ($t^* \rightarrow \infty$), wobei diese Einschränkung leider nur in Ausnahmefällen auch erwähnt wird. In vielen

Fällen werden aber mit einer Kontinuums-Damage-Theorie unzulässigerweise beliebig große Defekte berechnet wie z.B. beim SRI-Modell ([65]-[67]). Viele Modelle sind auch nur für isotherme Prozesse geeignet; werden hingegen Temperaturänderungen berücksichtigt, dann geschieht dies gleich wieder nur für den anderen Extremfall adiabater Prozesse. Da die inhaltlichen Unterschiede der Modelle verglichen mit der Vielzahl der Phänomene also nur gering sind, wollen wir andere Aspekte zur Gliederung dieses Kapitels heranziehen, nämlich die Verbreitung eines Modells in FE-Programmen bzw. die Anzahl der Werkstoffe, an die ein Modell angepasst ist.

A.6.1. Einige häufig verwendete Stoffgesetze zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen

I) Angesprochen werden hier

- die verallgemeinerte Deformationstheorie (oft synonym für „strukturmechanische Gleichungen“)
- die verallgemeinerte Fließtheorie (synonym: Verallgemeinerte Prandtl-Reuss-Gleichungen, Hydro-Elasto-Plastizität)
- verallgemeinerte Überspannungsmodelle (synonym: Verallgemeinerter Perzyna-Sokolowski-Malvern-Typ)
- verallgemeinerte "unified theories", d.h. Theorien ohne Nebenbedingungen (synonym: Verallgemeinerter Bodner-Typ)
- das SRI-Modell.

II) Verallgemeinerte Deformationstheorie

Die bekannte Deformationstheorie beschreibt plastisches Verhalten unter Belastung als nichtlinear-elastisches Verhalten durch Angabe einer Funktion $\sigma = f_1(\epsilon)$. Bei mehrachsiger Beanspruchung können Vergleichsspannung σ_{comp} und Vergleichsdehnung ϵ_{comp} eingesetzt werden; da dies für die folgende Betrachtung unwesentlich ist, wollen wir einfach σ, ϵ schreiben.

Eine verallgemeinerte Deformationstheorie besteht in der Angabe der Funktion

$$\sigma = f_2(\epsilon, \dot{\epsilon}, \Theta) \quad . \quad (A.20)$$

Solche Gleichungen findet man heute fast nur noch in der Metallurgie unter dem Stichwort „Strukturmechanische Gleichungen“ und zwar in Verbindung mit den Annahmen

- starr-plastischen Verhaltens $\epsilon = \epsilon_1$
- reinen quasistationären Versetzungsgleitens, ausgedrückt durch die Orowan-Gleichung $\dot{\epsilon} = b N_{\text{mob}} w$.

Die Veröffentlichungen unterscheiden sich durch Annahmen über die beteiligten Deformationsmechanismen, d.h. über die Gleichung für w . Der Ausdruck für $\dot{\epsilon}$ ist keiner Nebenbedingung unterworfen, woraus ersichtlich ist, daß (A.20) nur für monotone Beanspruchung gilt, also kein Stoffgesetz im eigentlichen Sinne ist. (A.20) geht von der Vorstellung aus, daß das Volumenelement ein Einkristall ist. Beispiele für Gleichungen des Typs (A.20) findet man in [47],[52],[70].

Gleichungen wie (A.20) wurden in den 40er Jahren auch phänomenologisch eingeführt als Verallgemeinerung von Meßprotokollen zu monotonen dehngesteuerten Versuchen mit $\dot{\epsilon}$, Θ als Parametern. Auch aus diesem Blickwinkel stellt man fest, daß (A.20) kein Materialmodell darstellt. Darüber hinaus werden weder große Deformationen noch Strukturänderungen berücksichtigt. Mathematische Probleme bereitet (A.20), wenn spannungsgesteuerte Prozesse modelliert werden sollen und $\epsilon(t)$ gesucht ist. Da f_2 nicht notwendig streng monoton in $\dot{\epsilon}$ ist, ist die Integrabilität nicht gesichert. Aus all diesen Gründen sehen wir (A.20) als einen Anachronismus an.

III) Verallgemeinerte Fließtheorien

I) Die Eigenschaften der hier zu erörternden Modelle werden prägnanter durch das Synonym „Hydro-Elasto-Plastizität“ beschrieben. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, daß sich auch Metalle bei sehr hohen Prozeßgeschwindigkeiten wie Fluide verhalten, da dann der hydrostatische Druck sehr viel größer wird als die wegen ausgeprägter inelastischer Gestaltänderungen kleinen Schubspannungen, siehe Fig.A.8. Man greift daher zunächst zurück auf die Gleichungen volumenviskoser Fluide, die z.B. in der Form

$$\varphi = \hat{\varphi}(\rho, \Theta) \quad (\text{A.21})$$

$$\text{tr } \sigma = - \hat{p}_H(\rho, \Theta) + d(\rho, \Theta, \text{tr } D)$$

mit
$$p_H = \rho^2 \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \rho} \quad (\text{A.22})$$

Anwendung finden. Oft wird auch die mit der Volumenviskosität verknüpfte Funktion $d(\cdot)$ vernachlässigt, d.h. das Material wird als ideales Fluid angesehen, Tate [96]. In der Strömungsmechanik ist es üblich, Spannungen als abhängige Variable aufzufassen, wie man an (A.21)₂ erkennt.

II) Die Funktion \hat{p}_H wird meist aus Schockwellen-Experimenten ermittelt; hierzu und bzgl. einiger weit verbreiteter Ansätze (Mie-Grüneisen-, Los Alamos-, JWL-Ansatz, ...) sei auf Zukas (in [14]) verwiesen.

III) Es ist üblich, $e = \hat{e}(\rho, \Theta) := \hat{\varphi}(\rho, \Theta) - \Theta \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \Theta}(\rho, \Theta)$ (A.23)

als innere Energie einzuführen und p_H in der Form $p_H = \tilde{p}_H(\rho, e)$ (A.24) zu schreiben.

iv) Der Ansatz (A.23,24) gilt für Metalle nur während der Hochgeschwindigkeits-Belastungsphase; dies wird aber nicht explizit durch Angabe einer Nebenbedingung vermerkt. Der Berechnungsingenieur steht daher vor der schwierigen Entscheidung festzulegen, ab wann, wie lange und in welchem Teil der Struktur mit dem handlichen Modell des idealen Fluides gerechnet werden darf.

v) Es sei angemerkt, daß eine Gleichung wie (A.21)₂ für $\text{tr } \sigma$ auch aus numerischen Gesichtspunkten in der Diskussion steht: Die materialtheoretisch zulässige Funktion d besitzt eine Form, die automatisch das Auftreten von unzulässigen Verformungen bei FE-Rechnungen unterdrückt ("hourglass control", "artificial viscosity"). Der Viskositätskoeffizient d ist aber keineswegs "artificial", sondern materialtheoretisch gerechtfertigt. Über die Eigenschaften der "artificial viscosity" siehe z.B. [21],[97].

vi) Verringert sich die Prozeßgeschwindigkeit, so daß $|\text{tr } \sigma| = O(\|\sigma^I\|)$ wird, so lassen sich die Schubspannungen nicht mehr vernachlässigen. In Form eines Baukastensystems wird die Materialbeschreibung durch Hinzunahme einer g.u. Plastizitätstheorie ergänzt [97]-[99]. Leider werden die Bausteine nicht „fugenlos“ zusammengefügt. Dies sei am Beispiel der überwiegend benutzten Prandtl-Reuss-Theorie erläutert. Es gelte also

$$D^I = D_\epsilon^I + D_I^I \quad (\text{A.25})$$

mit $D_\epsilon^I = \frac{1}{2\mu} \nabla^I \sigma^I$, (∇) ist irgendeine objektive Zeitableitung (A.26)

$$D_I^I = \begin{cases} \dot{\lambda} \sigma^I & \text{falls } F(\sigma^I, \dots) = 0 \text{ und } \dot{\lambda} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Im Gegensatz zur Beschreibung der Volumenänderung wird hier also zwischen elastischem und plastischem Verhalten unterschieden. Es ist auffällig, daß nun σ^I eine unabhängige Variable ist, während $\text{tr } \sigma$ als abhängige Variable eingeführt wurde. Die Idealisierung der versetzungsinduzierten Mechanismen als Momentanantwort ist bei den in Frage kommenden Prozessen mehr als fragwürdig. Die in (A.27) noch nicht spezifizierte Fließbedingung sei von der Form

$$F = \sigma^I \cdot \sigma^I - g(\Theta, \bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}) \quad (\text{A.28})$$

mit $\dot{\bar{\epsilon}} := \sqrt{D^I \cdot D^I}$, $\bar{\epsilon} := \int \dot{\bar{\epsilon}} dt$ (A.29)

z.B. nach [99]-[101]. Der spezielle Ansatz für die Fließspannung $\sqrt{3/2} g$ des einachsigen Zugversuchs ist historisch als Weiterentwicklung von (A.20) zu sehen: Nicht mehr σ selbst ist eine Funktion von $\Theta, \bar{\epsilon}, \dot{\bar{\epsilon}}$ wie noch in der Deformationstheorie, sondern die mit σ bzw. $\sigma^I \cdot \sigma^I$ zu vergleichende Größe g . Meist wird auch

$g \sim f_2^2$ verwendet. Nur für die ursprünglich untersuchten Prozesse konstanter Dehnungsrate läßt sich aber der $\dot{\lambda}$ -Faktor leicht berechnen. Die Erfüllung der Konsistenzbedingung $\dot{F} = 0$ bei allgemeineren Prozessen ist problematisch: Der $\dot{\lambda}$ -Faktor hängt noch von $\ddot{\epsilon}$, $\dot{\epsilon}$, also auch von D_1 ab, obwohl doch mit $\dot{\lambda} > 0$ erst über die Existenz von D_1 entschieden werden sollte [100]. Es liegt also ein Verstoß gegen das Kausalitätsprinzip vor. (A.28) ist ein typisches Beispiel einer unzulässigen Verallgemeinerung eines nur für Prozesse mit konstanter Dehnungsrate gedachten Ansatzes.

vii) Der bisher schon entstandene Eindruck, daß es sich bei den Gleichungen der Hydro-Elasto-Plastizität um löchriges Flickwerk handelt, wird durch Betrachtungen zur Thermodynamik erhärtet: Die Verträglichkeit der Gleichungen mit dem 2.HS ist bislang noch nicht untersucht worden und dürfte ohne Zusatzannahmen schwer nachweisbar sein, da D einmal als abhängige und einmal als unabhängige Variable auftritt, bei Verwendung der CDU also gegen unser Postulat **P 2** verstoßen wird. Ferner wird nach wie vor mit der inneren Energie des idealen Fluids gerechnet; die latente Energie, die man aufgrund der Verfestigung mit $g(\cdot, \bar{\epsilon}, \cdot)$ erwartet, geht beim Zusammenbasteln der Gleichungen verloren.

IV) Verallgemeinerte Überspannungsmodelle

i) Viskoplastische g.a. Stoffgesetze wurden parallel von *Sokolowski*, *Perzyna* und *Malvern* entwickelt, siehe hierzu den Übersichtsartikel [23]. Die Formulierungen für einachsige Spannungszustände orientieren sich an σ - $\dot{\epsilon}$ -Kurven wie in Fig.A.3. Die Verallgemeinerung auf dreiachsige Spannungszustände stammt von *Perzyna*, [95]. Die einfachste Version lautet für kleine Verzerrungen im inelastischen Bereich

$$\dot{\epsilon} = \underline{L} \dot{\sigma} + \gamma \Phi(F) \frac{\sigma^I}{\|\sigma^I\|} \quad (A.30)$$

mit $F = (\sigma^I \cdot \sigma^I - k)/k$, $\Phi(\cdot) \geq 0$, $\Phi(0) = 0$, $\gamma = \text{konst.}$

\underline{L} ist der Nachgiebigkeitstensor, $\sigma^I \cdot \sigma^I - k = 0$ die Fließgrenze unter statischer Beanspruchung („statisch“ nicht im Sinne von $\text{div } \sigma = 0$, sondern im Sinne von „ $|\dot{\epsilon}|$ ist sehr klein“) und Φ heißt Überspannungsfunktion.

ii) Eine mikromechanische Deutung stammt von *Perzyna* [102]. Demzufolge beschreibt (A.30) inelastische Verformungen durch thermisch aktivierte Versetzungsbewegung (vgl. mit (A.10) für $B \approx 0$). Daraus ergibt sich die Berechtigung, (A.30) mit geeigneten k, γ, Φ bis mindestens $\dot{\epsilon} \approx 10^4 \text{ sec}^{-1}$ anzuwenden, obwohl die Gleichungen ursprünglich nur für $\dot{\epsilon}$ bis ca. 10^2 sec^{-1} gedacht waren [27]. Bis zu $\dot{\epsilon} \approx 10^2 \text{ sec}^{-1}$ sprechen wir von moderaten Dehnungsraten; für diese ist unter günstigen Umständen noch eine isotherme Theorie brauchbar. Probleme gibt es mit (A.30) bei der Beschreibung extrem langsamer Prozesse; wir kommen darauf nochmals zurück.

III) Weitere Merkmale in Stichpunkten

- Das Modell sagt den Fließbeginn stets für die zu $\sigma^I \cdot \sigma^I - k = 0$ gehörige Fließdehnung ε_f langsamer Prozesse voraus; die in Fig.A.2 beschriebene Verschiebung der σ - ε -Kurven zu höheren Werten stellt sich erst im inelastischen Bereich ein.
- Der Fließbeginn fällt mit der Proportionalitätsgrenze zusammen.
- Einachsige isotherme Kriech- und Relaxationsvorgänge werden nur durch $\Phi(F)$ beschrieben; es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= \sqrt{3/2} \gamma \Phi \operatorname{sign}(\sigma) && \text{beim Kriechen} \\ \dot{\sigma}(t) &= -\sqrt{3/2} E \gamma \Phi \operatorname{sign}(\sigma) && \text{beim Relaxieren} \end{aligned} \quad (A.31)$$

Es bereitet große Schwierigkeiten, die Funktion Φ so zu wählen, daß sowohl Kriechen als auch Relaxieren gut beschrieben werden kann.

V) Verallgemeinerte Modelle vom Bodner-Typ

I) Das von *S.R.Bodner* und Mitarbeitern entwickelte Modell ist der einzige Vertreter einer Klasse von Stoffgesetzen ohne Fließbedingung, der auch auf den Bereich der HGDen angewendet werden kann. Eine Übersicht über dieses Modell findet man in [103],[104]. Da das Modell recht einfach aufgebaut ist, findet man es nicht nur häufig in FEM-Programmen, sondern es wird auch gern für theoretische Untersuchungen viskoplastischen Verhaltens benutzt, z.B. für die Rißausbreitung in viskoplastischen Materialien [152].

II) Die zentrale Annahme des Modells ist, daß für Einkristalle gemessene Zusammenhänge zwischen inelastischer Scherrate und der Schubspannung auf Gleitebenen auf die zweiten Invarianten von inelastischem Dehngeschwindigkeitstensor und Spannungsdeviator im Polykristall übertragen werden können. Ferner wird angenommen, daß der auf *Prandtl* und *Reuss* zurückgehende Ansatz

$$D_i = \lambda \sigma^I \quad (A.32)$$

gilt. (A.32) wurde von *Prandtl* und *Reuss* allerdings nur für g.u. Verhalten eingeführt und läßt sich auch als Normalenregel deuten, sofern mit einer v.Mises-Fließbedingung ohne kinematische Verfestigung gearbeitet wird. Eine derartige Motivierung von (A.32) ist beim *Bodner*-Modell nicht möglich. λ folgt auch nicht aus einer Konsistenzbedingung, sondern aus der oben angesprochenen Verknüpfung der Scherrate mit der ausgelösten Schubspannung im Einkristall.

III) Innerhalb des durch diese Annahmen abgesteckten Rahmens gelingt es mit dem *Bodner*-Modell, mit einer verblüffend geringen Zahl von Materialparametern viele Effekte qualitativ zu beschreiben. Tatsächlich scheint die Zahl der Parameter eher zu klein: Um neben einem weiten Bereich der Dehnungsraten auch einen weiten Bereich der Dehnungen zu erfassen, stehen nur 4 Parameter zur Verfügung (Gln. (8)

und (9) aus [103]). Probleme bereitet die Berücksichtigung kinematischer Verfestigung. Neuerdings wurde das Modell auch mit einer Damage-Variable „nachgerüstet“ [103].

VI) Das SRI-Modell

I) Das Rechenmodell des SRI ist das einzige bislang entwickelte Modell zur Berücksichtigung von MiSBs und steht in Konkurrenz zu dem an der Ruhr-Universität entwickelten Modell. Es ist für mehrere Materialien angepaßt und in FEM-Programmen (DYSMAS) implementiert. Wir untersuchen die in [65]-[67] beschriebene Version, die aber möglicherweise schon veraltet ist.

II) Das SRI-Modell besitzt folgende Merkmale:

- Das Modell ist nicht tensoriell formuliert, sondern wird als "multiple plane plasticity model" [66] bezeichnet. Darunter ist zu verstehen: Es wird eine Anzahl n von Ebenen (7 - 9 in den verschiedenen Versionen) vorgegeben und in jeder Ebene wird die Deformation als einfache Scherung aufgefaßt. Diese Vorgehensweise ist möglicherweise durch die Orowan-Gleichung für den Einkristall inspiriert. Im Fall der Orowan-Gleichung liegt die Zahl der Ebenen (= Gleitebenen) aber durch die Kristallstruktur fest, während bei der Scherbandbildung solche Ebenen erst während der Belastung auftreten (z.B. HSS-Ebenen bei radialer Belastung). Es ist nicht klar, inwiefern das "multiple plane plasticity"-Konzept in irgendeinem Sinne eine tensorielle Formulierung approximiert.

In jeder einzelnen Ebene gilt:

- Inelastische Scherungen werden durch ein Überspannungsmodell vom *Perzyna*-Typ beschrieben.
- Es werden Evolutionsgesetze für die mittlere Größe der Scherbänder und die Anzahl der Scherbänder pro Volumeneinheit angegeben.
- Neben Entstehung und Wachstum wird auch Scherbandvereinigung erfaßt [65].
- Die Schädigung hat weder Einfluß auf die Deformation (in unserer Notation : $\dot{\epsilon}_{SB} = 0$) noch auf das elastische Verhalten noch auf die Energiebilanz.
- Das Modell erfaßt nur kleine isotherme Formänderungen.

III) Ein ausführlicher Kommentar erübrigt sich, da fast jedes der o.a. Merkmale einen Widerspruch zu Prinzipien der Materialtheorie oder eine anderweitig unrealistische Vereinfachung enthält. Bemerkenswert ist vor allem, daß die Größe der jedem materiellen Punkt zugeordneten Scherbänder nicht begrenzt ist! Das n -Tupel von Werten einer bestimmten Größe G auf den n Ebenen kann nach *Leckie & Onat* [160] als „Histogramm“ bezeichnet werden; die willkürliche Auswahl der Orientierung dieser Ebenen kann die Isotropiegruppe der Gleichung für G beeinflussen, wie dies in [160] für ein Icosahedron ($n=20$) erläutert wird.

A.6.2. Einige verbesserte Kontinuumsmodelle

I) Berücksichtigung viskos gedämpfter Versetzungsmechanismen

i) *Perzyna* [105],[106] entwickelte ein Modell, bei dem oberhalb einer zweiten Fließgrenze zusätzliche inelastische Deformationen auftreten können. Diese Deformationen werden als Beitrag der schnellen viskos gedämpften Versetzungen zur Verzerrung interpretiert; dieser Beitrag kann nicht mehr durch die für thermisch aktivierte Bewegung gedachte Gleichung (A.30) beschrieben werden. In unserer Notation lautet das Modell:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_R + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VT} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD} \quad (\text{A.33})$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VT} = \gamma_T \left[\Phi_T(F_T) \right]_T \mathbf{N}_\sigma \quad , \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD} = \gamma_D \left[\Phi_D(F_D) \right]_D \mathbf{N}_\sigma$$

Die Klammern $[\]_i$ bedeuten $[x]_i = x$ falls $F_i > 0$, $[x]_i = 0$ sonst, $i = T, D$. $F_D = 0$ ist die angesprochene zweite Fließgrenze, $\mathbf{N}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}' / \|\boldsymbol{\sigma}'\|$. Meist wird $\Phi_D = \text{id}$ vorgeschlagen. γ_T, γ_D sind Konstanten. Das Modell beschreibt auch nichtisotherme Prozesse und ist mit der CDU verträglich.

ii) Die Nebenbedingungen für $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VT}$ und $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}$ sind sehr ähnlich. Es scheint fraglich, ob diese Ähnlichkeit mikromechanisch gerechtfertigt ist. Dazu sei nochmals daran erinnert, daß $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VT}$ Prozesse beschreibt, bei denen an schwachen Hindernissen blockierte Versetzungen durch die thermisch aktivierte Bewegung von Punktdefekten wieder beweglich werden. Einen entsprechenden Mechanismus vermögen wir bei $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}$ nicht zu erkennen.

II) Verbesserte Beschreibung kleiner und moderater Dehnungsraten

i) Zahlreiche Autoren beschäftigen sich mit der Erweiterung von (A.30) hin zur Beschreibung nichtisothermer Prozesse mit kombinierter Verfestigung. *Lehmann* ([107] und dort zitierte Literatur) berücksichtigte viskoplastisches Verhalten mit isotroper und kinematischer Verfestigung in dem von ihm entwickelten thermodynamischen Rahmen. *Bruhns* [108] berücksichtigte außer isotroper und kinematischer Verfestigung auch spezielle Verfestigungseffekte bei zyklischer Beanspruchung durch diskrete innere Variable. Beide Autoren lassen aber den Ansatz von *Perzyna*

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \gamma \Phi(F) \mathbf{N} \quad , \quad \mathbf{N} \text{ aus Normalenregel, } \gamma = \text{konst.} \quad (\text{A.34})$$

im Prinzip unverändert, die daraus resultierenden Probleme beim Übergang zu extrem langsamen Prozessen werden also auch übernommen. Im Zusammenhang mit dem Übergang von der Beschreibung thermisch aktivierter Versetzungsbewegung zur Beschreibung athermischer Versetzungsbewegung werden wir uns in Anhang 2 nochmals mit den Arbeiten von *Lehmann* und *Bruhns* beschäftigen.

ii) *Perzyna & Pecherski* [72],[110] verallgemeinerten den Ansatz (A.30) durch

$$\gamma = \gamma(\dot{\epsilon}) \quad \text{mit } \gamma \rightarrow \infty \quad \text{für } \dot{\epsilon} \rightarrow \dot{\epsilon}_s \quad (A.35)$$

$\dot{\epsilon}$ ist hier die zweite Invariante des gewählten Dehngeschwindigkeitstensors. $\dot{\epsilon}_s$ ist eine vom Anwender zu definierende „statische“ Dehnungsrate. Für extrem langsame Prozesse strebt $F \rightarrow 0$ und $\dot{\epsilon} \rightarrow \dot{\epsilon}_s$; in der Fließregel entsteht ein unbestimmter Ausdruck „ $0 \cdot \infty$ “, der dem λ -Koeffizienten der Fließtheorie entspricht. Ein ähnlicher Vorschlag stammt auch von *Lubliner* [109]. Gegen diese Vorgehensweise ist einzuwenden :

- Sie verstößt gegen unsere Postulate P1, P2 .
- Die Wahl von $\dot{\epsilon}_s$ beinhaltet eine Willkür.
- Das Modell kann keine Relaxation ($\dot{\epsilon} = 0$) beschreiben.
- Für spannungsgesteuerte einachsige Prozesse ist die Dehnungsrate $\dot{\epsilon}$ aus

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma(\dot{\epsilon}) \Phi(F) \sqrt{3/2} \text{sign}(\sigma) \quad (A.36)$$

zu berechnen (Fixpunktproblem für $\dot{\epsilon}$). Für die in [72] angegebene Funktion $\gamma(\dot{\epsilon}) \sim (\dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_s - 1)^{-5}$ erfüllt diese Funktion in der Umgebung von $\dot{\epsilon}_s$ aber keine Lipschitzbedingung; die Existenz des Fixpunktes ist also nicht gesichert.

- Die Theorie gilt bislang nur für isotherme Prozesse.

III) Berücksichtigung von Schädigungsmechanismen bei HGDen

I) Nach [115] gehen die ersten Überlegungen zur Berücksichtigung von Schädigungsmechanismen bei HGDen auf das Jahr 1968 zurück, als *Tuler et al.* eine Variable Φ einführten. Über deren Bedeutung zitieren wir aus [115]: "... suggested that the extent of damage Φ is a function of the entire stress history

$$\Phi = \int_{-\infty}^t f[\sigma(t')] dt' \quad , \quad (A.37)$$

where Φ is any convenient measure of damage, e.g. the total number of micro-failures. They suggested that f be expanded in powers of $\sigma - \sigma_0$, where σ_0 is a threshold stress below which no damage occurs regardless of stress duration. They further suggested that one term may dominate, so that

$$\Phi = \int_{-\infty}^t (\sigma - \sigma_0)^\lambda dt' \quad , \quad (A.38)$$

where σ_0, λ are material constants determinable from experiment. ... Much effort has been expended ... to obtain values for σ_0 and λ , but only with partial success."

Erwähnenswert ist, daß die Größe Φ auch 20 Jahre später noch als Schädigungsmaß in FEM-Paketen implementiert ist [99].

II) *Hong* [111] erweitert das Modell der Hydro-Elasto-Plastizität durch eine skalare Damage-Variable. Das Modell von *Hong* gilt für adiabate Prozesse. Schon früher

entwickelten *Davison, Stevens & Kipp* [112] eine isotherme Damage-Theorie zur Beschreibung der Porenbildung, die in manchen Materialien der Entstehung eines Makrorisses durch "spalling" vorausgeht. Von *Perzyna* [113] stammt ein Modell zur Beschreibung isothermer Schädigungsprozesse infolge duktiler Mikrobrüche. Er verwendet die Damage-Variablen des SRI-Modells, nämlich die Defektdichte und den mittleren Durchmesser der Defekte.

A.6.3. Einige Bemerkungen zu Damage - Theorien

I) Einleitung

Die vorangehenden Ausführungen zeigen, daß die Entwicklung der Damage-Theorien für HGDen noch in den Kinderschuhen steckt, vor allem was die Deutung der Damage-Variablen betrifft. Mit Ausnahme von [112] werden die Damage-Variablen ad hoc eingeführt und man beschränkt sich auf skalare Variable, die nur für Schädigung durch Porenbildung genügen. Die Damage-Theorie für langsame Prozesse ist schon weiter entwickelt und wir wollen einige Ergebnisse zitieren (siehe auch [114]).

II) Damage-Variable

i) Einen Überblick über die gegenwärtige Entwicklung der Damage-Theorie gibt *Rabier* [118]. Die ersten Überlegungen zur Einführung eines Schädigungsmaßes für orientierte Defekte stammen von *Murakami* und Mitarbeitern ([116] und dort zitierte Literatur). Der von *Murakami* eingeführte Tensor Ω stellt aber nur ein Mikrofeld dar und ist noch keine zulässige Variable einer Kontinuumstheorie. Daß *Murakami* die Mittelwertbildung über ΔV „vergißt“ hat allerdings keine Auswirkungen, da Ω später ohne Rückgriff auf seine physikalische Bedeutung nur zu formalen Transformationen von σ benutzt wird.

Über andere Damage-Maße kann man bei *Rabier* [118] nachlesen. Zu erwähnen ist vor allem die *Rabier'sche* Weiterentwicklung eines auf *Onat & Leckie* [160] zurückgehenden Schädigungsmaßes, bei dem die Richtungsabhängigkeit der Defekte durch eine Fourierentwicklung erfaßt wird. Die Damage-Variable ist dann auch durch eine Reihenentwicklung gegeben ([118], Gl.(2.4)). Ein solches Vorgehen wurde übrigens in der Kontinuumselektrodynamik schon viele Jahre früher benutzt.

ii) Für die Entwicklung einer thermodynamischen Beschreibung der Schädigung sind die Arbeiten von *Krajcinovic* (z.B.[117]) von Bedeutung. Er unterscheidet zwischen der Beschreibung der Materialstruktur durch innere Variable (er verwendet eine Approximation der Richtungsabhängigkeit durch Treppenfunktionen statt durch eine Fourierreihe) und einem Maß der Schädigung, welches außer von den erwähnten inneren Variablen noch von der Belastung abhängt.

III) Bemerkungen zu den Evolutionsgesetzen

Die Evolution der Damage-Variablen wird durch Gleichungen mit Nebenbedingungen

beschrieben. Dabei ist oft unklar, ob die Evolution spannungs- oder dehnungskontrolliert abläuft; kann man sich nicht entscheiden, so werden beide Anteile mitgenommen, z.B. [119]. Zu dieser Situation zitieren wir aus [24]: "... nucleation at any heterogeneity requires a combination of local stresses normal and tangential to the heterogeneity ... plastic strain is probably a better indicator of the local stress than is the continuum stress". Die Konfusion bzgl. der „richtigen“ Nebenbedingung rührt also daher, daß in der Kontinuumstheorie noch kein Maß für lokale Spannungskonzentrationen vorkommt und deshalb mittlere (inelastische) Dehnung oder mittlere Spannung bemüht werden müssen. Es ist ein Ziel dieser Arbeit, hier Abhilfe zu schaffen.

A.6.4. Analytische Untersuchungen über das Wachstum von Makrodefekten

In der Literatur wurden bislang nur Makrorisse und (seltener) Makroporen untersucht. Die Beschreibung der in Makro-Scherbändern enthaltenen Materie bereitet aber keine Schwierigkeiten, die Gleichungen werden nur etwas umfangreicher. Grundlegende Arbeiten über Riß- und Porenwachstum stammen aus der französischen Schule der Bruchmechanik (*Nguyen* [93],[120], *Stolz* [121], *Germain et al* [122]).

Diese Autoren prägen den Begriff der globalen Analyse und meinen damit, daß integrale Formen des ersten und zweiten Hauptsatzes für eine mit der Rißspitze mitbewegte Umgebung formuliert werden. Aus dem 2.HS ergibt sich so eine Ungleichung, der die Ausbreitungsgeschwindigkeit c genügen muß; bei vernachlässigbaren Trägheitskräften und ebener gerader Rißausbreitung hat diese Ungleichung die Form

$$\boxed{(G - 2\gamma)c \geq 0} \quad . \quad (A.39)$$

G ist ein von c unabhängiges Integral längs einer die Rißspitze einschließenden Kurve Γ :

$$\boxed{G := \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} ds} \quad , \quad \mathbf{g}_j = \rho \varphi n_j^c - \sigma_{kj} u_{k,m} n_m^c \quad . \quad (A.40)$$

Hierbei ist φ die spezifische freie Energie und \mathbf{n}_c ist der Richtungsvektor des Riß-

wachstums. Das Integral $\int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} ds$ ist i.a. nicht wegunabhängig. Man spricht von

asymptotischer Wegunabhängigkeit, wenn der Grenzübergang $\Gamma \rightarrow 0$ für alle Γ dasselbe Ergebnis liefert. *Nilsson & Stahle* [123] geben als Bedingung für asymptotische Wegunabhängigkeit $\text{div} \mathbf{g} \sim r^{-2}$ im Nahfeld an; ist $\text{div} \mathbf{g}$ stärker singulär, so ist das Integral nicht asymptotisch wegunabhängig und G ist kein sinnvoller Rißparameter. Zur Beurteilung dieses Sachverhaltes ist also eine Nahfeldanalyse des Dgl.-Systems erforderlich. 2γ in (A.39) ist die Oberflächenenergie. (A.39)

hat die gleiche Gestalt wie die lokale Dissipationsungleichung und entsprechend können Materialgleichungen für c als hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit von (A.39) angegeben werden [120]. Derartige Gleichungen können die in FEM eingeführten Rißausbreitungskriterien ersetzen, bei denen z.B. Elemente mit einer gewissen Schädigung Φ (nach (A.38)) einfach weggelassen werden [15]. Dadurch werden aber sämtliche Bilanzgleichungen verletzt.

Zu erwähnen sind noch die in [123], p.201 angegebenen Ansätze für c , bei denen c als Funktion von Intensitätsfaktoren aufgefaßt wird. Dieses Vorgehen erfordert also eine eingehendere analytische Untersuchung des Nahfeldes als (A.40) und ist bei nichtlinearen Materialien nur schwer durchführbar.

Wir orientieren uns deshalb in Teil B2 an (A.39) und werden diesen Ausdruck auf den Fall dynamischer Prozesse und Scherbandwachstums verallgemeinern.

A.6.5. Einige Bemerkungen zur Beschreibung hochdynamisch verformter Strukturen

Wir beschließen unseren Überblick über die Literatur zu HGDen mit einigen Notizen zu Näherungsverfahren der Strukturmechanik. Einen Überblick über diese Verfahren findet man in [25],[40]-[43]. Untersucht werden impact-belastete Rahmentragwerke. Die Grundgedanken der Verfahren lassen sich auch auf Flächentragwerke ausdehnen. Die Näherungsverfahren sind durch folgende Annahmen charakterisiert:

- Die Projektilenergie ist ein Vielfaches der elastisch zu speichernden Energie (→ es kann starr-inelastisches Verhalten angenommen werden).
- Die Verzerrungsraten sind näherungsweise konstant (→ es kann ein g.u. starrplastisches Modell benutzt werden; die Fließspannung für die betreffende Verzerrungsrate ist einzusetzen).
- Die charakteristischen Beobachtungszeiten sind groß gegen l/c_b , wobei l eine typische Strukturabmessung und c_b die kleinste Ausbreitungsgeschwindigkeit von Beschleunigungswellen ist (→ Vernachlässigung von Wellenphänomenen, modalshape Lösungen sind zulässig).
- Der Prozeß ist isotherm.
- Fließbedingungen und Fließregel werden a priori im Raum der Schnittgrößen formuliert und nicht aus der Kontinuumstheorie abgeleitet.
- Die für langsame Deformationen getroffenen kinematischen Annahmen werden beibehalten (z.B. Bernoulli-Kinematik).

Grundlegend neu ist nur die letzte Annahme. Die ersten vier Annahmen findet man z.T. ja auch bei kontinuumsmechanischen Rechnungen und die Annahme über die Einführung der Fließbedingung trifft in gleicher Weise auf die Berechnung quasi-

statisch beanspruchter Tragwerke zu. Neu ist aber bei HGDen die Neigung zur Lokalisierung der Deformation im Verhältnis zur Strukturabmessung ([40],p.251). Lokal treten deshalb Abweichungen von der Bernoulli-Kinematik und von dem in der Theorie angenommenen Spannungszustand auf. Gerade das lokale Verhalten interessiert aber z.B. für den Widerstand gegen Durchschlag. Das oft praktizierte Vorgehen, zwischen einem Lokal- und einem Fernbereich zu unterscheiden und nur letzteren zu modellieren, ist daher unzweckmäßig. Im Zusammenhang mit dem Einfluß lokaler Störungen durch Risse auf das Strukturverhalten stammt ein interessanter Vorschlag von *Barr & Christides* [124].

A.7. Weitere Folgerungen für die Anwendung der Kontinuumstheorie

Die im vorigen Kapitel durchgeführte Untersuchung bislang entwickelter Stoffgesetze zeigte, daß die folgenden Aspekte der Materialbeschreibung verbesserungsbedürftig sind: Berücksichtigung nichtisothermer Prozesse, Wahl der Damage-Variablen, Evolutionsgesetze und Nebenbedingungen für Damage-Variablen, kontinuierlicher Übergang von der Beschreibung langsamer Prozesse zur Beschreibung schneller Prozesse. Wir stehen also vor folgenden Aufgaben:

- I) Konstruktion thermodynamisch konsistenter Gleichungen für nichtisotherme Prozesse.
- II) Einführung einer tensorwertigen Damage-Variable, mit deren Kenntnis Versagenskriterien und Kriterien für die Entstehung eines Makro-Scherbandes formuliert werden können.
- III) Einführung von Größen zur Identifikation lokaler Spannungs- und Temperaturerhöhungen.
- IV) Einführung einer Größe u als Maß der Prozeßgeschwindigkeit, die selbst keine Rate ist und damit nicht gegen P1, P2 verstößt.

TEIL B : ENTWICKLUNG EINES MATERIALMODELLS

TEIL B1 : DIE KONTINUUMS - DAMAGE - THEORIE FÜR PHASE 1

B1.1. Einige Bezeichnungen

I) Zur Beschreibung der mit inelastischen Prozessen einhergehenden Strukturänderungen und irreversiblen Deformationen benutzen wir innere Variable und Prozeßvariable. Die Mengen dieser Variablen werden mit \underline{U} bzw. \bar{U} bezeichnet. Der Unterschied zwischen diesen Variablen besteht darin, daß die innere Energie nur von den inneren Variablen abhängt. Die Prozeßvariablen kann man auch als "energieneutral" bezeichnen. *Lehmann* benutzt übrigens eine andere Definition von Prozeßvariablen [90].

Beispielsweise ist die Versetzungsdichte eine innere Variable, die Dichte der beweglichen Versetzungen hingegen eine Prozeßvariable. Das liegt daran, daß sowohl das Eigenspannungsfeld einer ruhenden Versetzung als auch dasjenige einer sich bewegendes Versetzung $\sim r^{-1}$ ist und sich die in den Eigenspannungsfeldern gespeicherte Energie nicht ändert, wenn sich eine Versetzung zu bewegen beginnt. Ein anderes Beispiel für eine Prozeßvariable ist die inelastische Verzerrung. Es ist daher sinnvoll, \bar{U} gemäß $\bar{U} = \bar{U}_e \cup \bar{U}_s$ zu zerlegen, wobei \bar{U}_e die Anteile der inelastischen Verzerrung und \bar{U}_s die Variablen zur Kennzeichnung energieneutraler Strukturänderungen enthält. Mit $y, Y \in \underline{U}$ usw. bezeichnen wir skalar- bzw. tensorwertige Repräsentanten der jeweiligen Variablenmenge. In den Gleichungen (B.1) bis (B.9) werden o.E. tensorwertige Variable untersucht.

II) I) Sowohl für Y als auch für \bar{Y} müssen Evolutionsgesetze angegeben werden. Im Rahmen der hier zunächst benutzten geometrischen Linearisierung werden also \dot{Y} und $\dot{\bar{Y}}$ als Materialeigenschaften aufgefaßt. Wir geben hier die Gestalt von Ansätzen für \dot{Y} an.

II) Änderungen von Y können sowohl athermischer als auch thermisch aktivierter Natur sein. Zur Präzisierung dieser Begriffe entscheiden wir uns zunächst dafür, σ, Θ als unabhängige externe Variable anzusehen. Die Evolutionsgleichung für Y soll von der Gestalt

$$\dot{Y} = f(\sigma, \Theta, \underline{U}, \bar{U}_s; \dot{\sigma}, \dot{\Theta}) \stackrel{!}{=} \dot{Y}_{ath} + \dot{Y}_{th} \quad (B.1)$$

sein. Eine thermisch aktivierte Änderung von Y bedeutet, daß die durch Y repräsentierten Strukturänderungen auch dann noch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auftreten, wenn die externen Variablen konstant gehalten werden ($\dot{\sigma} = 0, \dot{\Theta} = 0$). Die Änderung \dot{Y}_{th} hängt dann nur von den Momentanwerten $\sigma, \Theta, \underline{U}, \bar{U}_s$ ab und wird notwendigerweise durch eine g.a. Gleichung erfaßt. Wir schreiben

$$\dot{Y}_{th} = \dot{Y}^*(\sigma, \theta, \underline{y}, \bar{y}_s) \quad (B.2)$$

Zur Verkürzung der Schreibweise benutzen wir im folgenden die für die Funktion eingeführte Bezeichnung \dot{Y}^* auch für die abhängige Variable. Dies sollte nicht zu Mißverständnissen führen. Eine momentane Änderung von $\dot{\sigma}$, $\dot{\theta}$ hat auf \dot{Y}^* keinen Einfluß, die thermisch aktivierten Mechanismen reagieren auf eine Änderung der externen Variablen also verzögert.

Änderungen $\dot{\sigma}$, $\dot{\theta}$ von σ , θ können auch spontane, athermische Zustandsänderungen zur Folge haben, die durch thermische Aktivierung allein nicht ausgelöst werden können. Gewöhnlich sind spontane Änderungen auch g.u., wir schreiben

$$\dot{Y}_{th} = f_{th}(\sigma, \theta, \underline{y}, \bar{y}_s; \dot{\sigma}, \dot{\theta}), \quad f_{th} \text{ hom. vom Grad 1 in } \dot{\sigma}, \dot{\theta} \quad (B.3)$$

III) Nebenbedingungen

i) $\dot{Y} \neq 0$ kann an Nebenbedingungen geknüpft sein. Prinzipiell sind für \dot{Y}_{th}, \dot{Y}^* unterschiedliche Nebenbedingungen denkbar und für verschiedene Y können die Nebenbedingungen in unterschiedlichen Räumen formuliert sein. In Verallgemeinerung bekannter Begriffe aus der Fließtheorie der Plastizität sprechen wir von Fließfunktionen F_Y , Fließbedingungen $F_Y \geq 0$, Belastungsbedingungen $LC_Y > 0$ und Überspannungen $f_Y - g_Y$, falls F_Y die Form

$$F_Y = f_Y(\sigma, \theta, \underline{y}, \bar{y}_s) - g_Y(\theta, \underline{y}, \bar{y}_s) \quad (B.4)$$

besitzt.

ii) Wir definieren eine zu F_Y assoziierte Belastungsbedingung LC_Y durch

$$LC_Y := \frac{\partial F_Y}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial F_Y}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (B.5)$$

LC_Y hängt nur von den Raten der externen unabhängigen Variablen ab, aber nicht von \dot{Y} usw.

iii) \dot{Y} sei für stetige $\dot{\sigma}, \dot{\theta}$ ebenfalls stetig (insbesondere stetig beim Wechsel von Be- zu Entlastung) und es sei stetig beim Übergang von $F_Y > 0$ zu $F_Y < 0$ und zurück. Dies führt zur Darstellung

$$\dot{Y} = [d_Y]_Y \langle LC_Y \rangle N_Y + [\dot{Y}^*]_Y \quad (B.6)$$

mit

$$\langle LC_Y \rangle = \begin{cases} LC_Y & \text{für } LC_Y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (B.7)$$

und
$$\left[d_Y \right]_Y = \begin{cases} d_Y & \text{für } F_Y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, d_Y \rightarrow 0 \text{ für } F_Y \rightarrow 0 \quad (\text{B.8})$$

d_Y und N_Y hängen von den gleichen Argumenten ab wie \dot{Y}^* . Die Faktorisierung in eine Richtung N_Y und eine Amplitude d_Y ist oft zweckmäßig.

iv) Gleichungen des Typs (B.6) sollen auch für y sowie die Prozeßvariablen gelten.

v) F_Y besitze die Gestalt (B.4). Unter einer verallgemeinerten Überspannung verstehen wir eine Funktion \mathcal{F}_Y mit den Eigenschaften

$$\mathcal{F}_Y = \mathcal{F}_Y(f_Y, g_Y, \sigma, \theta, \underline{y}, \underline{y}_s), \mathcal{F}_Y > 0 \text{ falls } f_Y > g_Y \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{F}_Y = 0 \text{ falls } f_Y \leq g_Y.$$

Verallgemeinerte Überspannungen entstehen z.B., wenn man F_Y mit einem noch von σ, θ, \dots abhängigen Ausdruck entdimensioniert. Sie sind bei der Anpassung des Materialmodells von Bedeutung.

IV) Formulierung der CDU mit der Enthalpie g als thermodynamischem Potential

i) Die ursprüngliche Form der CDU mit der inneren Energie lautet

$$-\rho \dot{e} + \rho \theta \dot{\eta} + \sigma \cdot \dot{\epsilon} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\text{mit } \mathbf{g} := \text{grad } \theta \quad (\text{B.11})$$

Da es meist anschaulicher ist, Dehnungen und Temperatur als unabhängige Variable zu verwenden, hat die auf der Einführung der freien Energie

$$\rho \varphi = \rho e - \rho \eta \theta \quad (\text{B.12})$$

beruhende Ungleichung

$$-\rho \dot{\varphi} - \rho \eta \dot{\theta} + \sigma \cdot \dot{\epsilon} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (\text{B.13})$$

Vorteile. Bei Verwendung von Nebenbedingungen im (σ, θ) -Raum ist es aber sinnvoll, σ, θ generell als unabhängige externe Variable einzuführen (s.o.) und die (freie) Enthalpie

$$\rho g = \sigma \cdot \epsilon_R - \rho \varphi \quad (\text{B.14})$$

$$\text{mit der reversiblen Verzerrung } \epsilon_R = \epsilon - \epsilon_i \quad (\text{B.15})$$

als thermodynamisches Potential zu definieren. Übrigens wird von manchen Auto-

ren auch $-g$ als Enthalpie bezeichnet (z.B. *Lehmann* [90]). Die CDU lautet nun

$$\rho \dot{g} - \rho \eta \dot{\Theta} - \varepsilon_r \cdot \dot{\sigma} + \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_i - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad . \quad (\text{B.16})$$

II) Einige Monotonieeigenschaften von g

Seien y_d, y_v je eine skalarwertige innere Variable der Damage- bzw. Versetzungsprozesse. Die Evolutionsgesetze können von der Form (B.6) sein, doch spielt dies in diesem Abschnitt keine Rolle. Wichtig ist hingegen die Annahme, daß \dot{y}_v gemäß

$$\dot{y}_v = \dot{y}_{v,w} - \dot{y}_{v,r} \quad , \quad \dot{y}_{v,w} \geq 0 \quad , \quad \dot{y}_{v,r} \geq 0 \quad (\text{B.17})$$

aus einem Wachstums- und einem Erholungsanteil besteht, während nach

$$\dot{y}_d = \dot{y}_{d,w} \quad (\text{B.18})$$

die Schädigung nur zunehmen, aber nicht ausheilen kann. Die Zunahme der Verfestigung bewirkt nun, daß zum Erreichen der gleichen Dehnung größere Spannungen erforderlich sind als bei fehlender Verfestigung. Die freie Energie nimmt zu und die gemäß (B.14) definierte Enthalpie nimmt ab:

$$\frac{\partial g}{\partial y_v} \leq 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y_v} \dot{y}_{v,w} \leq 0 \quad , \quad - \frac{\partial g}{\partial y_v} \dot{y}_{v,r} \geq 0 \quad . \quad (\text{B.19})$$

Entsprechende Aussagen über y_d sind nicht trivial. Eine Zunahme der Schädigung bedeutet zunächst die Zunahme von 3D - Gitterfehlern und der in deren Eigenspannungsfeldern gespeicherten Energie. Andererseits bedeutet die Zunahme der Schädigung auch, daß die entferntere Umgebung der 3D-Gitterfehler entlastet und dort Energie freigesetzt wird. Da y_d nur einen Mittelwert darstellt, läßt sich aus diesen qualitativen Betrachtungen nicht ableiten, ob g mit y_d wächst oder nicht. Letztlich muß man aufgrund der Phänomenologie entscheiden: Man beobachtet mit zunehmender Schädigung eine verringerte Verfestigung bzw. sogar Entfestigung, so daß

$$\frac{\partial g}{\partial y_d} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial y_d} \dot{y}_d \geq 0 \quad (\text{B.20})$$

zu erwarten ist. Die Ergebnisse (B.19,20) sind von Bedeutung bei der Auswertung der CDU.

V) Eine hinreichende Bedingung für die Verträglichkeit einer Materialgleichung mit der CDU:

I) Die folgenden Rechnungen beruhen auf dem Konzept der "Generalized Standard Materials" [92],[93]. Eine Funktion heißt konvex, falls

$$f(\tau_2) - f(\tau_1) \geq \frac{df}{d\tau}(\tau_1) \cdot (\tau_2 - \tau_1) \quad . \quad (B.21)$$

$$\text{Sei } \mathcal{K}(\tau) := \left\{ f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \geq 0, f(0) = 0, f \text{ konvex} \right\} \quad . \quad (B.22)$$

Wählen wir für $f \in \mathcal{K}(\tau)$ $\tau_2 = 0$ in (B.21), so folgt

$$\underline{\frac{df}{d\tau} \cdot \tau} \geq f(\tau) \geq 0 \quad . \quad (B.23)$$

Dem unterstrichelten Teil dieser Ungleichung ähnelnden Ausdrücken begegnen wir bei der Untersuchung der CDU.

ii) In vielen Fällen werden die Evolutionsgleichungen so gewählt, daß

$$\sigma \cdot \dot{\epsilon}_1 \geq 0 \quad (B.24)$$

die wichtigste Teilforderung der CDU wird. Eine hinreichende Bedingung lautet

$$\dot{\epsilon}_1 = [\gamma] \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma^I} \quad , \quad \Gamma \in \mathcal{K}(\sigma^I) \quad , \quad \gamma \geq 0 \quad . \quad (B.25)$$

Für $\gamma = 1$ und $\Gamma = F$ entspricht dies einer assoziierten Fließregel. Wir wollen nun einen wichtigen Ansatz für Γ diskutieren.

iii) Sei Y ein kinematischer Verfestigungstensor und sei

$$F = (\sigma^I - Y) \cdot (\sigma^I - Y) - h \quad , \quad h = \text{konst}(\sigma, Y) \quad .$$

$$\text{Wir zeigen: } \Gamma := \frac{1}{2} \{ F(\sigma^I, Y) - F(0, Y) \} \in \mathcal{K}(\sigma^I) \quad . \quad (B.26)$$

$\Gamma(0)=0$ ist klar. (B.21) ist äquivalent zu

$$\left(\frac{df}{d\tau}(\tau_2) - \frac{df}{d\tau}(\tau_1) \right) \cdot (\tau_2 - \tau_1) \geq 0 \quad , \quad (B.27)$$

d.h. im vorliegenden Fall

$$\left((\sigma_2^I - Y) - (\sigma_1^I - Y) \right) \cdot (\sigma_2^I - \sigma_1^I) = (\sigma_2^I - \sigma_1^I) \cdot (\sigma_2^I - \sigma_1^I) \stackrel{!}{\geq} 0 \quad .$$

Es bleibt also nur zu zeigen, daß Γ nichtnegativ ist. Nach Konstruktion ist im plastischen Zustand $F \geq 0$ und $F(0, Y) < 0$ solange die Fließfläche den Ursprung umschließt. Daraus folgt $\Gamma \geq 0$. In Verbindung mit (B.25) entsteht

$$\dot{\epsilon}_1 = [\gamma] (\sigma^I - Y) \quad .$$

Es sei nochmals betont, daß (B.25) nur hinreichend ist. Die Theorie der generalized standard materials geht sogar noch weiter und postuliert, daß alle Fließregeln und Evolutionsgesetze aus einem einzigen Potential Γ abgeleitet werden können. Gegenbeispiele zu diesem Postulat findet man bei *Onat & Leckie* [160].

B1.2. Identifikation der inneren Variablen und Prozeßvariablen der Damage-Theorie für Hochgeschwindigkeitsdeformationen

B1.2.1. Einführung der Mikrofelder

I) Einleitung

I) Die weitere Vorgehensweise ist in Fig.B.1 veranschaulicht. Das RVE ist ein Polykristall (o.E. als Würfel eingezeichnet) mit Mittelpunkt \mathbf{x} und lokalen Koordinaten $\mathbf{y} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$. ΔV enthält eine endliche Anzahl von MiSBs S_α und anderen 3D - Gitterfehlern C_γ (z.B. Inklusionen). Wir nehmen idealisierend an, daß diese Defekte einzelnen Punkten $\mathbf{y}_\alpha \in \Delta V$ zugeordnet werden können.

II) Die Scherbänder werden durch Ebenen angenähert und charakterisiert durch Fläche δA_α , Normale \mathbf{e}_α und lokale Scherrate \mathbf{L}_α ; \mathbf{L}_α ist der Geschwindigkeitsgradient einer einfachen Scherung. Andere Parameter wie die Scherbanddicke werden für das Damage-Maß als irrelevant angesehen.

III) Jedem Scherband und jedem anderen 3D -Gitterfehler werden Spannungskonzentrationen $\Delta \sigma_\alpha$, Temperaturerhöhungen $\Delta \theta_\alpha$ usw. zugeordnet (näheres unter III)), so daß das Verhalten in ΔV beschrieben wird als Überlagerung quasihomogener Felder mit lokalen Störungen. In ΔV erklärte Felder werden als Mikrofelder bezeichnet und durch den Index m markiert.

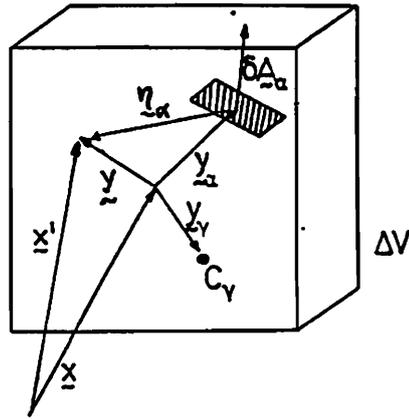
IV) Es erfolgt eine Mittelwertbildung, wobei die Mittelwerte der quasihomogenen Anteile das versetzungsinduzierte (viskoplastische) Verhalten von ΔV beschreiben, die Mittelwerte der lokalen Störungen hingegen die Schädigung charakterisieren. Die beiden Zweige der Materialbeschreibung hängen über die Kinematik (Zerlegung der Verzerrungsrate) und die Thermodynamik zusammen. Ansätze für die so eingeführten Variablen werden dann in Kap.B1.3. besprochen.

II) Bemerkungen zur Homogenisierung

I) Nach Folgerung iii) aus Kap.A.7 ist es erforderlich, Informationen über die "weak spots" in die Kontinuumstheorie einzubeziehen. Im Prinzip ist dies möglich durch Anwendung von Homogenisierungsmethoden, wie sie für Composites entwickelt wurden, unter einschränkenden Annahmen auch für inelastisches Verhalten, [92],[121],[125]. Dies bedeutet, daß man exakte Lösungen oder Näherungen für die Mikrofelder im Innern von ΔV bestimmt und dann den Mittelwert

$$H(\mathbf{x}) := \langle H_m(\mathbf{x}') \rangle(\mathbf{x}) := \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V(\mathbf{x})} H_m(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}', \Delta V) dV' \quad (\text{B.28})$$

berechnet; H_m ist dabei irgendein Mikrofeld. Für das Integrationsgebiet und sein Maß wurde zur Abkürzung jeweils ΔV geschrieben. $f(\mathbf{x}', \Delta V)$ ist eine nichtnegative ΔV -periodische Funktion mit den Eigenschaften aus (B.29):



$$\underline{x}' = \underline{x} + \underline{y}$$

$$\underline{x}'_\alpha = \underline{x} + \underline{y}_\alpha$$

$$\eta_\alpha = \underline{y} - \underline{y}_\alpha$$

$$\begin{aligned} \sigma_m(\underline{y}) &= \sigma_{qhom}(\underline{y}) + \sum_\alpha \Delta \sigma_\alpha(\underline{y}) \\ \Theta_m(\underline{y}) &= \Theta_{qhom}(\underline{y}) + \sum_\alpha \Delta \Theta_\alpha(\underline{y}) \\ Z_m(\underline{y}) &= \sum_\alpha \delta A_\alpha \mathbf{e}_\alpha * \mathbf{e}_\alpha \delta(\underline{y} - \underline{y}_\alpha) \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Homogenisierung

Viskoplastizitätstheorie
versetzungsinduzierter Prozesse
 mit kinematischer, isotroper Verfestigung

$$\sigma \approx \langle \sigma_{qhom} \rangle$$

$$\dot{\epsilon}_v \approx \langle \dot{\epsilon}_{v,qhom} \rangle$$

Damage-Theorie

$$\sigma^0 = \langle \sum \Delta \sigma_\alpha \rangle + \dots$$

$$Z^0 = \langle Z_m \rangle + \dots$$

$$\dot{\epsilon}_o^0 = \text{sym} \langle \sum L_\alpha \rangle + \dots$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_R + \dot{\epsilon}_v + \dot{\epsilon}_o^0$$

$$g = \hat{g}(\sigma, \Theta; \sigma^0, Z^0, \dots, \kappa, \dots)$$

Fig.B.1

$$\int_{\Delta V} f(\mathbf{x}', \Delta V) dV' = \Delta V \quad , \quad f(\mathbf{y}) = f(|\mathbf{y}|) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial |\mathbf{y}|} \leq 0 \quad , \quad f(\mathbf{y} = \mathbf{0}, \cdot) \geq 1 \quad . \quad (\text{B.29})$$

Im einfachsten Fall benutzt man $f \equiv 1$. (B.30)

Dies trifft auch auf die oben zitierten Arbeiten zu. Wir wollen nun unter ii) und iii) erläutern, warum wir nicht den in [92],[121],[125] eingeschlagenen Weg verfolgen.

ii) Zur Bestimmung der Mikrofelder ist die Kenntnis von Randbedingungen erforderlich. Bislang wurden zwei Arten von Randbedingungen erfolgreich untersucht (siehe z.B. [125]):

- Periodizitätsbedingungen für periodisch inhomogene Körper.
- Bzgl. \mathbf{y} homogene Randbedingungen für $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ oder $\boldsymbol{\sigma}_m$.

Diese Voraussetzungen sind bei MiSB-Verteilungen nicht erfüllt: Die MiSBs sind nicht periodisch angeordnet und der zweiten Bedingung wäre allenfalls bei kleinen MiSB-Dichten genüge getan.

iii) Nach Ermittlung der Mikrofelder sollen diese der sog. *Mandel* 'schen Makrohomogenisierungsbedingung genügen. Diese Bedingung läßt sich nur für vernachlässigbare Trägheitskräfte herleiten [125].

iv) Zur Umgehung dieser Probleme gehen wir wie folgt vor:

- Die Mikrofelder werden a priori eingeführt
- Es wird eine gewichtete Mittelwertbildung benutzt.

Die erste Einschränkung ist sinnvoll, weil wir bereits die Geometrie des Volumenelementes stark idealisiert haben, indem wir z.B. Scherbänder diskreten Orten \mathbf{y}_α zuordneten. Tatsächlich bilden MiSBs, Inklusionen usw. endliche Bereiche $\hat{\Delta V}_\alpha \subset \Delta V$ und nur in einem derart modellierten Volumenelement könnte man exakte Mikrofelder $\boldsymbol{\sigma}_m^{*akt}$, Θ_m^{*akt} usw. einführen, die den lokalen Bilanzgleichungen und Randbedingungen genügen. Obwohl also $\boldsymbol{\sigma}_m^{*akt}$, ... nicht bekannt sind, läßt sich doch erwarten, daß sie in einen quasihomogenen Anteil und in Beiträge lokaler Störungen an 3D Gitterfehlern aufgespalten werden können und nur auf diese Eigenschaft kommt es an. In dem idealisierten Volumenelement beschreiben wir dies durch

$$\boxed{H_m(\mathbf{x}') = H_{qhom}(\mathbf{x}') + \sum_{\alpha} \Delta H_{\alpha}(\mathbf{x}')} \quad , \quad (\text{B.31})$$

wobei H_m für irgendeines der Mikrofelder $\boldsymbol{\sigma}_m$, Θ_m , ... steht. In welchem Sinne H_m dabei eine Approximation von H_m^{*akt} darstellt, muß offenbleiben. Die gewichtete Mittelwertbildung wurde in erster Linie eingeführt, um das Ergebnis der Mittelung irgendwelcher Mikrofelder in der Form (B.42) schreiben zu können; hinsichtlich der

Berechnung der Mikrofelder selbst hat die Wichtungsfunktion die angenehme Eigenschaft, daß Randbedingungen auf $\partial \Delta V$ einen geringeren Einfluß haben als bei ungewichteter Mittelung.

III) Eigenschaften der Mikrofelder H_m , Mittelwert von H_m

I) Um auszudrücken, daß ΔH_α nur auf einer kleinen Umgebung von y_α nicht verschwindet, führen wir den Vektor η_α ein, siehe Fig.B.1. und setzen

$$\Delta H_\alpha(x', t) = \Delta \hat{H}_\alpha(t) s_\alpha(\eta_\alpha) \quad \eta_\alpha = x' - x'_\alpha, \quad (B.32)$$

wobei $s_\alpha(\cdot)$ mit $s_\alpha(0) = 1$ eine rasch mit $|\eta_\alpha|$ abklingende Funktion sei.

II) Mit (B.28) ergibt sich für den Mittelwert

$$H = H_1 + \sum \frac{\Delta \hat{H}_\alpha}{\Delta V} \int_{\Delta V_\alpha} s_\alpha(x' - x'_\alpha) f(x') dV' \quad (B.33)$$

Dabei ist $H_1 := \langle H_{qhom} \rangle$ und ΔV_α ist der Träger von $s_\alpha(\cdot)$. Mit den Bezeichnungen aus Fig.B.1 können wir für das Integral auch

$$\int_{\Delta V_\alpha} s_\alpha(y - y_\alpha) f(x + y) dV_y$$

schreiben; mit dem Mittelwertsatz (für eine Zwischenstelle $\xi_\alpha \in \Delta V_\alpha$) entsteht

$$\Delta V_\alpha s_\alpha(\xi_\alpha - y_\alpha) f(x + \xi_\alpha) .$$

Ist ΔV_α klein genug, so kann man näherungsweise $\xi_\alpha \approx y_\alpha$ (B.34)

setzen und findet den Wert $\Delta V_\alpha f(x + y_\alpha)$ für das Integral. Insgesamt ergibt sich

$$H = H_1 + \sum \frac{\Delta V_\alpha}{\Delta V} \Delta \hat{H}_\alpha f(x + y_\alpha) . \quad (B.35)$$

III) (B.35) ist sogleich Ausgangspunkt für eine Reihenentwicklung von f bzgl. y_α und eine daraus abgeleitete Darstellung von H . Es ist jedoch nützlich, die in (B.34) ausgedrückte Eigenschaft der geringen Ausdehnung von ΔV_α gleich im Ansatz für $H_m(x')$ zu erfassen. Dies geschieht durch

$$H_m(x') = H_{qhom}(x') + \sum \frac{\Delta V_\alpha}{\Delta V} \Delta \hat{H}_\alpha \delta(x' - x'_\alpha) \quad (B.36)$$

mit der dem Volumen ΔV_α zugeordneten δ -Funktion. Die Anwendung des Mittelwertoperators $\langle \rangle$ auf (B.36) liefert wieder (B.35).

IV) Einführung der Mikrofelder in ΔV

Für Spannung, Temperatur, Versetzungsdichte, Wärmefluß, versetzungsinduzierte

Verzerrung etc, kurz gesagt also für diejenigen externen Variablen, inneren Variablen und Prozeßvariablen, die auch zur Beschreibung des ungeschädigten Körpers benötigt werden, werden Ansätze der Form (B.36) eingeführt. Es gelte also

$$\begin{aligned}
 \sigma_m &= \sigma_{qhom} + \sum \frac{\Delta V_\alpha}{\Delta V} \Delta \sigma_\alpha \delta(x' - x'_\alpha) \\
 \Theta_m &= \Theta_{qhom} + \sum \frac{\Delta V_\alpha}{\Delta V} \Delta \Theta_\alpha \delta(x' - x'_\alpha) \\
 &\vdots \\
 \varepsilon_{v,m} &= \varepsilon_{v,qhom} + \sum \frac{\Delta V_\alpha}{\Delta V} \Delta \varepsilon_{v,\alpha} \delta(x' - x'_\alpha)
 \end{aligned}
 \tag{B.37}$$

IV) Mikrofelder zur Beschreibung der Materialschädigung durch MiSBs

I) Der (Mikro-) Damage-Tensor Z_m

Die Einführung des Schädigungsmaßes in ΔV orientiert sich an folgenden Forderungen:

- Z_m enthält Information über Scherbandgröße und Scherbandorientierung
- Z_m ist invariant unter $e_\alpha \rightarrow -e_\alpha$
- Die in (B.38) definierte Größe ζ läßt sich durch Z_m abschätzen.

Sei
$$\zeta(x, n) := \sum_{I_{\Delta A}} \frac{\delta A_\alpha}{\Delta A} |e_\alpha \cdot n|
 \tag{B.38}$$

$\zeta(x, n) \Delta A$ ist die Fläche der Projektion der MiSB-Flächen auf eine in ΔV enthaltene Ebene $\Delta A n$. $I_{\Delta A}$ ist die Indexmenge der $\Delta A n$ schneidenden MiSBs. Die Größe ζ ist experimentell bestimmbar.

Zur Erfüllung der obigen Forderungen setzen wir

$$Z_m(x', t) = \sum_{I_{SB}(t)} \delta A_\alpha(t) e_\alpha * e_\alpha \delta(x' - x'_\alpha)
 \tag{B.39}$$

Offenbar sind die ersten beiden Forderungen erfüllt. In Anhang I wird überdies gezeigt, daß man aus Z_m Schranken für ζ berechnen kann.

II) Die damageinduzierte Verzerrungsrate

Da nur Schädigung durch MiSBs berücksichtigt wird, ist $\varepsilon_{d,m} \equiv \varepsilon_{sb,m}$. Wir setzen

$$\dot{\varepsilon}_{d,m}(x', t) = \text{sym} \left(\sum_{I_{SB}(t)} \dot{\gamma}_\alpha v_\alpha * e_\alpha \delta(x' - x'_\alpha) \right)
 \tag{B.40}$$

mit der lokalen Scherrate $\dot{\gamma}_\alpha$, der Scherrichtung v_α und $L_\alpha = \dot{\gamma}_\alpha v_\alpha * e_\alpha$.

B 1.2.2. Durchführung der Mittelwertbildung, Kontinuumstheorien j-ter Ordnung

I) Wir untersuchen zuerst wieder das repräsentative skalarwertige Feld H_m . Die weitere Vorgehensweise besteht darin, die rechte Seite von (B.35) in eine Taylorreihe zu entwickeln und die Summanden ihrerseits als Mittelwerte über ΔV zu schreiben. Die Summanden lassen sich dann als Momente von H_m bzgl. $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ interpretieren. Diese Art der Mittelwertbildung scheint in der Kontinuumsmechanik neu zu sein; sie ist aber bekannt aus der Kontinuumselktrodynamik [127] als Multipolentwicklung der Maxwell-Gleichungen.

II) Aus (B.35) entsteht mit der Abkürzung $h_\alpha := \Delta V_\alpha \Delta \hat{H}_\alpha / \Delta V$:

$$H = H_1 + \sum h_\alpha f(\mathbf{x}) + \sum h_\alpha (\text{grad}_x f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}_\alpha + \dots \quad (\text{B.41})$$

Wie man leicht bestätigt, kann man dies auch als

$$H = H_1 + H^0 + \text{div } H^1 + \dots \quad (\text{B.42})$$

schreiben mit

$$\begin{aligned} H^0 &= \sum \frac{\Delta V_\alpha}{\Delta V} \Delta \hat{H}_\alpha f(\mathbf{x}) = \langle \sum \Delta V_\alpha \Delta \hat{H}_\alpha \delta(\mathbf{y}) \rangle \\ H^1 &= \dots = \langle \sum \Delta V_\alpha \Delta \hat{H}_\alpha \mathbf{y}_\alpha \delta(\mathbf{y}) \rangle \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

als Momenten j-ter Ordnung. Diese Momente sind Mittelwerte über ΔV und damit zulässige Variable einer Kontinuumstheorie. Die gewichtete Mittelwertbildung bietet mithin eine Reihe von Vorteilen:

- Die Reihenentwicklung wird durch die Wichtungsfunktion überhaupt erst möglich.
- Die eingeführten Variablen H^0, H^1, \dots lassen sich mikromechanisch interpretieren, zumal aus der Untersuchung isolierter Defekte oft Abschätzungen für ΔV_α und $\Delta \hat{H}_\alpha$ bekannt sind.
- Durch Hinzunahme weiterer Summanden läßt sich die Genauigkeit systematisch verbessern. Für den Betrag zweier aufeinanderfolgender Summanden gilt die Abschätzung

$$\mathcal{O} \left(\frac{\| \text{div } H^{j+1} \|}{\| H^j \|} \right) = \sqrt[3]{\Delta V} / L_{\bullet, xi} \ll 1 \quad (\text{B.44})$$

III) I) Die entsprechenden Operationen werden nun auch mit den Feldern (B.37) durchgeführt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sigma &= \langle \sigma_{\text{qhom}} \rangle + \sigma^0 + \text{div } \sigma^1 + \dots \\ \Theta &= \langle \Theta_{\text{qhom}} \rangle + \Theta^0 + \text{div } \Theta^1 + \dots \\ &\vdots \\ \dot{\epsilon}_v &= \langle \dot{\epsilon}_{v,\text{qhom}} \rangle + \dot{\epsilon}_v^0 + \text{div } \dot{\epsilon}_v^1 + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Eine besondere Bezeichnung verdient

$$\sigma^0 = \sum \frac{\Delta V_\alpha}{\Delta V} \Delta \hat{\sigma}_\alpha f(x) = \langle \sum \Delta V_\alpha \Delta \hat{\sigma}_\alpha \delta(y) \rangle \quad (\text{B.46})$$

Diese Größe bezeichnen wir als Spannungskonzentrationstensor. Θ^0 kann analog als Temperaturkonzentration bezeichnet werden. $\dot{\epsilon}_v^0$ ist ein Maß für die lokale Versetzungsbewegung in der Umgebung von Spannungskonzentrationen.

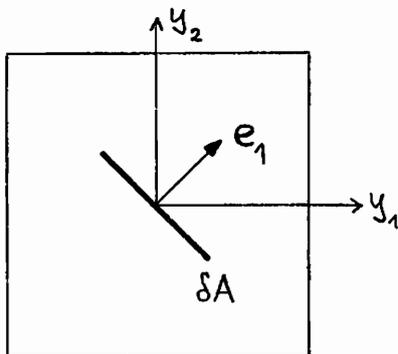
ii) Aus (B.39,40) erhält man

$$\begin{aligned} Z &= Z^0 + \text{div } Z^1 + \dots \\ \dot{\epsilon}_D &= \dot{\epsilon}_D^0 + \text{div } \dot{\epsilon}_D^1 + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Zur Veranschaulichung seien auch die Momente Z^0, Z^1 nochmals angegeben:

$$\begin{aligned} Z^0 &= \sum \frac{\delta A_\alpha}{\Delta V} \mathbf{e}_\alpha * \mathbf{e}_\alpha f(x) = \langle \sum \delta A_\alpha \mathbf{e}_\alpha * \mathbf{e}_\alpha \delta(y) \rangle \\ Z^1 &= \dots = \langle \sum \delta A_\alpha \mathbf{e}_\alpha * \mathbf{e}_\alpha * y_\alpha \delta(y) \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

iii) Beispiel für Z^0, Z^1 : Fig.B.2.a zeigt einen Scherband-Monopol. Hierfür gilt:



$$Z_m = \delta A \mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_1 \delta(y)$$

und

$$Z^0 = \langle \delta A \mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_1 \delta(y) \rangle$$

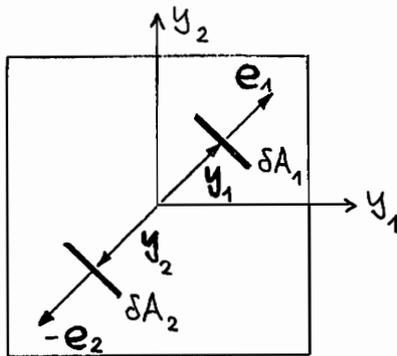
$$Z^j = 0 \quad \text{für } j=1,2,\dots$$

Fig. B.2.a.

Ein Scherband-„Dipol“ ist in Fig.B.2.b. dargestellt (die Bezeichnung „Dipol“ ist eigentlich unzutreffend, weil es kein Vorzeichen der Scherbänder gibt). Hier gilt

$$Z_m(y) = \delta A_1 \mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_1 \delta(y - y_1) + \delta A_2 \mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_1 \delta(y + y_1)$$

wegen $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, $y_1 = -y_2$. Ist zunächst $\delta A_1 \neq \delta A_2$, so sind



$$Z^0 = \langle (\delta A_1 + \delta A_2) \mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_1 \delta(y) \rangle$$

$$Z^1 = \langle (\delta A_1 - \delta A_2) \mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_1 * y_1 \delta(y) \rangle$$

beide von $\mathbf{0}$ verschieden.

Fig. B.2.b.

Für $\delta A_1 = \delta A_2 = 1/2 \delta A$ können wir folgern:

- Z^0 hat für die in Fig.B.2.a.,b. skizzierten Scherbandverteilungen identische Werte.
- Will man zwischen diesen beiden Konfigurationen unterscheiden, so braucht man eine Theorie 2-ter Ordnung, da auch Z^1 in beiden Fällen verschwindet.

B 1.2.3. Damage - Variable in einer Theorie nullter Ordnung

I) (B.44) legt den Versuch nahe, eine Theorie nur unter Berücksichtigung der Momente nullter Ordnung zu formulieren. Neben den „eigentlichen“ Damage-Variablen Z^0 und $\dot{\mathbf{e}}_0^0$ sind dann auch die Momente nullter Ordnung der anderen Mikrofelder als innere oder Prozeß-Variablen der Damage-Theorie anzusehen. Wir benötigen strenggenommen nur diejenigen Variablen, die zur Beschreibung der in Kap.A.1.3, Abschnitt II) geschilderten Effekte notwendig sind. Wir brauchen also ein Maß für lokale Spannungs- und Temperaturerhöhung und für lokale Versetzungsbewegung. Verfestigungseffekte bei dieser lokalen Versetzungsbewegung oder lokale Wärmeleitung (zu beschreiben durch N^0 bzw. \mathbf{q}^0) werden als unerheblich angesehen. Wir treffen deshalb

Annahme 1: Die Schädigungsmechanismen werden makroskopisch durch Z^0 , $\dot{\mathbf{e}}_0^0$, σ^0 , Θ^0 , $\mathbf{\varepsilon}_v^0$ beschrieben.

II) Abschätzung der Größenordnung von $\langle \sigma_{qhom} \rangle$, σ^0 :

i) Wir wollen zeigen, daß

$$\| \langle \sigma_{qhom} \rangle \| \gg \| \sigma^0 \| \quad \text{gilt trotz} \quad \| \sigma_{qhom} \| \ll \| \Delta \sigma_\alpha \| . \quad (B.49)$$

Zum Beweis gehen wir aus von der Darstellung (B.46). Da $f(\mathbf{x}) = O(1)$ ist, folgt

$$\|\sigma^0\| \approx n_{\text{MiSB}} \Delta V_{\text{MiSB}} \tau_c \quad (\text{B.50})$$

wenn wir $\|\Delta\sigma_\alpha\|$ nach oben durch die theoretische Festigkeit $\tau_c \approx G/20$ abschätzen. ΔV_{MiSB} ist das Volumen in der Umgebung des Scherbandrandes, in dem die Spannungskonzentrationen auftreten. ΔV_{MiSB} besteht aus einer schlauchförmigen Umgebung des MiSB-Randes. Für ein penny-shape MiSB mit Durchmesser $2R$ und Schlauchradius r_0 wird $\Delta V_{\text{MiSB}} = 2\pi R \cdot \pi r_0^2$. Typische Werte für R können aus den Daten des SRI abgelesen werden; wir wählen $R = 10\mu\text{m}$. In Anhang 4 wird gezeigt, daß sich die Spannungen in der Nähe eines Scherbandes wie $r^{-1/2}$ verhalten, es tritt also die gleiche Singularität auf wie bei Rissen. Es gilt also $\sigma(r) \sim \sigma_f \sqrt{\pi R/r}$. Für $r = r_0$ sei $\|\Delta\sigma_\alpha\|$ auf den Wert σ_f der Fließspannung in den quasihomogen verformten Bereichen von ΔV abgeklungen, d.h. $r_0 = \pi R$. Somit wird

$$\Delta V_{\text{MiSB}} \approx 2\pi^4 R^3 \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ m}^3 \quad (\text{B.51})$$

Ferner sei $n_{\text{MiSB}} \approx 10^3 \text{ cm}^{-3}$ und $G \approx 10^3 \sigma_f$. Damit wird tatsächlich

$$\|\sigma^0\| \approx \frac{\sigma_f}{100} \ll \sigma_f \approx \|\langle \sigma_{\text{qhom}} \rangle\| \quad (\text{B.52})$$

II) Zu (B.49) analoge Abschätzungen lassen sich auch für $\Theta, \dot{\epsilon}_v$ durchführen. Die lokalen Störungen haben also für die Scherbänder die gleiche Bedeutung wie die Spannungsspitzen im Versetzungskern für die Versetzungen: Die lokalen Störungen entscheiden über das Verhalten der Gitterdefekte, liefern jedoch zur Mittelwertbildung nur einen vernachlässigbaren Beitrag. Insbesondere kann man σ^0 usw. in der Summe gegen $\langle \sigma_{\text{qhom}} \rangle$ usw. vernachlässigen:

$$\sigma \approx \langle \sigma_{\text{qhom}} \rangle, \quad \Theta \approx \langle \Theta_{\text{qhom}} \rangle, \quad \dot{\epsilon}_v \approx \langle \dot{\epsilon}_{v,\text{qhom}} \rangle \quad (\text{B.53})$$

Die Gleichungen der versetzungsinduzierten Prozesse können also mit σ, Θ usw. formuliert werden statt, wie es korrekt wäre, mit $\langle \sigma_{\text{qhom}} \rangle, \langle \Theta_{\text{qhom}} \rangle$ usw. (B.53) bedeutet natürlich nicht, daß die nullten Momente generell vernachlässigt werden: Wo es wie bei den Damage-Variablen keine quasihomogenen Anteile gibt, stellen Beziehungen zwischen den Momenten nullter Ordnung und deren Raten die einfachste Stufe der Materialbeschreibung dar. Mit der Näherung (B.53) lautet die additive Zerlegung der Verzerrungsrate

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_v + \dot{\epsilon}_d^0 \quad (\text{B.54})$$

III) Es gilt zu klären, welche der in Annahme I genannten Variablen innere Variablen bzw. Prozeßvariablen sind. Es ist klar, daß es sich bei ϵ_d^0 und ϵ_v^0 um Prozeßvariablen handelt. Ferner hängt die Enthalpie von σ, Θ ab, so daß eine zusätzliche Abhängigkeit von σ^0, Θ^0 sinnvoll erscheint. Welche Bedeutung aber hat Z^0 ? Zunächst beeinflussen alle denkbaren Mikrodefekte die Energiebilanz eines Körpers durch die in ihren Eigenspannungsfeldern gespeicherte elastische Energie, aber

soweit es die Umgebung dieser Mikrodefekte betrifft, sind diese Effekte ja schon in σ^0 und Θ^0 berücksichtigt. Darüberhinaus wird aber auch in der in Scherbändern enthaltenen Materie Energie gespeichert und man beobachtet Prozesse wie Phasenübergänge oder eine lokale Zunahme der Versetzungsdichte. Diese Effekte werden durch σ^0 , Θ^0 aber nicht erfaßt. Sie sind voraussichtlich proportional zur Schädigung und in diesem Sinne beeinflußt auch Z^0 die innere Energie, ist also eine innere Variable.

B 1.2.4. Innere Variable und Prozeßvariable zur Beschreibung der Versetzungsmechanismen

I) Einleitung

Von zentraler Bedeutung ist die Forderung (A.17), wonach sich die versetzungsinduzierte Verzerrungsrate zu allen Zeiten aus athermischer und thermisch aktivierter Versetzungsbewegung zusammensetzen soll:

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{va} + \dot{\epsilon}_{vt} \quad \forall t \quad (B.55)$$

Ergänzt wird (B.55) durch die Forderungen (A.18,19) über den Grenzübergang zu extrem langsamen Prozessen bzw. zu Prozessen mit moderater und höherer Prozeßgeschwindigkeit. Unter II) wird nun ein Maß u für die Prozeßgeschwindigkeit PG eingeführt, welches selbst aber keine Rate ist. Damit ist es möglich, durch eine geeignete Abhängigkeit der Fließregeln für ϵ_{va} , ϵ_{vt} von u auch

$$\dot{\epsilon}_v \approx \dot{\epsilon}_{va} \text{ für kleine PG} \quad , \quad \dot{\epsilon}_v \approx \dot{\epsilon}_{vt} \text{ für große PG} \quad (B.56)$$

zu erreichen. Im Fall (B.56)₁ soll eine g.u. Fließregel mit isotroper und kinematischer Verfestigung gelten; im Fall (B.56)₂ hingegen soll $\dot{\epsilon}_v$ zu einer g.a. Fließregel mit ebenfalls isotroper und kinematischer Verfestigung streben. Ein Weg zur Realisierung besteht darin, isotrope Verfestigung in beiden Fällen durch die Versetzungsdichte zu beschreiben und jeder Fließregel eine eigene kinematische Verfestigung zuzuordnen. Dieses vielleicht etwas gewöhnungsbedürftige Konzept wird in III) erläutert.

II) Ein Maß für die Prozeßgeschwindigkeit

I) Der Begriff der Prozeßgeschwindigkeit kennzeichnet Versuchsbedingungen. Eine einfache Definition wäre z.B.

$$PG = \|\dot{\epsilon}\|$$

oder zwecks Einbeziehung nichtisothermer Prozesse

$$PG = \|\dot{\epsilon}\| + \chi_{u1} \dot{\Theta} \quad , \quad \chi_{u1} = \text{konst.} > 0 \quad (B.57)$$

Durch (B.57) wird eine Erwärmung als Prozeßbeschleunigung interpretiert. (B.57) bedarf noch einer Korrektur, um negative Prozeßgeschwindigkeiten beim Abkühlen auszuschließen:

$$PG = \max \{ 0, \|\dot{\epsilon}\| + \chi_{u_i} \dot{\Theta} \} \quad (B.58)$$

Eine Alternative wäre es, $\|\dot{\epsilon}\|$ durch $\max |\dot{\epsilon}_k|$ zu ersetzen; $\dot{\epsilon}_k$ sind die Eigenwerte von $\dot{\epsilon}$. Der Unterschied zwischen den beiden möglichen Definitionen ist gering.

II) $\dot{\epsilon}$, $\dot{\Theta}$ und damit PG dürfen nicht selbst in Materialfunktionen auftreten; dies wäre ein Verstoß gegen die Postulate 1 und 2. Damit PG aber sinnvoll durch u ersetzt werden kann, muß die Gleichung für u folgenden Bedingungen genügen:

- für $PG = PG_0 = \text{konst.}$ existiert ein eindeutiger Zusammenhang

$$u = u_{\epsilon q}(PG_0) \quad (B.59)$$

wodurch der Gleichgewichtswert für u definiert wird.

- Approximieren wir beliebige $PG(t)$ durch Treppenfunktionen, d.h. $PG(t) = PG_k$ für $t_k \leq t \leq t_{k+1} = t_k + \Delta t_k$, so soll die Relaxationszeit von u bei allen in Frage kommenden Prozessen klein gegen Δt_k sein.

III) Die in Kap.A.1.2. zitierten Versuche von *Shioiri et al.* ([58]-[60]) legen die Definition

$$u = \frac{N_{mob}}{N} \in [u_{\infty}, u_0] \quad (B.60)$$

nahe. Dabei ist $u_0 = 10^{-2}$ (B.61)

nach [70] der Gleichgewichtswert für langsame Prozesse. Nach [61] kann man

$$u_{\infty} = 10^{-3} \quad (B.62)$$

für Prozesse mit Dehnungsraten um 10^4 sec^{-1} erwarten. u ist eine Prozeßvariable, da N_{mob} eine solche Variable ist.

III) Innere Variable zur Beschreibung der Versetzungsmechanismen

i) Isotrope Verfestigung läßt sich mit der Zunahme der Versetzungsdichte begründen. In phänomenologischen Theorien ist aber die Verwendung der inelastischen Arbeit zur Beschreibung isotroper Verfestigung üblich. (A.13) läßt eine Möglichkeit erkennen, beide Betrachtungsweisen unter einen Hut zu bringen: Bezeichnen wir die plastische Arbeit mit χ , so ist

$$\chi = \alpha_x N \quad (B.63)$$

für bestimmte Prozesse. Mit bekannten Zahlenwerten für α_* , N wird

$$10^2 \text{ Nm}^{-2} \leq \kappa \leq 10^9 \text{ Nm}^{-2} =: \kappa_{\max} \quad (\text{B.64})$$

Wir werden auch κ wieder als Versetzungsdichte bezeichnen. Die Anfangsversetzungsdichte N_0 bestimmt gemäß

$$\kappa_0 = \alpha_* N_0 \quad (\text{B.65})$$

den Anfangswert von κ . Im Rahmen der Diskussion von Evolutionsgesetzen werden wir im nächsten Kapitel die Gleichung für $\dot{\kappa}$ so verallgemeinern, daß auch Erholungseffekte infolge Annihilation wiedergegeben werden können.

II) Anisotrope Verfestigung

Wir erinnern zunächst daran, daß sich die versetzungsinduzierte Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_v$ als Mittelwert von $\dot{\epsilon}_{v,m}$ ergibt. Bezeichnen wir mit ΔV_A bzw. ΔV_T diejenigen Teilvolumina von ΔV , in denen zufolge lokaler Spannungs- und Temperaturwerte athermische bzw. thermisch aktivierte Versetzungsbewegung dominiert, so gilt

$$\dot{\epsilon}_{v_A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V_A} \dot{\epsilon}_{v,m}(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}') dV', \quad \dot{\epsilon}_{v_T}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V_T} \dot{\epsilon}_{v,m}(\mathbf{x}') f(\mathbf{x}') dV' \quad (\text{B.66})$$

Wir wollen nun kinematische Verfestigungstensoren X_A, X_T als Integrale über $\Delta V_A, \Delta V_T$ einführen. Die kinematische Verfestigung ist die mikromechanisch unanschaulichste Variable, sofern man sie wie hier zur Beschreibung des Bauschinger-Effekts im Polykristall einführt (der Bauschinger-Effekt im Einkristall läßt sich hingegen gut im Rahmen der Orowan-Kinematik deuten, z.B. [37]). In Anhang 5 aus [3] wurde motiviert, daß unter der Bedingung athermischen Versetzungsgleitens der Tensor

$$\xi := \langle \sigma_m^2 - \sigma^2 \rangle^{1/2} \quad (\text{B.67})$$

also eine tensorwertige Varianz des Mikrospannungsfeldes, die wichtigsten Eigenschaften eines kinematischen Verfestigungstensors besitzt, nämlich

- $\dot{\xi} = 0$ im elastischen Bereich
- $\dot{\xi} \neq 0$ infolge der Versetzungsbewegung
- $\xi \neq 0$ ist hinreichend für das Auftreten eines Bauschinger-Effekts.

Der durch (B.67) definierte Tensor läßt sich aber nicht als Mittelwert eines Mikrofeldes ξ_m darstellen. Nun ist leicht einzusehen, daß auch der Tensor

$$X := \langle X_m \rangle \quad \text{mit} \quad X_m = \frac{1}{\sigma_f} \{ \sigma_m^2 - \sigma^2 \} \quad (\text{B.68})$$

die erwähnten drei Eigenschaften hat. O.B.d.A. wurde σ_f als Bezugsgröße definiert. Mit (B.68) können nun Restriktionen von X_m auf $\Delta V_A, \Delta V_T$ definiert werden. Wir setzen also

$$X_j := \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V_j} \frac{1}{\sigma_f} \{ \sigma_m^2(x') - \sigma^2 \} f(x') dV' \quad j = A, T \quad (B.69)$$

Die so definierten X_A, X_T werden als kinematische Verfestigungstensoren zu $\dot{\epsilon}_{vA}$ und $\dot{\epsilon}_{vT}$ angesehen.

III) x, X_A, X_T sind innere Variable, $\epsilon_{vA}, \epsilon_{vT}, u$ sind Prozeßvariablen.

B1.2.5. Innere Variable zur Beschreibung der Wärmeleitung

I) Die Maxwell-Cattaneo-Gleichung

I) Die Verwendung der Fourier'schen Wärmeleitungsgleichung $q = -k g$ ($g = \text{grad } \Theta$) führt auf eine parabolische Gleichung für Θ , verstößt also gegen Postulat 1. Dieser Gleichung zufolge würden sich lokal aufgebrachte Temperaturstörungen unendlich schnell ausbreiten. Die einfachste Erweiterung zu einem hyperbolischen System geschieht durch die Maxwell-Cattaneo-Gleichung

$$\tau_q \dot{q} + q = -k g \quad (B.70)$$

τ_q heißt thermische Relaxationszeit und mißt die Geschwindigkeit, mit der ein stationärer Wärmestrom aufgebaut wird. Für $\tau_q \rightarrow 0$ ergibt sich das Fourier'sche Gesetz. (B.70) ist äquivalent zu

$$q(t) = -\frac{k}{\tau_q} \int_0^\infty e^{-s/\tau_q} g(t-s) ds \quad (B.71)$$

II) Wir führen eine vektorwertige innere Variable α_q ein und wählen deren Evolutionsgesetz und ihren Beitrag zur Enthalpie so, daß aus der CDU das Ergebnis (B.70) abgeleitet werden kann. In [128] wird gezeigt, daß dies durch die Evolutionsgleichung

$$\dot{\alpha}_q = g - \frac{1}{\tau_q} \alpha_q \quad (B.72)$$

sowie durch den Beitrag $q_0(\alpha_q, \Theta) = -\frac{1}{2} \frac{k}{\rho \tau_q \Theta} \alpha_q \cdot \alpha_q$ (B.73)

zur Enthalpie möglich ist.

II) Zusammenfassung von Kapitel B1.2.:

I) Wir benötigen zur Materialbeschreibung

- Fließregeln für $\varepsilon_{VA}, \varepsilon_{VT}, \varepsilon_D^0$
- Evolutionsgesetze für $u, x, X_A, X_T, Z^0, \sigma^0, \Theta^0, \varepsilon_V^0, \alpha_q$
- Einen Ansatz für die Enthalpie g , aus dem die reversible Verzerrung ε_r und die Entropie η abgeleitet werden.

II) Wir verwenden im folgenden grundsätzlich nur Momente 0-ter Ordnung zur Beschreibung der Damage-Einflüsse. Die hochgestellte „0“ ist daher überflüssig und wir führen folgende Umbenennungen ein:

$$Z^0 \rightarrow Z, \sigma^0 \rightarrow \tau, \dot{\varepsilon}_D^0 \rightarrow \dot{\varepsilon}_D, \Theta^0 \rightarrow \vartheta, \dot{\varepsilon}_V^0 \rightarrow \dot{\varepsilon}_{VL} \quad (B.74)$$

Der Index „VL“ bedeutet lokale Versetzungsbewegung. In dieser neuen Notation haben wir die Menge der

inneren Variablen der Damage-Prozesse	$\mathcal{D} = \{ \tau, Z, \vartheta \}$
Prozeß-Variablen der Damage-Prozesse	$\bar{\mathcal{D}}_\varepsilon = \{ \varepsilon_D \}, \bar{\mathcal{D}}_s = \{ \varepsilon_{VL} \}$
inneren Variablen der Versetzungsprozesse	$\mathcal{U} = \{ x, X_A, X_T \}$
Prozeß-Variablen der Versetzungsprozesse	$\bar{\mathcal{U}}_c = \{ \varepsilon_{VA}, \varepsilon_{VT} \}, \bar{\mathcal{U}}_s = \{ u \}$

B1.3. Ansätze für die Evolutionsgesetze

I) Vorbemerkungen

Die volle Allgemeinheit bei der Formulierung thermodynamischer zulässiger Stoffgesetze wird durch die in diesem Kapitel besprochenen physikalisch motivierten Ansätze bereits eingeschränkt. Nur für diese speziellen Ansätze wird die Verträglichkeit mit der CDU verlangt. Wir treffen vorab zur Vereinfachung

Annahme 2: Die Evolution der $\mathcal{U}, \bar{\mathcal{U}}$ ist unabhängig von $\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}}$.

Die Auswirkungen dieser Annahme werden wir im Zusammenhang mit der CDU in Kap.B1.4. diskutieren.

B 1.3.1. Evolutionsgesetze für die Variablen zur Beschreibung von Versetzungsmechanismen

I) Die Fließregel für $\dot{\mathbf{s}}_{vA}$

I) Es wird postuliert:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_{vA} &= [\gamma_A(u, \cdot)]_A \langle LC_A \rangle_A N_A \quad , \quad N_A = N_A^I \\ \text{falls } F_A &= (\sigma^I - X_A) \cdot (\sigma^I - X_A) - g_A(x, \theta, u) \geq 0 \\ \text{und } LC_A &= \frac{\partial F_A}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial F_A}{\partial \theta} \dot{\theta} = 2(\sigma^I - X_A) \cdot \dot{\sigma} - \frac{\partial g_A}{\partial \theta} \dot{\theta} > 0 \end{aligned} \quad (B.75)$$

Bzgl. der Symbole $[]_A, \langle \rangle_A$ siehe (B.6-8). Das Klammersymbol $\langle \rangle_A$ ist nicht mit einem Mittelwertoperator zu verwechseln!

Bemerkungen

ii) Im Unterschied zur klassischen Fließtheorie der Plastizität (z.B. *Prandtl-Reuss*-Gleichungen und deren Erweiterungen für kombinierte Verfestigung) wird hier zugelassen, daß sich der aktuelle Spannungszustand im Halbraum $F_A > 0$ befindet. Darüber hinaus verschwindet $\dot{\mathbf{s}}_{vA}$ bei $F_A = 0$ aufgrund der Definition von $[]_A$. Der Ansatz (B.75) beschreibt die wesentlichen Eigenschaften athermischer Versetzungsbewegung, nämlich:

- $\dot{\mathbf{s}}_{vA} = 0$ für hinreichend kleine Spannungen ($F_A < 0$)
- $\dot{\mathbf{s}}_{vA} = 0$ bei Entlastung
- Die Versetzungsbewegung kann bei langsamen Prozessen als Momentanreaktion idealisiert werden.

Die Forderung, nur Spannungszustände $F_A \leq 0$ zuzulassen, hat hingegen eher historische Gründe und ist aus physikalischer Sicht nicht zwingend.

III) Die Auswirkung von (B.75) ist für einen extrem langsamen Prozeß $\dot{\epsilon}_v \approx \dot{\epsilon}_{vA}$ in Fig.B.3. skizziert. Es handelt sich um eine monotone Belastung OAB, eine Zwischenentlastung BC und eine Neubelastung CB'D. Von den Vorhersagen der Fließtheorie unterscheidet sich (B.75) durch

- den glatten Verlauf in A wegen $\dot{\epsilon}_{vA}(A)=0$
- den Unterschied $B \neq B'$.

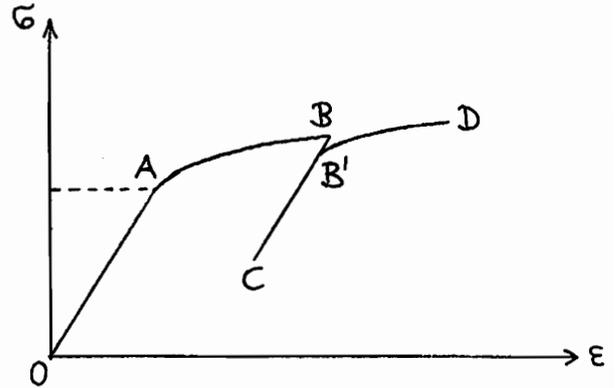


Fig.B.3.

Diese beiden Eigenschaften entsprechen durchaus dem Verhalten realer Materialien. Den Abstand zwischen B und B' kann man durch die Materialfunktionen γ_A, g_A beeinflussen.

IV) Die Verwendung der Normalenregel ist in (B.75) noch nicht zwingend. Die möglichen N_A sollen zunächst durch die CDU eingegrenzt werden.

v) $g_A = g_A(u, \cdot)$ in (B.75) bedeutet, daß die Fließgrenze selbst von dem Maß der Prozeßgeschwindigkeit abhängt, wie dies auch im Experiment zum Ausdruck kommt, siehe Fig.A.2. $\gamma_A = \gamma_A(u, \cdot)$ erlaubt es, den Anteil der athermischen Versetzungsmechanismen an der gesamten Verzerrungsrate zu steuern. Meist wird der Anteil von $\dot{\epsilon}_{vA}$ an $\dot{\epsilon}_v$ nicht nur mit wachsender Prozeßgeschwindigkeit abnehmen, sondern auch bei konstanter Prozeßgeschwindigkeit mit wachsender Deformation, da die neu entstandenen Versetzungen als schwache Hindernisse wirken, die thermisch aktiviert überwunden werden können.

vi) Die Zulassung von Spannungszuständen $F_A(\sigma, \cdot) > 0$ ist notwendig, wenn man die Einführung einer Konsistenzbedingung umgehen will. Eine Konsistenzbedingung hätte unerwünschte Kopplungseffekte zur Folge, wie wir am Beispiel einer Normalenregel

$$\dot{\epsilon}_{vA} = 2\dot{\lambda}(\sigma^I - X_A) \quad (B.76)$$

demonstrieren wollen. In diesem Fall folgt aus $\dot{F}_A = 0$:

$$\dot{\lambda} = \left\{ LC_A + \frac{\partial F_A}{\partial X_A} \cdot \dot{X}_{A,R}^* - \frac{\partial g_A}{\partial x} (K(x)\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{vT} - \dot{x}^*) - \frac{\partial g_A}{\partial u} \dot{u} \right\} / h(x, \theta, u) \quad (B.77)$$

Dabei wurde schon von den später eingeführten Evolutionsgesetzen für X_A und x Gebrauch gemacht. So ist \dot{X}_A^* ein Recovery - Anteil der Gleichung für die kinema-

tischen Verfestigung, der dritte Summand in der geschweiften Klammer gehört zur thermisch aktivierten Änderung von x und h ist eine Verfestigungsfunktion. Wir stellen fest :

- Über $\dot{\lambda}$ sind mehrere Mechanismen gekoppelt, z.B. hängt $\dot{\epsilon}_{VA}$ von $\dot{\epsilon}_{VT}$ ab.
- Die Gleichung für $\dot{\epsilon}_{VA}$ ist nicht mehr g.u. im Widerspruch zur Voraussetzung.
- Die Gleichung für $\dot{\epsilon}_{VA}$ ist nicht mehr stetig beim Wechsel von Be- zu Entlastung.
- Wenn der $\dot{\lambda}$ -Faktor nicht homogen vom Grade 1 in den Raten ist, läßt sich die CDU nicht in der gewohnten Weise (z.B.nach *Lubliner* [138]) auswerten.

Diese Nachteile lassen sich vermeiden, indem man $F_A > 0$ zuläßt.

vii) Es wird angenommen, daß der hydrostatische Druck keinen Einfluß auf $\dot{\epsilon}_{VA}$ hat, vgl. hierzu die Bemerkungen aus Kap.A.1.1.,Abschnitt V).

ii) Die Fließregel für $\dot{\epsilon}_{VT}$:

$$\dot{\epsilon}_{VT} = \gamma_T(u, \cdot) [\Phi_T]_T N_T \quad N_T = N_T^I$$

$$\text{falls } F_T = (\sigma^I - X_T) \cdot (\sigma^I - X_T) - g_T(x, \Theta, u) \geq 0$$
(B.78)

i) Dieser Ansatz besitzt die in der Viskoplastizität übliche Form (vgl. (A.30)) mit Ausnahme der Funktion γ_T , die über die u -Abhängigkeit den Anteil von $\dot{\epsilon}_{VT}$ an $\dot{\epsilon}_V$ steuert. Unser Konzept zur Beschreibung athermischer und thermisch aktivierter Versetzungsbewegung wird in Anhang 2 nochmals diskutiert und mit anderen aus der Literatur bekannten Konzepten verglichen.

ii) Die zu $\dot{\epsilon}_{VA}$ getroffenen Bemerkungen über Normalenregel und Druckabhängigkeit treffen auch auf $\dot{\epsilon}_{VT}$ zu. Wir merken noch an, daß sich die Normalenregel nicht länger aus dem *Drucker'schen* Postulat herleiten läßt, da dieses nur für quasistatische Prozesse gilt (*Malvern* [129],S.360): Das Postulat macht Aussagen über die Arbeit der die Zusatzspannungen verursachenden Störungen der äußeren Kräfte. Nur bei quasistatischen Prozessen ist aber die Leistung der äußeren Kräfte gleich der Spannungsleistung und das Postulat kann in Spannungen und Verzerrungen geschrieben werden. Bei Fließregeln ohne Belastungsbedingung werden überdies auch bei Entlastung plastische Verzerrungsinkremente erzeugt, was die Auswertung des Postulats behindert. Aus diesem Grunde haben wir hier noch allgemeine Richtungen N_A, N_T zugelassen. Assoziierte Fließregeln werden sich in unserer Theorie als hinreichende Bedingungen für die Verträglichkeit von (B.75,78) mit der CDU entpuppen.

III) Die Evolutionsgleichung für χ

Wie in Kap.B 1.2.4. erläutert, beruht die Einführung von χ auf der Tatsache, daß unter gewissen Bedingungen die Änderung der Versetzungsdichte der inelastischen Leistung proportional ist. Die daraus folgende Gleichung

$$\dot{\chi} = \sigma \cdot (\dot{\epsilon}_{VA} + \dot{\epsilon}_{VT})$$

wollen wir rein phänomenologisch verallgemeinern zu

$$\dot{\chi} = K(\chi, \Theta) \sigma \cdot (\dot{\epsilon}_{VA} + \dot{\epsilon}_{VT}) - [\dot{\chi}^*]_T \quad (B.79)$$

$\dot{\chi}^*$ ist ein Begrenzungsterm zur Beschreibung der Annihilation von Versetzungen z.B. bei großen Versetzungsdichten oder hoher Temperatur. Über die Form des Begrenzungsterms gibt es in der Literatur unterschiedliche Vorstellungen ; *Lehmann* [130] hat z.B. vorgeschlagen, eine Nebenbedingung im (χ, Θ) -Raum zu verwenden. Wir wollen hier vereinfachend annehmen, daß die Versetzungsumordnung ein thermisch aktivierter Prozeß ist und den gleichen Nebenbedingungen wie $\dot{\epsilon}_{VT}$ unterliegt.

IV) Evolutionsgleichungen für die kinematischen Verfestigungstensoren

Wir nehmen an, daß sich die \dot{X}_i , $i=A, T$ jeweils aus einem mit $\dot{\epsilon}_{v,i}$ verknüpften Wachstumsanteil und einem g.a. Erholungsanteil zusammensetzen:

$$\dot{X}_A = c_A(\cdot) \dot{\epsilon}_{VA} - [\dot{X}_{A,R}^*]_T \quad (B.80)$$

$$\dot{X}_T = c_T(\cdot) \dot{\epsilon}_{VT} - [\dot{X}_{T,R}^*]_T \quad (B.81)$$

R steht dabei für "recovery". Die Erholungsprozesse werden in beiden Fällen mit thermischer Aktivierung verknüpft.

V) Die Evolutionsgleichung für u

1) Bei der Herleitung eines Ansatzes für u untersuchen wir der Einfachheit halber zunächst isotherme einachsige Prozesse konstanter Dehnungsrate k . Anschließend ist k dann durch $PG(\dot{\epsilon}, \dot{\Theta})$ zu ersetzen. Eine ausführliche Diskussion der Evolutionsgleichung für u findet man in [3], S.31-53 und S.128-133 sowie in [4], S.185-188.

Die zweite der im Anschluß an (B.59) genannten Bedingungen erfordert, daß der Gleichgewichtswert von u bei Prozessen mit konstanter PG ausgehend vom Anfangswert u_0 mindestens innerhalb der Zeit ϵ_f/k erreicht werden muß. ϵ_f ist hier wie folgt definiert: Ist $\epsilon_0(k)$ eine Schar von Dehnungen an der Proportionalitätsgrenze (Scharparameter ist die konstante Prozeßgeschwindigkeit k), so sei

$$\epsilon_f = \inf_k \epsilon_0(k) \quad (B.82)$$

ε_f ist also der Grenzwert der Proportionalitätsgrenze für sehr kleine Dehnungsraten; ε_f ist natürlich nicht die Proportionalitätsgrenze des (nicht existierenden) Prozesses mit $k=0$! Die zuvor genannte Forderung ist notwendig, damit u bereits vor Erreichen der Spannung $\sigma_f := E\varepsilon_f$ seinen Gleichgewichtswert $u_{\varepsilon_0}(k)$ annehmen und die Proportionalitätsgrenze entsprechend auf $\sigma_0(k) = \hat{\sigma}_0(u_{\varepsilon_0}(k))$ ansteigen kann. Der qualitativ zu erwartende Verlauf von u ist in Fig.B4. skizziert.

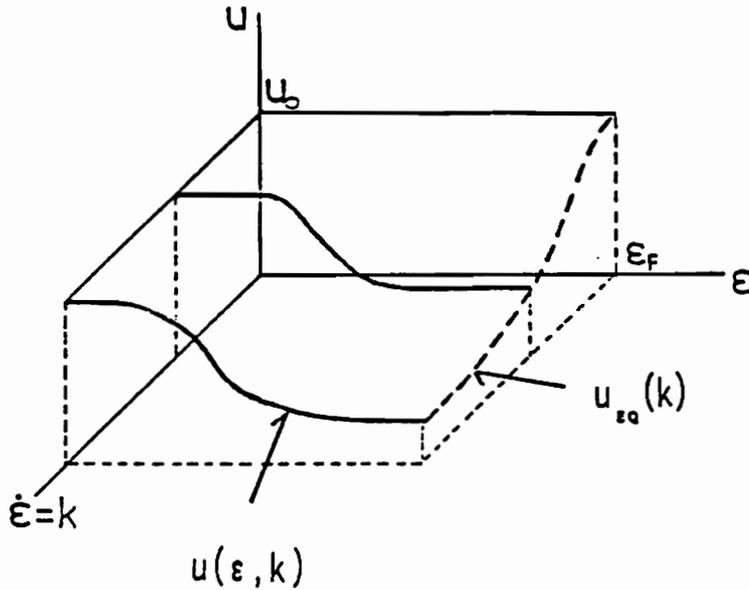


Fig.B.4.

II) Es werden folgende Forderungen nahegelegt:

$$\circ \quad \frac{du_{\varepsilon_0}}{dk} < 0 \quad (B.83)$$

Gilt dann $\frac{\partial g_A}{\partial u} < 0$ und $\frac{\partial g_T}{\partial u} < 0$, so wächst die Fließgrenze mit k bzw. PG.

$$\circ \quad u(\varepsilon, k) \rightarrow u_0 \quad \text{für } k \rightarrow 0, \text{ glm. in } \varepsilon \quad (B.84)$$

$$\circ \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, k) \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ glm. in } k \quad (B.85)$$

$$\circ \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, k) \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow \varepsilon_f, \text{ glm. in } k \quad (B.86)$$

(B.83) ist nur eine Mindestforderung; um auszuschließen, daß u zwischenzeitlich mit k anwächst, wird diese Forderung verschärft:

$$\frac{\partial u}{\partial k}(\varepsilon, k) < 0 \quad \forall (\varepsilon, k) \in (0, \varepsilon_f) \times (0, 10^5) . \quad (B.87)$$

III) Im Bericht [3] wurde gezeigt, daß gewöhnliche Dgln. 1.Ordnung für u diesen Anforderungen nicht entsprechen. Der Blick auf den Verlauf von u in Fig.B.4. weckt Erinnerungen an „Schwingungen“ im aperiodischen Grenzfall und tatsächlich erfüllt der Ansatz

$$\ddot{u} + c(\alpha + PG)\dot{u} + \frac{c^2}{4}(\alpha + PG)^2 \{u - u_{\varepsilon_0}(PG)\} = 0 \quad (B.88)$$

alle Anforderungen. Hierbei ist $u_{eq}(\cdot)$ die vorzugebende Gleichgewichtskurve, c ist eine Konstante, die das Abklingen von u_0 auf u_{eq} (PG) steuert und α ist eine Konstante, die zusammen mit c die Änderungen von u bei isothermen Relaxationsprozessen (d.h. $PG(t) \equiv 0$) beschreibt.

Für $PG = k$ kann man (B.88) analytisch integrieren und (B.84-87) explizit nachweisen. (B.88) ist auch mit unseren Postulaten P1, P2 verträglich:

- Wenn man $\dot{u} = v_1$, $u = v_2$ substituiert, so bildet (B.88) zusammen mit den restlichen Bilanz- und Evolutionsgleichungen ein quasilineares hyperbolisches System, siehe [3], Kap.4 sowie Kap.C.3. dieser Arbeit.

- u ist eine Prozeßvariable und beeinflusst nicht die Auswertung der CDU

iv) Die Funktion $u_{eq}(\cdot)$ mit der Eigenschaft (B.83) läßt sich aus den Experimenten von *Shioiri* ([58]-[60]) ermitteln. Es ist wichtig festzustellen, daß der Gleichgewichtswert nur von der momentanen Prozeßgeschwindigkeit abhängt, jedoch nicht von deren Geschichte. Eine vermutliche Folge davon ist, daß bei der Simulation von Geschwindigkeitswechselfersuchen mit unserem Modell nicht alle in Fig.A.4. skizzierten strain-rate-history-effects beschrieben werden: Bei unserem Modell tritt immer das in den beiden unteren Kurven skizzierte Verhalten auf.

B1.3.2. Evolutionsgesetze für die Damage-Variablen

I) Der Spannungskonzentrationstensor τ

I) Aus der Theorie elastischer Composites ist bekannt, daß die lokalen Spannungen mit den Mittelwerten $\langle \sigma_m \rangle = \sigma$ in der Gestalt

$$\dot{\tau} = \mathbf{D} \dot{\sigma} \tag{B.89}$$

verknüpft sind, siehe z.B. [134]. Eine erste phänomenologische Erweiterung besteht in der Hinzunahme eines g.a. Abklingterms:

$$\dot{\tau} = \mathbf{D} \dot{\sigma} - \dot{\tau}^* \tag{B.90}$$

Dieser Abklingterm ist bei schnellen Prozessen vernachlässigbar und kann bei langsamen Prozessen den Abbau der Spannungskonzentrationen durch lokale Versetzungsbewegung simulieren.

II) (B.90) führt allein noch nicht zu befriedigenden Ergebnissen: Man erwartet einerseits, daß \mathbf{D} positiv definit ist und andererseits, daß $\|\sigma\|$ infolge der Entfestigung durch MiSBs auch wieder abnimmt. $\|\tau\|$ darf aber nicht abnehmen, da in den

Nebenbedingungen für die Schädigung ein hinreichend hoher Wert von $\|\tau\|$ benötigt wird. Deshalb wird ein weiterer zu $\dot{\epsilon}_v$ proportionaler Wachstumsanteil vorgesehen:

$$\dot{\tau} = \mathbf{D} \dot{\sigma} + \mathbf{D}_2 \dot{\epsilon}_v - \dot{\tau}^* \quad (\text{B.91})$$

III) Ansätze für die Tensoren \mathbf{D} , \mathbf{D}_2 :
Bzgl. \mathbf{D} wird vorgeschlagen:

$$\mathbf{D} \dot{\sigma} = d_1 \dot{\sigma} + d_2 (\dot{\sigma} \tau + \tau \dot{\sigma}) + d_3 (\mathbf{Z} \dot{\sigma} + \dot{\sigma} \mathbf{Z}) \quad (\text{B.92})$$

Die spezielle Form (B.92) wird in Anhang 3 erläutert. Bzgl. \mathbf{D}_2 hat sich ein Ansatz der Form

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{M} * \sigma \quad (\text{B.93})$$

mit einem geeigneten \mathbf{M} bewährt. Wählen wir z.B. $\mathbf{M} = K d_4 \tau$, so liefert dies einen Beitrag $K d_4 (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_v) \tau$ zu $\dot{\tau}$, also ein proportionales Anwachsen von τ mit der plastischen Leistung. Wir wollen \mathbf{M} aber zunächst noch nicht spezifizieren, sondern erst thermodynamische Restriktionen dafür suchen.

II) Die Evolutionsgleichung für \mathbf{Z}

I) Wir treffen vorab folgende Annahmen:

Annahme 3: Die Evolution der Schädigungsmechanismen verläuft spannungskontrolliert im (τ, ϑ) -Raum.

Annahme 4: Die Evolution der Schädigungsmechanismen enthält Anteile, die als Momentanreaktion idealisiert werden können.

Wie schon unter I) angesprochen wurde erlaubt es Annahme 3, die Evolutionsgleichungen so zu formulieren, daß eine fortschreitende Schädigung auch bei makroskopischer Entlastung möglich ist. Während dies eine sinnvolle Forderung zu sein scheint, bietet Annahme 4 Ansatz zur Kritik. Der Verzicht auf Annahme 4 würde Gleichungen

$$\dot{\mathbf{Z}} = \dot{\mathbf{Z}}^* \quad (\text{B.94})$$

implizieren und bedeuten, daß man Scherbandentstehung und -wachstum allein auf thermische Aktivierung zurückführt. Im Unterschied zur thermisch aktivierten Versetzungsbewegung, wo man sich die Auswirkung thermisch aktivierter Punktdefekte auf eine blockierte Versetzung gut erklären kann, fehlt ein ähnlich einleuchtender Mechanismus bei den sehr viel größeren Scherbändern. Wir verbinden mit MiSBs intuitiv die Vorstellung, daß die Ausbreitung lokalisierter Scherungen nur

möglich ist bei Belastung, nicht etwa bei abnehmender lokaler Spannung oder Temperatur. Mathematisch wird dies durch ein Evolutionsgesetz mit Belastungsbedingung ausgedrückt, welches dann auch eine Momentanreaktion (bzgl. $\dot{\tau}$) beinhaltet. Insgesamt müssen wir aber feststellen, daß die Berechtigung von Annahme 4 noch weiterer Untersuchungen bedarf.

II) Im Rahmen der Annahmen 3,4 wollen wir bzgl. $\dot{\mathbf{Z}}$ auch annehmen, daß die Nebenbedingungen für MiSB-Entstehung $\dot{\mathbf{Z}}_{\epsilon}$ und Wachstum (inklusive Vereinigung) $\dot{\mathbf{Z}}_{w}$ identisch sind. Dann postulieren wir

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Z}} &= \dot{\mathbf{Z}}_{\epsilon} + \dot{\mathbf{Z}}_{w} = [d_z]_z \llbracket LC_z \rrbracket (N_{z\epsilon} + N_{zw}) \\ &\text{falls } G_z = \tau^I \cdot \tau^I - \nu_z \text{tr} \tau - h_z \geq 0 \\ &\text{und } LC_z = \left. \frac{\partial G_z}{\partial \tau} \cdot \dot{\tau} \right|_{\text{spontan}} = (2\tau^I - \nu_z \mathbf{1}) \cdot (\mathbf{D} \dot{\sigma} + (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_v) \mathbf{M}) > 0 \end{aligned} \quad (\text{B.95})$$

III) Bemerkungen:

- Die Fließbedingung $G_z \geq 0$ hängt noch vom Maß $\text{tr} \tau$ des lokalen Druckes ab, so daß MiSB-Entstehung unter Zug behindert wird und andere (hier nicht berücksichtigte) Schädigungsmechanismen aktiv werden können.
- Durch $h_z = h_z(\vartheta)$ kann der Einfluß lokaler Erwärmung durch adiabatic heating auf MiSB-Entstehung beschrieben werden.

IV) Bei der weiteren Konkretisierung der Gleichung (B.95) sollen folgende Kriterien herangezogen werden:

- \mathbf{Z} ist nach Definition von \mathbf{Z}_m positiv definit. Deshalb soll gelten:

$$\dot{\mathbf{Z}} \text{ ist positiv definit} \quad (\text{B.96})$$

- $N_{z\epsilon}$ und N_{zw} müssen mit der CDU verträglich sein.
- Die Orientierung von \mathbf{Z} und die durch \mathbf{Z} bestimmte Anfangsgestalt $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}(t^*)$ eines Makro-Scherbandes müssen mit dem Experiment übereinstimmen.

v) Die Evolutionsgleichung ist noch durch das Kriterium für die Entstehung eines MaSBs zu ergänzen. Dieses Kriterium schreiben wir symbolisch als

$$\mathcal{F}(\mathbf{Z}, \tau, \sigma, \dots) = \mathcal{F}_{\text{krit}} \quad (\text{B.97})$$

Mit der Definition von \mathcal{F} beschäftigen wir uns in Kap. B 1.5.

vi) In Kap.A.1.3., Abschnitt IV) wurde der Ablauf der Scherbandprozesse bis hin zur Entstehung eines MaSBs beschrieben: Nach der Entstehung (1) kommt es zunächst zum Wachstum aller MiSBs (2), danach zur Konzentration des Wachstums auf eine einzige Ebene (3) und dann zur Entstehung eines MaSBs (4). Aus in Kap. B1.5. erläuterten Gründen ist es nun zweckmäßig, das Phänomen (3) nicht durch die Ansätze für N_{ze} , N_{zw} zu erfassen, sondern durch das Kriterium $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{krit}$. Bei dieser Vorgehensweise genügen dann recht einfache Ansätze für N_{ze} und N_{zw} , welche die Phänomene (1),(2) beschreiben. Beispiele für solche Ansätze werden im folgenden erläutert.

Die letzte Forderung unter iv) hat zur Folge:

- Die Orientierung von $\dot{\mathbf{Z}}$ bei kleinen $\|\mathbf{Z}\|$ ist durch die HSS-Ebenen mit betragsgrößter (Makro-) Schubspannung festgelegt. Von diesen Ebenen P_Λ gibt es mindestens zwei und sie werden mit Λ durchnummeriert. Die Normalen von P_Λ werden mit \mathbf{n}_Λ bezeichnet. Wir müssen also fordern

$$N_{ze} \sim \sum \zeta_\Lambda \mathbf{n}_\Lambda * \mathbf{n}_\Lambda \quad (\text{B.98})$$

- Die Orientierung von $\dot{\mathbf{Z}}$ bei großen $\|\mathbf{Z}\|$ ist unter der Voraussetzung, daß praktisch noch alle MiSBs wachsen, durch

$$N_{zw} \sim \mathbf{Z} \quad (\text{B.99})$$

charakterisiert.

- Die Orientierung \mathbf{n}^* derjenigen Ebene, auf der sich das MiSB-Wachstum unmittelbar vor der Entstehung von \mathcal{M}^* konzentriert, ist durch das Kriterium (B.97) zu bestimmen. Bei radialen Prozessen ist übrigens

$$\mathbf{n}^* \in \{\mathbf{n}_\Lambda\} \quad (\text{B.100})$$

Man kann sich leicht vorstellen, daß die Gleichung für N_{zw} ungleich komplizierter wird, wenn $N_{zw} \rightarrow \mathbf{n}^* * \mathbf{n}^*$ für hinreichend große $\|\mathbf{Z}\|$ gelten soll.

vii) Eine Bemerkung zu (B.98)

Das Auftreten diskreter Ebenen P_Λ ist eine unangenehme Komplizierung der Theorie und die Folge davon, daß wir wegen (A.15,16) das Volumenelement ΔV auch nicht so groß wählen dürfen, um von einer „sehr großen“ Zahl darin enthaltener MiSBs sprechen zu können. Bei der Einführung von (B.98) denkt man dann an ein analoges Problem der Versetzungstheorie: Untersucht man ein Volumenelement mit „sehr vielen“ Gleitebenen, so läßt sich das durch Schubspannungen auf ausgezeichneten Ebenen bestimmte Deformationsverhalten makroskopisch vorteilhaft durch σ^I beschreiben (davon „lebt“ die J_2 -Theorie). Die Vorgehensweise versagt bei kleinen ΔV : Man muß mit der Orowan-Gleichung und den ausgelösten Schubspannungen auf Gleitebenen arbeiten.

III) Die Fließregel für $\dot{\epsilon}_0$:

$\dot{\epsilon}_0$ beschreibt den mittleren Beitrag mikrolokalisierter Scherungen zur Deformation. Wir wählen den Ansatz:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_0 &= [d_0]_0 \lll LC_0 \ggg N_0 \quad N_0 = N_0^I \\ \text{falls } G_0 &= \tau^I \cdot \tau^I - \nu_0 \text{tr} \tau - h_0 \geq 0 \\ \text{und } LC_0 &= \left. \frac{\partial G_0}{\partial \tau} \cdot \dot{\tau} \right|_{\text{spontan}} = (2\tau^I - \nu_0 \mathbf{1}) \cdot (\mathbf{D} \dot{\sigma} + (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_v) \mathbf{M}) > 0 \end{aligned} \quad (\text{B.101})$$

Bemerkungen:

I) Wegen $N_0 = N_0^I$ und entsprechenden Aussagen über N_A, N_T sind die inelastischen Deformationen diesem Modell zufolge isochor:

$$\text{tr} \dot{\epsilon}_0 = 0 \quad (\text{B.102})$$

(B.102) ändert sich erst, wenn andere Schädigungsmechanismen auftreten. In einigen Fällen ist die Scherbandbildung mit einem Phasenübergang verbunden; ändert sich dadurch die Dichte, so könnte man diesen Effekt als inelastische Volumenänderung auffassen. Wir wollen diesen Effekt aber vernachlässigen.

II) G_0 hängt noch vom lokalen hydrostatischen Spannungszustand ab. Wir folgern:

- Wegen $N_0 = N_0^I$ ist für $\dot{\epsilon}_0$ keine assoziierte Fließregel im (τ, ϑ) -Raum möglich.
- Die gesamte inelastische Verzerrungsrate zeigt unter Zug bzw. Druck unterschiedliches Verhalten. Dieser Unterschied wird aber allein auf die Schädigung zurückgeführt.

III) h_0 kann z.B. von \mathbf{Z}, σ abhängen. Dadurch läßt sich ausdrücken, daß $\dot{\epsilon}_0$ besonders früh einsetzt, wenn auf Ebenen mit großer Schädigung auch große Schubspannungen wirken. Insbesondere ist nicht ausgeschlossen, daß sich die Flächen $G_z = 0$ und $G_0 = 0$ im (τ, ϑ) -Raum schneiden.

IV) Die Evolutionsgleichung für die Prozeßvariable ϵ_{vl}

ϵ_{vl} beschreibt die Auswirkung lokaler Versetzungsbewegung, ist aber selbst nach (B.53) kein Anteil der Gesamtverzerrung. Darüber hinaus haben wir durch Annahme 1 komplizierte Stoffgesetze mit lokaler Verfestigung ausgeschlossen. Wir wollen deshalb für $\dot{\epsilon}_{vl}$ eine einfache g.a. Gleichung vom Überspannungstyp benutzen:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{vl} &= \gamma_{vl} [\Phi_{vl}]_v N_{vl} \\ \text{falls } G_v &= \tau^I \cdot \tau^I - h_v \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.103})$$

V) Die Evolutionsgleichung für die Temperaturkonzentration ϑ

Statt eine Gleichung für ϑ durch Mittelwertbildung einer lokalen Energiebilanz in ΔV herzuleiten (dazu bräuchte man Informationen über Dissipation infolge Wachstum einzelner MiSBs oder über lokale Wärmeleitung), wird eine solche Gleichung phänomenologisch eingeführt. Es ist plausibel anzunehmen, daß $\dot{\vartheta}$ mit $\dot{\varepsilon}_o$ und $\dot{\varepsilon}_{vL}$ zusammenhängt und ein recht allgemeiner Ansatz ist

$$\dot{\vartheta} = \left[d_{\Theta_o} \right]_o \lll LC_o \ggg + \left[d_{\Theta_v} \right]_v . \quad (B.104)$$

VI) Da für α_i nur der Ansatz (B.72) in Frage kommt, liegen nunmehr für alle inneren Variablen und Prozeßvariablen Ansätze vor. Diese Ansätze werden im nächsten Kapitel auf ihre Verträglichkeit mit der CDU untersucht und sind in diesem Zusammenhang in (B.106) übersichtlich zusammengestellt.

B 1.4. Aufstellung und Auswertung der Clausius-Duhem-Ungleichung

B1.4.1. Einleitung

I) Mit einer HGD verbindet man intuitiv die Vorstellung eines vom thermodynamischen Gleichgewicht weit entfernten Prozesses. Diese Aussage hinkt, solange man thermodynamisches Gleichgewicht noch nicht definiert hat. Wir werden in dieser Arbeit thermodynamisches Gleichgewicht nach *I. Müller* [136] als Zustand mit verschwindender Entropieproduktion definieren und erkennen, daß es unter plausiblen Annahmen über die Materialfunktionen nur einen solchen Zustand \bar{E} gibt. Für eine (hoffentlich ausreichend groß gewählte) Umgebung von \bar{E} wird dann ein Ansatz für die freie Enthalpie aufgestellt. Auf dem Weg zu diesem Ziel muß aber zuerst eine Formulierung einer Nichtgleichgewichtsthermodynamik bereitgestellt werden.

II) Ein Ansatz zu einer Nichtgleichgewichtsthermodynamik mit weitem Gültigkeitsbereich stammt von *I. Müller* [136],[137]. Diese Theorie gilt bislang aber nur für finite Stoffgesetze und wir befürchten, daß sie sich für inkrementelle Stoffgesetze nicht übertragen läßt: *Müller* benötigt zur Auswertung der angegebenen Form des 2.HS die Möglichkeit, für Körper ohne volumenverteilte Quellen von Impuls und Energie im Innern beliebige Werte von $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\Theta}$ zu erzeugen. Hierzu argumentiert er folgendermaßen: Beliebige Werte im Innern sind möglich, falls beliebige Werte am Rand vorgegeben werden und die Felder im Innern eindeutig durch die Randwerte festliegen. *Müller* verwendet hierbei den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von *Cauchy - Kowalewski*, der Analytizität der Materialfunktionen voraussetzt. Auf inkrementelle Stoffgesetze trifft diese Voraussetzung aber nicht zu, da etwa die Gleichungen vom Überspannungstyp nur endlich oft stetig differenzierbar sind.

III) Wir wollen hier die Existenz von Entropie η und absoluter Temperatur Θ voraussetzen und auch den Entropiefluß als $-q / \Theta$ einführen. Auf dieser Basis sind

verschiedene Ansätze zur Nichtgleichgewichtsthermodynamik entwickelt worden (Übersicht in [136],[137]). Wir entscheiden uns hier für die CDU (im Unterschied etwa zur Formulierung von *Lehmann* [133]), da wir für die „globale Analyse“ von Makrodefekten in Teil B2 eine integrale Form des 2.HS benötigen und hierzu bislang nur die CDU benutzt wurde. Darüber hinaus sind wir vor allem an einschränkenden Aussagen über die Materialfunktionen interessiert und hier bietet die CDU einen wohlbekannten Formalismus (z.B. *Lublinter* [138]).

B 1.4.2. Aufstellung der CDU , Zerlegung in Tellungleichungen

I) Mit Blick auf Annahme 2 wird die freie Enthalpie wie folgt additiv in Anteile zerlegt, die mit thermoelastischem Verhalten, Scherband-Schädigung, Versetzungsbewegung und Wärmeleitung einhergehen:

$$g = g_{\epsilon}(\sigma, \theta, Z) + g_z(\sigma, \tau, Z, \vartheta) + g_v(\sigma, X_A, X_T, x, \theta) + g_q(\alpha_q, \theta) . \quad (B.105)$$

Das System der Materialgleichungen für die inneren Variablen und Prozeßvariablen lautet:

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= \mathbf{D} \dot{\sigma} + (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VA}) \mathbf{M} + (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VT}) \mathbf{M} - \dot{\tau}^* \\ \dot{Z} &= [d_z]_z \lll \mathbf{G}_z \cdot (\mathbf{D} \dot{\sigma} + (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VA}) \mathbf{M} + (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VT}) \mathbf{M}) \ggg N_z \\ \dot{\epsilon}_D &= [d_D]_D \lll \mathbf{G}_D \cdot (\mathbf{D} \dot{\sigma} + (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VA}) \mathbf{M} + (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VT}) \mathbf{M}) \ggg N_D \\ \dot{\vartheta} &= [d_{\Theta_D}]_D \lll \mathbf{G}_D \cdot (\mathbf{D} \dot{\sigma} + (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VA}) \mathbf{M} + (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VT}) \mathbf{M}) \ggg + [d_{\Theta_V}]_V \\ \dot{\epsilon}_{VL} &= \gamma_{VL} [\Phi_{VL}]_V N_{VL} \\ \dot{\epsilon}_{VA} &= [\gamma_A]_A \left\langle 2(\sigma' - X_A) \cdot \dot{\sigma} - \frac{\partial g_A}{\partial \theta} \dot{\theta} \right\rangle_A N_A \\ \dot{\epsilon}_{VT} &= \gamma_T [\Phi_T]_T N_T \\ \dot{X}_A &= c_A \dot{\epsilon}_{VA} - [\dot{X}_{A,R}^*]_T \\ \dot{X}_T &= c_T \dot{\epsilon}_{VT} - [\dot{X}_{T,R}^*]_T \\ \dot{x} &= K(\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VA} + \sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VT}) - [\dot{x}^*]_T \\ \dot{\alpha}_q &= \text{grad } \theta - \frac{1}{\tau_q} \alpha_q \end{aligned} \quad (B.106)$$

Hierbei sind $\mathbf{G}_z = \partial G_z / \partial \tau$, $\mathbf{G}_D = \partial G_D / \partial \tau$ (B.107)

(B.105,106) werden in (B.16) eingesetzt. Wir führen vorher folgende Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
 a_{v1} &= 1 + \rho \frac{\partial g}{\partial x} K + \rho \frac{\partial g}{\partial \tau} \cdot M \\
 a_{o1} &= \rho \frac{\partial g}{\partial Z} \cdot N_z [d_z]_z \\
 a_{o2} &= \rho \frac{\partial g}{\partial \vartheta} [d_{\Theta o}]_o + \sigma \cdot N_o [d_o]_o \\
 \tilde{a}_{v1} &= [\gamma_A]_A (a_{v1} \sigma \cdot N_A + c_A \rho \frac{\partial g}{\partial X_A} \cdot N_A)
 \end{aligned} \tag{B.108}$$

Die CDU lautet nun:

$$\begin{aligned}
 & \left[\rho \frac{\partial g}{\partial \sigma} + \rho D^T \frac{\partial g}{\partial \tau} - \varepsilon_r + \ll a_{o1} \gg D^T G_z + \ll a_{o2} \gg D^T G_o + \right. \\
 & 2 \langle \tilde{a}_{v1} + [\gamma_A]_A \ll a_{o1} \gg (G_z \cdot M)(\sigma \cdot N_A) + [\gamma_A]_A \ll a_{o2} \gg (G_o \cdot M)(\sigma \cdot N_A) \rangle_A (\sigma^I - X_A) \cdot \dot{\sigma} \\
 & + \left[\rho \frac{\partial g}{\partial \Theta} - \rho \eta - \langle \tilde{a}_{v1} + [\gamma_A]_A \ll a_{o1} \gg (G_z \cdot M)(\sigma \cdot N_A) \right. \\
 & \quad \left. + [\gamma_A]_A \ll a_{o2} \gg (G_o \cdot M)(\sigma \cdot N_A) \rangle_A \frac{\partial g_A}{\partial \Theta} \right] \dot{\Theta} \\
 & + \left[a_{v1} + \ll a_{o1} \gg G_z \cdot M + \ll a_{o2} \gg G_o \cdot M \right] \sigma \cdot [\dot{\varepsilon}_{vT}]_T + \rho \frac{\partial g}{\partial X_T} \cdot [\dot{\varepsilon}_{vT}]_T c_T \\
 & - \rho \frac{\partial g}{\partial X_T} \cdot [\dot{X}_{T,R}^*]_T - \rho \frac{\partial g}{\partial X_A} \cdot [\dot{X}_{A,R}^*]_T - \rho \frac{\partial g}{\partial x} [\dot{x}^*]_T + \rho \frac{\partial g}{\partial \vartheta} [d_{\Theta v}]_v - \rho \frac{\partial g}{\partial \tau} \cdot \dot{\tau}^* \\
 & - \frac{\rho}{\tau_q} \frac{\partial g}{\partial \alpha_q} \cdot \alpha_q + \left(\rho \frac{\partial g}{\partial \alpha_q} - \frac{1}{\Theta} q \right) \cdot \text{grad } \Theta \geq 0
 \end{aligned} \tag{B.109}$$

II) Erste Folgerungen aus (B.109)

I) Die Ungleichung enthält grad Θ nur linear und könnte verletzt werden, wenn nicht

$$q = \rho \Theta \frac{\partial g}{\partial \alpha_q} = - \frac{k}{\tau_q} \alpha_q \tag{B.110}$$

ist, vgl. (B.73). Außerdem folgt aus (B.73), daß der vorletzte Term in (B.109) für

sich allein nichtnegativ ist. Da α nur in diesem Term auftritt, muß der gesamte restliche Ausdruck (die ersten 6 Zeilen von (B.109)) die Ungleichung schon allein erfüllen. In Verbindung mit (B.72) entsteht aus (B.110) wie gewünscht die Maxwell-Cattaneo-Gleichung.

ii) Anwendung der Methode von Lubliner [138] (siehe auch Loret [139])
Wir wählen folgende Ansätze:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \mathbf{g}_R &= \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{D}^T \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} + 2\lambda_v (\boldsymbol{\sigma}^I - \mathbf{X}_A) \\ &+ \lambda_{o1} \left(\mathbf{D}^T \mathbf{G}_z + 2[\gamma_A]_A (\mathbf{G}_z \cdot \mathbf{M})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N}_A)(\boldsymbol{\sigma}^I - \mathbf{X}_A) \right) \\ &+ \lambda_{o2} \left(\mathbf{D}^T \mathbf{G}_o + 2[\gamma_A]_A (\mathbf{G}_o \cdot \mathbf{M})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N}_A)(\boldsymbol{\sigma}^I - \mathbf{X}_A) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.111})$$

$$\eta = \frac{\partial g}{\partial \Theta} - \lambda_v \frac{\partial g_A}{\partial \Theta} - \lambda_{o1} [\gamma_A]_A (\mathbf{G}_z \cdot \mathbf{M}) \frac{\partial g_A}{\partial \Theta} - \lambda_{o2} [\gamma_A]_A (\mathbf{G}_o \cdot \mathbf{M}) \frac{\partial g_A}{\partial \Theta} \quad (\text{B.112})$$

mit noch unbestimmten λ -Koeffizienten. Setzt man dies in (B.109) ein, so folgt nach einiger Rechnung:

$$\begin{aligned} &\left\{ \tilde{a}_{v1} - \lambda_v \right\} \underline{LC}_A + \left\{ \ll a_{o1} \gg - \lambda_{o1} \right\} \left(\underline{LC}_z - (\mathbf{G}_z \cdot \mathbf{M})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{vT}) \right) + \\ &\left\{ \ll a_{o2} \gg - \lambda_{o2} \right\} \left(\underline{LC}_o - (\mathbf{G}_o \cdot \mathbf{M})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{vT}) \right) + \\ &\left[a_{v1} + \ll a_{o1} \gg \mathbf{G}_z \cdot \mathbf{M} + \ll a_{o2} \gg \mathbf{G}_o \cdot \mathbf{M} \right] \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{vT} + \rho \frac{\partial g}{\partial \mathbf{X}_T} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{vT} c_T \\ &- \rho \frac{\partial g}{\partial \mathbf{X}_T} \cdot \dot{\mathbf{X}}_{T,R}^* - \rho \frac{\partial g}{\partial \mathbf{X}_A} \cdot \dot{\mathbf{X}}_{A,R}^* - \rho \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x}^* + \rho \frac{\partial g}{\partial \vartheta} d_{\Theta v} - \rho \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\boldsymbol{\tau}}^* \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.113})$$

Zur Verkürzung der Schreibweise haben wir die Klammern $[]_i$ zur Kennzeichnung der Fließbedingungen weggelassen.

Wir denken uns nun sehr schnelle Prozesse, die durch geeignete Änderungen der Volumenkräfte und Wärmequellen realisiert werden können. In (B.113) bleiben nur die unterstrichelten Summanden übrig; wie üblich schließt man auf

$$0 \leq \lambda_v \leq \tilde{a}_{v1} \quad , \quad 0 \leq \lambda_{o1} \leq a_{o1} \quad , \quad 0 \leq \lambda_{o2} \leq a_{o2} \quad (\text{B.114})$$

und aus der ebenfalls üblichen Forderung, daß die g.u. Mechanismen bei Entlastung keinen Beitrag zur Dissipation liefern, folgt

$$\lambda_v \equiv 0 \quad , \quad \lambda_{o1} \equiv 0 \quad , \quad \lambda_{o2} \equiv 0 \quad . \quad (B.115)$$

Wir haben somit aus der CDU einen ersten Satz von Restriktionen

$$\tilde{a}_{v1} \geq 0 \quad , \quad a_{o1} \geq 0 \quad , \quad a_{o2} \geq 0 \quad (B.116)$$

sowie die Zustandsgleichungen

$$\boxed{\varepsilon_R = \rho \frac{\partial g}{\partial \sigma} + \rho D^T \frac{\partial g}{\partial \tau} \quad , \quad \rho \eta = \rho \frac{\partial g}{\partial \Theta}} \quad (B.117)$$

ableiten können.

Bemerkung

Wir werden später einen Ansatz für ρg so einführen, daß der Beitrag des zweiten Summanden zu ε_R um eine Größenordnung kleiner ist als der erste, mit σ gebildete Summand:

$$\boxed{\varepsilon_R = \rho \frac{\partial g}{\partial \sigma} + O(\delta) \quad , \quad \delta \ll 1}$$

(vgl. mit (B.53,126)). Erst diese Näherung rechtfertigt die Einführung der Enthalpie durch eine angenäherte Legendre-Transformation mit Fehler δ .

III) Auswertung der Beiträge g.a. Mechanismen zur CDU

1) Wir setzen (B.115) in (B.113) ein und erhalten

$$\boxed{\begin{aligned} & a_{v1} \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_{vA} + \rho c_A \frac{\partial g}{\partial X_A} \cdot \dot{\varepsilon}_{vA} + \rho \frac{\partial g}{\partial Z} \cdot \dot{Z} + \rho \frac{\partial g}{\partial \vartheta} [d_{\Theta o}]_o \lll LC_o \ggg + \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_o \\ & + a_{v1} \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_{vT} + \rho c_T \frac{\partial g}{\partial X_T} \cdot \dot{\varepsilon}_{vT} - \rho \frac{\partial g}{\partial X_T} \cdot \dot{X}_{T,R}^* - \rho \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x}^* - \rho \frac{\partial g}{\partial X_A} \cdot \dot{X}_{A,R}^* \\ & + \rho \frac{\partial g}{\partial \vartheta} [d_{\Theta o}] - \rho \frac{\partial g}{\partial \tau} \cdot \dot{\tau}^* \geq 0 \end{aligned}} \quad (B.118)$$

Von der ersten Zeile wissen wir, daß sie bei Gültigkeit von (B.116) die CDU separat erfüllt. Für beliebige Werte der Variablen (insbesondere von X_T , welches nur in der 2. und 3. Zeile auftritt) und für beliebige Werte der Nebenbedingungen kann die Ungleichung nur richtig sein, wenn auch die 2. und 3. Zeile sie allein erfüllen.

II) Als ersten Sonderfall können wir uns vorstellen, daß überhaupt keine der Nebenbedingungen erfüllt ist. Dann verbleibt

$$-\rho \frac{\partial g}{\partial \tau} \cdot \dot{\tau}^* \geq 0 \quad (B.119)$$

Wird zusätzlich $F_T > 0$ und bleiben $G_z, G_D, G_V, F_A < 0$, so haben wir stattdessen:

$$a_{v1} \sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VT} + \left(\rho c_T \dot{\epsilon}_{VT} - \rho \dot{X}_{T,R}^* \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial X_T} - \rho \frac{\partial g}{\partial X_A} \cdot \dot{X}_{A,R}^* - \rho \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x}^* - \rho \frac{\partial g}{\partial \tau} \cdot \dot{\tau}^* \geq 0 \quad (B.120)$$

Der letzte Summand darf unter den geänderten Nebenbedingungen nun keineswegs gewisse negative Werte annehmen: Als Konsequenz von Annahme 2 hängen nämlich die ersten 5 Summanden nicht von τ ab. In einer Ungleichung $f(x) + g(y) \geq 0 \quad \forall x, y$ muß die Ungleichung von f, g separat erfüllt werden. So fortfahrend können wir (B.118) in die folgenden 6 Teilungleichungen zerlegen:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{VA} &= a_{v1} \sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VA} + \rho c_A \frac{\partial g}{\partial X_A} \cdot \dot{\epsilon}_{VA} \geq 0 \\ \mathcal{D}_z &= \rho \frac{\partial g}{\partial Z} \cdot \dot{Z} \geq 0 \\ \mathcal{D}_D &= \rho \frac{\partial g}{\partial \vartheta} d_{\Theta_D} LC_D + \sigma \cdot \dot{\epsilon}_D \geq 0 \\ \mathcal{D}_{VT} &= a_{v1} \sigma \cdot \dot{\epsilon}_{VT} + \rho c_T \frac{\partial g}{\partial X_T} \cdot \dot{\epsilon}_{VT} - \rho \frac{\partial g}{\partial X_T} \cdot \dot{X}_{T,R}^* - \rho \frac{\partial g}{\partial X_A} \cdot \dot{X}_{A,R}^* - \rho \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x}^* \geq 0 \\ \mathcal{D}_\vartheta &= \rho \frac{\partial g}{\partial \vartheta} d_{\Theta_V} \geq 0 \\ \mathcal{D}_\tau &= -\rho \frac{\partial g}{\partial \tau} \cdot \dot{\tau}^* \geq 0 \end{aligned} \quad (B.121)$$

B1.4.3. Ein spezieller Ansatz für die freie Enthalpie

I) Dem approximativen Charakter des Modells entsprechend wollen wir nur einen speziellen Ansatz für g untersuchen. Gesucht sind dann hinreichende Bedingungen für eine Verträglichkeit der Ansätze für

$$N_A, N_T, N_D, N_z, \dot{X}_{A,R}^*, \dot{X}_{T,R}^*, \dot{\tau}^*, \dot{x}^*, \dot{\vartheta} \quad (B.122)$$

mit der CDU im Rahmen dieses Ansatzes für g. Eine Verallgemeinerung wäre denkbar, indem man g als Superposition konvexer Funktionen sucht, aber auch diese bei den "Generalized Standard Materials" verfolgte Vorgehensweise [122] führt letztlich nur auf hinreichende Bedingungen für (B.122) bei Vorgabe von g. Es ist letztendlich nicht bekannt, wie die allgemeinste mit (B.121) verträgliche Funktion g aussieht.

II) Kriterien für die Auswahl eines Ansatzes für g

I) Untersuchung von Gleichgewichtszuständen

Der Zustand

$$\begin{aligned} \bar{E} : \sigma = 0, \theta = \theta_0, \tau = 0, Z = 0, \vartheta = 0, X_A = 0, X_T = 0, \\ x = 0, \alpha_q = 0, \text{grad } \theta = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.123})$$

impliziert unter plausiblen Annahmen über die Materialfunktionen thermodynamisches Gleichgewicht. Dieses definieren wir dadurch, daß die linken Seiten von (B.121) verschwinden. $x = 0$ bedeutet z.B., daß es keine versetzungsinduzierte Verzerrungsrate geben kann, $X_T = 0$ muß $\dot{X}_{T,R}^* = 0$ zur Folge haben, $Z = 0$ impliziert, daß es keine damage-induzierte Verzerrungsrate geben kann, $\tau = 0$ hat $\dot{Z} = 0$ zur Folge usw. g soll nun in der Umgebung von \bar{E} approximiert werden und zwar z.T. durch Polynome.

II) Über die durch Versetzungsmechanismen dissipierte Energie läßt sich feststellen: Bei vernachlässigbaren Erholungseffekten läßt sich die Dissipation unter Bedingungen $\dot{\epsilon}_v \approx \dot{\epsilon}_{vA}$ bzw. $\dot{\epsilon}_v \approx \dot{\epsilon}_{vT}$ jeweils als Anteil der inelastischen Leistung aufschreiben:

$$D_{vA} = (1 - \xi_A) \sigma \cdot \dot{\epsilon}_{vA} \quad \text{bzw.} \quad D_{vT} = (1 - \xi_T) \sigma \cdot \dot{\epsilon}_{vT}, \quad \xi_A \approx \xi_T \approx 0,1 \quad (\text{B.124})$$

Es ist naheliegend zu fordern, daß dies auch gilt, wenn $\dot{\epsilon}_{vA}, \dot{\epsilon}_{vT}$ simultan auftreten. Dann muß gelten

$$\exists p_i \text{ mit } \rho \frac{\partial g}{\partial X_i} = p_i \sigma, \quad i = A, T, \quad \rho \frac{\partial g}{\partial x} K \lesssim 0,1 \quad (\text{B.125})$$

III) Bzgl. der Vorzeichen der Koeffizienten im Ansatz für g orientieren wir uns an (B.19,20).

IV) g ist eine isotrope Funktion seiner Argumente (d.h. nicht, daß \mathbf{s}_R und σ dann zwangsläufig isotrop miteinander verknüpft, also koaxial sind).

V) Die elastischen Nachgiebigkeiten sollen mit wachsender Schädigung zunehmen (insbesondere trifft dies auf den Schubmodul zu).

VI) Wir können vorab Aussagen über die Größenordnung einzelner Terme machen

(z.B. ist nach Kap.A.1.2, V) zu erwarten, daß die kinematischen Verfestigungen nur einen geringen Beitrag liefern).

III) Der Ansatz für g :

$$\begin{aligned} \rho g = & \frac{1}{2} \lambda_1 (\Theta - \Theta_0)^2 + \lambda_2 (\Theta - \Theta_0) \operatorname{tr} \sigma + \frac{1}{2} \lambda_3 (\zeta) (\operatorname{tr} \sigma)^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 (\zeta) \operatorname{tr} \sigma^2 \\ & - \frac{1}{2} \delta \mu_1 (\operatorname{tr} \tau)^2 - \frac{1}{2} \delta \mu_2 \operatorname{tr} \tau^2 + \delta \mu_3 N_{ZE}(\sigma) \cdot Z + \mathfrak{a}(\operatorname{tr} Z^2) \\ & + \frac{1}{2} \mu_6 \vartheta^2 - \delta v_1 \sigma \cdot X_A - \delta v_2 \sigma \cdot X_T - G(x, \Theta) - \frac{1}{2} \frac{k}{\tau_0 \Theta} \alpha_i \cdot \alpha_i \end{aligned}$$

(B.126)

Hierbei wurden folgende Bezeichnungen benutzt:

- Θ_0 ist die Temperatur der Ausgangskonfiguration .
- $\zeta = \|Z\|$. (B.127)
- $\delta \ll 1$ ist ein Faktor zur Kennzeichnung der Größenordnung. Nachdem wir die damit zusammenhängenden Vereinfachungen ausgenutzt haben, können wir δ wieder mit den μ_k, v_k zusammenfassen.
- λ_3, λ_4 sind beschränkte monoton wachsende Funktionen von ζ
- Die μ_k, v_k sind alle nichtnegativ, vgl.hierzu (B.19,20)
- $G(x, \Theta)$ ist eine mit x wachsende Funktion, die (B.125)₂ unterliegt und die wir in der Form

$$G(x, \Theta) = \rho \gamma_1(x) - \rho \gamma_2(x) (\Theta - \Theta_0) \quad (B.128)_1$$

ansetzen. Wir wählen später

$$\rho \gamma_1(x) = \frac{v_3 x^2}{2(1 + v_5 x^2)} \quad , \quad \rho \gamma_2(x) = \frac{v_4}{v_6} (1 - e^{-v_6 x}) \quad (B.128)_2$$

- \mathfrak{a} ist eine beschränkte, monoton wachsende Funktion von $\operatorname{tr} Z^2$ mit $\mathfrak{a}(0) = 0$.
Wir wählen später

$$\mathfrak{a}(\operatorname{tr} Z^2) = \frac{\mu_4 \operatorname{tr} Z^2}{2(1 + \mu_5 \operatorname{tr} Z^2)} \quad (B.129)$$

Der Beitrag der Scherbänder zur stored energy ist durch $\mu_4/2\mu_5$ beschränkt.

Bemerkung

(B.126) führt auf linear-thermoelastisches Verhalten. Die Berücksichtigung nicht-linearen Verhaltens durch Hinzunahme von Termen 3.Ordnung in σ , $\Theta - \Theta_0$ wurde z.B. von *Clifton* [26] angeregt und in unserem Bericht [3] auch befolgt. In [3] ist auch erläutert, daß die von *Clifton* beschriebenen Einflüsse auf die Transportgleichung der Beschleunigungswellen in unserem Modell auch durch die Variable τ ausgedrückt werden können. Deshalb haben wir uns hier mit einem Polynom 2.Ordnung für den thermoelastischen Anteil q_e zufrieden gegeben. Wichtiger als der kleine Schritt von einem vollständigen Polynom 2.Ordnung zu einem solchen von 3.Ordnung scheint die Hinzunahme von Termen mit $(\text{tr } \sigma)^n, n > 2$, um das Verhalten bei hohem Druck besser beschreiben zu können.

B 1.4.4. Auswertung der thermodynamischen Restriktionen (B.121) mit dem Ansatz (B.126)

1) Die Ungleichung (B.121)₁: Es entsteht

$$[\gamma_A]_A (1 - \xi_A) \sigma \cdot N_A \geq 0 \quad (\text{B.130})_1$$

mit $\xi_A = \rho \gamma_1'(x) K(x, \Theta) - \rho \gamma_2'(x) (\Theta - \Theta_0) K(x, \Theta) + \delta \mu_1 (\text{tr } \tau) (\text{tr } M) + \delta \mu_2 \tau \cdot M + \delta v_1 c_A$. (B.130)₂

()' kennzeichnet die Ableitung nach dem Argument. Die Ungleichung (B.130)₁ zerfällt dann in die Bedingungen

$$\begin{aligned} \gamma_A &\geq 0 \\ 0 &\leq \xi_A \leq 1 \\ \sigma \cdot N_A &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.131})$$

Die beiden ersten Bedingungen lassen sich leicht erfüllen, vor allem dann, wenn die δ -Glieder in ξ_A vernachlässigt werden. Bzgl. (B.131)₃ ist hinreichend

$$N_A = \frac{\partial \Gamma_A}{\partial \sigma^I} \quad , \quad \Gamma_A \in K(\sigma^I) \quad (\text{B.132})$$

Bzgl. der Notation siehe (B.22,25). Wird das Potential Γ_A mit der Fließfunktion F_A gebildet, so gelangen wir zur Normalenregel (B.133). Dort wurde auch noch γ_A durch $\tilde{\gamma}_A / \|\sigma^I - X_A\|$ ersetzt und o.E. die Tilde bei $\tilde{\gamma}_A$ wieder weggelassen.

$$\dot{s}_{vA} = [\gamma_A]_A \langle LC_A \rangle_A \frac{\sigma^I - X_A}{\|\sigma^I - X_A\|} \quad (\text{B.133})$$

II) Die Ungleichung (B.121)₂ :

Diese Ungleichung wird erfüllt für $N_z = \rho \partial g / \partial Z$ und $d_z \geq 0$. Wir erhalten dann

$$N_z = \mu_3 \delta N_{zE} + (2\alpha' + \omega)Z \quad (B.134)$$

$$\text{mit } \omega(\zeta, \sigma) = \frac{1}{2\zeta} (\lambda_3'(\zeta) (\text{tr} \sigma)^2 + \lambda_4'(\zeta) \text{tr} \sigma^2) .$$

Man erkennt die Aufspaltung in Entstehungs- und Wachstumsanteil. Der zu δ proportionale Summand darf hier nicht generell vernachlässigt werden, sondern allenfalls für große $\|Z\|$. Wir fassen $\mu_3 \delta$ in der Gleichung für Z zu einer neuen Konstante zusammen, die wir wieder mit μ_3 bezeichnen und erhalten insgesamt

$$\dot{Z} = [d_z] \ll LC_z \gg (\mu_3 N_{zE} + (2\alpha' + \omega)Z) . \quad (B.135)$$

Für N_{zE} ist der physikalisch plausible Ansatz (B.98) zulässig. Es sei speziell

$$N_{zE} = 2 \|\sigma^I\|^2 \sum n_\Lambda * n_\Lambda \quad (B.136)$$

wobei über die HSS-Ebenen mit betragsgrößter Schubspannung summiert wird.

III) Die Ungleichung (B.121)₃ : Wir erhalten

$$\mu_6 \vartheta [d_{\Theta_0}]_0 \ll LC_0 \gg + \sigma \cdot \dot{\epsilon}_0 \geq 0 .$$

Dies wird erfüllt durch

$$d_{\Theta_0} \geq 0 \quad , \quad d_0 \geq 0 \quad , \quad \sigma \cdot N_0 \geq 0 \quad (B.137)$$

(B.137)_{1,2} sind leicht zu erfüllende Restriktionen für die Materialfunktionen. Bzgl. (B.137)₃ setzen wir $N_0 = \sigma^I / \|\sigma^I\|$: Das Einsetzen mikrolokalisierter Scherungen wird zwar durch τ kontrolliert, zur Gesamtdeformation tragen jedoch nur durch die Vorzugsrichtung σ^I charakterisierte MiSBs bei. Es folgt

$$\dot{\epsilon}_0 = [d_0]_0 \ll LC_0 \gg \frac{\sigma^I}{\|\sigma^I\|} \quad (B.138)$$

IV) Die Ungleichung (B.121)₄ :

1) Nach Einsetzen von (B.126) entsteht

$$(1 - \xi_T) \sigma \cdot \dot{\epsilon}_{vT} + \delta v_1 \sigma \cdot \dot{X}_{A,R}^* + \delta v_2 \sigma \cdot \dot{X}_{T,R}^* + \rho (\gamma_1' - \gamma_2' (\Theta - \Theta_0)) \dot{x}^* \geq 0 \quad (B.139)$$

Hierbei erhält man ξ_T aus ξ_A , indem man $v_1 c_A$ durch $v_2 c_T$ ersetzt. Es gilt demnach

$$\xi_A = \xi_T + O(\delta) . \quad (B.140)$$

Es wird die Gültigkeit folgender Teilungleichungen gefordert:

$$\begin{aligned}
 \sigma \cdot \dot{\xi}_{vT} &\geq 0 \\
 0 &\leq \xi_T \leq 1 \\
 \sigma \cdot \dot{X}_{A,R}^* &\geq 0 \\
 \sigma \cdot \dot{X}_{T,R}^* &\geq 0 \\
 \rho(\gamma_1' - \gamma_2'(\Theta - \Theta_0)) \dot{x}^* &\geq 0
 \end{aligned} \tag{B.141}$$

ii) Hinreichend für (B.141)₁ ist:

$$\dot{\xi}_{vT} = \gamma_T [\Phi_T]_T \frac{\partial \Gamma_T}{\partial \sigma^I} \quad \text{mit } \Gamma_T \in \mathcal{K}(\sigma^I) \quad \text{und } \gamma_T \geq 0, \Phi_T \geq 0.$$

Insbesondere ist die Normalenregel zulässig:

$$\boxed{\dot{\xi}_{vT} = \gamma_T [\Phi_T]_T \frac{\sigma^I - X_T}{\|\sigma^I - X_T\|}} \tag{B.142}$$

iii) Hinreichend für (B.141)₂ ist:

$$\dot{X}_{A,R}^* = [\tilde{r}_A]_T \frac{\partial \Gamma_{xA}}{\partial \sigma^I} \quad \text{mit } \Gamma_{xA} \in \mathcal{K}(\sigma^I) \quad \text{und } \tilde{r}_A \geq 0.$$

Die Funktion \tilde{r}_A soll mit X_A verschwinden : $\tilde{r}_A = \|X_A\| r_A$. Wählen wir außerdem $\Gamma_{xA} = \Gamma_A$, so entsteht

$$\boxed{\dot{X}_{A,R}^* = [r_A]_T \|X_A\| \frac{\sigma^I - X_A}{\|\sigma^I - X_A\|}} \tag{B.143}$$

iv) (B.141)₄ wird in gleicher Weise erfüllt:

$$\boxed{\dot{X}_{T,R}^* = [r_T]_T \|X_T\| \frac{\sigma^I - X_T}{\|\sigma^I - X_T\|}} \quad , r_T \geq 0 \tag{B.144}$$

v) (B.141)₅ läßt sich erfüllen durch

$$\boxed{\dot{x}^* = \{\gamma_1' - \gamma_2'(\Theta - \Theta_0)\} [r_x]_T x} \quad , r_x \geq 0 \tag{B.145}$$

Hierbei wurde $\dot{x}^* \sim x$ gesetzt um zu verhindern, daß x während eines Erholungsprozesses negativ werden kann. Die CDU ist zwar durch (B.145) erfüllt, doch kann für beliebige x, Θ nicht verhindert werden, daß

$$\gamma_1' \geq \gamma_2' (\Theta - \Theta_0) \quad (\text{B.146})$$

verletzt wird; die Versetzungsdichte würde dann unsinnigerweise wieder zunehmen. Man muß die Konstanten ν_3, \dots so anpassen, daß (B.146) für $x \in [x_0, x_{\max}]$ und $\Theta \in [0, \Theta_{\max}]$ richtig bleibt.

V) Die Ungleichung (B.121)₅: Hier ist nur

$$d_{\Theta v} \geq 0 \quad (\text{B.147})$$

zu garantieren.

VI) Die Ungleichung (B.121)₆: Es gilt

$$-\rho \frac{\partial g}{\partial \tau} = \delta \mu_1 (\text{tr } \tau) + \delta \mu_2 \tau$$

und (B.121)₆ ist erfüllt für

$$\dot{\tau}^* = m(\tau, \varepsilon_{vl}) \tau, \quad m(\cdot) \geq 0 \quad (\text{B.148})$$

VII) Schlußbemerkungen :

i) Die Auswertung der CDU ist noch nicht ganz abgeschlossen: Es fehlt noch ein Ansatz für M aus (B.93): (B.131)₂ und (B.141)₂ erfordern $\tau \cdot M \geq 0$ und $(\text{tr } \tau)(\text{tr } M) \geq 0$. Dies wird erfüllt durch

$$M = K(x, \Theta) d_4 \tau, \quad K \geq 0, d_4 \geq 0 \quad (\text{B.149})$$

ii) Die CDU enthält keine Restriktionen bzgl. der Gleichungen für ε_{vl} und u .

iii) Es sei nochmals daran erinnert, daß alle eingeführten Materialgleichungen bestenfalls hinreichend für die Erfüllung der CDU sind. Im Zusammenhang mit der Verwendung der Fließfunktionen als konvexe Potentiale gilt dies sogar nur solange, wie die Fließfläche den Ursprung umschließt. Obwohl eine Verletzung dieser Bedingung nicht ausgeschlossen werden kann, ist sie hier doch wesentlich unwahrscheinlicher als bei herkömmlichen Plastizitätsmodellen: In unserem Modell ohne Konsistenzbedingung können hohe Spannungen auch erreicht werden, ohne daß sich der Mittelpunkt der Fließfläche weit vom Ursprung der Deviatorebene entfernen muß.

B 1.4.5. Thermoelastisches Verhalten und erster Hauptsatz

i) Reversible Verzerrung

Nach (B.117)₁ folgt aus (B.126):

$$\boxed{\varepsilon_r = \lambda_2 (\Theta - \Theta_0) \mathbf{1} + \lambda_3(\zeta) (\text{tr} \sigma) \mathbf{1} + \lambda_4(\zeta) \sigma + O(\delta)} \quad (\text{B.150})$$

Der vollständige Ausdruck ist in [3] angegeben. Für die reversible Verzerrungsrate gilt:

$$\dot{\varepsilon}_r = \lambda_2 \dot{\Theta} \mathbf{1} + \lambda_3(\zeta) (\text{tr} \dot{\sigma}) \mathbf{1} + \lambda_4(\zeta) \dot{\sigma} + \frac{\lambda_3'(\zeta)}{\zeta} \mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{Z}} (\text{tr} \sigma) \mathbf{1} + \frac{\lambda_4'(\zeta)}{\zeta} (\mathbf{Z} \cdot \dot{\mathbf{Z}}) \sigma + O(\delta) \quad (\text{B.151})$$

(bzgl. des vollständigen Ausdrucks siehe [3]). In vielen Fällen werden wir die sog. thermoelastische Näherung

$$\dot{\varepsilon}_r \approx \lambda_2 \dot{\Theta} \mathbf{1} + \lambda_3(\zeta) (\text{tr} \dot{\sigma}) \mathbf{1} + \lambda_4(\zeta) \dot{\sigma} \quad (\text{B.152})$$

verwenden.

II) Entropie

Nach (B.117)₂ folgt aus (B.126):

$$\rho \eta = \lambda_1 (\Theta - \Theta_0) + \lambda_2 (\text{tr} \sigma) + \frac{\tau_q}{2k\Theta^2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} + \rho \gamma_2(x) \quad (\text{B.153})$$

Die spezifische Wärme $c_{\sigma x}$ bei konstanter Spannung und konstanten inneren Variablen ist

$$c_{\sigma x} = \Theta \frac{\partial \eta}{\partial \Theta} = \frac{\Theta}{\rho} \lambda_1 - \frac{\tau_q}{\rho k \Theta^2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \quad (\text{B.154})$$

III) Der erste Hauptsatz

Bei Vernachlässigung volumenverteilter Wärmequellen lautet der erste Hauptsatz:

$$\rho \dot{g} = \dot{\sigma} \cdot \varepsilon_r + \rho \Theta \dot{\eta} + \rho \eta \dot{\Theta} - \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_r + \text{div} \mathbf{q} \quad (\text{B.155})$$

Nach Einsetzen der Evolutionsgesetze entsteht (jetzt mit $\delta = 1$ und entsprechender Umbenennung der Konstanten):

$$\boxed{\begin{aligned} \rho c_{\sigma x} \dot{\Theta} + \lambda_2 \Theta \text{tr} \dot{\sigma} &= (1 - \tilde{\xi}_A) \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_{v_A} + (1 - \tilde{\xi}_T) \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_{v_T} + \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_D \\ &+ \rho \frac{\partial g}{\partial \mathbf{Z}} \cdot \dot{\mathbf{Z}} + \rho \frac{\partial g}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + v_1 \sigma \cdot \dot{\mathbf{X}}_{A,R}^* + v_2 \sigma \cdot \dot{\mathbf{X}}_{T,R}^* + \rho (\gamma_1' + \gamma_2' \Theta_0) \dot{x}^* \\ &- 2 \frac{\tau_q}{k\Theta} \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \rho \frac{\partial g}{\partial \tau} \cdot \dot{\tau}^* - \text{div} \mathbf{q} \end{aligned}} \quad (\text{B.156})_1$$

Hierbei sind: $\tilde{\xi}_A = \rho K(\cdot) (\gamma_1' + \gamma_2' \Theta_0) + \mu_1 (\text{tr} \tau)^2 + \mu_2 \tau \cdot \tau - v_1 c_A$, $\tilde{\xi}_T = \tilde{\xi}_A + v_1 c_A - v_2 c_T$

$$(\text{B.156})_2$$

IV) Stored Energy

Definieren wir nach *Raniecki* [140] die latente Energie (stored energy) durch

$$\rho e_s := (\sigma \cdot \varepsilon_r - \rho g + \rho \eta \Theta) \Big|_{\sigma=0, \Theta=\Theta_0, q=0} \quad (\text{B.157})_1$$

so ergibt sich

$$\rho e_s = \rho(\gamma_1(x) + \gamma_2(x)\Theta_0) + \frac{1}{2} \mu_1 (\text{tr } \tau)^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \tau \cdot \tau - \frac{1}{2} \mu_6 \vartheta^2 - \mathfrak{A}(\text{tr } Z^2) \quad (\text{B.157})_2$$

mit der Bilanzgleichung

$$\rho \dot{e}_s = \rho(\gamma_1' + \gamma_2' \Theta_0) \dot{x} + \mu_1 (\text{tr } \tau) (\text{tr } \dot{\tau}) + \mu_2 \tau \cdot \dot{\tau} - 2 \mathfrak{A}'(\cdot) Z \cdot \dot{Z} - \mu_6 \vartheta \dot{\vartheta} \quad (\text{B.157})_3$$

B1.5. Versagenskriterien

B1.5.1. Beurteilung der Schädigung in Phase 1

I) Einleitung

i) In Kap.B1.5. haben wir zu unterscheiden zwischen

- a) Kriterien für die Beurteilung der Schädigung durch MiSBs, solange die Deformation des Körpers noch durch die Kontinuums-Damage-Theorie beschrieben werden kann.
- b) Kriterien für die Entstehung eines MaSBs

Zunächst wollen wir uns mit a) beschäftigen. Solche Kriterien sind z.B. für Hochgeschwindigkeitsumformprozesse wichtig: Beim Sprengplattieren entstehen MiSBs, die Belastung wird aber noch vor Erreichen von Phase 2 abgebrochen. Es interessiert, wie viele MiSBs noch zulässig sind. Die entsprechenden Kriterien sollen mit Z formuliert werden.

ii) Z wurde ursprünglich zur Beschreibung der Strukturänderungen eingeführt und große Werte von $\|Z\|$ sind, wenn man nur eine bestimmte Belastung ins Auge faßt, noch kein Indikator eines Materialversagens; z.B. ist ein großer $\|Z\|$ -Wert ungefährlich, wenn sich die Schädigung auf eine Ebene konzentriert, auf der momentan nur geringe Schubspannungen wirken. Auf den Unterschied zwischen einem Maß zur Beschreibung der Defektverteilung und einer Schädigungs-Kenngröße (abhängig von der aktuellen Belastung) hat auch *Krajcinovic* [117] hingewiesen. Ein zuverlässiges Versagenskriterium muß aber alle denkbaren Belastungen in Betracht ziehen, die Schädigung sollte also unabhängig von σ allein durch Z beurteilt werden.

ii) Wir blicken zurück auf (B.38,39) und postulieren folgendes Kriterium

Die Schädigung durch MiSBs ist ungefährlich, solange

$$\zeta(x, n) \leq \zeta_{krit} \quad \forall x, n$$

(B.158)

ζ_{krit} ist ein aus der Erfahrung festzulegender Wert. (B.158) ist wenig hilfreich, da man $\zeta(x, n)$ nicht aus Z berechnen kann. Wir kennen aber eine von n unabhängige obere Schranke für ζ (siehe Anhang 1), wobei ζ zunächst durch Z_m und schließlich durch Z abgeschätzt wird. Nach Gl.(1),(13),(14) aus Anhang 1 können wir schreiben:

$$\zeta(x, n) \leq C_1 \|Z\|^3 \quad (B.159)$$

und das Kriterium (B.158) verschärfen wir, indem wir eine Begrenzung der oberen Schranke fordern:

Die Schädigung durch MiSBs ist ungefährlich, solange

$$C_1 \|Z\|^3 \leq \zeta_{krit} \quad \forall x$$

(B.160)

Die Herleitung von (B.159) enthält einige grobe Abschätzungen, so daß man (B.160) nur schwer zu beurteilen vermag. Immerhin ist es erfreulich, daß man ein Kriterium wie (B.160) überhaupt ableiten kann. Dadurch motiviert läßt sich (B.160) phänomenologisch dahingehend erweitern, daß man die Beschränktheit einer monoton wachsenden Funktion von $\|Z\|$ fordert. Man kann also auch sagen:

Die Schädigung durch MiSBs ist ungefährlich, solange

$$\|Z\| \leq Z_{krit}$$

(B.161)

Z_{krit} ist empirisch zu bestimmen. Es ist wichtig zu wissen, daß man Z (wenn auch mühsam) messen kann, siehe hierzu [4], S.303-307.

B 1.5.2. Ein Kriterium für die Entstehung eines Makro-Scherbandes

I) Wir wiederholen einige Bezeichnungen aus Kap.A.1.3. : $\mathcal{M}(t) \subset \mathcal{B}_{ges}$ ist ein MaSB, $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}(t^*)$ ist seine hier gesuchte Anfangsgestalt, die durch das Kriterium (B.97), d.h. durch $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}_{krit}$ bestimmt werden soll. (B.97) ist erstmals

- entweder in einem Punkt $x^* \in \mathcal{B}_{ges}$
- oder z.B. bei Radialsymmetrie auf einer Menge $S \subset \mathcal{B}_{ges}$ erfüllt.

Im letztgenannten Fall wird die Anfangsgestalt mit \mathcal{M}_s^* bezeichnet. \mathcal{M}_s^* wird durch Tangentialebenen $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^*(x^*)$, $x^* \in S$ approximiert. \mathcal{M}^* wird beschrieben durch den Normalenvektor n^* , die Anfangsfläche A^* , die Dicke h^* , den Scherwinkel γ^* und die Gestalt der Berandung $\partial \mathcal{M}^*$. Da wir \mathcal{M}_s^* durch eine Folge von Tangentialebenen \mathcal{M}^* approximieren wollen genügt es, die Festlegung solcher Tangentialebenen zu untersuchen.

II) Bei Anwendung der kinetischen Methode entsteht \mathcal{M}^* nicht spontan, sondern aus einer bereits hinreichend inhomogen gewordenen Deformation heraus. Aus der Kenntnis dieser Deformation können h^* , γ^* bestimmt werden, siehe [5]. In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Bestimmung von n^* , A^* durch das Kriterium (B.97) beschäftigen. Die Festlegung von $\partial \mathcal{M}^*$ macht noch weitere Annahmen erforderlich, die von der Lage von x^* im Körper abhängen (z.B. ob $x^* \in \mathcal{B}_{ges}$ gilt), also nichtlokaler Natur sind.

III) Untersuchung radialer Prozesse - Teil 1

i) Wir untersuchen zunächst radiale Prozesse mit $n_A(t) = \text{konst.}$ Dieser scheinbar

einfache Fall wird sich sogleich als problematisch erweisen, enthält aber doch einige Anregungen für den allgemeinen Fall, den wir unter V) untersuchen.

Aus (B.98,99,136) folgt die Darstellung

$$\mathbf{Z}(t) = \sum \mathbf{Z}(t) \mathbf{n}_\Lambda^* \mathbf{n}_\Lambda \quad , \quad t < t^* \quad . \quad (\text{B.162})$$

wobei über die HSS-Ebenen mit betragsgrößter Schubspannung zu summieren ist. \mathbf{Z} hat nur eine einzige unabhängige Komponente Z .

II) Die HSS-Ebenen werden wie folgt beschrieben: In einem bestimmten Punkt \mathbf{x} seien $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ die Hauptspannungsrichtungen (mit der üblichen Anordnung $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ der HNS). Ist $\sigma_3 < 0$, so bezeichnen wir die Achse parallel zu \mathbf{e}_3 auch mit AOC ("axis of compression").

\mathbf{n} sei der Normalenvektor auf einer Ebene mit maximaler Schubspannung und n_k seien seine Komponenten bzgl. des Hauptachsensystems. Bekanntlich findet man 3 Lösungsklassen:

$$\begin{aligned} n_1^2 = 0 \quad n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{2} \quad \tau_1^2 &= \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ n_2^2 = 0 \quad n_1^2 = n_3^2 = \frac{1}{2} \quad \tau_2^2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 & (\text{B.163})_1 \\ n_3^2 = 0 \quad n_1^2 = n_2^2 = \frac{1}{2} \quad \tau_3^2 &= \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 . \end{aligned}$$

Zu jeder Lösung können 4 Normalenvektoren gefunden werden. Es interessieren aber nur die beiden l.u. Lösungen, da die HSS-Ebene gleichwohl durch \mathbf{n} als auch durch $-\mathbf{n}$ charakterisiert ist. Im einzelnen ist

$$\begin{aligned} \tau_1^2 : \sqrt{2} \mathbf{n}_1 &= (0, 1, 1) \quad \sqrt{2} \mathbf{n}_2 = (0, 1, -1) \\ \tau_2^2 : \sqrt{2} \mathbf{n}_3 &= (1, 0, 1) \quad \sqrt{2} \mathbf{n}_4 = (1, 0, -1) & (\text{B.163})_2 \\ \tau_3^2 : \sqrt{2} \mathbf{n}_5 &= (1, 1, 0) \quad \sqrt{2} \mathbf{n}_6 = (1, -1, 0) . \end{aligned}$$

Die Normalen der HSS-Ebenen werden in der Menge $\{\mathbf{n}_\Lambda\}$ zusammengefaßt, $\Lambda = 1, \dots, 6$. P_Λ ist die zugehörige Ebene (P wie "plane").

III) Untersuchung von Taylor-Test und Durchschlagversuch

Der Taylor-Test kann bei hinreichend kleiner Aufprallgeschwindigkeit (\rightarrow keine radialen Trägheitseffekte) als einachsiger Spannungszustand aufgefaßt werden. Das Zylinderkoordinatensystem ist ein HAS mit

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z) \quad .$$

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -p, p > 0; \tau_1^2 = \tau_2^2 = p^2/4, \tau_3^2 = 0. \quad (\text{B.164})$$

Die maximale Schubspannung wird auf P_1, \dots, P_4 erreicht und es gilt $\sum n_\Lambda * n_\Lambda = \text{diag}(1,1,2)$. Fig.B.5.b)-c) zeigt die Orientierung der HSS-Ebenen für einen beliebigen Punkt Q, siehe Fig.B.5.a).

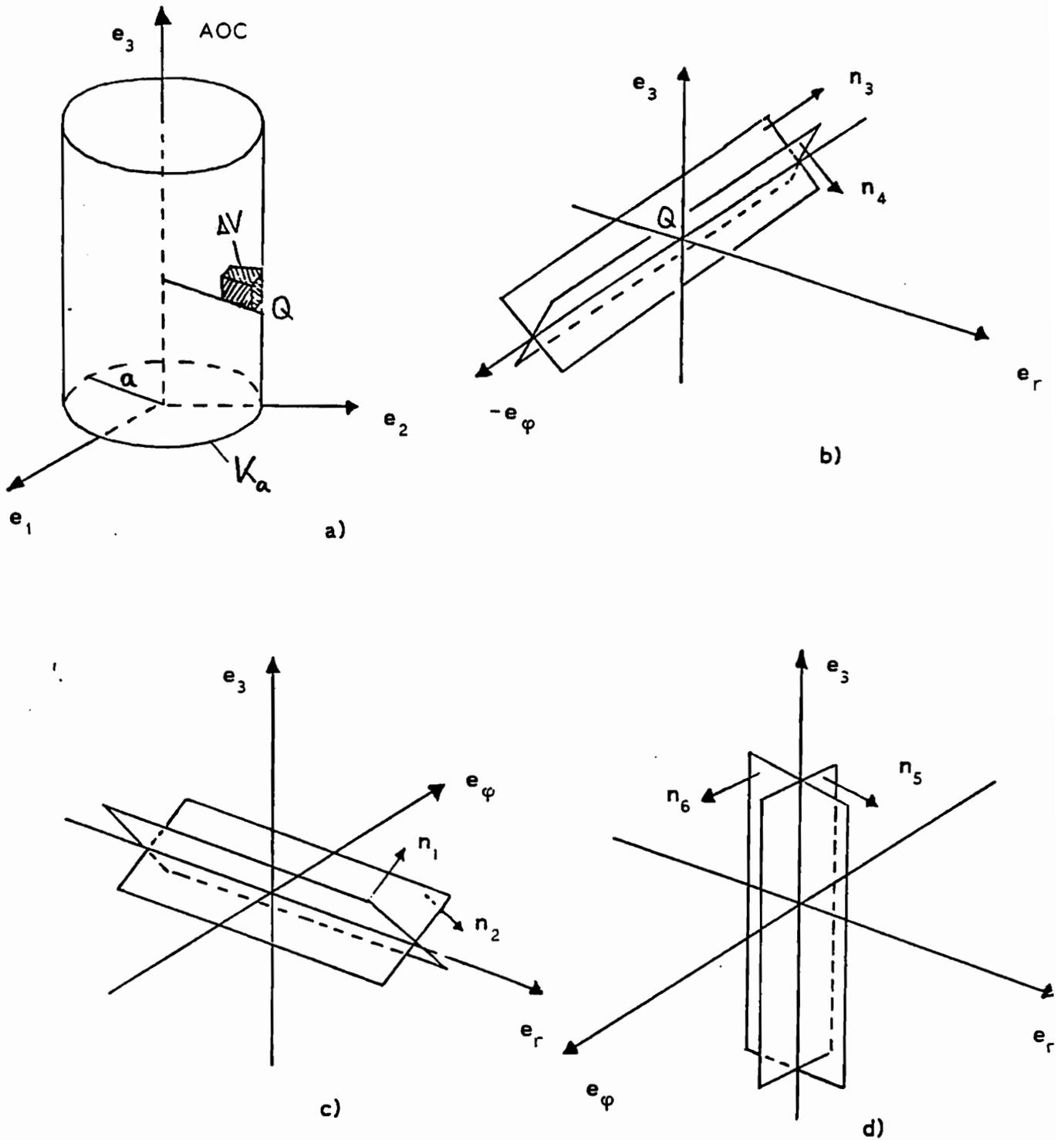


Fig.B.5

Aus Fig.A.15 ist zu folgern, daß das Makro-Scherband auf einer Kegelfläche entsteht, zu der die Ebenen P_3 in jedem Punkt Q eine Tangentialebene bilden. Wollen wir also einen Taylor-Test simulieren, so muß das Kriterium $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{krit}$ die Ebene P_3 aus den Ebenen P_1, \dots, P_4 auswählen.

Beim Durchschlagversuch sind aufgrund des komplizierteren Spannungszustandes nur 2 statt 4 HSS-Ebenen relevant. Man erwartet $\sigma_\varphi \geq 0 \geq \sigma_r \geq \sigma_z$; auf P_3, P_4 konzentriert sich das MiSB-Wachstum und auf P_3 wird nach Fig.A.16 die Tangentialebene an das MaSB erzeugt.

Wodurch ist nun in den beschriebenen Fällen P_3 gegenüber den anderen P_Λ ausgezeichnet? Wir stellen folgende Hypothese auf:

Ist die AOC räumlich und zeitlich konstant, so konzentriert sich das Scherbandwachstum auf diejenige HSS-Ebene, deren zu e_3 orthogonaler Tangentenvektor entlang einer Kurve verläuft, welche die AOC umschließt.

Die angesprochene Ebene wird mit P^* bezeichnet. Trifft obige Hypothese zu, so wachsen die in dieser Ebene angeordneten MiSBs solange, bis sie nicht mehr in das ausgewählte Volumenelement ΔV hineinpassen und sie durch die Tangentialebene eines MaSBs ersetzt werden müssen. Die Normale von P^* ist also der gesuchte Vektor n^* .

Es ist abzusehen, daß die mathematische Formulierung dieses Kriteriums sehr unhandlich wird und es ist tröstlich, daß sich im allgemeineren Fall nichtradialer Belastung sogar einfachere Formulierungen finden lassen als bei radialer Belastung.

IV) Mathematische Formulierung des Kriteriums (B.97) für radiale Prozesse

i) In einem Punktkontinuum sind bei lokaler Betrachtungsweise je 2 HSS-Ebenen äquivalent und die Auswahl von P^* ist nicht möglich. Das Kriterium (B.97) für P^* bzw. n^* muß daher über das Konzept des lokalen Punktkontinuums hinausgehen und insbesondere läßt sich die Bedingung einer konstanten AOC nur durch eine nichtlokale Formulierung erfassen. Die Kontinuums-Damage-Theorie wird einfacher, wenn wir solche Einflüsse im Kriterium (B.97) erfassen statt in den Evolutionsgesetzen (siehe Diskussion im Anschluß an (B.96) sowie in [4], S.194-206). Physikalisch läßt sich die Berücksichtigung nichtlokaler Effekte möglicherweise dadurch motivieren, daß für $t \rightarrow t^*$ die Wechselwirkung benachbarter MiSBs eine entscheidende Rolle spielt.

ii) Nach (B.48,162) haben wir für Z bei radialen Prozessen die Darstellung

$$Z = Z \sum_{\Lambda} n_{\Lambda}^* n_{\Lambda} \approx \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Lambda} \left(\sum_{\alpha(\Lambda)} \delta A_{\alpha} \right) n_{\Lambda}^* n_{\Lambda} \quad . \quad (B.165)$$

Die zulässige gesamte MiSB-Fläche ist $\sim (\Delta V)^{2/3}$ und der zulässige Maximalwert von Z ist

$$Z_{\max} = (\Delta V)^{-1/3} \quad (\text{B.166})$$

III) Notwendig für die Entstehung eines MaSBs bei radialen Prozessen ist

$$\text{grade}_3 \equiv 0 \quad \rightarrow \quad e_3(x) \equiv e_3^0 \text{ in } \mathcal{B}_{\text{AOC}} \subset \mathcal{B}_{\text{ges}} \quad (\text{B.167})$$

siehe Fig.B.6. Wir können die Tangentenvektoren

$$t_\Lambda = e_3^0 \times n_\Lambda \quad (\text{B.168})$$

in der zur AOC senkrechten Ebene berechnen. Unter den Trajektorien an die t_Λ ist nun diejenige auszuwählen, welche die AOC umschließt. Hierzu ist zunächst x_b zu berechnen (das geht nur numerisch) und dann kann man den Azimutalvektor $t_\varphi(x)$ für alle $x \in \mathcal{B}_{\text{AOC}}$ angeben. Eine die AOC umschließende Kurve ist durch einen Maximalwert von $|t_\varphi \cdot t_\Lambda|$ charakterisiert.

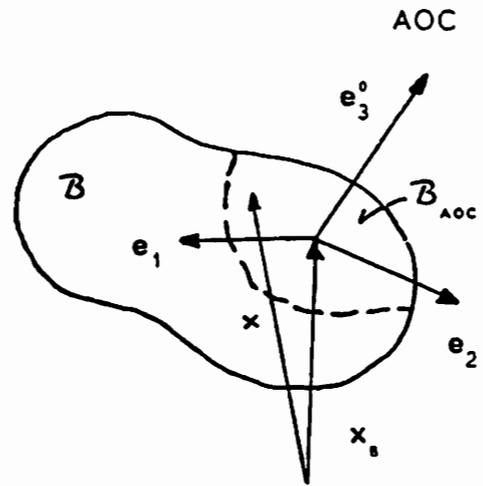


Fig.B.6

Zusammenfassend können wir sagen:

Bei radialen Prozessen beinhaltet $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{LIII}}$ folgende Aussagen:

Unter den Bedingungen

- die AOC ist räumlich konstant ((B.167) gilt)
- die unabhängige Komponente $Z(x^*)$ erreicht den Wert $\Delta V^{-1/3}$

entsteht ein Makro-Scherband in $x^i \in \mathcal{B}_{\text{AOC}}$

- mit Anfangsfläche $A^i = \Delta V^{2/3}$

- und Orientierung $n^r = \frac{1}{\sqrt{2}} e_3^0 - e_3^0 \times t^*$

$$\text{mit } |t^i \cdot t_\varphi| = \max_{\Lambda} |t_\Lambda(x^i) \cdot t_\varphi(x^i)| \quad (\text{B.169})$$

V) Verallgemeinerung auf nichtradiale Prozesse

Bei den in der Praxis zu lösenden Problemen mit mehrachsiger Beanspruchung können wir davon ausgehen, daß nur 2 der HSSen gleich sind. In diesem Fall sind die n_{Λ} in (B.165) zugleich Eigenvektoren und (B.165) ist die Spektraldarstellung von Z . Wir können versuchen, die bisherigen Kriterien zu übertragen, indem wir n_{Λ} , Z durch Eigenvektoren e_i^z und Eigenwerte $z_i \geq 0$, $i=1,2,3$ ersetzen.

Der Normalfall, daß alle Eigenwerte verschieden sind, kann offenbar nur bei nicht-radialen Prozessen auftreten. Hier können wir mit (B.170) ein relativ einfaches Kriterium für die MaSB-Entstehung einführen. Tritt hingegen der größte Eigenwert mehrfach auf, so müssen wir eine Verallgemeinerung von (B.169) als Zusatzbedingung heranziehen.

Sind alle Eigenwerte verschieden, so haben wir die Spektraldarstellung

$$Z = \sum z_i e_i^z * e_i^z \rightarrow z_{\max} e_{\max}^z * e_{\max}^z \quad \text{mit } z_{\max} \sim \frac{\sum \delta A_{\alpha}}{\Delta V}$$

Dies und (B.169) motivieren folgende Formulierung des Kriteriums für MaSB-Entstehung:

Bei einem allgemeinen Prozeß beinhaltet $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{krit}}$ folgende Aussagen

a) Es seien alle Eigenwerte z_i von Z verschieden.

- Ist die AOC räumlich konstant ($\text{grad } e_3^0 = 0$)
- und gilt für den maximalen Eigenwert $z_{\max} = \Delta V^{-1/3}$,

so entsteht in x^* ein MaSB mit

- Anfangsfläche $A^* = \Delta V^{2/3}$
- Orientierung $n^* = e_{\max}^z$
- und der Gestalt der Berandung gemäß (B.170)₂.

b) Tritt der größte Eigenwert mehrfach auf, so entsteht unter den gleichen Voraussetzungen wie oben ein MaSB mit

- Anfangsfläche $A^* = \Delta V^{2/3}$
- Orientierung $n^* = \frac{1}{\sqrt{2}} e_3^0 - e_3^0 \times t^*$

$$\text{mit } |t^* \cdot t_{\varphi}| = \max |t_i^z \cdot t_{\varphi}| \quad \text{und } t_i^z = e_3^0 \times e_i^z$$

- und der Gestalt der Berandung gemäß (B.170)₂.

(B.170)₁

Zur Festlegung von $\partial \mathcal{M}^*$ gehen wir folgendermaßen vor: Es wird beobachtet [67], daß MiSBs im Innern eines Körpers "penny shape"-ähnlich sind. Entstehen Scherbänder am Rand eines Körpers, so sind sie halbkreisförmig (der Scherbandradius muß zu Beginn klein gegen die Krümmungsradien der Körperoberfläche sein).

Für den Scherbandrand gilt (siehe auch Kap.B2.1): $\partial \mathcal{M} = \partial \mathcal{M}^+ \cup \partial \mathcal{M}^- \cup \partial \mathcal{M}_c$. Hierbei sind $\partial \mathcal{M}^+$, $\partial \mathcal{M}^-$ die seitlichen Deckflächen (siehe Fig. B.10 in Kap.B2.1) und $\partial \mathcal{M}_c = \mathcal{L} \times [-h/2, h/2]$ ist ein innerer Rand, längs dessen Scherbandwachstum mit der Wachstumsgeschwindigkeit c möglich ist. \mathcal{L} wird als Randkurve bezeichnet, h ist die Scherbanddicke. Zur Zeit t^* sind $\partial \mathcal{M}^{+*}$, $\partial \mathcal{M}^{-*}$ parallele Ebenen mit Normale \mathbf{n}^* . Das Kriterium $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{krit}}$ enthält dann eine Aussage über die Randkurve $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}(t^*)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) : \mathcal{L}^* \text{ ist Kreis mit Radius } \sqrt{A^*/\pi} \\ \mathbf{x}^* \in \partial \mathcal{B} : \mathcal{L}^* \text{ ist Halbkreis mit Radius } \sqrt{2A^*/\pi} \end{aligned} \quad (\text{B.170})_2$$

VI) Fazit

Die Berechnung der Anfangsgestalt eines MaSBs macht es erforderlich, aus zwei kontinuumsmechanisch gleichwertigen HSS-Ebenen eine bestimmte Ebene auszuwählen. Es wurde postuliert, daß die Auswahl einer bestimmten Ebene mit der in der lokalen Theorie ungenügend erfaßten Wechselwirkung benachbarter MiSBs zusammenhängt. Ausgehend von der Hypothese (B.164) wurde das Kriterium (B.170) eingeführt. Dies kann allerdings nur als erster Ansatz angesehen werden; es ist denkbar, daß bislang noch nicht durchgeführte Simulationsrechnungen des Taylor-Tests, des CFC-Tests oder des Durchschlagversuchs Änderungen von (B.170) erforderlich machen. Die unerfreuliche Komplikation durch die Nichtlokalität ist numerisch übrigens nicht so gravierend: Für das Evolutionsgesetz (B.135,136) von \mathbf{Z} muß ohnehin in jedem Punkt eine Hauptachsenberechnung für σ durchgeführt werden und der Vergleich von \mathbf{e}_3 in verschiedenen Punkten ist dann nicht mehr aufwendig.

B1.6. Zusammenstellung der Materialgleichungen (Modellversionen 1.1. und 1.2.)

I) Vorbemerkung

In diesem Kapitel werden die in Kap.B1.4. eingeführten thermodynamisch konsistenten Materialgleichungen nochmals zusammengestellt. Sie bilden Version 1.1. des Werkstoffmodells. In Kap.B1.6.2. wird eine vereinfachte Fassung formuliert, die wir mit Version 1.2. bezeichnen.

B1.6.1. Das allgemeine Werkstoffmodell (Version 1.1.) zur Beschreibung athermischer und thermisch aktivierter Versetzungsbewegung und Mikro-Scherband-induzierter Schädigung

In der folgenden Form gilt Version 1.1. für

- versetzungsinduzierte Deformationen athermischer und thermisch aktivierter Natur, also für Dehnungsraten bis ca. $10^4 \text{ sec}^{-1}, \dots, 10^5 \text{ sec}^{-1}$.
- Schädigung allein durch Mikro-Scherbänder
- hinreichend monotone und radiale Prozesse.

Die letzte Einschränkung folgt aus der vereinfachten Beschreibung der versetzungsinduzierten Dehnungsraten (je eine Fließfläche, Normalenregel)

I) Damage-Variable

i) Der Spannungskonzentrationstensor τ :

$$\dot{\tau} = \mathbf{D} \dot{\sigma} + K(x, \theta) d_4 (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_v) \tau - m \tau \quad (\text{B.171})$$

$$\text{mit } \mathbf{D} \dot{\sigma} = d_1 \dot{\sigma} + d_2 (\tau \dot{\sigma} + \dot{\sigma} \tau) + d_3 (\mathbf{Z} \dot{\sigma} + \dot{\sigma} \mathbf{Z})$$

ii) Der Damage-Tensor \mathbf{Z} :

$$\dot{\mathbf{Z}} = [d_z]_z \llbracket \text{LC}_z \rrbracket \left\{ 2\mu_3 \|\sigma'\|^2 \sum n_\Lambda * n_\Lambda + (2\alpha'(\cdot) + \omega(\cdot)) \mathbf{Z} \right\}$$

$$\text{falls } G_z = \tau^I \cdot \tau^I - \nu_z \text{tr} \tau - h_z \geq 0 \quad (\text{B.172})$$

$$\text{und } \text{LC}_z = (2\tau^I - \nu_z 1) \cdot (\mathbf{D} \dot{\sigma} + K d_4 (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_v) \tau) > 0$$

$$\text{Es ist } \omega = \frac{1}{2\zeta} \left\{ \lambda_3'(\zeta) (\text{tr} \sigma)^2 + \lambda_4'(\zeta) \text{tr} \sigma^2 \right\}$$

iii) Die damage-induzierte Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_o$

$$\dot{\epsilon}_o = [d_o]_o \llbracket \text{LC}_o \rrbracket \frac{\sigma^I}{\|\sigma^I\|} \quad (\text{B.173})$$

$$\text{falls } G_o = \tau^I \cdot \tau^I - \nu_o \text{tr} \tau - h_o \geq 0$$

$$\text{und } \text{LC}_o = (2\tau^I - \nu_o 1) \cdot (\mathbf{D} \dot{\sigma} + K d_4 (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_v) \tau) > 0$$

iv) Die lokale versetzungsinduzierte Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_{vL}$:

$$\dot{\epsilon}_{vL} = \gamma_{vL} [\Phi_{vL}]_v \frac{\tau^I}{\|\tau^I\|} \quad (\text{B.174})$$

falls $G_v = \tau^I \cdot \tau^I - h_v \geq 0$

v) Die Temperaturkonzentration $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = [d_{\theta_0}]_0 \lll LC_0 \ggg + [d_{\theta_v}]_v \quad (\text{B.175})$$

II) Variable zur Beschreibung der Versetzungsmechanismen

i) Die athermische Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_{vA}$:

$$\dot{\epsilon}_{vA} = [\gamma_A]_A \langle LC_A \rangle_A \frac{\sigma^I - X_A}{\|\sigma^I - X_A\|} \quad (\text{B.176})$$

falls $F_A = (\sigma^I - X_A) \cdot (\sigma^I - X_A) - g_A \geq 0$
und $LC_A = 2(\sigma^I - X_A) \cdot \dot{\sigma} - \frac{\partial g_A}{\partial \theta} \dot{\theta} > 0$

ii) Die thermisch aktivierte Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_{vT}$:

$$\dot{\epsilon}_{vT} = \gamma_T [\Phi_T]_T \frac{\sigma^I - X_T}{\|\sigma^I - X_T\|} \quad (\text{B.177})$$

falls $F_T = (\sigma^I - X_T) \cdot (\sigma^I - X_T) - g_T \geq 0$

III) Die Versetzungsdichte x :

$$\dot{x} = \sigma \cdot (\dot{\epsilon}_{vA} + \dot{\epsilon}_{vT}) K(x, \theta) - (\gamma_1'(x) - \gamma_2'(x)(\theta - \theta_0)) [r_x]_T x \quad (\text{B.178})$$

iv) Der kinematische Verfestigungstensor X_A :

$$\dot{X}_A = c_A \dot{\epsilon}_{vA} - [r_A]_T \|X_A\| \frac{\sigma^I - X_A}{\|\sigma^I - X_A\|} \quad (\text{B.179})$$

v) Der kinematische Verfestigungstensor X_T :

$$\dot{X}_T = c_T \dot{\epsilon}_{vT} - [r_T]_T \|X_T\| \frac{\sigma^I - X_T}{\|\sigma^I - X_T\|} \quad (\text{B.180})$$

vi) Das Maß u der Prozeßgeschwindigkeit:

$$\text{Sei } PG = \max(0, \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\| + \chi_{u1} \dot{\Theta}) \quad (\text{B.181})$$

$$L(u, PG) = \ddot{u} + c(\alpha + PG)\dot{u} + \frac{c^2}{4}(\alpha + PG)^2 \{u - u_{\varepsilon Q}(PG)\} = 0 \quad (\text{B.182})$$

III) Die Variablen zur Beschreibung thermoelastischen Verhaltens

i) Die reversible Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}_R$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_R = \lambda_2(\Theta - \Theta_0) \mathbf{1} + \lambda_3(\zeta)(\text{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \lambda_4(\zeta) \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.183})$$

ii) Die Entropie η :

$$\rho \eta = \lambda_1(\Theta - \Theta_0) + \lambda_2 \text{tr} \boldsymbol{\sigma} + \rho \gamma_2(x) + \frac{1}{2} \frac{\tau_a}{k \Theta^2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \quad (\text{B.184})$$

iii) Der Wärmefluß \mathbf{q} :

$$\tau_a \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = -k \text{grad} \Theta \quad (\text{B.185})$$

iv) Die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \rho c_{\partial x} \dot{\Theta} + \alpha_T \Theta \text{tr} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (1 - \tilde{\xi}_A) \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vA} + (1 - \tilde{\xi}_T) \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vT} \\ &+ [d_z]_z \llbracket LC_z \rrbracket \frac{\partial g}{\partial Z} \cdot \frac{\partial g}{\partial Z} + ([d_b]_b \|\boldsymbol{\sigma}'\| + \mu_6 \vartheta [d_{\Theta_0}]_b) \llbracket LC_b \rrbracket \\ &+ \mu_6 \vartheta [d_{\Theta v}]_v + \nu_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot [\dot{\mathbf{X}}_{A,R}^*]_T + \nu_2 \boldsymbol{\sigma} \cdot [\dot{\mathbf{X}}_{T,R}^*]_T + \mu_1 m (\text{tr} \boldsymbol{\tau})^2 + \mu_2 m \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \\ &+ \rho (\gamma_1' + \gamma_2' \Theta_0) \dot{x}^* + \frac{2}{\Theta} \mathbf{q} \cdot (\text{grad} \Theta + \frac{1}{k} \mathbf{q}) - \text{div} \mathbf{q} + \rho r \end{aligned} \quad (\text{B.186})$$

Hierbei sind $\tilde{\xi}_A, \tilde{\xi}_T$ gemäß (B.156) einzusetzen und $\alpha_T = \lambda_2$ ist der Wärmeausdehnungskoeffizient.

B1.6.2. Das vereinfachte Werkstoffmodell (Version 1.2.)

I) Gegenüber Modell 1.1. werden folgende Vereinfachungen durchgeführt:

- a) Die Beiträge der athermischen Versetzungsmechanismen zur Deformation und zur Dissipation werden vernachlässigt.
- b) Die Recovery - Terme in den Gleichungen der kinematischen Verfestigung und der Versetzungsdichte werden vernachlässigt.
- c) Wir vernachlässigen die Kopplungsterme in $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_R$, rechnen also thermoelastisch

mit modifizierten Steifigkeiten.

- d) Wir vernachlässigen die Änderung der Temperaturkonzentration ϑ durch schädigungsinduzierte Deformationen.
- e) Wir nehmen an, daß die thermische Relaxationszeit τ_q so klein ist, daß die zu τ_q proportionalen Glieder in der Entropie, der spezifischen Wärme und der Wärmeleitungsgleichung vernachlässigt werden können.
- f) Wir vernachlässigen die zu τ gehörigen Summanden in $\tilde{\xi}_A, \tilde{\xi}_T$.
- g) Wir vernachlässigen volumenverteilte Wärmequellen und Volumenkräfte.
- h) Wir entwickeln die Funktionen $\gamma_1(x), \gamma_2(x)$ bzgl. x und brechen nach dem ersten Term ab.
- i) Wir entwickeln die Funktion $\mathfrak{Q}(\text{tr}Z^2)$ nach $\text{tr}Z^2$ und brechen nach dem ersten Term ab.

Modell 1.2. gilt in dieser Form

- für thermisch aktivierte versetzungsinduzierte Deformationen, also für Dehnungsraten von $\dot{\epsilon}_{\min}$ bis ca. 10^4 sec^{-1} . $\dot{\epsilon}_{\min}$ ist deformation mechanism maps zu entnehmen. $\dot{\epsilon}_{\min} \approx 0$ gilt nur bei hinreichend hohem x, Θ .
- für Schädigung durch MiSBs und nicht zu große schädigungsinduzierte Deformationen (wegen d) und i))
- für hinreichend monotone und radiale Prozesse ohne lange Haltezeiten bei hohem Θ (wegen b)).

II) Übersicht über die Evolutionsgleichungen der Damage-Variablen

i) Der Spannungskonzentrationstensor τ :

$$\dot{\tau} = \mathbf{D} \dot{\sigma} + K d_4 (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_v) \tau - m \tau \quad (\text{B.187})$$

$$\text{mit } \mathbf{D} \dot{\sigma} = d_1 \dot{\sigma} + d_2 (\tau \dot{\sigma} + \dot{\sigma} \tau) + d_3 (Z \dot{\sigma} + \dot{\sigma} Z)$$

ii) Der Damage-Tensor Z :

$$\dot{Z} = [d_z]_z \lll \text{LC}_z \ggg \{ 2\mu_3 \|\sigma^I\|^2 \sum n_\Lambda \otimes n_\Lambda + (\mu_4 + \omega) Z \}$$

$$\text{falls } G_o = \tau^I \cdot \tau^I - \nu_z \text{tr} \tau - h_z \geq 0$$

$$\text{und } \text{LC}_z = (2\tau^I - \nu_z 1) \cdot (\mathbf{D} \dot{\sigma} + K d_4 (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{vT}) \tau) > 0 \quad (\text{B.188})$$

ω ist nach (B.172) einzusetzen.

iii) Die damage-induzierte Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_o$:

$$\dot{\epsilon}_o = [d_o]_o \lll \text{LC}_o \ggg \frac{\sigma^I}{\|\sigma^I\|}$$

$$\text{falls } G_o = \tau^I \cdot \tau^I - \nu_o \text{tr } \tau - h_o \geq 0 \quad (\text{B.189})$$

$$\text{und } LC_o = (2\tau^I - \nu_o 1) \cdot (D \dot{\sigma} + Kd_4(\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{vT})\tau) > 0$$

iv) Die lokale versetzungsinduzierte Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_{vL}$

$$\dot{\epsilon}_{vL} = \gamma_{vL} [\Phi_{vL}]_v \frac{\tau^I}{\|\tau^I\|} \quad (\text{B.190})$$

$$\text{falls } G_v = \tau^I \cdot \tau^I - h_v \geq 0$$

v) Die Temperaturkonzentration ϑ :

$$\dot{\vartheta} = [d_{\Theta v}]_v \quad (\text{B.191})$$

III) Variable zur Beschreibung der Versetzungsmechanismen

i) Die thermisch aktivierte Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_{vT}$:

$$\dot{\epsilon}_{vT} = \gamma_T [\Phi_T]_T \frac{\sigma^I - X_T}{\|\sigma^I - X_T\|} \quad (\text{B.192})$$

$$\text{falls } F_T = (\sigma^I - X_T) \cdot (\sigma^I - X_T) - g_T \geq 0$$

ii) Die Versetzungsdichte χ :

$$\dot{\chi} = K(\chi, \Theta) \sigma \cdot \dot{\epsilon}_{vT} \quad (\text{B.193})$$

iii) Der kinematische Verfestigungstensor X_T :

$$\dot{X}_T = c_T \dot{\epsilon}_{vT} \quad (\text{B.194})$$

iv) Das Maß u der Prozeßgeschwindigkeit

$$PG = \max(0, \|\dot{\epsilon}\| + \chi_{u1} \dot{\Theta}) \quad (\text{B.195})$$

$$L(u, PG) = \ddot{u} + c(\alpha + PG) \dot{u} + \frac{c^2}{4} (\alpha + PG)^2 \{u - u_{eq}(PG)\} = 0$$

IV) Variablen zur Beschreibung des thermoelastischen Verhaltens

i) Die reversible Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_r$

$$\dot{\epsilon}_r = \{\lambda_2 \dot{\Theta} + \lambda_3(\zeta) \text{tr } \dot{\sigma}\} 1 + \lambda_4(\zeta) \dot{\sigma} \quad (\text{B.196})$$

ii) Die Entropie η : $\rho \eta = \lambda_1 (\Theta - \Theta_o) + \lambda_2 \text{tr } \sigma + \nu_4 \chi$ (B.197)

III) Der Wärmefluß q :

$$\tau \dot{q} + q = -k \text{ grad } \Theta \quad (\text{B.198})$$

IV) Die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \rho c_{\sigma} \dot{\Theta} + \alpha_T \Theta \text{tr } \dot{\sigma} &= (1 - \tilde{\xi}_T) \sigma \cdot \dot{\epsilon}_{vT} + \sigma \cdot \dot{\epsilon}_0 + \mu_6 \vartheta [d_{\Theta v}]_v \\ + [d_z]_z \ll LC_z \gg \frac{\partial g}{\partial Z} \cdot \frac{\partial g}{\partial Z} &+ \mu_1 m (\text{tr } \tau)^2 + \mu_2 m \tau \cdot \tau - \text{div } q \end{aligned} \quad (\text{B.199})$$

B1.7. Erweiterung von Modell 1.2. zur Beschreibung großer Deformationen (Modell 1.2.LD)

B1.7.1. Einleitung

I) Mit der Einführung von Modell 1.2. im letzten Kapitel wurde ein deutlicher Einschnitt in die Materialbeschreibung vollzogen. Da bislang nur für Modell 1.2. Materialfunktionen und -parameter bekannt sind, haben wir uns entschlossen, auch bei der Weiterentwicklung der Theorie

- für große Deformationen in Phase 1 und
- für die Ausbreitung von MaSBs in Phase 2

nur von den Gleichungen (B.187-199) des Modells 1.2. auszugehen.

II) Nicht zuletzt im Hinblick auf die Struktur des parallel entwickelten FEM-Programms (siehe [4], Kap.5) orientiert sich die Vorgehensweise an folgenden Forderungen:

a) Der Dehngeschwindigkeitstensor D läßt sich additiv zerlegen:

$$D = D_R + D_I \quad (B.200)$$

b) Es existiert ein Verzerrungstensor e_R , so daß

$$D_R = \mathcal{L}(e_R, \overset{\nabla}{e}_R) \quad (B.201)$$

Dabei ist \mathcal{L} eine in $\overset{\nabla}{e}_R$ lineare Funktion und $(\overset{\nabla}{})$ kennzeichnet noch irgendeine objektive Zeitableitung.

c) Die objektive Zeitableitung $(\overset{\nabla}{})$ besitzt die "chain-rule property" (CRP):

$$\frac{d\varphi}{dA} \cdot \dot{A} = \frac{d\varphi}{dA} \cdot \overset{\nabla}{A} \quad (B.202)$$

für isotrope Funktionen $\varphi(A)$ und symmetrische A .

Die Bedeutung der CRP kann gar nicht hoch genug eingeschätzt werden, vor allem dann, wenn Spannungen als unabhängige Veränderliche auftreten: In diesem Fall sind bei der Berechnung von \dot{g} auch Ableitungen

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} \quad (B.203)$$

zu bilden, während in objektiv formulierten Fließregeln und Evolutionsgesetzen die Belastungsbedingungen irgendeine objektive Ableitung $\overset{\nabla}{\sigma}$ enthalten müssen. Will man

also in der CDU ∇ ausklammern, so treten zufolge (B.203) auch Anteile des Geschwindigkeitsgradienten L auf. Dies ist unzulässig, weil nur $\nabla, \dot{\theta}$ die unabhängigen Raten sind. Man muß also auf (B.203) die CRP anwenden können.

III) Die Zwischenkonfiguration

I) Zur Beschreibung großer inelastischer Deformationen wird in Verbindung mit der Zerlegung

$$\begin{array}{c}
 \boxed{F = F'_R F'_I} \\
 F'_I : \chi_0 \longrightarrow \hat{\chi}'_I \quad F'_R : \hat{\chi}'_I \longrightarrow \chi_t
 \end{array}
 \tag{B.204}$$

des Deformationsgradienten F eine Zwischenkonfiguration $\hat{\chi}'_I$ eingeführt. Diese ist nur bis auf eine Drehung R' definiert. In (B.204) ist χ_0 die Ausgangskonfiguration und χ_t die Momentankonfiguration. Einen Überblick über das Konzept der Zwischenkonfiguration gibt *Tsakmakis* [146]

II) Die mit der Mehrdeutigkeit von $\hat{\chi}'_I$ verbundenen Schwierigkeiten können auf verschiedene Weise umgangen werden:

- a) Durch Formulierung einer Zerlegung in Anteile, die gegenüber R' invariant sind (z.B. [140]).
- b) Durch Festlegung von F'_R oder F'_I als reine Streckung [141],[142]
- c) Durch Auswahl einer ausgezeichneten Zwischenkonfiguration $\hat{\chi}'_I^0$ (isokline Konfiguration), deren Drehung (plastischer Spin) durch eine Materialgleichung festgelegt ist [62],[143],[139],[144],[145].

IV) Annahmen über die reversiblen Verzerrungen

Die reversiblen (elastischen) Deformationen sind bei Metallen in der Regel klein im folgenden Sinn:

- a) Bei langsamen Deformationen treten kleine elastische Volumen- und Gestaltänderungen auf. Mit Ausnahme des Elastizitätsgesetzes der Form

$$e_r = \mathcal{H}(\text{Spannung, Temperatur, Damage-Variable}) \tag{B.205}$$

kann in allen anderen Gleichungen $V_R \approx 1$ gesetzt werden. Dabei ist $V_R^2 = F'_R F'^T_R$.

- b) Bei HGDen treten kleine elastische Gestaltänderungen, aber aufgrund großer Drücke große elastische Volumenänderungen auf. Man kann dann bei der Transformation von Größen von $\hat{\chi}'_I$ nach χ_t

$$\boxed{V_R \approx \Delta 1 \quad , \quad \Delta = \det V_R}
 \tag{B.206}$$

setzen.

VI) Einige Vorüberlegungen zur Problematik der Einführung von \mathbf{e}_R

I) Die auf III), ii), a) beruhenden Formulierungen, bei denen also von \mathbf{R}' unabhängige Größen Verwendung finden, sind in [140] zusammengefaßt. Allen dort beschriebenen Ansätzen liegt folgender Gang der Rechnung zugrunde:

- Definition von \mathbf{D}_I als Ableitung von Längendifferenzen in $\hat{\chi}_t, \chi_0$
- Berechnung von $\mathbf{D}_R := \mathbf{D} - \mathbf{D}_I$
- Suche nach $\nabla \mathbf{e}_R$

und stets errechnet man eine Ableitung (∇), für welche die CRP nicht gilt.

II) *Lehmann* [90],[133] bevorzugt konvektive Koordinaten und schlägt die multiplikative Zerlegung der Metriktransformationsmatrix q_k^i vor (die q_k^i sind die gemischt-varianten Komponenten des rechten Cauchy-Green-Tensors \mathbf{C} bezogen auf die Ausgangskonfiguration). Unter der Annahme, daß reversible Verzerrung und Spannung isotrop miteinander verknüpft sind, kann \mathbf{D}_R als Jaumann-Ableitung des Hencky-Tensors der Momentankonfiguration geschrieben werden. Die Jaumann-Ableitung erfüllt auch die CRP; für die Anwendung auf Schädigungsprozesse stört jedoch die Voraussetzung der Isotropie, die bei Damage durch orientierte Defekte möglicherweise nicht erfüllt ist.

III) Wir wählen deshalb eine andere Vorgehensweise, die sich an den Arbeiten zur isoklinen Zwischenkonfiguration orientiert. Ausgangspunkt ist die Festlegung

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_R^T \quad \implies \quad \mathbf{F}_R = \mathbf{V}_R = \mathbf{U}_R \quad (\text{B.207})$$

und die Darstellung

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{V}}_R \mathbf{V}_R^{-1} + \mathbf{V}_R \dot{\mathbf{F}}_I \mathbf{F}_I^{-1} \mathbf{V}_R^{-1} \quad (\text{B.208})$$

des Geschwindigkeitsgradienten. Aufbauend auf (B.207) lassen sich die Forderungen aus II) erfüllen; der Preis dafür ist die Einführung einer zusätzlichen konstitutiven Gleichung für den inelastischen Spin. Die verschiedenen Konfigurationen gemäß (B.207) sind in Fig.B.7. skizziert. Die so spezifizierte Zwischenkonfiguration wird mit $\hat{\chi}_t$ bezeichnet.

B 1.7.2. Einige Eigenschaften der Zwischenkonfiguration $\hat{\chi}_t$

I) Transformationsverhalten unter Euklidischen Transformationen

Sei $\mathbf{x}^* = \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-T}$, $\det \mathbf{Q} = +1$ (B.208)

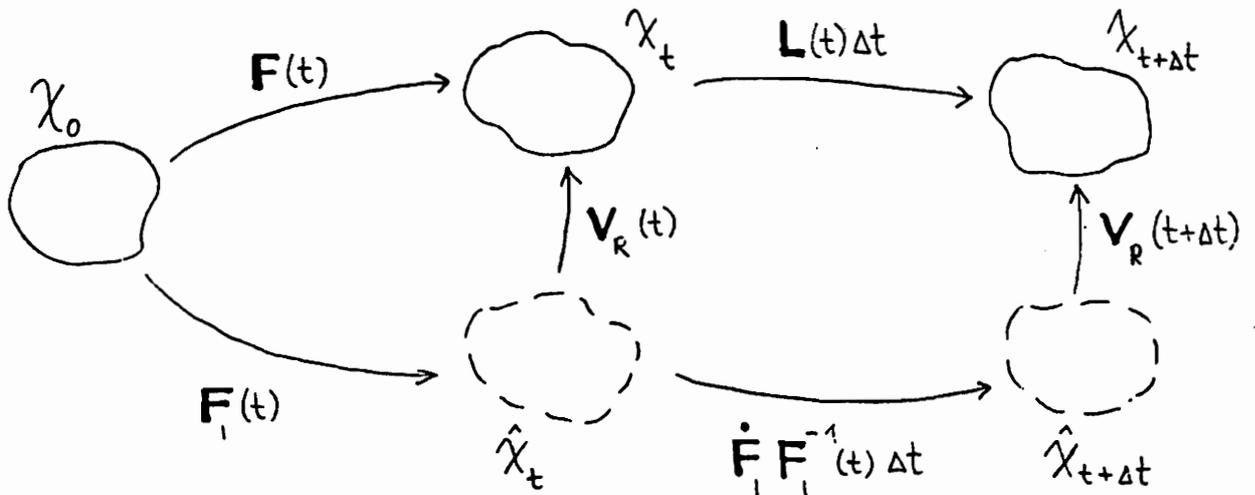


Fig.B.7.

Dann soll gelten

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q}\mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{F}_i^* = \mathbf{Q}\mathbf{F}_i \quad , \quad \mathbf{V}_R^* = \mathbf{Q}\mathbf{V}_R\mathbf{Q}^T \quad (\text{B.210})$$

Es sei angemerkt, daß das Symbol * sich in Kap.B1.7. nur auf Euklidisch transformierte Größen bezieht und in keinem Zusammenhang mit der Zeit t^* steht.

II) Verzerrungs- und Spannungsmaße

i) Sei

$$\mathbf{E}_R = \frac{1}{2} (\mathbf{V}_R^2 - 1) \quad , \quad \mathbf{E}_R^* = \mathbf{Q}\mathbf{E}_R\mathbf{Q}^T \quad (\text{B.211})$$

der reversible Green'sche Verzerrungstensor in $\hat{\chi}_t$.

ii) Sei

$$\hat{\mathbf{A}}_i = \frac{1}{2} (1 - \mathbf{F}_i^{-T} \mathbf{F}_i^T) \quad , \quad \hat{\mathbf{A}}_i^* = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}_i\mathbf{Q}^T \quad (\text{B.212})$$

der irreversible Almansi'sche Verzerrungstensor in $\hat{\chi}_t$.

III) Sei

$$\mathbf{S} = \Delta \mathbf{V}_R^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{V}_R^{-1} \quad , \quad \mathbf{S}^* = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{Q}^T \quad (\text{B.213})$$

der 2.Piola-Kirchhoff-Tensor in $\hat{\chi}_t$. $\boldsymbol{\sigma}$ ist der Cauchy-Tensor.

III) Tensorwertige innere Variable und Prozeßvariable

i) Modell 1.2. enthält die tensorwertigen Variablen $\boldsymbol{\tau}, \mathbf{X}_T, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\varepsilon}_{vL}, \boldsymbol{\alpha}_q$. Die Tensoren

τ, X_T, Z, α_q werden nun auch formal in Modell 1.2.LD für die Momentankonfiguration eingeführt. Dies bereitet keine Probleme, da wir uns die bei der zu τ, Z führenden Homogenisierung notwendigen Schritte auch in der Momentankonfiguration durchgeführt denken können. Wir postulieren

$$\tau, X_T, Z, \alpha_q \text{ sind objektiv.} \quad (\text{B.214})$$

τ ist dann sinngemäß als Cauchy-Spannungskonzentrationstensor zu bezeichnen. Da das inelastische Verhalten aber im Übergang $\hat{\chi}_t \rightarrow \hat{\chi}_{t+\Delta t}$ besteht, ist es notwendig, die Größen aus (B.214) geeignet in die Zwischenkonfiguration zu transformieren. Die transformierten Größen werden i.a. durch ein hochgestelltes ($\hat{\quad}$) gekennzeichnet; bei einigen ausgezeichneten Variablen lohnt sich aber die Einführung eines neuen Symbols, so wie dies auch z.B. mit $\hat{\sigma} =: S$ geschah.

Es ist naheliegend, die mit Mikrospannungen verknüpften Größen τ, X_T wie σ zu transformieren:

$$T := \Delta V_R^{-1} \tau V_R^{-1} \quad (\text{B.215})$$

$$\hat{X}_T := \Delta V_R^{-1} X_T V_R^{-1} \quad (\text{B.216})$$

II) Bei der Transformation von Z orientieren wir uns an der Darstellung

$$Z \sim \sum \delta A_\alpha * e_\alpha \text{ in } \chi_t \quad (\text{B.217})$$

δA_α ist eine materielle Fläche, e_α ein materieller Vektor, so daß

$$Z \sim \Delta V_R^{-1} \left(\sum \delta \hat{A}_\alpha * \hat{e}_\alpha \right) V_R \quad (\text{B.218})$$

Den Klammerausdruck bezeichnen wir als \hat{Z} . Dadurch wird

$$\hat{Z} := \frac{1}{\Delta} V_R Z V_R^{-1} \quad (\text{B.219})$$

ein auf die Zwischenkonfiguration bezogenes Schädigungsmaß.

III) Im Rahmen von Modell 1.2. haben wir für die thermische innere Variable $\alpha_q \sim q$ erhalten, und obwohl die Bestätigung dieser Proportionalität für große Deformationen noch aussteht scheint es sinnvoll, für α_q gleiches Transformationsverhalten wie für q zu verlangen. Wir setzen also

$$A_q = \Delta V_R^{-1} \alpha_q \quad (\text{B.220})$$

$$\hat{q} = \Delta V_R^{-1} q \quad (\text{B.221})$$

und ferner

$$\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{V}_R \mathbf{g} \quad \text{mit} \quad \mathbf{g} = \text{grad } \Theta, \quad \hat{\rho} = \Delta \rho = \text{konst} \quad (\text{B.222})$$

iv) Das Maß ε_{VL} der lokalen Versetzungsbewegung ist aufgrund von (B.53,54) kein Bestandteil der Gesamtverzerrung. Das Analogon zu ε_{VL} in einer Theorie großer Deformationen sollte die Eigenschaften eines Almansi-Tensors in der Zwischenkonfiguration besitzen. Lokale versetzungsinduzierte Deformationen werden also durch eine mit $\hat{\mathbf{A}}_{VL}$ bezeichnete Größe gemessen. Für die update-Lagrange-Beschreibung benötigen wir die Größe \mathbf{A}_{VL} in χ_t , die mit $\hat{\mathbf{A}}_{VL}$ folgendermaßen zusammenhängt:

$$\hat{\mathbf{A}}_{VL} = \mathbf{V}_R \mathbf{A}_{VL} \mathbf{V}_R \quad (\text{B.223})$$

v) Alle Größen $\mathbf{T}, \hat{\mathbf{X}}_T, \hat{\mathbf{Z}}, \mathbf{A}_q, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{A}}_{VL}$ sind objektiv.

IV) Einige Eigenschaften der Verzerrungsgeschwindigkeiten

i) In der Zerlegung (B.208) des Geschwindigkeitsgradienten tritt die Größe $\dot{\mathbf{F}}_I \mathbf{F}_I^{-1}$ auf, die ein Maß für die inelastische Deformationsrate beinhaltet. Wegen

$$\left(\dot{\mathbf{F}}_I \mathbf{F}_I^{-1} \right)^* = \mathbf{Q} \left(\dot{\mathbf{F}}_I \mathbf{F}_I^{-1} \right) \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \quad (\text{B.224})$$

ist $\dot{\mathbf{F}}_I \mathbf{F}_I^{-1}$ aber keine geeignete Materialgröße.

Wir definieren nun eine Klasse von objektiven Ableitungen mit CRP durch

$$\overset{\circ}{\mathbf{F}}_I = \dot{\mathbf{F}}_I - \mathbf{\Omega} \mathbf{F}_I \quad (\text{B.225})$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{V}}_R = \dot{\mathbf{V}}_R - \mathbf{\Omega} \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_R \mathbf{\Omega}, \quad \mathbf{\Omega} = -\mathbf{\Omega}^T \quad (\text{B.226})$$

(B.226) soll entsprechend auch für andere symmetrische Tensoren in $\hat{\chi}_t$ gelten. $\overset{\circ}{\mathbf{V}}_R$ und $\overset{\circ}{\mathbf{F}}_I \mathbf{F}_I^{-1}$ sind objektiv. Es folgt dann

$$\mathbf{L} = \mathbf{\Omega} + \overset{\circ}{\mathbf{V}}_R \mathbf{V}_R^{-1} + \mathbf{V}_R \overset{\circ}{\mathbf{F}}_I \mathbf{F}_I^{-1} \mathbf{V}_R^{-1} \quad (\text{B.227})$$

ii) Eine spezielle Wahl von $\mathbf{\Omega}$ wird in [139],[144],[145],[147] vorgeschlagen (mit dieser Wahl gewinnen wir dann den Anschluß an das Konzept der isoklinen Konfiguration): Man kann sich die Konfiguration $\hat{\chi}_t$ nämlich wie folgt entstanden denken:

$$\text{Sei} \quad \mathbf{F}_I = \beta \tilde{\mathbf{F}}_I \quad (\text{B.228})$$

$\tilde{\mathbf{F}}_I$ ist der inelastische Deformationsgradient der isoklinen Konfiguration und β ist eine elastische Drehung.

$$\omega := \dot{\beta} \beta^T \quad (B.229)$$

ist ein Maß für die Drehgeschwindigkeit zwischen den Vorzugsrichtungen des Materials und dem Material selbst. Man kann nun

$$\Omega = \omega \quad (B.230)$$

wählen. Eine derartige Festlegung von Ω ist an dieser Stelle nicht notwendig: Ω erscheint in der späteren Rechnung nur über

$$W = \Omega + W_I \quad (B.231)$$

Man kann nun entweder Ω oder den inelastischen Spin W_I als Materialgröße auffassen. Üblicherweise entscheidet man sich für W_I . Die in [139],[144],[145] diskutierten Ansätze für W_I beruhen formal auf Darstellungssätzen für Tensorfunktionen, enthalten aber keine versetzungstheoretische Deutung. Die Bedeutung von $\Omega = W - W_I$ als „Relativdrehung von elastischen Vorzugsrichtungen und Material“ ist daher nicht präzise erfaßt.

B1.7.3. Konstitutive Annahmen für Größen der Zwischenkonfiguration

I) Zerlegung der Dehngeschwindigkeit

In Anlehnung an *Dafalias* [145] wird definiert

$$\left. \begin{aligned} \hat{D}_I &:= \text{sym}(\overset{\circ}{F}_I F_I^{-1}) & \hat{W}_I &:= \text{asym}(\overset{\circ}{F}_I F_I^{-1}) \\ D_I &:= \text{sym}(V_R \overset{\circ}{F}_I F_I^{-1} V_R^{-1}) & W_I &:= \text{asym}(V_R \overset{\circ}{F}_I F_I^{-1} V_R^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (B.232)$$

$$D_R := \text{sym}(\overset{\circ}{V}_R V_R^{-1}) \quad W_R := \text{asym}(\overset{\circ}{V}_R V_R^{-1}) \quad (B.233)$$

Alle diese Größen sind objektiv. Mit Blick auf (B.227) folgt

$$L = D + W, \quad D = D_R + D_I, \quad W = \Omega + W_R + W_I \quad (B.234)$$

II) Die inelastischen Deformationen bestehen im Übergang $\hat{\chi}_I \rightarrow \hat{\chi}_{I+\Delta_I}$. Deshalb werden \hat{D}_I, \hat{W}_I als Materialgrößen gewählt. Sie lassen sich später leicht in D_I, W_I umrechnen.

I) Ansatz für \hat{D}_I :

Wir orientieren uns an Modell 1.2. und verlangen

$$\hat{D}_I = \hat{D}_{vt} + \hat{D}_0 \quad (B.235)$$

$$\hat{D}_{vt} = \gamma_T [\Phi_T]_T \hat{N}_T \quad (B.236)$$

falls $F_T = (S^I - \hat{X}_T) \cdot (S^I - \hat{X}_T) - g_T(x, \theta, u) \geq 0$

$$\hat{D}_o = [d_o]_o \lll LC_o \ggg \hat{N}_T \quad (B.237)$$

falls $G_o = T^I \cdot T^I - v_o \text{tr} T - h_o \geq 0$

und $LC_o = \frac{\partial G_o}{\partial T} \cdot \overset{\circ}{T} \Big|_{\text{spontan}} > 0$

Sind \hat{N}_T , \hat{N}_o objektive Tensoren und sind γ_T , Φ_T , d_o , G_o , g_T objektive Skalare, so handelt es sich bei (B.236,237) um reduzierte Formen. Die additive Zerlegung von \hat{D}_I wird hier axiomatisch eingeführt. Die Gln. (B.235-237) entsprechen den allgemeinen Ansätzen (B.78,101) im Fall kleiner Deformationen.

II) Evolutionsgesetze für die Damage-Variablen

$$\overset{\circ}{T} = \hat{D} \overset{\circ}{S} + K d_4 \Delta^{-1} (S V_R^2 \cdot \hat{D}_{vt}) T - m T = \overset{\circ}{T} \Big|_{\text{spontan}} - m T \quad (B.238)$$

$$(\hat{Z})^\circ = [d_z]_z \lll LC_z \ggg \hat{N}_z \quad (B.239)$$

falls $G_z = T^I \cdot T^I - v_z \text{tr} T - h_z \geq 0$

und $LC_z = \frac{\partial G_z}{\partial T} \cdot \overset{\circ}{T} \Big|_{\text{spontan}} \geq 0$

$$\dot{\vartheta} = [d_{\theta v}]_v \quad (B.240)$$

$$(\hat{A}_{vl})^\circ = \gamma_{vl} [\Phi_{vl}]_v \hat{N}_{vl} \quad (B.241)$$

Auch hier handelt es sich jeweils um reduzierte Formen, sofern \hat{N}_z und \hat{N}_{vl} objektiv sind.

III) Evolutionsgesetze der Versetzungsvariablen

$$(\hat{X}_T)^\circ = c_T \hat{D}_{vt} \quad (B.242)$$

$$\dot{x} = K(x, \theta) \Delta^{-1} S V_R^2 \cdot \hat{D}_{vt} \quad (B.243)$$

IV) Die Liste der konstitutiven Gleichungen ist durch einen Ansatz für \hat{W}_I zu ergänzen. Die in der Literatur behandelten Vorschläge gehen nur von einem einzigen

inelastischen Deformationsmechanismus aus und unterwerfen \hat{W}_I den gleichen Bedingungen wie \hat{D}_I . Dies ist bei unserem Modell nicht durchführbar und vielleicht ein Hinweis darauf, daß die Einführung einer einzigen Zwischenkonfiguration für alle inelastischen Mechanismen noch nicht der Weisheit letzter Schluß ist. Die Kritik trifft in gleichem Maße auch die axiomatisch eingeführte Zerlegung (B.235). In Analogie zu (B.235) muß man auch

$$\hat{W}_I = \hat{W}_{vt} + \hat{W}_0 \quad (\text{B.244})$$

verlangen. Wir vernachlässigen \hat{W}_0 , weil innerhalb des Gültigkeitsbereichs der Kontinuumstheorie der Beitrag der Schädigung zur Deformation noch deutlich kleiner ist als der Beitrag der thermisch aktivierten Versetzungsbewegung. Bei Bedarf kann man später immer noch eine Gleichung für \hat{W}_0 einführen.

Für \hat{W}_{vt} gelte die g.a. Gleichung

$$\hat{W}_{vt} = \gamma_{tw} [\Phi_{tw}]_T \hat{N}_{tw} \quad (\text{B.245})$$

In Kap.B1.7.4. wird gezeigt, daß \hat{W}_{vt} im Rahmen der Näherung (B.206) keinen thermodynamischen Restriktionen unterliegt. Zur Bestimmung von \hat{N}_{tw} werden üblicherweise Darstellungssätze herangezogen. Es scheint sinnvoll, \hat{N}_{tw} nur von den beiden Tensoren S , \hat{X}_T abhängig zu machen, die als unabhängige Variable in den Evolutionsgesetzen der thermischen Aktivierung auftreten.

Der einfachste mit den Darstellungssätzen verträgliche Ansatz ist

$$\hat{N}_{tw} = \frac{\hat{X}_T S^I - S^I \hat{X}_T}{\|\hat{X}_T\| \|S^I\|} \quad (\text{B.246})$$

Mit diesem Ansatz verschwindet \hat{W}_I beim einachsigen Spannungszustand, weil S^I und \hat{X}_T dann koaxial sind.

Wir merken noch an, daß \hat{W}_{vt} mit (11.3.14) den gleichen Nebenbedingungen unterliegt wie \hat{D}_{vt} . Eine davon abweichende Vorgehensweise findet man in [147].

III) Thermoelastisches Verhalten

Die Materialbeschreibung wird durch den Ansatz für die Enthalpie vervollständigt. g wird mit Größen der Zwischenkonfiguration formuliert. Hierzu wird der auf Modell 1.2. spezialisierte Ansatz (B.126) herangezogen und es werden die Ersetzungen

$$\sigma \rightarrow S, \tau \rightarrow T, Z \rightarrow \hat{Z}, X_T \rightarrow \hat{X}_T, \rho \rightarrow \hat{\rho}, \alpha_q \rightarrow A_q, \zeta \rightarrow \hat{\zeta} \quad (\text{B.247})$$

vorgenommen. Somit gilt :

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}g &= \frac{1}{2}\lambda_1(\theta - \theta_0)^2 + \lambda_2(\theta - \theta_0) \operatorname{tr} \mathbf{S} + \frac{1}{2}\lambda_3(\hat{\zeta})(\operatorname{tr} \mathbf{S})^2 \\
 &+ \frac{1}{2}\lambda_4(\hat{\zeta}) \operatorname{tr} \mathbf{S}^2 - \frac{\mu_1}{2}(\operatorname{tr} \mathbf{T})^2 - \frac{\mu_2}{2} \operatorname{tr} \mathbf{T}^2 \\
 &+ 2\mu_3 \|\mathbf{S}^1\|^2 \left(\sum n_{\Lambda}^s * n_{\Lambda}^s \right) \cdot \hat{\mathbf{Z}} + \frac{1}{2}\mu_4 \operatorname{tr} \hat{\mathbf{Z}}^2 + \frac{1}{2}\mu_6 \vartheta^2 \\
 &- \nu_2 \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{X}}_{\tau} - \frac{1}{2}\nu_3 x^2 + \nu_4 x(\theta - \theta_0) - \frac{k}{2\tau_{\vartheta}} \mathbf{A}_{\vartheta} \cdot \mathbf{A}_{\vartheta}
 \end{aligned}
 \tag{B.248}$$

n_{Λ}^s sind hierbei die Normalen der HSS-Ebenen von \mathbf{S} . Mit diesem Ansatz und den Evolutionsgesetzen (B.236-245) wird die CDU ausgewertet.

B1.7.4. Auswertung der CDU für Modell 1.2.LD

1) Aufstellung der CDU

i) Die CDU in der Momentankonfiguration

$$-\dot{\varphi} - \eta \dot{\theta} + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{\rho \theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (\mathbf{g} = \operatorname{grad} \theta)
 \tag{B.249}$$

wird zunächst unter Verwendung von

$$\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\hat{\rho}} \mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{E}}_R + \frac{1}{\hat{\rho}} \mathbf{S} \mathbf{V}_R^2 \cdot \hat{\mathbf{D}}_I + \frac{1}{2\hat{\rho}} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{V}_R^2 \hat{\mathbf{W}}_I - \hat{\mathbf{W}}_I \mathbf{V}_R^2)
 \tag{B.250}$$

$$\frac{1}{\rho \theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} = \frac{1}{\hat{\rho} \theta} \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{g}}
 \tag{B.251}$$

mit Größen der Zwischenkonfiguration formuliert. Danach definieren wir die Enthalpie durch

$$\hat{\rho}g = \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_R - \hat{\rho}\varphi
 \tag{B.252}$$

und erhalten, wenn wir beachten, daß bei plastischer Inkompressibilität $\hat{\rho} = \text{konst.}$ ist und daß für die Ableitung $()^{\circ}$ die Produktregel gilt:

$$\hat{\rho} \dot{g} = \mathbf{S} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{E}}_R + \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{E}_R - \hat{\rho} \dot{\varphi}
 \tag{B.253}$$

Damit lautet die CDU dann

$$\hat{\rho} \dot{g} - \mathbf{E}_R \cdot \overset{\circ}{\mathbf{S}} - \hat{\rho} \eta \dot{\theta} + \mathbf{S} \mathbf{V}_R^2 \cdot \hat{\mathbf{D}}_I + \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{V}_R^2 \hat{\mathbf{W}}_I - \hat{\mathbf{W}}_I \mathbf{V}_R^2) - \frac{1}{\theta} \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{g}} \geq 0
 \tag{B.254}$$

II) Den Ansatz (B.248) für g können wir als

$$g = \mathcal{Q}(S, \Theta; \hat{Z}, T, \vartheta; x, \hat{X}_T; A_q)$$

schreiben. g ist objektiv; wegen der Transformationseigenschaften seiner Argumente gilt

$$g^* = \mathcal{Q}(QS Q^T, \dots, QA_q, \dots) \stackrel{!}{=} g = \mathcal{Q}(S, \dots, A_q, \dots) \quad (B.255)$$

\mathcal{Q} ist also eine isotrope Funktion und \dot{g} kann in Verbindung mit der CRP leicht berechnet werden [145]. Die CDU lautet dann:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial g}{\partial S} + \hat{D}^T \frac{\partial g}{\partial T} - \frac{1}{\hat{\rho}} E_R + \lll \hat{a}_{o1} \ggg \hat{D}^T \hat{G}_z + \lll \hat{a}_{o2} \ggg \hat{D}^T \hat{G}_o \right] \cdot \hat{S} \\ & + \left[\frac{\partial g}{\partial \Theta} - \eta \right] \dot{\Theta} + \left[\hat{a}_{v2} + \lll \hat{a}_{o1} \ggg \hat{G}_z \cdot \hat{M} + \lll \hat{a}_{o2} \ggg \hat{G}_o \cdot \hat{M} \right] S V_R^2 \cdot \hat{D}_{vT} \\ & + \frac{k}{\hat{\rho} \Theta \tau_q^2} A_q \cdot A_q - \frac{1}{\hat{\rho} \Theta} \left[\frac{k}{\tau_q} A_q + \hat{q} \right] \cdot \hat{g} + c_T \frac{\partial g}{\partial \hat{X}_T} \cdot \hat{D}_{vT} - m \frac{\partial g}{\partial T} \cdot T \\ & + \frac{\partial g}{\partial \vartheta} [d_{\Theta v}]_v + \frac{1}{2 \hat{\rho}} S \cdot (V_R^2 \hat{W}_I - \hat{W}_I V_R^2) \geq 0 \end{aligned} \quad (B.256)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \hat{a}_{o1} &= (\partial g / \partial \hat{Z}) \cdot \hat{N}_z [d_z]_z & G_z &= 2T^I - v_z 1 \\ \hat{a}_{o2} &= \frac{1}{\hat{\rho}} [d_o] S V_R^2 \cdot \hat{N}_o & G_o &= 2T^I - v_o 1 \\ \hat{a}_{v2} &= \frac{1}{\hat{\rho}} + \frac{K(x, \Theta)}{\Delta} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial g}{\partial T} \cdot \hat{M} & \hat{M} &= d_4 T \end{aligned} \quad (B.257)$$

III) Die CDU hat mit Ausnahme des \hat{W}_I enthaltenden Summanden die gleiche Form wie die in Kap.B1.4. ausführlich diskutierte Gleichung (B.109). Wir können deshalb sofort einige Folgerungen ziehen:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{o1} &\geq 0 \\ \hat{a}_{o2} &\geq 0 \\ \eta &= \frac{\partial g}{\partial \Theta} \end{aligned} \quad (B.258)$$

$$E_R = \hat{\rho} \frac{\partial g}{\partial S} + \hat{\rho} \hat{D}^T \frac{\partial g}{\partial T} \approx \hat{\rho} \frac{\partial g}{\partial S}$$

$$\hat{q} = -\frac{k}{\tau_q} A_q$$

IV) Von der verbleibenden Ungleichung interessiert die Teilungleichung zur Beschreibung der thermisch aktivierten Versetzungsmechanismen:

$$\hat{a}_{v_2} S V_R^2 \cdot \hat{D}_{vT} + c_T \frac{\partial g}{\partial X_T} \cdot \hat{D}_{vT} + \frac{1}{2\hat{\rho}} S \cdot (V_R^2 \hat{W}_I - \hat{W}_I V_R^2) \geq 0 \quad (B.259)$$

Bis zu diesem Zeitpunkt wurde noch nicht von der Vereinfachung bzgl. V_R Gebrauch gemacht. Ersetzen wir V_R in (B.259) durch $\Delta 1$, so

- fällt der Beitrag von \hat{W}_I aus der CDU heraus
- kann man die ersten Summanden in der Form

$$\Delta^2 \frac{1}{\hat{\rho}} (1 - \hat{\xi}_T) S \cdot \hat{D}_{vT} \geq 0 \quad (B.260)$$

mit
$$\hat{\xi}_T = \frac{K}{\Delta} \{ v_3 x - v_4 (\Theta - \Theta_0) \} + \frac{1}{\Delta^2} v_2 c_T + \frac{1}{\Delta} \frac{\partial g}{\partial T} \cdot \hat{M}$$

schreiben und wie gehabt auswerten.

Der Ansatz für \hat{W}_I wird nicht durch die CDU eingeschränkt, (B.246) ist thermodynamisch zulässig. Mit (B.260) erhalten wir ferner die bekannten Ungleichungen

$$\hat{a}_{v_2} \geq 0 \quad S \cdot \hat{D}_{vT} \geq 0 \quad (B.261)$$

II) Thermodynamisch zulässige Materialgleichungen

Die in (B.258,261) noch enthaltenen Restriktionen lassen sich auf die gleiche Weise wie in Kap.B1.4. erfüllen, wenn man die dortigen Gleichungen nun mit Variablen der Zwischenkonfiguration formuliert. Wir geben hier nur die Evolutionsgesetze selbst an; die Nebenbedingungen sind (B.236-245) zu entnehmen.

I) Damage-Variable

$$\overset{\circ}{T} = \underbrace{d_1 S + d_2 (T \overset{\circ}{S} + \overset{\circ}{S} T) + d_3 (\hat{Z} \overset{\circ}{S} + \overset{\circ}{S} \hat{Z}) + K d_4 \Delta (S \cdot \hat{D}_{vT}) T}_{= \hat{D} \overset{\circ}{S}} - mT \quad (B.262)$$

$$(\hat{Z})^\circ = [d_z]_z \ll LC_z \gg \{ 2\mu_3 \|S\|^2 \sum n_\Lambda^s * n_\Lambda^s + (\mu_4 + \hat{\omega}) \hat{Z} \} \quad (B.263)$$

$$\text{mit } \hat{\omega} = \frac{1}{2\hat{\zeta}} \{ \lambda_3'(\hat{\zeta})(\text{tr } \mathbf{S})^2 + \lambda_4'(\hat{\zeta}) \text{tr } \mathbf{S}^2 \}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_{\text{VT}} = [\mathbf{d}_o]_o \lll \text{LC}_o \ggg \frac{\mathbf{S}^I}{\|\mathbf{S}^I\|} \quad (\text{B.264})$$

$$\dot{\hat{\theta}} = [\mathbf{d}_{\Theta v}]_v \quad (\text{B.265})$$

$$(\hat{\mathbf{A}}_{\text{VL}})^o = \gamma_{\text{VL}} [\Phi_{\text{VL}}]_v \frac{\mathbf{T}^I}{\|\mathbf{T}^I\|} \quad (\text{B.266})$$

II) Variablen zur Beschreibung der Versetzungsmechanismen

$$\hat{\mathbf{D}}_{\text{VT}} = \gamma_{\text{T}} [\Phi_{\text{T}}]_{\text{T}} \frac{\mathbf{S}^I - \hat{\mathbf{X}}_{\text{T}}}{\|\mathbf{S}^I - \hat{\mathbf{X}}_{\text{T}}\|} \quad (\text{B.267})$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \Delta K(\mathbf{x}, \Theta) \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{D}}_{\text{VT}} \quad (\text{B.268})$$

$$(\hat{\mathbf{X}}_{\text{T}})^o = c_{\text{T}} \hat{\mathbf{D}}_{\text{VT}} \quad (\text{B.269})$$

Die Evolutionsgleichung für u wird in der Form (B.195) beibehalten mit

$$\text{PG} = \max \{ 0, \|\mathbf{D}\| + \chi_{v1} \dot{\hat{\theta}} \} \quad (\text{B.270})$$

III) Variablen zur Beschreibung thermoelastischen Verhaltens

$$\mathbf{E}_r \approx \left\{ \lambda_2(\Theta - \Theta_0) + \lambda_3(\hat{\zeta}) \text{tr } \mathbf{S} \right\} \mathbf{1} + \lambda_4(\hat{\zeta}) \mathbf{S} \quad (\text{B.271})$$

$$\hat{\rho} \eta \approx \lambda_1(\Theta - \Theta_0) + \lambda_2 \text{tr } \mathbf{S} + \nu_4 \mathbf{x} \quad (\text{B.272})$$

$$\tau_q \hat{\mathbf{q}}^o = -\hat{\mathbf{q}} - k \hat{\mathbf{g}} \quad (\text{B.273})$$

Für den Vektor \mathbf{q} ist die Ableitung $()^o$ übrigens gemäß (B.225) zu berechnen. Die mit (B.271,272) verbundenen Vereinfachungen sind in Kap.B1.6.2. erläutert (Annahmen c),e)).

Die Gleichungen (B.262-273) werden unter Verwendung von \mathbf{V}_r bzw. \mathbf{V}_r^{-1} mit der Näherung (B.206) nach χ_i transformiert.

B1.7.5. Formulierung von Stoffgesetzen in der Momentankonfiguration

I) Mit (B.209), d.h. mit $V_R \approx \Delta 1$, lassen sich die in $\hat{\chi}_T$ eingeführten Variablen folgendermaßen umrechnen:

$$\begin{aligned}
 S &= \Delta^{-1} \sigma & T &= \Delta^{-1} \tau & \hat{X}_T &= \Delta^{-1} X_T \\
 \hat{Z} &= \Delta^{-1} Z & A_q &= \alpha_q & \hat{q} &= q & \hat{g} &= \Delta g \\
 \hat{\rho} &= \Delta \rho & \hat{A}_{vL} &= \Delta^{-2} A_{vL} \\
 \hat{D}_I &= D_I = D_{vT} + D_D & \hat{W}_I &= W_I
 \end{aligned}
 \tag{B.274}$$

Überdies gilt

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{E}_R &= \frac{1}{2} (V_R \overset{\circ}{V}_R + \overset{\circ}{V}_R V_R) = \Delta \overset{\circ}{V}_R \\
 D_R &= \text{sym}(\overset{\circ}{V}_R V_R^{-1}) = \Delta^{-1} \overset{\circ}{V}_R = \Delta^{-2} \overset{\circ}{E}_R, \quad W_R = 0.
 \end{aligned}
 \tag{B.275}$$

II) Umrechnung der Zeitableitungen

I) In Verbindung mit $\dot{\Delta} = \Delta \text{tr} D_R = \Delta \text{tr} D$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{S} &= (\Delta^{-1} \sigma)' - \Omega \Delta^{-1} \sigma + \Delta^{-1} \sigma \Omega \\
 &= \Delta^{-1} \dot{\sigma} - \Delta^{-1} (\text{tr} D_R) \sigma - \Omega \Delta^{-1} \sigma + \Delta^{-1} \sigma \Omega \\
 &=: \frac{1}{\Delta} \overset{*}{\sigma}
 \end{aligned}$$

Hierbei ist $\overset{*}{\sigma} = \dot{\sigma} - \sigma (\text{tr} D_R)$

II) Mit zu (B.277) analogen Schritten ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{S} &= \frac{1}{\Delta} \overset{*}{\sigma} & (\hat{X}_T)^\circ &= \frac{1}{\Delta} \overset{*}{X}_T & \overset{\circ}{T} &= \frac{1}{\Delta} \overset{*}{\tau} \\
 (\hat{Z})^\circ &= \frac{1}{\Delta} \overset{*}{Z} & (\hat{A}_{vL})^\circ &= \frac{1}{\Delta^2} (\overset{*}{A}_{vL} - A_{vL} \text{tr} D_R) \\
 (\hat{q})^\circ &= \overset{\circ}{q}
 \end{aligned}
 \tag{B.278}$$

III) Berechnung der elastischen Dehngeschwindigkeit D_R

I) Mit der in (B.271) abgeleiteten Näherung für E_R soll nun $\overset{\circ}{E}_R$ berechnet werden. Wie schon im Zusammenhang mit (B.151) erläutert wurde, wollen wir uns dabei auf die hypoelastische Approximation beschränken, also die mit $(\hat{Z})^\circ$ zu bilden-

den Koppelterme vernachlässigen. Dann folgt mit

$$\hat{\zeta} = \Delta^{-1} \zeta \quad , \quad \zeta = \|Z\|$$

das Zwischenergebnis

$$\mathring{E}_R \approx \lambda_2 \dot{\Theta} 1 + \lambda_3(\zeta, \Delta) (\text{tr } \mathring{S}) 1 + \lambda_4(\zeta, \Delta) \mathring{S} . \quad (\text{B.279})$$

Für die weitere Rechnung führen wir noch die Abkürzung

$$\tilde{K}^{-1} = 3\lambda_3 + \lambda_4 \quad (\text{B.280})$$

Mit (B.275,277) folgen

$$\text{tr } D_R = \frac{3\lambda_2 \Delta \dot{\Theta} + \tilde{K}^{-1} \text{tr } \mathring{\sigma}}{\Delta^3 + \tilde{K}^{-1} \text{tr } \sigma} \quad (\text{B.281})$$

und schließlich

$$D_R = \frac{(\Delta^3 + \lambda_4 \text{tr } \sigma) 1 - 3\lambda_4 \sigma}{\Delta^2 (\Delta^3 + (\text{tr } \sigma) / \tilde{K})} \lambda_2 \dot{\Theta} + \frac{\lambda_4}{\Delta^3} \mathring{\sigma} + \frac{\lambda_3 \Delta^3 1 - (\lambda_4 / \tilde{K}) \sigma}{\Delta^3 (\Delta^3 + (\text{tr } \sigma) / \tilde{K})} \text{tr } \mathring{\sigma} \quad (\text{B.282})$$

Wie man sieht enthält D_R auch Terme der Größenordnung $\text{tr } \sigma / \tilde{K}$, die man bei langsamen Prozessen gewöhnlich gegen 1 vernachlässigt.

ii) Für die Determinante Δ gilt:

$$\Delta^2 = \det(1 + 2E_R) \approx 1 + 2 \text{tr } E_R . \quad (\text{B.283})$$

Dies ist leider keine explizite Gleichung für Δ , weil Δ in $\text{tr } E_R$ ebenfalls auftritt, wenn man E_R mit Größen der Momentankonfiguration ausrechnet. Tatsächlich gilt

$$\text{tr } E_R = 3\lambda_2(\Theta - \Theta_0) + \frac{1}{\tilde{K}(\zeta, \Delta)} \frac{1}{\Delta} \text{tr } \sigma \quad (\text{B.284})$$

In der numerischen Berechnung wird die rechte Seite durch eine Taylorreihe in $\Delta - 1$ approximiert. Es folgt dann eine quadratische Gleichung für Δ , die in jedem Zeitschritt analytisch gelöst wird.

IV) Für die Entropierate gilt

$$\hat{\rho} \dot{\eta} = \lambda_1 \dot{\Theta} + \frac{1}{\Delta} \lambda_2 \operatorname{tr} \dot{\sigma} - \frac{1}{\Delta} \lambda_2 (\operatorname{tr} \sigma) (\operatorname{tr} D) + v_4 \dot{x}$$

V) Zusammenstellung der Materialgleichungen von Modell 1.2.LD

1) Evolutionsgleichungen für die Damage-Variablen

Der Reihe nach ergeben sich aus (B.262-273):

$$\begin{aligned} \ddot{\tau} &= D \ddot{\sigma} + K d_4 (\sigma \cdot D_{vr}) \tau - m \tau \\ \text{mit } D \ddot{\sigma} &= d_1 \ddot{\sigma} + \frac{1}{\Delta} d_2 (\tau \ddot{\sigma} + \ddot{\sigma} \tau) + \frac{1}{\Delta} d_3 (Z \ddot{\sigma} + \ddot{\sigma} Z) \end{aligned} \quad (\text{B.286})$$

$$\begin{aligned} \ddot{Z} &= [d_z]_z \lll LC_z \ggg \left\{ \frac{\mu_3}{\Delta^2} \|\sigma^I\|^2 \sum n_\Lambda * n_\Lambda + \frac{1}{\Delta} (\mu_4 + \omega) Z \right\} \\ \text{falls } LC_z &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{2}{\Delta} \tau^I - v_z 1 \right) \cdot (\ddot{\tau} + m \tau) > 0 \\ \text{und } G_z &= \frac{1}{\Delta^2} \tau^I \cdot \tau^I - \frac{v_z}{\Delta} \operatorname{tr} \tau - h_z \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.287})$$

Bei der Herleitung von (B.287) ist zu beachten, daß σ, S im Rahmen der Näherung (B.274) koaxial sind, d.h. $n_\Lambda^s = n_\Lambda$.

$$\begin{aligned} D_o &= [d_o]_o \lll LC_o \ggg \frac{\sigma^I}{\|\sigma^I\|} \\ \text{falls } LC_o &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{2}{\Delta} \tau^I - v_o 1 \right) \cdot (\ddot{\tau} + m \tau) > 0 \\ \text{und } G_o &= \frac{1}{\Delta^2} \tau^I \cdot \tau^I - \frac{v_o}{\Delta} \operatorname{tr} \tau - h_o \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.288})$$

$$\dot{\vartheta} = [d_{\Theta v}]_v \quad (\text{B.289})$$

$$\begin{aligned} \ddot{A}_{vl} &= \Delta^2 \gamma_{vl} [\Phi_{vl}]_v \frac{\tau^I}{\|\tau^I\|} + A_{vl} \operatorname{tr} D_R \\ \text{falls } G_v &= \frac{1}{\Delta^2} \tau^I \cdot \tau^I - h_v \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.290})$$

II) Evolutionsgleichungen für die Variablen der Versetzungsmechanismen

$$D_{vT} = \gamma_T [\Phi_T]_T \frac{\sigma^I - X_T}{\|\sigma^I - X_T\|} \quad (B.291)$$

$$\text{falls } F_T = \frac{1}{\Delta^2} (\sigma^I - X_T) \cdot (\sigma^I - X_T) - g_T(x, \theta, u) \geq 0$$

$$\dot{X}_T = \Delta c_T D_{vT} \quad (B.292)$$

$$\dot{x} = K(x, \theta) \sigma \cdot D_{vT} \quad (B.293)$$

Wir definieren die Prozeßgeschwindigkeit durch

$$PG = \max \{0, \|D\| + \chi_{u1} \dot{\theta}\} \quad (B.294)$$

Mit dieser Definition wird die Gleichung (B.195) für u gelöst. Neu ist im Katalog der Stoffgesetze der Ansatz

$$W_I = \gamma_{TW} [\Phi_{TW}]_T \frac{X_T \sigma^I - \sigma^I X_T}{\|\sigma^I\| \|X_T\|} \quad (B.295)$$

III) Die Material- und Prozeßbeschreibung wird vervollständigt durch die Gleichung (B.282) für die thermoelastische Dehngeschwindigkeit, das Wärmeleitgesetz

$$\tau_q \dot{q} - \tau_q (W - W_I) q + q = - \Delta k \text{ grad } \theta \quad (B.296)$$

und den ersten Hauptsatz

$$\begin{aligned} \hat{\rho} c_{\sigma x} \dot{\theta} + \lambda_2 \theta \text{tr } \dot{\sigma} - \frac{\lambda_2}{\Delta} \theta (\text{tr } \sigma)(\text{tr } D) + v_4 \theta \dot{x} &= \Delta (1 - \hat{\xi}_T) \sigma \cdot D_{vT} + \Delta \sigma \cdot D_o \\ + \mu_6 \vartheta [d_{\theta v}]_v + \mu_1 \frac{m}{\Delta^2} (\text{tr } \tau)^2 + \mu_2 \frac{m}{\Delta^2} \tau \cdot \tau \\ + \frac{1}{\Delta^2} \left\{ \frac{2\mu_3}{\Delta} \|\sigma^I\|^2 \sum n_{\Lambda}^* n_{\Lambda} + (\mu_4 + \omega) Z \right\} \cdot (\hat{Z} - Z \text{tr } D) - \text{div } q \end{aligned}$$

(B.297)

TEIL B2 : BESCHREIBUNG DER AUSBREITUNG EINES MAKRO - SCHERBANDES IN PHASE 2

B2.1. Einleitung

I) Wir untersuchen in Teil B2 die geradlinige Ausbreitung eines ebenen Makroscherbandes \mathcal{M} in einem Körper $\mathcal{B}_{\text{ges}} = \mathcal{B} \cup \mathcal{M}$ unter der Annahme kleiner Verzerrungen in \mathcal{B} und \mathcal{M} . Verallgemeinerungen auf krummlinige Ausbreitung sowie große Deformationen werden in [5] behandelt. Wir untersuchen in der vorliegenden Arbeit also die in Fig.B.8. skizzierte Konfiguration.

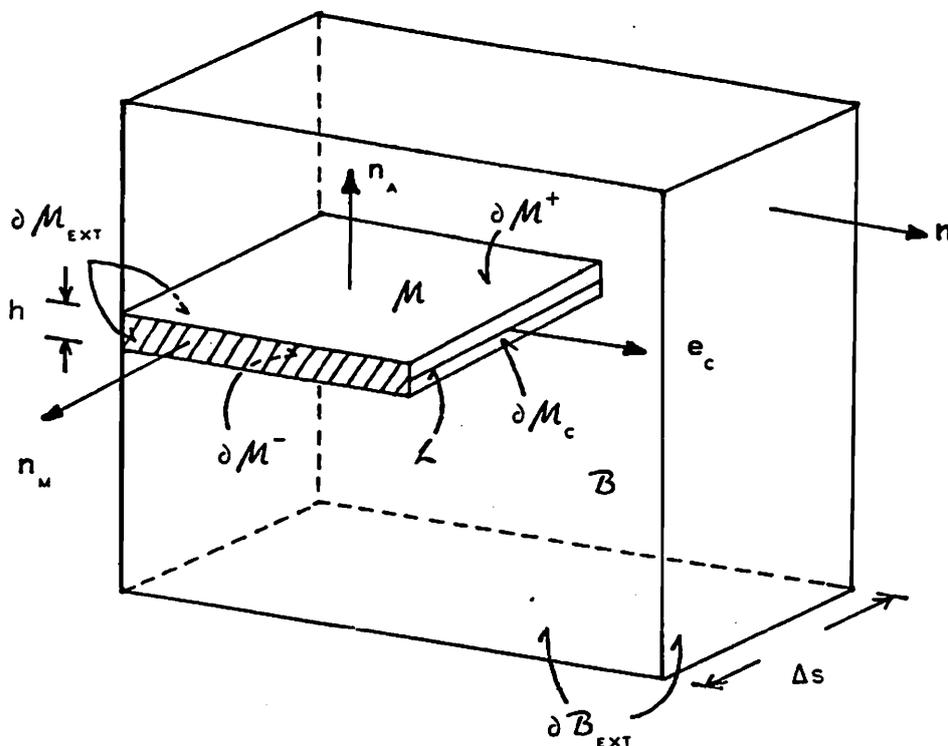


Fig.B.8.

II) Ein MaSB \mathcal{M} ist begrenzt durch einen Rand $\partial\mathcal{M}$. Für diesen gilt nach Fig.B.8.

$$\partial\mathcal{M} = \partial\mathcal{M}_{\text{EXT}} \cup \partial\mathcal{M}^+ \cup \partial\mathcal{M}^- \cup \partial\mathcal{M}_c \quad (\text{B.298})_1$$

Hierbei ist $\partial\mathcal{M}_{\text{EXT}}$ das mit der Oberfläche von \mathcal{B}_{ges} zusammenfallende Randstück, $\partial\mathcal{M}^\pm$ sind die beiden Deckflächen und $\partial\mathcal{M}_c$ ist ein innerer Rand, längs dessen Scherbandwachstum ($c \neq 0$) möglich ist. Die äußeren Normalen von \mathcal{M} auf diesen Flächen sind $n_e, n_A, -n_A, e_c$. Wir schreiben

$$\partial\mathcal{M}_c = \mathcal{L} \times \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \quad (\text{B.298})_2$$

und nennen \mathcal{L} die innere Randkurve von \mathcal{M} . \mathcal{L} ist mit der Koordinate s parametrisiert.

trisiert. Die in Fig.B.8. skizzierte Konfiguration ist auch repräsentativ für allgemeinere Scherbänder, wenn wir sie als längs \mathcal{L} herausgeschnittenes Stück der Länge Δs ansehen. Alle in Fig.B.8. eingeführten Größen sind dann Funktionen von s .

Die Umgebung von \mathcal{M} ist der geschädigte und plastisch verformte Teil \mathcal{B} . Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\text{ges}} &= \mathcal{B} \cup \mathcal{M} \\ \partial \mathcal{B} &= \partial \mathcal{B}_{\text{ext}} \cup \partial \mathcal{M}^+ \cup \partial \mathcal{M}^- \cup \partial \mathcal{M}_c \end{aligned} \quad (\text{B.298})_3$$

n sei die äußere Normale von \mathcal{B} .

III) Aufgrund des Scherbandwachstums ist $\partial \mathcal{M}$ keine materielle Fläche. Die Umwandlung materieller Punkte von \mathcal{B} in solche von \mathcal{M} beschränkt sich jedoch auf $\partial \mathcal{M}_c$. $\partial \mathcal{M}^\pm$ sind dann materielle Unstetigkeitsflächen, auf denen die üblichen Übergangsbedingungen gelten. Die lokalisierte Scherung unterscheidet sich vom Scherbruch (Ableiten) dadurch, daß v auf $\partial \mathcal{M}^\pm$ stetig bleibt.

IV) Ziele der Untersuchungen, Inhaltsangabe von TeilB2

Lokalisierte Scherungen sind i.a. unerwünscht. Man interessiert sich daher für Bedingungen, unter denen MaSBs erst gar nicht entstehen bzw. unter denen sie zum Stillstand gebracht werden können. Hierzu ist es erforderlich, die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = c e_c$ beeinflussende Parameter zu untersuchen, was numerisch nur bei Anwendung der kinetischen Methode möglich ist. Unter den eingangs genannten Voraussetzungen kann man bei der Beschreibung von MaSBs auf eine von der französischen Schule der Bruchmechanik ([93],[120],[148]) entwickelte Methode ("global analysis") zur Untersuchung von Makrorissen zurückgreifen. Diese Methode benutzt eine spezielle geometrische Linearisierung, die als einzige Geometrieänderung das Wachstum $c \neq 0$ von \mathcal{M} berücksichtigt; ansonsten gilt nach wie vor $x \approx \dot{x}$, $\rho \approx \dot{\rho}$, $\partial(\)/\partial t \approx (\)'$.

Infolge dieser Näherung brauchen wir nicht zwischen der Ausgangskonfiguration χ_0 und der Konfiguration χ_{t^*} , in der \mathcal{M}^* entsteht, zu unterscheiden. Die globale Analyse führt auf eine integrale Beurteilung des Scherbandrandes \mathcal{L} und auf eine thermodynamische Restriktion für c . Diese Restriktion wird im nächsten Kapitel abgeleitet. Danach wird eine thermodynamisch zulässige Gleichung für c konstruiert (Kap.B2.3, B2.4), ein Materialmodell für \mathcal{M} angegeben (Kap.B2.5) und das so erhaltene inkrementelle RWP für $\mathcal{B} \cup \mathcal{M}$ untersucht (Kap.B2.6).

B 2.2. Thermodynamische Restriktionen für das Wachstum von \mathcal{M}

B 2.2.1. Untersuchung der allgemeinen Bilanzgleichung für $\mathcal{B} \cup \mathcal{M}$

I) Die allgemeine Bilanzgleichung für thermomechanische Prozesse

I) Bei thermomechanischen Prozessen ist $c=0$, das Scherband breitet sich nicht aus und bei $\partial \mathcal{M}_c$ wird keine Materie umgewandelt.

II) Sei $\Psi(\mathcal{B}_{ges})$ eine additive Größe. Es gelte also

$$\Psi(\mathcal{B}_{ges}) = \int_{\mathcal{B}} \psi dV + \int_{\mathcal{M}} \psi_M dV \quad (B.299)$$

Hier und im weiteren kennzeichnet der Index M Felder in \mathcal{M} ; auf die Einführung eines entsprechenden Index B wird zur Vereinfachung der Notation verzichtet. Gelegentlich schreiben wir auch

$$\tilde{\psi} = \begin{cases} \psi & x \in \mathcal{B} \\ \psi_M & x \in \mathcal{M} \end{cases} \quad (B.300)$$

(B.299) würde dann

$$\Psi(\mathcal{B}_{ges}) = \int_{\mathcal{B}_{ges}} \tilde{\psi} dV \quad (B.301)$$

lauten. (B.300) ist zweckmäßig, wenn Analogien zur Bruchmechanik herausgearbeitet werden sollen.

III) Die allgemeine Bilanzgleichung lautet

$$\dot{\Psi} = -\dot{\Phi} + P \quad (B.302)$$

mit dem Zufluß
$$\dot{\Phi} = \dot{\Phi}_B + \dot{\Phi}_M = \int_{\partial \mathcal{B}_{EXT}} \Phi \cdot n dA + \int_{\partial \mathcal{M}_{EXT}} \Phi_M \cdot n_E dA \quad (B.303)$$

und der Produktion
$$P = P_B + P_M = \int_{\mathcal{B}} p dV + \int_{\mathcal{M}} p_M dV \quad (B.304)$$

IV) Für thermomechanische Prozesse und kleine Deformationen gilt das klassische Reynolds'sche Transporttheorem

$$\dot{\Psi} = \int_{\mathcal{B}} \dot{\psi} dV + \int_{\mathcal{M}} \dot{\psi}_M dV \quad (B.305)$$

und aus (B.302,305) folgen die lokalen Bilanzgleichungen

$$\dot{\psi} + \operatorname{div} \Phi - p = 0 \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad \dot{\psi}_m + \operatorname{div} \Phi_m - p_m = 0 \quad \text{in } \mathcal{M}. \quad (\text{B.306})$$

II) Das verallgemeinerte Reynolds'sche Transporttheorem bei Scherbandausbreitung

i) Gesucht ist die Verallgemeinerung von (B.305). Fig.B.9. zeigt eine ebene Darstellung der Scherbandkonfiguration aus Fig.B.8. $A_t, A_{t+\Delta t}$ kennzeichnet die Scherbandspitze für 2 benachbarte Zeitpunkte.

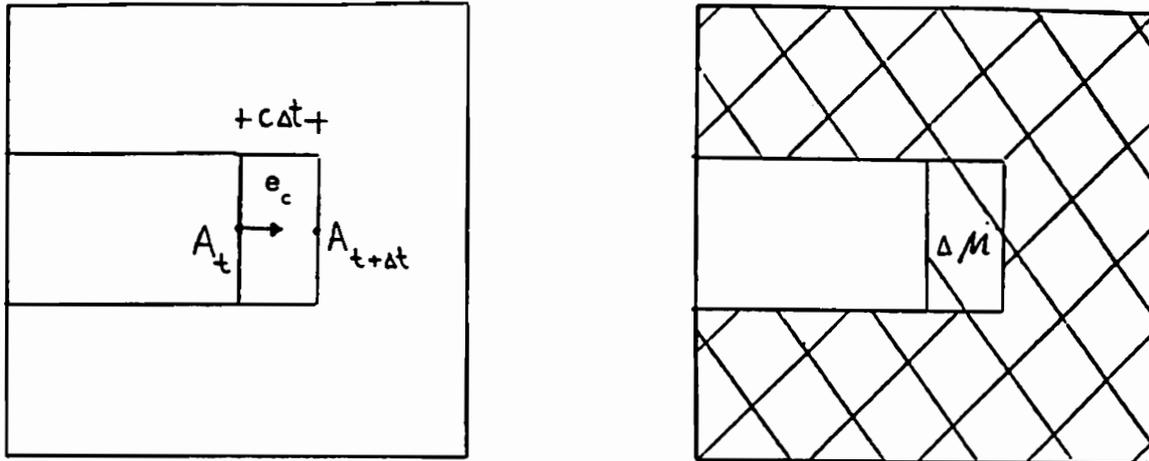


Fig.B.9. a)

b)

ii) Wir berechnen $\dot{\Psi}$ über den Differenzenquotienten. Da die entsprechenden Operationen noch mehrfach durchzuführen sind, führen wir folgende Kurzbezeichnungen ein:

$$\text{Sei} \quad \Omega(\omega, V) = \int_V \omega dV \quad (\text{B.307})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \dot{\Omega}(\omega, V) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V(t+\Delta t)} \omega(t+\Delta t) dV - \int_{V(t+\Delta t)} \omega(t) dV + \int_{V(t+\Delta t)} \omega(t) dV - \int_{V(t)} \omega(t) dV \right] \\ &=: \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta J_1(\omega, V) + \Delta J_2(\omega, V)}{\Delta t} \quad (\text{B.308}) \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad \Delta J_1(\omega, V) = \int_{V(t+\Delta t)} \omega(t+\Delta t) dV - \int_{V(t+\Delta t)} \omega(t) dV \quad (\text{B.309})_1$$

$$\text{und} \quad \Delta J_2(\omega, V) = \int_{V(t+\Delta t)} \omega(t) dV - \int_{V(t)} \omega(t) dV =: \int_{\Delta V(t)} \omega(t) dV \quad (\text{B.309})_2$$

$$\text{Ändert sich } V(t) \text{ stetig, so gilt} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta J_1}{\Delta t} = \int_{V(t)} \frac{\partial \omega}{\partial t} dV \approx \int_{V(t)} \dot{\omega} dV \quad (\text{B.310})$$

Probleme bereitet im Einzelfall die Bestimmung von dV für $\Delta V(t)$.

III) Im vorliegenden Fall berechnen wir

$$\dot{\Psi}(\psi, \mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}(t)} \dot{\psi} dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta \mathcal{B}(t)} \psi(t) dV \quad . \quad (\text{B.311})$$

und ein entsprechender Ausdruck folgt für $\dot{\Psi}(\psi_m, \mathcal{M})$.

Das Integrationsgebiet $\Delta \mathcal{B}(t)$ ist in Fig.B9.b. dargestellt: Die Schraffur \\\\ kennzeichnet $\mathcal{B}(t)$, die Schraffur //// hingegen $\mathcal{B}(t+\Delta t)$. Einfach schraffierte Gebiete gehören also zu $\Delta \mathcal{B}(t)$. Da Änderungen von $\partial \mathcal{B}_{\text{EXT}}$, $\partial \mathcal{M}_{\text{EXT}}$ vernachlässigt werden, gilt übrigens auch $\Delta \mathcal{B}(t) = \Delta \mathcal{M}(t)$.

In $\Delta \mathcal{M}$ ist $dV = c \cdot e_c dA \Delta t$, in $\Delta \mathcal{B}$ ist $dV = -c \cdot e_c dA \Delta t$. Es folgt also

$$\dot{\Psi}(\tilde{\psi}, \mathcal{B}_{\text{ges}}) = \int_{\mathcal{B}} \dot{\psi} dV + \int_{\mathcal{M}} \dot{\psi}_m dV + \int_{\partial \mathcal{M}_c} (\psi_m - \psi) c \cdot e_c dA \quad . \quad (\text{B.312})$$

Dies ist die gesuchte Verallgemeinerung des Reynolds'schen Transporttheorems.

III) Die rechte Seite der Bilanzgleichung für Ψ

I) Nur für thermomechanische Prozesse gilt die Bilanz (B.302). Wir verallgemeinern sie im Fall des Scherbandwachstums (und entsprechend bei Reißwachstum) zu

$$\dot{\Psi} = -\dot{\Phi} + P + \Delta \Psi \quad . \quad (\text{B.313})$$

$\Delta \Psi$ ist eine mit der Scherbandausbreitung einhergehende Produktion von Ψ , die wir für die spezielle Konfiguration aus Fig.B.8. als

$$\Delta \Psi = -2\gamma \cdot c \Delta s \quad (\text{B.314})$$

ansetzen. Für allgemeinere Konfigurationen ist

$$\Delta \Psi = -2 \int_{\mathcal{L}} \gamma \cdot c ds \quad . \quad (\text{B.315})$$

Im Beitrag des Verfassers zu [114] ist beschrieben, wie man (B.313) unter Zuhilfenahme einer globalen fiktiven Zwischenkonfiguration einführen kann.

II) Zur Interpretation von $\Delta \Psi$ betrachten wir die Energiebilanz bei Reißausbreitung. Dann ist $\Delta \Psi \hat{=} \Delta \mathcal{E} = -2\gamma c$ und γ ist die spezifische Oberflächenenergie des Risses. Im Falle der Scherbandausbreitung kann man $\Delta \mathcal{E}$ z.B. mit der Umwandlungswärme verknüpfen, die auftritt, wenn die Lokalisierung mit einem Phasenübergang verbunden ist.

B 2.2.2. Einführung der Vergleichskonfigurationen $\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{M}_\Gamma$

I) Es wird eine integrale Beurteilung des Scherbandrandes angestrebt. Dadurch läßt sich insbesondere der Einfluß möglicher Singularitäten in der Nähe von $\partial\mathcal{M}_c$ umgehen. Wir wollen zu diesem Zweck die in Fig.B.10 skizzierte Vergleichskonfiguration $\mathcal{B}_{\Gamma\text{ges}}$ untersuchen.

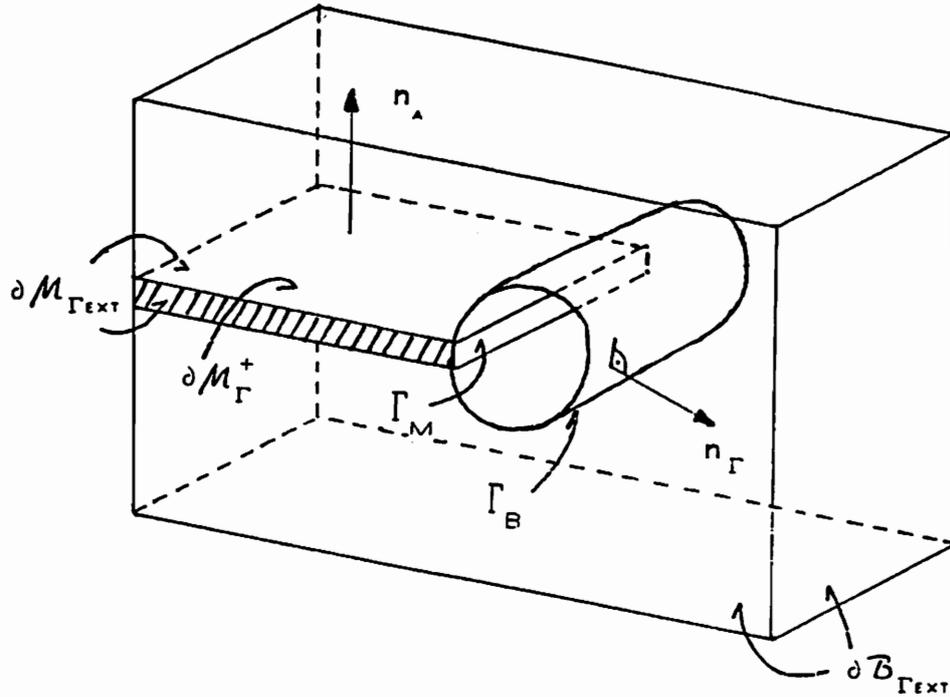


Fig. B.10

$$\mathcal{B}_{\Gamma\text{ges}} = \mathcal{B}_\Gamma \cup \mathcal{M}_\Gamma \quad (\text{B.316})_1$$

entsteht, indem man um die Scherbandfront \mathcal{L} einen kreiszylindrischen Schlauch mit Fläche Γ und Volumen D herausschneidet. Es gilt

$$\Gamma = \Gamma_B \cup \Gamma_M, \quad D = D_B \cup D_M \quad (\text{B.316})_2$$

Die Bezeichnung „D“ rührt daher, daß sich der Zylinder bei ebenen Problemen auf eine Scheibe („disk“) reduziert. Für die Berandungen gilt nun:

$$\partial\mathcal{M}_\Gamma = \partial\mathcal{M}_{\Gamma\text{EXT}} \cup \partial\mathcal{M}_\Gamma^+ \cup \partial\mathcal{M}_\Gamma^- \cup \Gamma_M \quad (\text{B.316})_3$$

$$\partial\mathcal{B}_\Gamma = \partial\mathcal{B}_{\Gamma\text{EXT}} \cup \partial\mathcal{M}_\Gamma^+ \cup \partial\mathcal{M}_\Gamma^- \cup \Gamma_B$$

Fig.B.11 zeigt zur Verdeutlichung nochmals die Projektion auf einen Schnitt $s = \text{konst.}$ ∂D_{BM} ist dabei die Trennfläche von \mathcal{B} und \mathcal{M} in D .

ii) Γ wird so eingeführt, daß es sich mit der Scherbandfront \mathcal{L} mitbewegt. Dies

entspricht der Vorgehensweise von *Nguyen* [93] bzw. *Gurtin* [149] und unterscheidet sich von der Methode von *Atluri* [150].

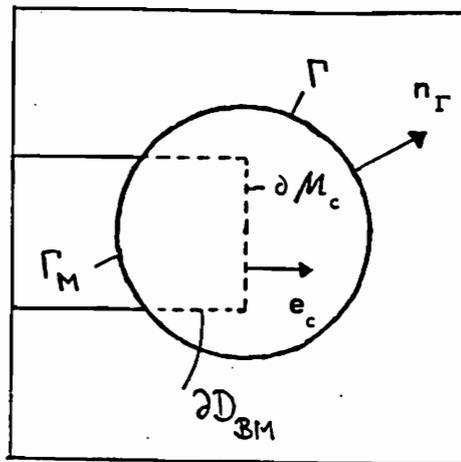


Fig.B.11

Es sei
$$\Psi_{\Gamma} := \int_{B_{\Gamma}} \psi dV + \int_{M_{\Gamma}} \psi_m dV \quad (B.317)$$

also
$$\Psi - \Psi_{\Gamma} = \int_{D_b} \psi dV + \int_{D_m} \psi_m dV \quad (B.318)$$

Im nächsten Abschnitt wollen wir $(\Psi - \Psi_{\Gamma})^{\cdot}$ berechnen.

II) i) Nach (B.307-309) gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_b} \psi dV = \int_{D_b} \dot{\psi} dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta D_b} \psi dV \quad (B.319)_1$$

$$\frac{d}{dt} \int_{D_m} \psi_m dV = \int_{D_m} \dot{\psi}_m dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta D_m} \psi_m dV \quad (B.319)_2$$

Die Integrationsbereiche sind in Fig.B.12 skizziert.

Die Bereiche $D_b(t)$, $D_m(t)$ sind jeweils \\\ schraffiert, $D_b(t+\Delta t)$, $D_m(t+\Delta t)$ sind /// schraffiert. Alle Bereiche, die entweder nur /// oder \\\ schraffiert sind, gehören zum Integrationsbereich. Für die (eng schraffierten) Volumenelemente gilt:

$$\begin{aligned} dV_1 &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} dA \Delta t \text{ längs } \Gamma_b & dV_2 &= -\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_c dA \Delta t \text{ längs } \partial M_c \\ dV_3 &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} dA \Delta t \text{ längs } \Gamma_m & dV_4 &= +\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_c dA \Delta t \text{ längs } \partial M_c \end{aligned}$$

Es folgt:
$$(\Psi - \Psi_{\Gamma})^{\cdot} = \int_D \dot{\psi} dV + \int_{\Gamma} \tilde{\psi} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} dA + \int_{\partial M_c} (\psi_m - \psi) \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_c dA \quad (B.320)$$

Für homogene Materialien mit $\psi = \psi_m$ folgt wieder das bekannte Ergebnis [151]:

$$(\Psi - \Psi_\Gamma)' = \int_D \dot{\psi} dV + \int_\Gamma \psi c \cdot n_\Gamma dA .$$

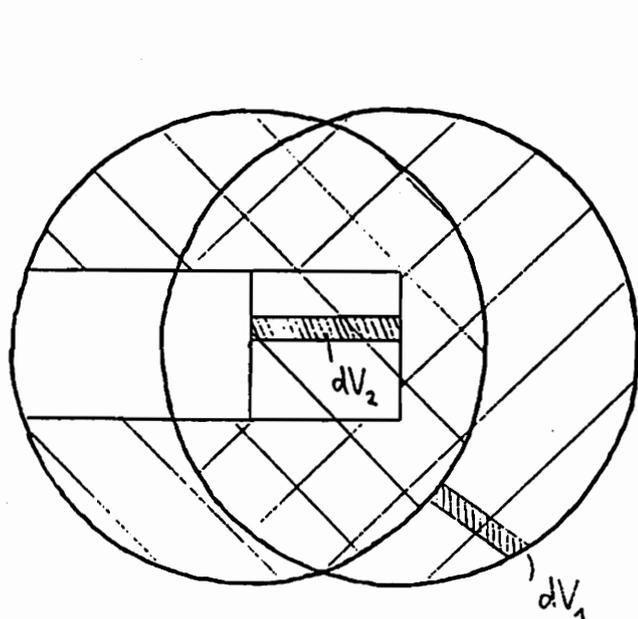


Fig. B.12.a. ΔD_s

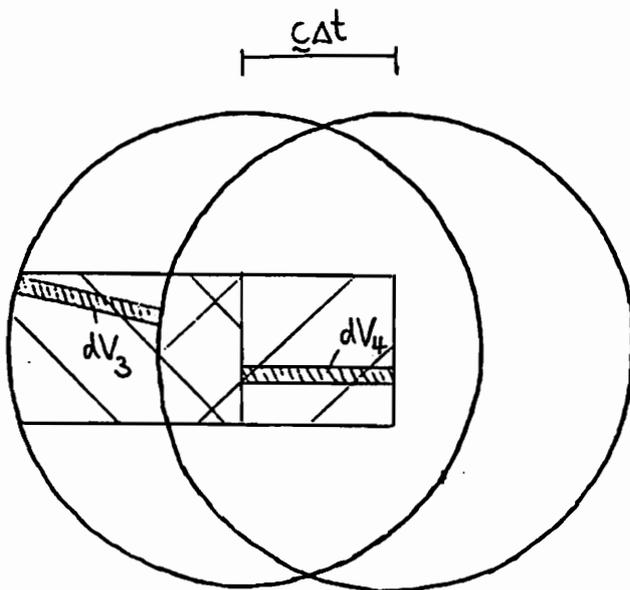


Fig. B.12.b. ΔD_m

ii) Für einen mit dem Scherbandrand mitbewegten Beobachter definieren wir die Ableitung $d_c Q / dt$ irgendeiner Größe Q durch

$$\frac{d_c Q}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \text{grad } Q \cdot c \approx \dot{Q} + \text{div}(Qc) . \quad (\text{B.321})$$

Wir ersetzen nun in (B.320) $\dot{\psi}$ durch $d_c \psi / dt - \text{grad} \psi \cdot c$ (entsprechend $\dot{\psi}_m$) und wenden den Gauss'schen Satz an. Auf den in D enthaltenen Teilen von ∂M^+ , ∂M^- ist $c \cdot n = 0$. Somit folgt:

$$\boxed{(\Psi - \Psi_\Gamma)' = \int_{D_s} \frac{d_c \psi}{dt} dV + \int_{D_m} \frac{d_c \psi_m}{dt} dV} \quad (\text{B.322})$$

iii) Wir treffen nun (vgl. [93])

Annahme 5: Für alle Q mit integrierbarer Singularität, d.h.

$$0 \leq \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_D Q dV < \infty \quad (\text{B.323})_1$$

$$\text{soll gelten: } \left| \frac{d_c Q}{dt} \right| < \infty . \quad (\text{B.323})_2$$

Dann folgt:

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} (\Psi - \Psi_\Gamma)' = 0 . \quad (B.324)$$

Zur Abkürzung verwenden wir die Bezeichnung

$$* () := \lim_{\Gamma \rightarrow 0} () \quad (B.325)$$

Das Symbol * ist nicht mit dem in Kap.B1.7. eingeführten Symbol $\overset{**}{()}$ einer objektiven Zeitableitung zu verwechseln! Mit (B.325) kann man für (B.324) schreiben:

$$\dot{\Psi} = * (\Psi - (\Psi - \Psi_\Gamma)') \quad (B.326)$$

III) Die integrale Form einer Bilanzgleichung für die Umgebung der Scherbandfront

I) In (B.326) werden die bisherigen Zwischenergebnisse eingesetzt:

$$\begin{array}{ccc} \dot{\Psi} & = & * (\dot{\Psi} - (\Psi - \Psi_\Gamma)') \\ \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow \\ -\Phi + P + \Delta\Psi & & (B.312) \quad (B.324) \end{array}$$

Es folgt dann:

$$-\Phi + P + \Delta\Psi = * \left\{ \int_{\mathcal{B}_\Gamma} \dot{\psi} dV + \int_{\mathcal{M}_\Gamma} \dot{\psi}_m dV - \int_{\Gamma_b} \psi c \cdot n_\Gamma dA - \int_{\Gamma_m} \psi_m c \cdot n_\Gamma dA \right\} \quad (B.327)$$

II) Die unterstrichelten Volumenintegrale sollen nun eliminiert werden. Zwar kann man für $\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{M}_\Gamma$ keine integralen Bilanzen angeben, weil es sich nicht um materielle Körper handelt, doch gelten für jeden momentan zu $\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{M}_\Gamma$ gehörigen materiellen Punkt die lokalen Bilanzen (B.306). Diese werden nun über $\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{M}_\Gamma$ integriert. So folgt aus (B.306)₁:

$$\int_{\mathcal{B}_\Gamma} \dot{\psi} dV - \int_{\mathcal{B}_\Gamma} p dV + \int_{\partial \mathcal{B}_{\Gamma_{\text{ges}}}} \Phi \cdot n dA = 0 . \quad (B.328)$$

n ist dabei die äußere Normale von $\partial \mathcal{B}_{\Gamma_{\text{ges}}}$ und integriert wird über $\partial \mathcal{B}_{\Gamma_{\text{ext}}} \cup \partial \mathcal{M}_\Gamma^+ \cup \partial \mathcal{M}_\Gamma^- \cup \Gamma_b$. Das Ergebnis ist

$$\int_{\mathcal{B}_\Gamma} \dot{\psi} dV = \int_{\mathcal{B}_\Gamma} p dV - \int_{\partial \mathcal{B}_{\Gamma_{\text{ext}}}} \Phi \cdot n dA + \int_{\partial \mathcal{M}_\Gamma^+} \Phi^+ \cdot n_A dA - \int_{\partial \mathcal{M}_\Gamma^-} \Phi^- \cdot n_A dA + \int_{\Gamma_b} \Phi \cdot n_\Gamma dA . \quad (B.329)$$

Analog folgt aus (B.306)₂:

$$\int_{\mathcal{M}_\Gamma} \dot{\psi}_m dV - \int_{\mathcal{M}_\Gamma} p_m dV + \int_{\partial \mathcal{M}_{\Gamma_{\text{ges}}}} \Phi_m \cdot n_m dA = 0 \quad (B.330)$$

und

$$\int_{\mathcal{M}_\Gamma} \dot{\psi}_m dV = \int_{\mathcal{M}_\Gamma} p_m dV - \int_{\partial \mathcal{M}_{\Gamma_{EXT}}} \Phi_m \cdot n_m dA - \int_{\partial \mathcal{M}_\Gamma^+} \Phi_m^+ \cdot n_\Delta dA + \int_{\partial \mathcal{M}_\Gamma^-} \Phi_m^- \cdot n_\Delta dA + \int_{\Gamma_m} \Phi_m \cdot n_\Gamma dA \quad (B.331)$$

Bevor wir (B.329,331) in (B.327) einsetzen, treffen wir noch

Annahme 6 : $P = * \left(\int_{\mathcal{B}_\Gamma} p dV + \int_{\mathcal{M}_\Gamma} p_m dV \right)$, (B.332)

d.h. $|p| < \infty$, $|p_m| < \infty$. Beim Einsetzen von (B.329,331) in (B.327) entstehen die Ausdrücke

$$\int_{\partial \mathcal{M}_\Gamma^+} (\Phi^+ - \Phi_m^+) \cdot n_\Delta dA \stackrel{!}{=} 0 \quad , \quad \int_{\partial \mathcal{M}_\Gamma^-} (\Phi^- - \Phi_m^-) \cdot n_\Delta dA \stackrel{!}{=} 0 \quad . \quad (B.333)$$

Die Integralausdrücke verschwinden wie angedeutet, weil $\partial \mathcal{M}_\Gamma^+$, $\partial \mathcal{M}_\Gamma^-$ materielle Unstetigkeitsflächen sind. Letztendlich folgt also aus (B.327):

$$\Delta \Psi = * \left\{ \int_{\Delta \partial \mathcal{B}_\Gamma} \Phi \cdot n dA + \int_{\Delta \partial \mathcal{M}_\Gamma} \Phi_m \cdot n_m dA + \int_{\Gamma} (\tilde{\Phi} - \tilde{\psi}_c) \cdot n_\Gamma dA \right\} \quad (B.334)$$

mit $\Delta \partial \mathcal{B}_\Gamma = \partial \mathcal{B}_{EXT} \setminus \partial \mathcal{B}_{\Gamma_{EXT}}$, $\Delta \partial \mathcal{M}_\Gamma = \partial \mathcal{M}_{EXT} \setminus \partial \mathcal{M}_{\Gamma_{EXT}}$.

(B.334) ist die gesuchte Bilanz für Ψ in der Umgebung der Scherbandfront. Enthält \mathcal{M} Vakuum (ist also ein Makroriß), so erhält man auch das aus der Untersuchung von Makrorissen bekannte Ergebnis, vgl.[114]. Wie dort wollen wir

Annahme 7 : $* \int_{\Delta \partial \mathcal{B}_\Gamma} \Phi \cdot n dA + * \int_{\Delta \partial \mathcal{M}_\Gamma} \Phi_m \cdot n_m dA = 0$ (B.335)

treffen, d.h. (B.334) auf ein Integral längs des Zylinders reduzieren:

$$\Delta \Psi = * \left\{ \int_{\Gamma_b} (\Phi - \psi e_c) \cdot n_\Gamma dA + \int_{\Gamma_m} (\Phi_m - \psi_m e_c) \cdot n_\Gamma dA \right\} c \quad (B.336)$$

Die Annahme 7 muß nach Kenntnis der Nahfeldlösungen (siehe Anhang 4) verifiziert werden.

B2.2.3. Erster und zweiter Hauptsatz - Restriktionen für c

I) Erster Hauptsatz

Wir vernachlässigen volumenverteilte Energiequellen. Die Energiebilanz entsteht aus der allgemeinen Bilanz für

$$\psi = \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \quad \text{mit } v^2 = \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad , \quad (B.337)$$

$$\Phi = \mathbf{q} - \sigma \dot{\mathbf{u}} \quad , \quad \Delta \Psi = \Delta \mathcal{E} = -2\gamma c \quad , \quad p = p_r + \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}}$$

(wir haben in (B.314) o.B.d.A. $\Delta s = 1$ gesetzt). Die integrale Energiebilanz an der Scherbandspitze lautet also

$$\begin{aligned} & * \int_{\Gamma_B} \left(\mathbf{q} - \sigma \dot{\mathbf{u}} - \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{c} \right) \cdot \mathbf{n}_\Gamma dA \\ & + * \int_{\Gamma_M} \left(\mathbf{q}_M - \sigma_M \dot{\mathbf{u}}_M - \rho_M \left(e_M + \frac{v_M^2}{2} \right) \mathbf{c} \right) \cdot \mathbf{n}_\Gamma dA + 2\gamma c = 0 \end{aligned} \quad (B.338)$$

II) Der zweite Hauptsatz in integraler Form für die Umgebung der Scherbandfront

I) Für einen thermomechanischen Prozeß und in Verbindung mit der Annahme $p_r = 0$ lautet die CDU:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \eta dV + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}} \rho_M \eta_M dV + \int_{\partial \mathcal{B}_{EXT}} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\partial \mathcal{M}_{EXT}} \frac{\mathbf{q}_M}{\Theta_M} \cdot \mathbf{n}_M dA \geq 0 \quad (B.339)$$

II) Wir treffen die Annahme, daß es keine lokale Entropieerzeugung gibt:

$$\text{Annahme 8 : } \Delta \mathcal{H} = 0 \quad , \quad (B.340)$$

vgl. [93],[149]. Dann gilt (B.339) auch für den Fall der Scherbandausbreitung. Diese Gleichung besitzt die Gestalt

$$\dot{\Psi} + \Phi \geq 0 \quad (B.341)$$

$$\text{mit } \psi = \rho \eta \quad , \quad \Psi = \mathcal{H} \quad , \quad \Phi = \mathbf{q} / \Theta \quad (B.342)$$

Die zu (B.336) führenden Schritte können auch für die Ungleichung (B.341) nachvollzogen werden. Zunächst gilt

$$\dot{\mathcal{H}} = * \left(\dot{\mathcal{H}} - (\dot{\mathcal{H}} - \dot{\mathcal{H}}_\Gamma) \right) \quad , \quad (B.343)$$

$$\text{also } * \left(\dot{\mathcal{H}} - (\dot{\mathcal{H}} - \dot{\mathcal{H}}_\Gamma) \right) + \Phi \geq 0 \quad (B.344)$$

Analog zu (B.312,324) haben wir

$$\dot{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\eta} dV + \int_{\mathcal{M}} \rho_M \dot{\eta}_M dV + \int_{\partial \mathcal{M}_c} (\rho_M \eta_M - \rho \eta) \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_c dA \quad (\text{B.345})$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\Gamma)' &= \int_{D_b} \rho \dot{\eta} dV + \int_{D_M} \rho_M \dot{\eta}_M dV + \int_{\Gamma_b} \rho \eta \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_\Gamma dA \\ &\quad + \int_{\Gamma_M} \rho_M \eta_M \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_\Gamma dA + \int_{\partial \mathcal{M}_c} (\rho_M \eta_M - \rho \eta) \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_c dA \end{aligned} \quad (\text{B.346})$$

Setzt man (B.345,346) in (B.344) ein, so erhalten wir das Zwischenergebnis

$$\ast \left[\int_{\mathcal{B}_\Gamma} \rho \dot{\eta} dV + \int_{\mathcal{M}_\Gamma} \rho_M \dot{\eta}_M dV - \int_{\Gamma} \tilde{\rho} \tilde{\eta} \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_\Gamma dA \right] + \Phi \geq 0 \quad (\text{B.347})$$

III) Durch Integration der lokalen CDU in $\mathcal{B}_\Gamma, \mathcal{M}_\Gamma$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_\Gamma} \rho \dot{\eta} dV &\geq - \int_{\partial \mathcal{B}_{\Gamma \text{EXT}}} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\partial \mathcal{M}_\Gamma^+} \left(\frac{\mathbf{q}}{\Theta} \right)^+ \cdot \mathbf{n}_\wedge dA - \int_{\partial \mathcal{M}_\Gamma^-} \left(\frac{\mathbf{q}}{\Theta} \right)^- \cdot \mathbf{n}_\wedge dA \\ &\quad + \int_{\Gamma_b} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \cdot \mathbf{n}_\Gamma dA \end{aligned} \quad (\text{B.348})$$

und ein entsprechender Ausdruck folgt für $\int_{\mathcal{M}_\Gamma} \rho_M \dot{\eta}_M dV$. Die Ungleichung (B.347)

wird nun verschärft, wenn wir für $\int_{\mathcal{B}_\Gamma} \rho \dot{\eta} dV$ die kleinere rechte Seite von (B.348)

einsetzen. Die dann folgende Ungleichung lautet

$$\begin{aligned} \ast \left[\int_{\Delta \partial \mathcal{B}_\Gamma} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{\Delta \partial \mathcal{M}_\Gamma} \frac{\mathbf{q}_M}{\Theta_M} \cdot \mathbf{n}_M dA + \int_{\Gamma_b} \left(\frac{\mathbf{q}}{\Theta} - \rho \eta \mathbf{c} \right) \cdot \mathbf{n}_\Gamma dA \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_M} \left(\frac{\mathbf{q}_M}{\Theta_M} - \rho_M \eta_M \mathbf{c} \right) \cdot \mathbf{n}_\Gamma dA \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.349})$$

und offenbar kann es Prozesse geben, welche (B.347), aber nicht mehr die Verschärfung (B.349) erfüllen. Das Ziel der Anwendung der CDU in der Materialtheorie ist aber ohnehin nur die Formulierung hinreichender Bedingungen für thermodynamische Konsistenz von Materialgleichungen und in diesem Sinne genügt es.

nur mit (B.349) verträgliche Gleichungen für c zu untersuchen. Mit Annahme 7 reduziert sich (B.349) überdies auf

$$* \int_{\Gamma_B} \left(\frac{q}{\Theta} - \rho \eta c \right) \cdot n_{\Gamma} dA + * \int_{\Gamma_M} \left(\frac{q_M}{\Theta_M} - \rho_M \eta_M c \right) \cdot n_{\Gamma} dA \geq 0 . \quad (\text{B.350})$$

iv) (B.350) soll für Scherbänder unterschiedlicher Dicke gelten, weshalb beide Summanden in (B.350) nichtnegativ sein müssen. Wäre nämlich etwa

$$\left(q_M / \Theta_M - \rho_M \eta_M c \right) \cdot n_{\Gamma} < 0 ,$$

so könnte (B.350) verletzt werden, wenn man diesen negativen Integranden über ein genügend dickes Scherband integriert. Wegen $\Theta \geq 0$, $\Theta_M \geq 0$ sind die beiden Teilungleichungen äquivalent zu

$$* \int_{\Gamma_B} (q - \rho \Theta \eta c) \cdot n_{\Gamma} dA \geq 0 \quad , \quad * \int_{\Gamma_M} (q_M - \rho_M \Theta_M \eta_M c) \cdot n_{\Gamma} dA \geq 0$$

und diese Ungleichungen kann man wieder zur Bedingung

$$* \int_{\Gamma_B} (q - \rho \Theta \eta c) \cdot n_{\Gamma} dA + * \int_{\Gamma_M} (q_M - \rho_M \Theta_M \eta_M c) \cdot n_{\Gamma} dA \geq 0 \quad (\text{B.351})$$

zusammenfassen.

v) Die Integrale über q, q_M werden nun mittels (B.338) eliminiert. \dot{u} wird mittels Annahme 1 folgendermaßen ausgedrückt:

$$\dot{u} \approx \frac{\partial u}{\partial t} = -(\text{gradu})c + r \quad , \quad \|r\| < \infty \quad (\text{B.352})$$

($r = 0$ für stationäre Ausbreitung im unendlich ausgedehnten Körper). Wir erhalten dann:

$$(G_1 - G_2 c^2 - 2\gamma) c \geq 0 \quad \text{für } c > 0$$

$$\text{mit } G_1 = * \int_{\Gamma_B} (\rho \varphi e_c - \sigma(\nabla u) e_c) \cdot n_{\Gamma} dA + * \int_{\Gamma_M} (\rho_M \varphi_M e_c - \sigma_M(\nabla u_M) e_c) \cdot n_{\Gamma} dA$$

$$G_2 = - * \int_{\Gamma_B} \frac{\rho}{2} ((\nabla u) e_c \cdot (\nabla u) e_c) e_c \cdot n_{\Gamma} dA - * \int_{\Gamma_M} \frac{\rho_M}{2} ((\nabla u_M) e_c \cdot (\nabla u_M) e_c) e_c \cdot n_{\Gamma} dA$$

(B.353)

(B.353) ist die gesuchte Form der CDU. Die Ungleichung reduziert sich bei vernachlässigbaren Trägheitskräften auf

$$(G_1 - 2\gamma)c \geq 0 \quad . \quad (B.354)$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich im Falle der Rißausbreitung. Beispielsweise entspricht das Griffith-Kriterium der Aussage $c > 0$ falls $G_1 = 2\gamma$.

III) Bemerkungen

I) Die Integrale G_1 , G_2 wurden zunächst unter der Annahme $c \neq 0$ eingeführt, wie man an der Verwendung von (B.352) erkennt. Wir erweitern hiermit die Definition von G_1, G_2 auch auf den Fall $c = 0$.

II) Eine sinnvolle Beschreibung der Scherbandspitze durch G_1, G_2 ist nur möglich, wenn diese Integrale asymptotisch wegunabhängig sind, siehe [123]. Dort wird als Bedingung für die asymptotische Wegunabhängigkeit angegeben, daß die Divergenz des Integranden im Nahfeld nicht stärker als r^{-2} singulär sein darf. Dies wird in Anhang 4 nachgewiesen.

III) Die Integrale G_1, G_2 hängen nur von Momentanwerten ab (über $\tilde{\varphi}, \tilde{\sigma}, \tilde{u}$). Überdies enthält G_1 durch die Abhängigkeit von $\tilde{\varphi}$ Informationen über die Schädigung, die Versetzungsdichte und die Erwärmung an der Scherbandspitze. Dies ist ein Vorteil von G_1 gegenüber anderen Integralparametern (z.B. nach *Atluri* [153]), die nur auf der Bilanz der kinetischen Energie aufbauen und bei denen demzufolge anstelle der freien Energie die „Formänderungsenergie“ $W = \int \sigma \cdot ds$ erscheint.

IV) G_1 hat i.a. nicht die Bedeutung einer Freisetzungsrates der Gesamtenergie, der freien Energie oder der inneren Energie und $G_1 - 2\gamma$ ist also auch nicht die Affinität zu a ($c = \dot{a}$). In der LEBM kann G_1 als Freisetzungsrates des Gesamtpotentials angesehen werden, falls auf $\partial \mathcal{B}_{\text{ges}}$ überall Spannungen oder Null-Verschiebungen vorgegeben sind.

B2.3. Eine thermodynamisch zulässige Gleichung für c

I) Eine „Fließbedingung“ für $c \neq 0$

i) (B.353) liefert eine Einschränkung für $c > 0$, sagt aber noch nichts darüber, wann überhaupt ein Wert $c \neq 0$ auftreten kann. Hier sind von der Thermodynamik unabhängige Überlegungen notwendig.

ii) Die Art der Restriktionen legt es nahe, nach Materialgleichungen

$$c = \hat{c}(G_1, G_2, \gamma; \text{andere Parameter}) \quad (\text{B.355})$$

zu suchen. Zu den „anderen Parametern“ könnte z.B. eine Belastungsbedingung gehören.

iii) Die Nebenbedingungen für $c \neq 0$ sollen ebenfalls im (G_1, G_2, γ) -Raum aufgestellt werden. Wir haben zwei Alternativen:

Fall 1: c wird durch eine g.a. Gleichung ohne Belastungsbedingung beschrieben, d.h. $c > 0$ falls $F_c(G_1, G_2, \gamma) > 0$. F_c kann man wieder als Fließfunktion bezeichnen.

Fall 2: c wird durch eine g.u. Gleichung mit Belastungsbedingung LC_c beschrieben, d.h. $c > 0$ falls $F_c(G_1, G_2, \gamma) > 0$ und $LC_c > 0$.

Eine mögliche Definition von LC_c wird in [5] diskutiert; es muß besonders darauf geachtet werden, daß LC_c nicht selbst von c abhängt, wie dies bei dem Ansatz von *Nguyen* [120] der Fall ist. Es ist bislang nicht gelungen, mit (B.353) verträgliche Ansätze der Form

$$c = LC_c \hat{c}(G_1, G_2, \gamma) \quad (\text{B.356})$$

zu konstruieren. Deshalb beschränken wir uns auf Fall 1.

iv) Eine spezielle von G_2 unabhängige Fließfunktion:

Sei $h := G_1 - 2\gamma$. (B.357)

Bei der Festlegung von F_c orientieren wir uns an dem Ergebnis (B.354) der Bruchmechanik und definieren

$$F_c = h \quad (\text{B.358})$$

(B.358) ist nur als Approximation nullter Ordnung von F_c in G_2 anzusehen. Der Einfluß von G_2 auf F_c ist nur schwer erfaßbar.

II) Eine g.a. Gleichung für c

i) Bei der Formulierung einer Gleichung für c ist zu unterscheiden zwischen

- Ansätzen mit beschränktem $c < c_{\text{MAX}}$,
- Ansätzen, welche $c \rightarrow \infty$ zulassen.

Es ist noch unklar, ob c ähnlich wie bei Rissen beschränkt bleibt. Die wenigen Experimente zur Untersuchung der Scherbandausbreitungsgeschwindigkeit (z.B. [79]) geben hierüber keine Auskunft.

ii) Wir suchen c in der Form einer Potenzreihe bzgl. G_2 :

$$c = \lambda_0(h) + \lambda_1(h)G_2 + \lambda_2(h)G_2^2 + \dots \quad (\text{B.359})$$

Dies läßt sich als Sonderfall eines Ansatzes $c = \frac{\partial \Lambda_c}{\partial h}(h, G_2)$ (B.360)

auffassen, wobei $\Lambda_c(h, 0) \in \mathcal{K}(h)$. Wir setzen nun (B.359) in (B.353), ein und brechen nach quadratischen Gliedern in G_2 ab. Es entsteht:

$$\lambda_0(h)h + \left(h\lambda_1(h) - \lambda_0(h)^3 \right) G_2 + \left(h\lambda_2(h) - 3\lambda_0(h)^2\lambda_1(h) \right) G_2^2 + \dots \geq 0 \quad (\text{B.361})$$

iii) Jeder Summand soll nichtnegativ sein. Hinreichend dafür sind die Bedingungen

$$\lambda_0(h) \geq 0, \quad h\lambda_1(h) - \lambda_0(h)^3 = 0, \quad h\lambda_2(h) - 3\lambda_0(h)^2\lambda_1(h) \geq 0 \quad (\text{B.362})$$

Zusätzlich sollen die λ_i mit h verschwinden, so daß c beim Erreichen von $F_c = 0$ stetig bleibt. Wir können die genannten Bedingungen z.B. wie folgt erfüllen:

$$\lambda_0(h) = \frac{\chi_{c1} h}{1 + \chi_{c2} h}, \quad \lambda_1(h) = \frac{\chi_{c1}^3 h^2}{(1 + \chi_{c2} h)^3}, \quad \lambda_2(h) = \frac{3\chi_{c1}^5 \chi_{c3} h^3}{(1 + \chi_{c2} h)^5} \quad (\text{B.363})$$

Dabei sind $\chi_{c1} > 0, \chi_{c2} \geq 0, \chi_{c3} \geq 1$ (B.364)

zu wählen. Für $\chi_{c2} = 0$ wächst c unbeschränkt mit h; für $\chi_{c2} > 0$ bleibt c bzgl. h beschränkt. Es ist bislang nicht gelungen, ein allgemeineres Potential Λ_c nach (B.360) zu konstruieren, welches dann auch bzgl. G_2 beschränkte Ausbreitungsgeschwindigkeiten liefert.

iv) Bemerkung: Bei großen Deformationen und/oder krummliniger Ausbreitung ist die Geschwindigkeit c_* relativ zur Konfiguration χ_{t*} (in der \mathcal{M} entsteht) die Materialgröße. $G_1 \rightarrow G_1$ und $G_2 \rightarrow \mathbf{G}_2 = G_{2\text{kr}s} \mathbf{b}_k \mathbf{b}_r \mathbf{b}_s$ sind durch Integrale in dieser Konfiguration zu ersetzen, siehe [5].

B2.4. Zur effizienten Berechnung der Integrale G_1, G_2

I) Die allein in Frage kommende numerische Berechnung von G_1, G_2 erweist sich auch bei asymptotischer Wegunabhängigkeit der Integrale als schwierig, da die großen Gradienten an der Scherbandspitze durch FEM möglicherweise nicht genügend genau erfaßt werden. Wir greifen deshalb einen Vorschlag von *Atluri et al.* auf ([153],p.355):

Zur Berechnung von G_1, G_2 wählen wir eine raumfeste Kurve Γ_{EXT} , siehe Fig.B.13.

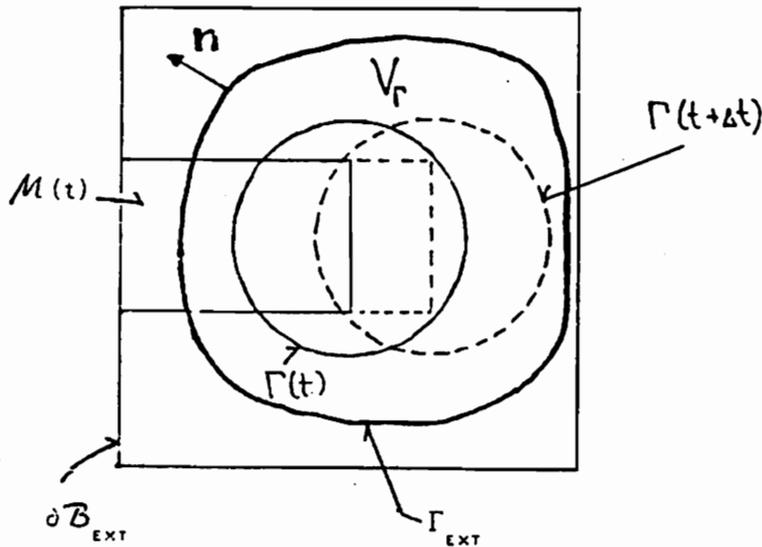


Fig.B.13

Die Gestalt dieser Kurve ist weitgehend beliebig und kann unter dem Gesichtspunkt möglichst einfacher numerischer Rechnungen ausgewählt werden. Γ_{EXT} soll so groß sein, daß die Scherbandfront während des Beobachtungszeitraums enthalten ist. Da über das von Γ_{EXT} umschlossene Volumen V_Γ integriert werden muß, sollte Γ_{EXT} andererseits möglichst klein sein, so daß man mit wenigen Integrationspunkten auskommt. Da V_Γ keine Singularitäten enthält, läßt sich der Gauß'sche Satz anwenden.

II) i) Wir schreiben die Integrale G_1, G_2 wie folgt

$$G_1 = * \int_{\Gamma_b} g_i n_{\Gamma_i} dA + * \int_{\Gamma_m} g_{mi} n_{\Gamma_i} dA \quad (B.365)$$

$$G_2 = - * \int_{\Gamma_b} \gamma_i n_{\Gamma_i} dA - * \int_{\Gamma_m} \gamma_{mi} n_{\Gamma_i} dA \quad (B.366)$$

$$\text{mit } \tilde{g}_i = \tilde{\rho} \tilde{\varphi} e_{ci} - \tilde{\sigma}_{ki} \tilde{u}_{k,m} e_{cm} \quad , \quad \tilde{\gamma}_i = \frac{\tilde{\rho}}{2} \tilde{u}_{k,m} \tilde{u}_{k,r} e_{cm} e_{cr} e_{ci} \quad (B.367)$$

$g = g_i b_i$ ist nicht mit der in Teil B1 bisweilen benutzten Abkürzung für $\text{grad}\Theta$ zu verwechseln !

II) Mit dem Gauß'schen Satz und der Bezeichnung $\Gamma_{EXT} = \Gamma_{B,EXT} \cup \Gamma_{M,EXT}$ folgt für G_1 :

$$G_1 = \int_{\Gamma_{B,EXT}} g_i n_i dA + \int_{\Gamma_{M,EXT}} g_{mi} n_i dA + * \int_{\partial M_{\Gamma V}^+} (g_{mi} - g_i) n_{ai} dA - \int_{\partial M_{\Gamma V}^-} (g_{mi} - g_i) n_{ai} dA - * \int_{V_{B,\Gamma}} g_{i,i} dV - * \int_{V_{M,\Gamma}} g_{mi,i} dV. \quad (B.368)$$

Hierbei ist $\partial M_{\Gamma V}^+ = \partial M_{\Gamma}^+ \cap V_{\Gamma}$ und $\partial M_{\Gamma V}^-$ ist analog definiert. Nun gilt

$$(g_{mi} - g_i) n_{ai} = (\rho_m \varphi_m - \rho \varphi) e_c \cdot n_a + (t_k u_{k,r} - t_{mk} u_{mk,r}) e_{cr} \stackrel{!}{=} 0, \quad (B.369)$$

denn der erste Summand verschwindet bei geradliniger Scherbandausbreitung und der zweite Summand verschwindet, weil er wegen der Stetigkeit des Spannungsvektors auch als $t_k (u_k - u_{mk})_{,r} e_{cr}$ geschrieben werden kann und die Verschiebungen stetig bleiben, solange kein Scherbruch auftritt. Mit der Kurzschreibweise (B.300) gilt also

$$G_1 = \int_{\Gamma_{EXT}} \tilde{g}_i n_i dA - * \int_{V_{\Gamma}} \tilde{g}_{i,i} dV \quad (B.370)$$

und es besteht nach [153] die Hoffnung, daß die so ausgewerteten Integrale weniger empfindlich auf die großen Gradienten in der Nähe von Γ reagieren.

III) Das nächste Ziel muß sein, die Ableitung $\tilde{g}_{i,i}$ möglichst ökonomisch zu berechnen. In einem ähnlich gelagerten Problem (Berechnung von $W_{,i}$ mit $W = \int \sigma \cdot d\mathbf{s}$) ermittelt Atluri [153] zuerst W an allen Integrationspunkten und berechnet $W_{,i}$ dann durch numerische Differentiation.

Es folgen nun einige Bemerkungen zur Berechnung von $\tilde{g}_{i,i}$. Wir geben hier nur den Ausdruck für $g_{i,i}$ in \mathcal{B} an; eine ausführlichere Diskussion findet man in [5]. Eliminiert man die freie Energie über die Enthalpie, so entsteht:

$$g_{i,i} = (\sigma_{kr} \varepsilon_{kr}^r)_{,i} e_{ci} - \rho g_{,i} e_{ci} - \sigma_{kl,i} u_{k,r} e_{cr} - \sigma_{ki} \varepsilon_{ki,r} e_{cr} \quad (B.370)$$

In einer FEM-Formulierung mit Verschiebungsansätzen können nur die Ableitungen von \mathbf{u} , \mathbf{s} analytisch berechnet werden. Die (Orts-)Ableitungen anderer Größen hat man numerisch zu ermitteln. Im vorliegenden Fall wird der Rechenaufwand bei der numerischen Differentiation minimiert, wenn wir für \mathbf{s}_r das Stoffgesetz einsetzen. Dann folgt:

$$g_{i,i} = \lambda_2 \sigma_{kk} \Theta_{,i} e_{ci} + \lambda_2 (\Theta - \Theta_0) \sigma_{kk,i} e_{ci} + 2\lambda_3 (\zeta) \sigma_{kk} \sigma_{rr,i} e_{ci}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\lambda_4(\zeta)\sigma_{kr}\sigma_{kr,i}e_{ci} + \lambda_3^I(\zeta)\sigma_{kk}\sigma_{rr}\zeta_{,i}e_{ci} + \lambda_4^I(\zeta)\sigma_{kr}\sigma_{kr}\zeta_{,i}e_{ci} \\
 & - \rho g_{,i}e_{ci} - \sigma_{ki,i}u_{k,r}e_{cr} - \sigma_{ki}\varepsilon_{ki,r}e_{cr}
 \end{aligned} \tag{B.372}$$

Die Ableitungen $\zeta_{,i}$, $\Theta_{,i}$, $\sigma_{kr,i}$, $g_{,i}$ sind numerisch zu berechnen. Es lohnt sich nicht, im vorletzten Summanden $\sigma_{ki,i}$ durch die Impulsbilanz zu eliminieren, da die Spannungsableitungen ohnedies berechnet werden müssen.

Die Berechnung von $g_{mi,i}$ in \mathcal{M} erfolgt analog mit dem dort gültigen Stoffgesetz.

iv) Für G_2 ergibt sich analog

$$\boxed{G_2 = - \int_{\Gamma_{\text{EXT}}} \tilde{\gamma}_i n_i dA + * \int_{V_\Gamma} \tilde{\gamma}_{i,i} dV} \tag{B.373}$$

Die numerische Berechnung von $\tilde{\gamma}_{i,i} = \rho u_{k,ri} u_{k,m} e_{cm} e_{cr} e_{ci}$ (B.374)

bereitet keine Probleme, da nur Verschiebungsableitungen auftreten.

B2.5. Das Materialmodell für \mathcal{M}

I) Aufgrund der Scherbandgeometrie (Ausdehnung in Richtungen senkrecht zu n_A ist wesentlich größer als Ausdehnung in Richtung n_A) und der speziellen Deformation scheint es naheliegend, gewisse Idealisierungen in den konstitutiven Gleichungen für \mathcal{M} vorzunehmen. Man kann \mathcal{M} z.B. als zweidimensionales Kontinuum auffassen und sich bei der Auswahl der unabhängigen Variablen an der Theorie von *Moeckel* [155] orientieren. Auch geometrische Zwangsbedingungen wären denkbar: Starr-inelastisches Verhalten oder Beschränkung der Deformation auf einfache Scherungen (wie bei viskosimetrischen Strömungen) kommen in Frage.

Derartige Idealisierungen sind zwar für theoretische Untersuchungen brauchbar, erweisen sich aber bei der numerischen Behandlung als hinderlich. Wir treffen daher als erstes die Entscheidung, auch für \mathcal{M} eine vollständige dreidimensionale Theorie zu formulieren.

II) I) In \mathcal{M} treten i.a. bereits große Scherungen auf, wenn die Verzerrungen in \mathcal{B} noch durch eine geometrisch lineare Theorie beschrieben werden können. Wir geben hier aber aus Gründen der Platzersparnis auch für \mathcal{M} nur die geometrisch lineare Form des Stoffgesetzes an; die Erweiterung auf große Verzerrungen erfolgt analog mit den in Kap.B1.7. beschriebenen Methoden.

II) Wir wollen vereinfachend gegenüber Modell 1.2. annehmen, daß

- Schädigung
- Verfestigung durch Änderung der Versetzungsverteilung
- alle anderen Strukturänderungen

in \mathcal{M} vernachlässigbar sind. Wir benötigen dann

- eine Fließregel für $\dot{\varepsilon}_I = \dot{\varepsilon}_V$ mit Fließbedingung
- einen Ansatz für die Enthalpie
- ein Wärmeleitgesetz
- eine Gleichung für das Maß u der Prozeßgeschwindigkeit und zusätzlich bei großen Deformationen
- eine Gleichung für den inelastischen Spin.

III) Zur Vereinfachung der Schreibweise verzichten wir in diesem Kapitel darauf, die Materialgrößen in \mathcal{M} durch einen Index M zu kennzeichnen. Verwechslungen mit den Materialgrößen in \mathcal{B} sind in diesem Kapitel nicht möglich.

III) Materialgleichungen

I) Fließregel: Die Unsicherheit über den Beitrag viskos gedämpfter Versetzungsbewegung zur Gesamtverzerrungsrate bei HGDen hat Auswirkungen auf die Formulierung der Fließregel in \mathcal{M} . Wenn man in der Umgebung \mathcal{B} von \mathcal{M} Dehnungsraten der Größenordnung 10^4 sec^{-1} zuläßt, dann treten in \mathcal{M} möglicherweise Dehnungsraten von 10^6 sec^{-1} und mehr auf, siehe z.B. [87]. Es ist daher eine reine Verlegenheitslösung, für $\dot{\varepsilon}_V$ wieder ein Überspannungsmodell wie bei der thermisch aktivierten Versetzungsbewegung einzuführen:

$$\dot{\varepsilon}_I = \dot{\varepsilon}_V = \gamma(u, \Theta) \left[\Phi(H) \right]_n \frac{\sigma^I}{\|\sigma^I\|} \quad (\text{B.375})$$

$$\text{falls } H := \sigma^I \cdot \sigma^I - h(u, \Theta)$$

II) Enthalpie :

$$\rho g = \frac{1}{2} \lambda_1 (\Theta - \Theta_0)^2 + \lambda_2 (\Theta - \Theta_0) \text{tr} \sigma + \frac{1}{2} \lambda_3 (\text{tr} \sigma)^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 \text{tr} \sigma^2 - \frac{\tau_q}{2k\Theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} \quad (\text{B.376})$$

III) Wärmeleitgesetz :

$$\tau_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = -k \text{grad} \Theta \quad (\text{B.377})$$

IV) Evolution von u :

$$\ddot{u} + c(\alpha + PG) \dot{u} + \frac{c^2}{4} (\alpha + PG)^2 \{u - u_{\varepsilon_0}(PG)\} = 0 \quad (\text{B.378})$$

v) Es ist unmittelbar einsichtig, daß diese Gleichungen mit der CDU verträglich sind. Man berechnet die reversible Verzerrung

$$\varepsilon_r = \rho \frac{\partial g}{\partial \sigma} = \lambda_2 (\Theta - \Theta_0) 1 + \lambda_3 (\text{tr} \sigma) 1 + \lambda_4 \sigma \quad (\text{B.379})$$

und die Entropie $\rho \eta = \rho \frac{\partial g}{\partial \Theta} = \lambda_1 (\Theta - \Theta_0) + \lambda_2 \text{tr} \sigma + \frac{\tau_q}{2k\Theta^2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$. (B.380)

Der erste Hauptsatz lautet in \mathcal{M} :

$$\rho c_\sigma \dot{\Theta} + \lambda_2 \Theta \text{tr} \dot{\sigma} = \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_v - \frac{2\tau_q}{k\Theta} \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} - \text{div} \mathbf{q} \quad (\text{B.381})$$

Das Materialmodell für \mathcal{M} enthält insgesamt 4 Materialfunktionen $\gamma, \Phi, h, u_{\text{eq}}$.

B2.6. Zusammenfassung der Materialgleichungen von Modell 2.1. - Untersuchung des inkrementellen Randwertproblems

I) Modell 2.1. umfaßt die Gleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit von \mathcal{M} sowie die konstitutiven Ansätze für das Materialverhalten in \mathcal{M} . Es sei betont, daß die hier angegebenen Materialgleichungen für \mathcal{M} bei beliebigen geometrisch linearen Deformationen gelten, während die Gleichung für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c nur bei ebenen Problemen und geradlinigem Wachstum gilt.

II) Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \frac{\chi_{c1} h}{1 + \chi_{c2} h} \left\{ 1 + \frac{\chi_{c1}^2 h}{(1 + \chi_{c2} h)^2} G_2 + \frac{3 \chi_{c3} \chi_{c1}^4 h^2}{(1 + \chi_{c2} h)^4} G_2^2 \right\}$$
(B.382)

falls $h = G_1 - 2\gamma > 0$

III) Materialmodell für \mathcal{M}

$$\dot{\varepsilon}_{\mathcal{M},I} = \gamma_{\mathcal{M}} [\Phi_{\mathcal{M}}]_H \frac{\sigma_{\mathcal{M}}^I}{\|\sigma_{\mathcal{M}}^I\|} \quad \text{falls } H = \sigma_{\mathcal{M}}^I \cdot \sigma_{\mathcal{M}}^I - h(u_{\mathcal{M}}, \Theta_{\mathcal{M}}) \geq 0 \quad (\text{B.383})$$

$$\tau_{\mathcal{M}q} \dot{\mathbf{q}}_{\mathcal{M}} + \mathbf{q}_{\mathcal{M}} = -k_{\mathcal{M}} \text{grad} \Theta_{\mathcal{M}} \quad (\text{B.384})$$

$$\ddot{u}_{\mathcal{M}} + c_{\mathcal{M}} (\alpha_{\mathcal{M}} + \text{PG}_{\mathcal{M}}) \dot{u}_{\mathcal{M}} + \frac{c_{\mathcal{M}}^2}{4} (\alpha_{\mathcal{M}} + \text{PG}_{\mathcal{M}})^2 \{u_{\mathcal{M}} - u_{\mathcal{M},\text{EQ}}(\text{PG}_{\mathcal{M}})\} = 0 \quad (\text{B.385})$$

$$\dot{\varepsilon}_{\mathcal{M},R} = \lambda_{\mathcal{M}2} \dot{\Theta} 1 + \lambda_{\mathcal{M}3} (\text{tr} \dot{\sigma}) 1 + \lambda_{\mathcal{M}4} \dot{\sigma} \quad (\text{B.386})$$

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle nochmals die in \mathcal{M} gültige Form

der Energiebilanz angegeben:

$$\rho_M c_{\sigma_M} \dot{\Theta}_M + \lambda_{M2} \Theta_M \operatorname{tr} \dot{\sigma}_M = \sigma_M \cdot \dot{\varepsilon}_{M,1} - \frac{2\tau_{Mq}}{k_M \Theta_M} \mathbf{q}_M \cdot \dot{\mathbf{q}}_M - \operatorname{div} \mathbf{q}_M \quad . \quad (\text{B.387})$$

IV) Einige Bezeichnungen

Wir wollen uns nun der Untersuchung des inkrementellen RWP's zuwenden. Wir bezeichnen mit $\mathcal{F}_B = 0$ das System aller Feldgleichungen in \mathcal{B} (Bilanzgleichungen kombiniert z.B. mit Modell 1.2.) und mit $\mathcal{F}_M = 0$ das System der Feldgleichungen in \mathcal{M} (Bilanzgleichungen kombiniert mit (B.383-386)). $\mathcal{R}_B = 0$, $\mathcal{R}_M = 0$ seien die inkrementellen Randbedingungen auf $\partial\mathcal{B}_{\text{EXT}}$, $\partial\mathcal{M}_{\text{EXT}}$. Bei der vorliegenden Struktur der Materialgleichungen ist es besonders sinnvoll, die inkrementelle Impulsbilanz und die finite Form der Energiebilanz zu verwenden. Wir wenden uns nun der Untersuchung der Übergangsbedingungen zu.

V) Einige Bemerkungen zum inkrementellen Randwertproblem in $\mathcal{B} \cup \mathcal{M}$

(kleine Deformationen in \mathcal{B}, \mathcal{M})

I) Es seien die Momentanwerte aller Felder zu einer Zeit $\tilde{t} \geq t^*$ bekannt. Gesucht ist der Zustand zur Zeit $\tilde{t} + \Delta t$.

Eine wesentliche Eigenschaft des Modells ist, daß vermöge der g.a. Gleichung (B.382) für c und der Eigenschaften von G_1, G_2 bereits mit den Werten zur Zeit \tilde{t} entschieden werden kann, ob in $[\tilde{t}, \tilde{t} + \Delta t]$ Scherbandausbreitung auftritt.

II) Im Rahmen der verwendeten geometrischen Linearisierung erfordert die Massenbilanz

$$\rho_M = \rho_B = \rho \quad (\text{B.388})$$

und damit folgt die Stetigkeit der Normalkomponente von \mathbf{v} an den Unstetigkeitsflächen $\partial\mathcal{M}^+$, $\partial\mathcal{M}^-$, $\partial\mathcal{M}_c$. Auch die Tangentialkomponente bleibt stetig, da wir Scherbrüche ausgeschlossen haben. Wir haben also

$$[[\mathbf{v}]] = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\mathcal{M}^+, \partial\mathcal{M}^-, \partial\mathcal{M}_c \quad \forall t \geq t^* \quad (\text{B.389})$$

Aus den Sprungrelationen für Impuls und Energie folgen dann

$$[[\sigma \mathbf{n}]] = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\mathcal{M}^+, \partial\mathcal{M}^-, \partial\mathcal{M}_c \quad \forall t \geq t^* \quad (\text{B.390})$$

$$\rho [[\mathbf{e}]] \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} - [[\mathbf{q}]] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{M}^+, \partial\mathcal{M}^-, \partial\mathcal{M}_c \quad \forall t \geq t^* \quad . \quad (\text{B.391})$$

Auf $\partial\mathcal{M}_c$ hat (B.391) die Bedeutung einer "Hugoniot-Bedingung" (diese Bezeichnung verwendet man üblicherweise nur, wenn auf beiden Seiten einer Unstetigkeitsfläche gleiches Materialverhalten vorliegt).

Impuls- und Energiebilanz enthalten jeweils Ortsableitungen erster Ordnung, so daß wir je zwei Übergangsbedingungen benötigen. Mit (B.389,390) liegen diese für die Impulsbilanz vor. Wir benötigen noch eine zweite Bedingung für die Energiebilanz und diese Bedingung muß als mit (B.391) verträgliche Annahme eingeführt werden. Diese Verträglichkeit zu überprüfen ist schwierig, da ohne Vorgabe eines Ansatzes für e und ohne Kenntnis des Sprunges der inneren Variablen der Sprung $[[e]]$ nicht berechnet werden kann [128]. Um zu einer weiteren Übergangsbedingung zu gelangen, treffen wir folgende Annahmen:

Annahme 9 : Die inneren Variablen sind auf ∂M^+ , ∂M^- , ∂M_c stetig.

Annahme 10 : k und τ_q haben in \mathcal{B} und \mathcal{M} gleiche Werte.

Annahme 11 : $[[\theta]] = 0$.

Annahme 9 besagt z.B., daß sich die Versetzungsdichte nicht ändert, wenn ein Volumenelement von \mathcal{B} in ein solches von \mathcal{M} umgewandelt wird (es steht auf einem anderen Blatt, daß gemäß (B.376) der Einfluß der Versetzungen auf die innere Energie in \mathcal{M} vernachlässigt wird). In jedem Fall ist es nun möglich, $[[e]]$ durch $[[\varepsilon]]$, $[[\theta]]$ und $[[q]]$ auszudrücken.

Unter Annahme 10 verhält sich ∂M_c bzgl. der Maxwell-Cattaneo-Gleichung wie die Wellenfront einer Schockwelle, da auf beiden Seiten gleiche Werkstoffkonstanten vorliegen. Wir können daher aus [128] das Ergebnis

$$[[q]] \cdot e_c = - \frac{k}{\tau_q c} [[\theta]] \quad (\text{B.392})$$

übernehmen und die "Hugoniot-Bedingung" (B.391) auf eine Funktion von $[[\varepsilon]]$, $[[\theta]]$ reduzieren. Mit dieser Darstellung ist Annahme 11 verträglich; die "Hugoniot-Bedingung" verknüpft dann die lokale Scherung in \mathcal{M} mit der Deformation in \mathcal{B} . Für $c = 0$ folgt Annahme 11 ohnedies aus Annahme 10 und (B.392).

III) Zusammenstellung der Übergangsbedingungen - Fall 1: $c = 0$

$$\text{Auf } \partial M^\pm : [[\dot{v}]] = 0, [[\dot{\sigma} n_A]] = 0, [[\theta]] = 0, [[q]] \cdot n_A = 0 \quad (\text{B.393})$$

$$\text{Auf } \partial M_c : [[\dot{v}]] = 0, [[\dot{\sigma} e_c]] = 0, [[\theta]] = 0, [[q]] \cdot e_c = 0 \quad (\text{B.394})$$

IV) Zusammenstellung der Übergangsbedingungen - Fall 2: $c(\tilde{t}) \neq 0$

Auf ∂M^\pm : Die Bedingungen (B.393) gelten unverändert.

Auf ∂M_c sind die Übergangsbedingungen für einen mit ∂M_c mitbewegten Beobach-

ter zu formulieren (vgl.[121]). Aufgrund von (B.389,390) ergibt sich (vgl.[27], Gl.(8.5)):

$$\begin{aligned} \left[\frac{d_c \mathbf{v}}{dt} \right] &= \mathbf{0} = \left[\dot{\mathbf{v}} \right] + \left[\text{grad } \mathbf{v} \right] \cdot \mathbf{c} \\ \left[\frac{d_c \sigma}{dt} \right] \mathbf{e}_c &= \mathbf{0} = \left[\dot{\sigma} \right] \mathbf{e}_c + \left[(\text{grad } \sigma) \mathbf{c} \right] \mathbf{e}_c \\ \left[\theta \right] &= 0 \\ \left[\mathbf{e} \right] &= 0 \end{aligned} \tag{B.395}$$

Wichtig ist, daß wegen (B.382) die unterstrichelten Summanden zu Beginn des Zeitschrittes bekannt sind.

TEIL C : ERGEBNISSE VON TESTRECHNUNGEN FÜR PHASE 1 MIT MODELL 1.2.LD

C.1. Bemerkungen zur Anpassung von Materialfunktionen und -parametern

I) Modell 1.2. enthält 20 Materialfunktionen und 21 weitere einzelne Konstanten. Eine vollständige Beschreibung der Ansätze würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen; wir geben deshalb in Anhang 5 die (gemeinsam mit *W.Fornefeld*) entwickelten Ansätze für die Materialfunktionen ohne Kommentar an. Bzgl. der Herleitung sei auf [4], S.217-229 verwiesen.

II) Mit den so gewählten Materialfunktionen enthält Modell 1.2. 87 Materialparameter. Eine Strategie zur Anpassung dieser Parameter wurde gemeinsam mit *Fornefeld* entwickelt. Zur Anpassung wurden fast ausschließlich einachsige Spannungszustände ausgewertet; ausgenommen hiervon sind die Bestimmung des Schubmoduls sowie der Daten über MiSBs, die auf den am SRI durchgeführten CFC - Tests beruhen.

Wir haben zu unterscheiden zwischen

- der Anpassung an ein fiktives Vergleichsmaterial (→ Abschnitte i),ii)
- der Anpassung an reale Materialien (→ Abschnitt iii)).

I) Eigenschaften des Vergleichsmaterials

Die Einführung des Vergleichsmaterials wurde bereits in der Einleitung mit dem Fehlen vollständiger Versuchsdaten für reale Materialien begründet, siehe auch Kap. 8.1. aus [4]. Zur Definition des Vergleichsmaterials gehört z.B. die Vorgabe von Spannungs-Dehnungs-Kurven $\sigma(\epsilon)$ für verschiedene konstante $\dot{\epsilon}, \Theta$; die Vorgabe des Fließflächenradius $g_r(\epsilon)$ für verschiedene konstante $\dot{\epsilon}, \Theta$; die Vorgabe der Dehnung und der Dehnungsrate, bei der MiSB-Bildung einsetzt usw. Sind diese Vorgaben repräsentativ für mehrere Werkstoffe, bei denen jeweils nur Teilinformationen bekannt sind, so läßt sich auch bei der Simulation des Verhaltens des Vergleichsmaterials der Realitätsbezug unseres Modells beurteilen.

Mit dem Konzept der Anpassung an ein Vergleichsmaterial lassen sich auch nachträgliche Änderungen des Modells vergleichsweise leicht berücksichtigen.

Einige Merkmale der Anpassung an das Vergleichsmaterial werden nun am Beispiel isothermer $\sigma(\epsilon)$ -Kurven für Prozesse $\dot{\epsilon} = k$ ohne Schädigung erläutert. Für solche Prozesse sei das Vergleichsmaterial charakterisiert durch

- eine markante Proportionalitätsgrenze $\sigma_0 = E \epsilon_0$, die von k als Parameter abhängt:

$$d\sigma_0/dk > 0, \quad d\sigma_0/dk \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow 0, \quad \sigma_f = E\varepsilon_f = \inf \sigma_0(k) \quad (\text{C.1})$$

◦ einen glatten $\sigma(\varepsilon)$ -Verlauf auch bei ε_0

◦ einen Potenzansatz

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon & \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \sigma_0 \left\{ \frac{1}{n} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) + 1 \right\}^n, n < 1, & \varepsilon \geq \varepsilon_0 \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Die Parameter im Ansatz für $\dot{\varepsilon}_{vr}$ werden nun so gewählt, daß die Lösung der Evolutionsgesetze (B.192-194) die Verläufe (C.2) möglichst gut approximiert.

II) Bei der Lösung dieses Problems erwies sich die sog. Evolutionstrategie [156] als große Hilfe. Es handelt sich dabei um ein Verfahren, welches die Auswahlprinzipien der biologischen Evolution zur Optimierung technischer Systeme heranzieht; diese sind Mutation und Auslese. Man könnte die Evolutionstrategie als "Optimierung per Zufallszahlengenerator" bezeichnen. Von *W.Fornefeld* wurde die Evolutionstrategie auf die Anpassung der Werkstoffparameter angewendet ([4], insbesondere Kap.8.2). Das Verfahren hat besondere Vorteile bei der Umgehung von Nebenminima, in denen deterministische Verfahren (z.B. Gradientenverfahren) "hängenbleiben".

III) Die Strategie zur Anpassung an reale Materialien wird in [4], p.292-314 beschrieben. Demnach werden zur Anpassung 20 unterschiedliche Versuche benötigt, die z.T. mehrfach durchgeführt werden müssen. Der Schwierigkeitsgrad der Versuche reicht von der einfachen Bestimmung des Wärmeausdehnungskoeffizienten bis hin zur schwierigen Messung des Schädigungszustandes nach einem CFC-Test. Gegenwärtig wird in Zusammenarbeit mit dem Institut für Werkstoffkunde der TU Karlsruhe und dem IFAM Bremen die Anpassung an reale Materialien in Angriff angenommen.

C.2. Testrechnungen - Teil 1: Simulation kleiner homogener Deformationen

C.2.1. Vorbemerkungen zur numerischen Integration

I) Untersucht werden in diesem Kapitel einachsige Zug-Druck- und zweiachsige Zug-Torsions-Beanspruchungen, letztere bislang nur für moderate Dehnungsraten. Die Spezialisierung von Modell 1.2. auf diese Spannungszustände wird hier aus Gründen der Platzersparnis nicht angegeben; der interessierte Leser wird auf [4], Gln.(6.5.28-31) und (6.6.35-52) sowie (9.5.1-13) verwiesen.

II) Das mit Modell 1.2. gebildete Dgl.-System ist (wie bei den meisten Viskoplasti-

zitätsmodellen) numerisch steif. Diese Erkenntnis beruht allerdings nicht auf analytischen Untersuchungen, sondern auf Erfahrungen mit numerischen Testrechnungen.

Im Unterschied zu dem schon mehrfach erwähnten Modell von *Bruhns* (z.B. [108]) oder zu anderen Modellen vom *Perzyna*-Typ ist die Steifheit allerdings nicht die Folge der Fließregel für $\dot{\epsilon}_{vr}$: Aufgrund unserer Anpassung mit $\gamma_T \neq \text{konst.}$, $\Phi_T < \infty$ lassen sich isotherme Prozesse mit $\dot{\epsilon} = \text{konst.}$ sehr rasch integrieren. Die Steifheit resultiert in unserem Modell vielmehr aus den Evolutionsgesetzen für u und τ ; die Änderung dieser Größen z.B. bei raschen Änderungen der Prozeßgeschwindigkeit tritt auch in Bereichen auf, in denen die $\sigma(\epsilon)$ -Kurve nur schwach gekrümmt ist und man eigentlich eine schnelle Integration erwarten würde.

III) I) Die Zeitintegration erfolgte ausschließlich mit expliziten mehrstufigen Einschrittverfahren.

Für die Rechnungen in Kap.C.2.2. wurde der *Fehlberg*-Algorithmus benutzt, für die Rechnungen in Kap.C.2.3. und Kap.C.3. hingegen das *Runge-Kutta*-Verfahren, jeweils mit adaptiver Zeitschrittkontrolle. Es wurde bislang noch nicht ausgetestet, ob implizite Verfahren Vorteile bieten.

II) Eine analytische Untersuchung der Stabilitätsgrenze Δt_{stab} wurde noch nicht durchgeführt; bislang liegen nur Erfahrungswerte vor: Ist die maximale Dehnungsrate vorgegeben oder läßt sie sich (wie beim Taylor-Test) gut abschätzen, so können wir $t_f = \epsilon_f / \max \|\dot{\epsilon}\|$ definieren. Empfehlenswerte Schrittweiten sind dann

$$\Delta t \approx t_f / 50 \text{ bei viskoplastischem Verhalten ohne Schädigung und}$$

$$\Delta t \approx t_f / 200 \text{ bei Berücksichtigung der Schädigung.}$$

In den Programmen zur Zeitintegration wurden auch Vergrößerungen von Δt zugelassen. Es ist übrigens weniger aussagekräftig, Δt auf Zeiten zu beziehen, die mit Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Beschleunigungswellen gebildet werden. Dies liegt daran, daß für das doch recht komplizierte Materialmodell verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten berechnet werden können ([3],Kap.4) und die Ausbreitungsgeschwindigkeit elastischer Störungen (die oft als Kriterium herangezogen wird) ist für die Schrittweitenverfeinerung möglicherweise nicht maßgeblich.

III) Die Rechnungen wurden überwiegend auf einer Workstation SUN 3/60, z.T. auch auf einem PC Atari Mega ST4 durchgeführt.

C.2.2. Untersuchung homogener einachsiger Spannungszustände

I) Wir wollen zeigen, welche Effekte das Modell bei einfachen Belastungen beschreiben kann. Die in diesem Kapitel gezeigten Abbildungen sind [4] entnommen und wurden von *W.Fornefeld* berechnet.

II) Spannungs-Dehnungs-Kennlinien bei konstanter Dehnungsrate

In allen Abbildungen ist $\sigma_f = 3 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, $\varepsilon_f = 1,428 \cdot 10^{-3}$. Alle Dehnungsraten sind auf 1/sec bezogen.

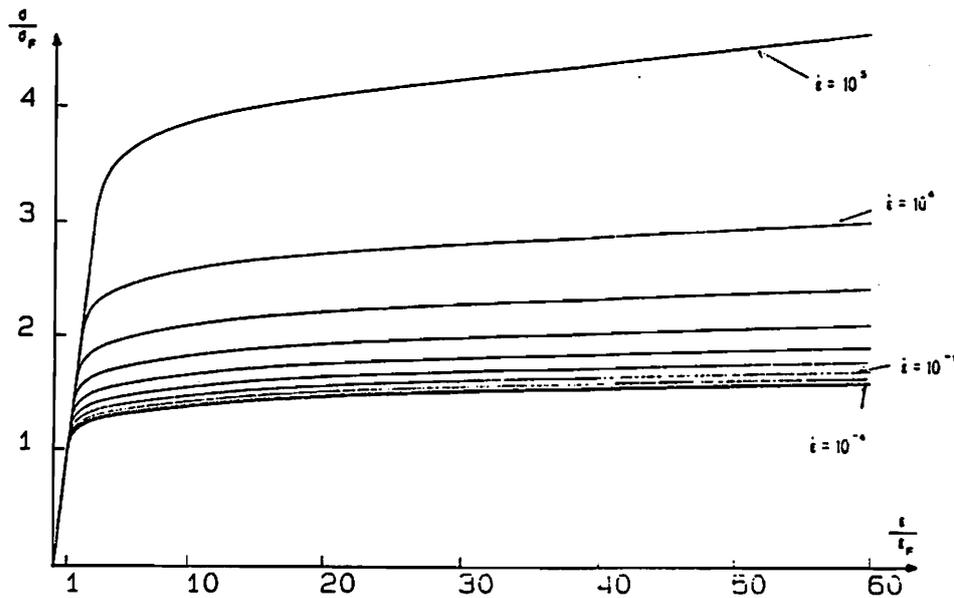


Fig.C.1.

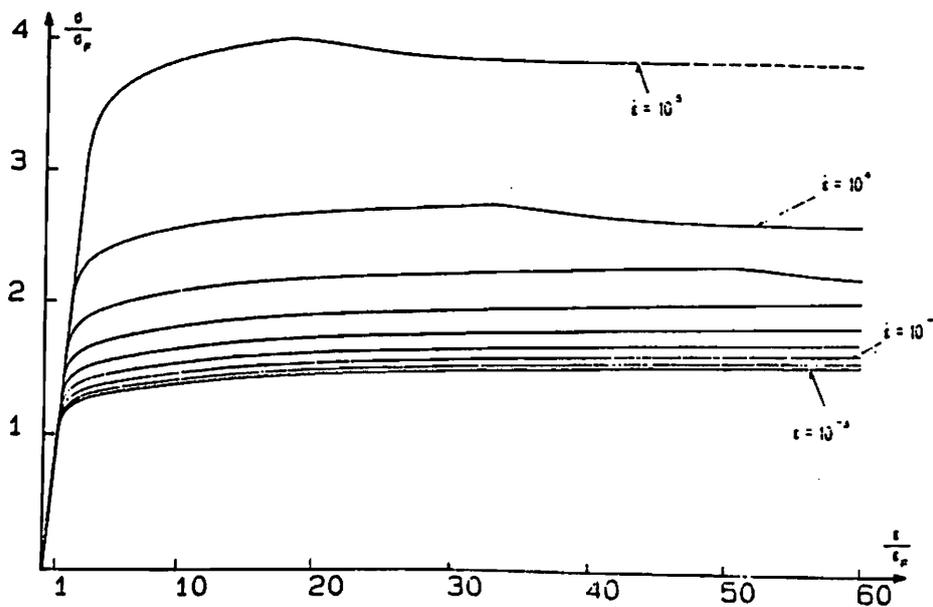


Fig.C.2.

Fig.C.1. zeigt $\sigma(\varepsilon)$ -Kurven für isotherme Prozesse konstanter Dehnungsrate für rein versetzungsinduzierte Deformationen. Die Temperatur ist $\Theta \equiv \Theta_0 = 300\text{K}$. Die Ergebnisse solcher Prozesse sind angegeben, weil sie zur Anpassung benutzt wurden; insbesondere wurden die Kurve mit $\dot{\varepsilon} = 10^{-1}$ sowie der Fließbeginn aller 10 Kurven vorgegeben. Alle anderen Kurven in Fig.C.1. sowie die Kurven in Fig.C.2 - Fig.C.4. stellen Vorhersagen des Modells dar.

Fig.C.2. zeigt im Vergleich zu Fig.C.1. den Einfluß der Temperatur und der Schädigung durch Scherbänder. Die Anfangstemperatur ist wieder $\Theta_0 = 300\text{K}$. Die $\sigma(\varepsilon)$ -Kurven für langsame und moderate Dehngeschwindigkeiten zeigen noch keine Entfestigung, sie sind aber infolge der Erwärmung geringfügig gegenüber den Kurven aus Fig.C.1. nach unten verschoben.

Die Schädigungsvariablen sind so angepaßt, daß Scherbandschädigung erst bei $\dot{\varepsilon} > 5 \cdot 10^2$ auftritt und dann um so rascher, je größer $\dot{\varepsilon}$ ist. Die dargestellte Entfestigung ist mäßig und bewegt sich noch in einem Rahmen, der in der Kontinuumsbetrachtung zulässig ist. Bei der Kurve für $\dot{\varepsilon} = 10^5$ wird bei etwa $45\varepsilon_r$ die Schädigungsvariable Z so groß, daß das Kriterium für die Entstehung eines MaSBs erfüllt ist. Nach Entstehung eines MaSBs kann man natürlich nicht mehr von einem einachsigen homogenen Spannungszustand sprechen. Die zu $\dot{\varepsilon} = 10^5$ gehörige $\sigma(\varepsilon)$ -Kurve in Fig.C.2. ist deshalb nur strichpunktirt fortgesetzt.

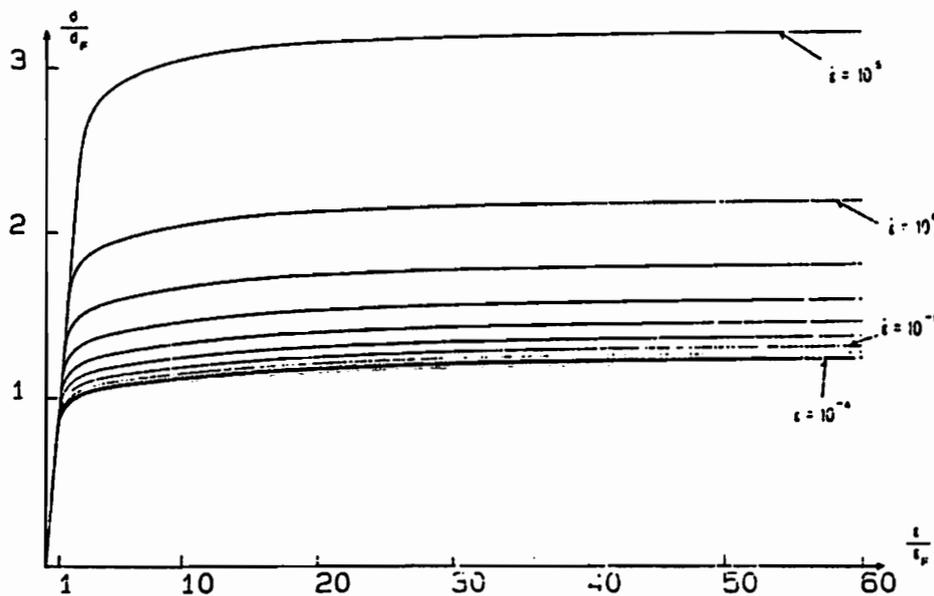


Fig.C.3

In Fig.C.3.,C.4. sind die entsprechenden Prozesse für $\Theta \equiv 600\text{K}$ bzw. $\Theta_0 = 600\text{K}$ dargestellt. Die Abnahme der Proportionalitätsgrenze mit Θ wurde in Fig.C.3 ebenfalls vorgegeben. Es wurde nur das Verhalten bis zu Ingenieurdehnungen von ca. 8,5 % geplottet; in Kap.C.3. wird aber deutlich, daß auch vielfach größere Dehnungen sinnvoll beschrieben werden können.

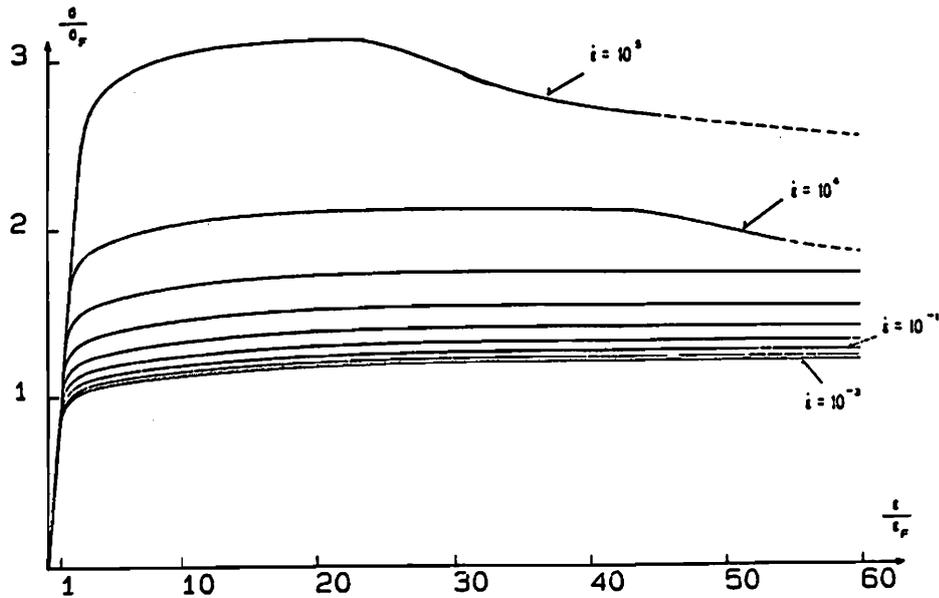


Fig.C.4.

III) Zur Entwicklung der inneren Variablen bei Prozessen mit konstanter Dehnungsrate

1) Untersuchung des Spannungskonzentrationstensors τ

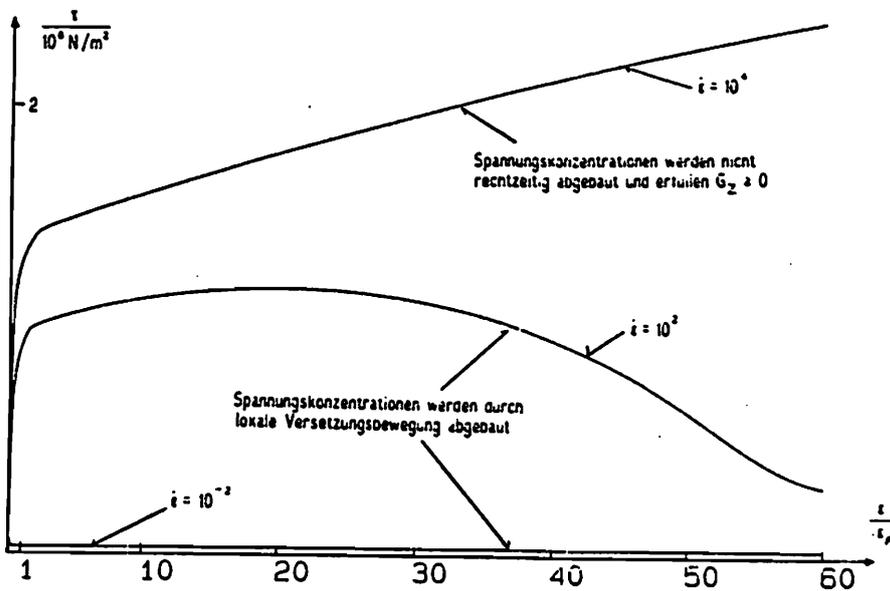


Fig.C.5.

Anhand von Fig.C.5. wird deutlich, warum bei genügend langsamen Prozessen keine Schädigung auftritt: Bei langsamen und moderaten Dehnungsraten ist der Abklingterm in der Gleichung für $\dot{\tau}$ wirksam und τ wird abgebaut, bevor es das Damage-Kriterium $G_2 > 0$ erfüllen kann.

II) Fig.C.6. zeigt die Evolution von Z , ε_{VL} , ϑ

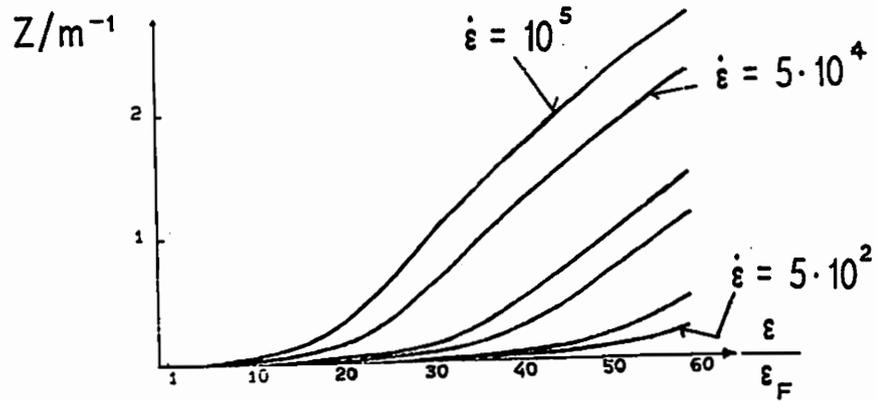


Fig.C.6.a) Evolution von Z für verschiedene konstante $\dot{\varepsilon}$

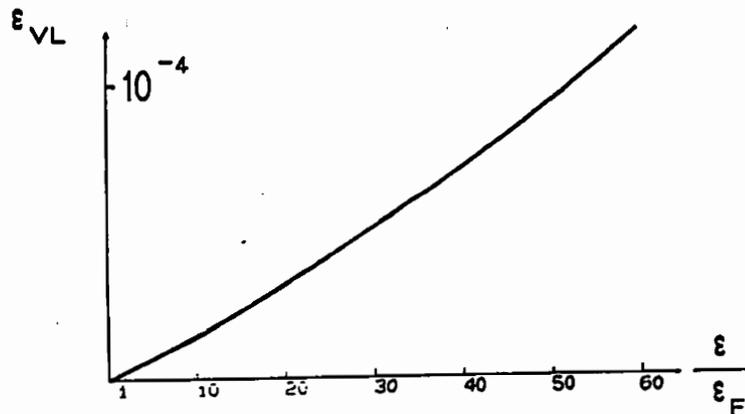


Fig.C.6.b) Evolution von ε_{VL} für $\dot{\varepsilon} = 10^4$

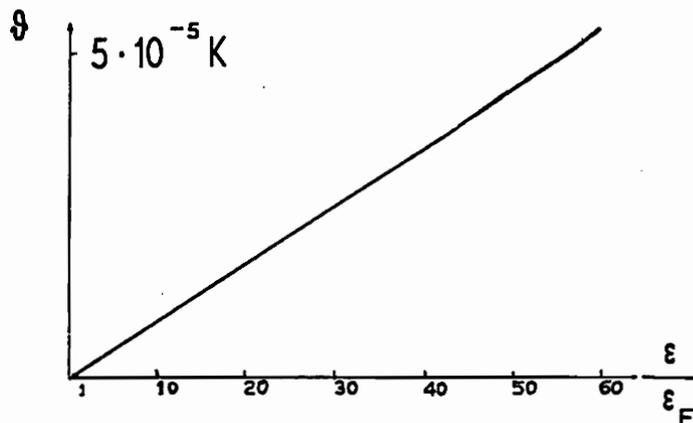


Fig.C.6.c) Evolution der Temperaturkonzentration ϑ für $\dot{\varepsilon} = 10^4$

IV) Nichtmonotone Prozesse

i) Wir wollen aus der großen Zahl gerechneter Beispiele ein einziges für eine vertiefte Diskussion auswählen, nämlich den in Fig.C.7. skizzierten isothermen strain-rate-jump-test entlang der Kurve OABCD. Die Geschichte der Dehnungsrate ist in Fig.C.7. ebenfalls angegeben. Zum Vergleich ist auch die Kurve OAC'D' des konstant schnellen Versuchs mit $\dot{\varepsilon} = 10^2$ eingetragen. Für das Modell ist typisch, daß

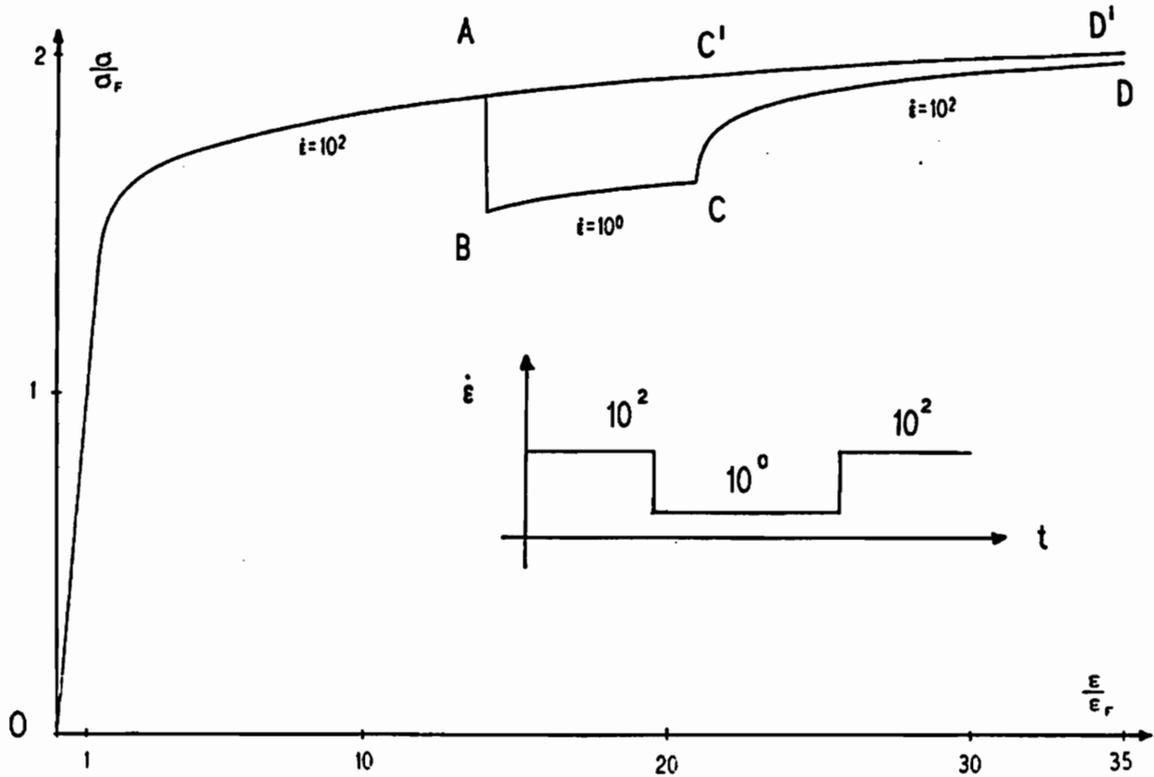


Fig.C.7.a. $\sigma(\epsilon)$ für einen strain-rate-jump-test mit dem angedeuteten Verlauf der Dehnungsrate

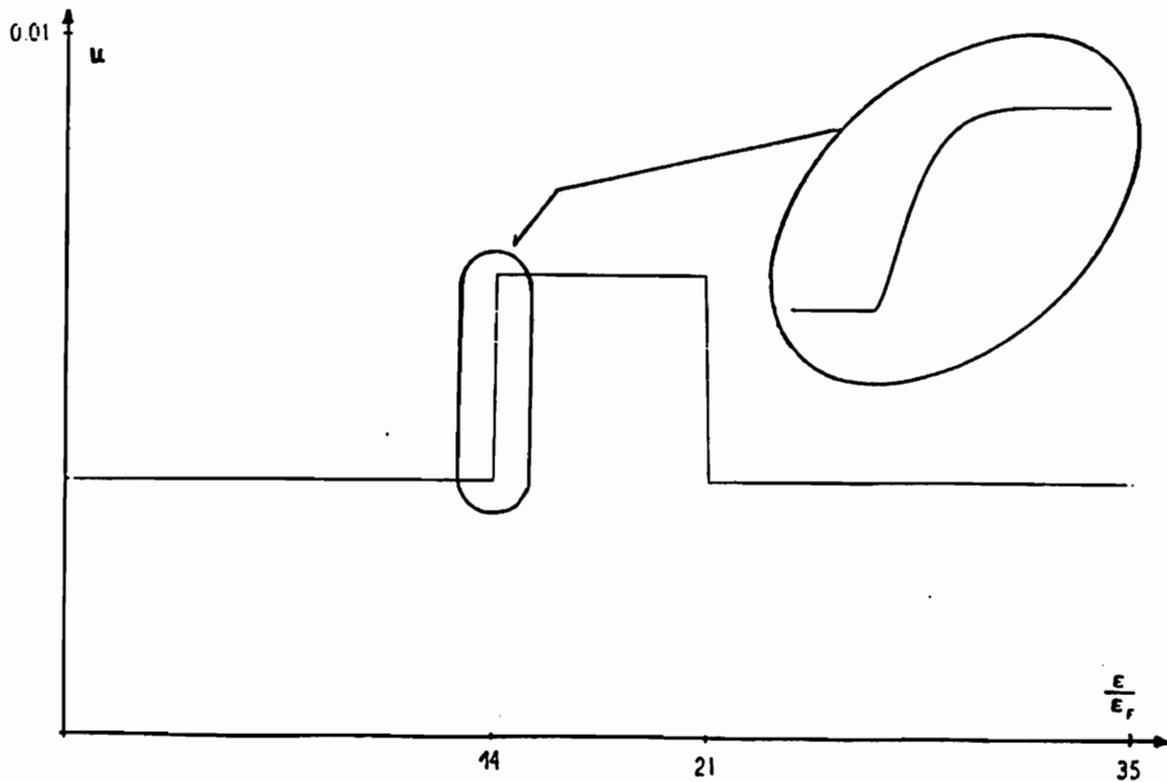


Fig.C.7.b. Verlauf von $u(\epsilon)$ beim strain-rate-jump-test. Die eingeklinkte Vergrößerung veranschaulicht, daß $u(\epsilon)$ auf den Sprung in $\dot{\epsilon}$ mit einem glatten Verlauf reagiert.

CD unterhalb von C'D' verläuft : Da die Evolution der inneren Variablen α, X_T g.a. verläuft, werden zwischen A und C' mehr Versetzungen erzeugt als zwischen A und C. Derartige Versuche wurden übrigens zur Anpassung der Konstanten c in der Evolutionsgleichung für u benutzt.

Der Übergang von A nach B verläuft in Wirklichkeit glatt und erscheint nur im gewählten Maßstab als Sprung. Das „Durchschlagen“ der Kurve nach unten bis zum Punkt B ist eine Folge des extrem großen Unterschiedes zwischen den beiden konstanten Dehnungsraten. Wird $\Delta \dot{\epsilon}$ verringert, so verschwindet das „Durchschlagen“, wie insbesondere am Relaxationsverhalten deutlich wird (siehe Abb. 9.3.3 aus [4]).

II) Ergebnisse anderer Prozesse mit nichtkonstanter Dehnungsrate (monotone spannungsgesteuerte Prozesse, zyklische Prozesse, Relaxationsprozesse,...) findet man in [4]. Es sei ferner an dieser Stelle zugegeben, daß die Berechnung von Kriechprozessen bislang unbefriedigende Ergebnisse (zu große Kriechdehnungen) lieferte.

C.2.3. „Quasi-homogene“ mehrachsige Spannungszustände - isotherme Zug-Torsionsversuche bei moderater Prozeßgeschwindigkeit

I) Einleitung

Wir untersuchen in diesem Kapitel jeweils einen spannungs- und einen dehngesteuerten nichtradialen Prozeß und zwar handelt es sich um die St.Venant'sche Torsion des (wölbfreien) kreiszylindrischen Vollquerschnittes. Die Entscheidung für den Vollquerschnitt anstelle des sonst üblichen Hohlquerschnittes ist dadurch motiviert, daß auch bei dynamischen Experimenten im SHB Vollquerschnitte benutzt werden [32] und wir wollen demnächst solche Experimente nachrechnen. Die Deformation wird nun leider in radialer Richtung inhomogen; in den Abbildungen sind die Werte für den Außenrand aufgetragen. Im Unterschied zu den Rechnungen in Kap.C.3. bleibt die Verformung in Probenlängsrichtung aber homogen, weshalb wir von „quasihomogenen“ Verformungen sprechen.

II) Ein Beispiel eines spannungsgesteuerten Prozesses

Wir beginnen mit dem in Fig. C.8. skizzierten spannungsgesteuerten Prozeß, wie

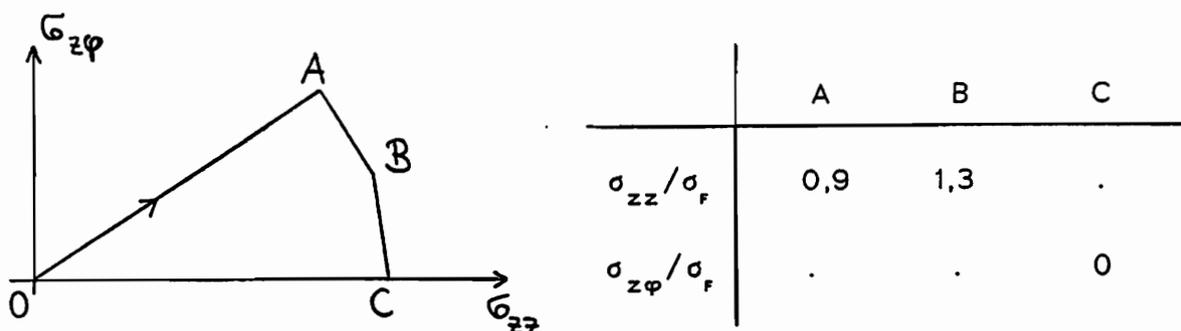


Fig.C.8.

er von Tsakmakis [146] für den Vergleich verschiedener Werkstoffmodelle des Werkstoffs AISI 304 benutzt wurde (Hohlquerschnitte). Die Spannungsgeschwindigkeiten sind wie folgt gewählt:

$$\begin{aligned} \text{OA} & : \dot{\sigma}_{zz} = k_{\sigma} & \dot{\sigma}_{z\varphi} & = 0,6 k_{\sigma} \\ \text{AB} & : \dot{\sigma}_{zz} = k_{\sigma} & \dot{\sigma}_{z\varphi} & = -0,4 k_{\sigma} \\ \text{BC} & : \dot{\sigma}_{zz} = k_{\sigma} & \dot{\sigma}_{z\varphi} & = -15,7 k_{\sigma} \\ \text{CO} & : \dot{\sigma}_{zz} = -k_{\sigma} & \dot{\sigma}_{z\varphi} & = 0 \end{aligned}$$

mit $k_{\sigma} = Ek$, $k = 10^{-1} \text{sec}^{-1}$.

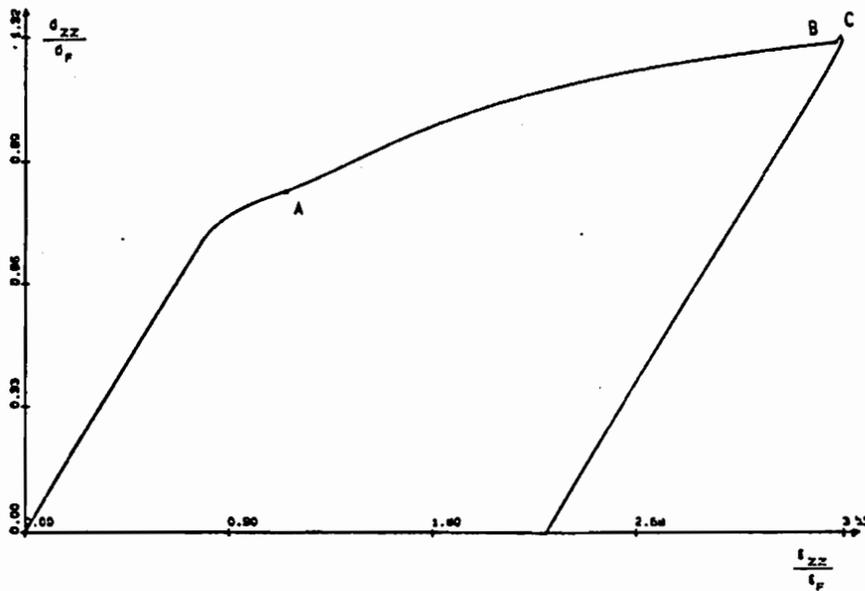


Fig.C.9

Der qualitative Vergleich der $\sigma_{zz}(\epsilon_{zz})$ -Kurve aus Fig.C.9 mit den Experimenten und Rechnungen aus [146] zeigt, daß

- der glatte Übergang in A im Einklang mit dem Experiment steht und z.B. von g.u. Modellen nicht erfaßt wird.
- der Zipfel BC zwar noch von anderen Modellen vorhergesagt, aber offenbar nicht im Experiment beobachtet wird.

An der in Fig.C.10 dargestellten $\sigma_{z\varphi}(\epsilon_{z\varphi})$ -Kurve fällt auf, daß im Experiment die Kurve in A glatt ist, während sowohl g.u. als auch g.a. Theorien einen Knick zeigen, der bei g.u. Theorien aber wesentlich ausgeprägter ist.

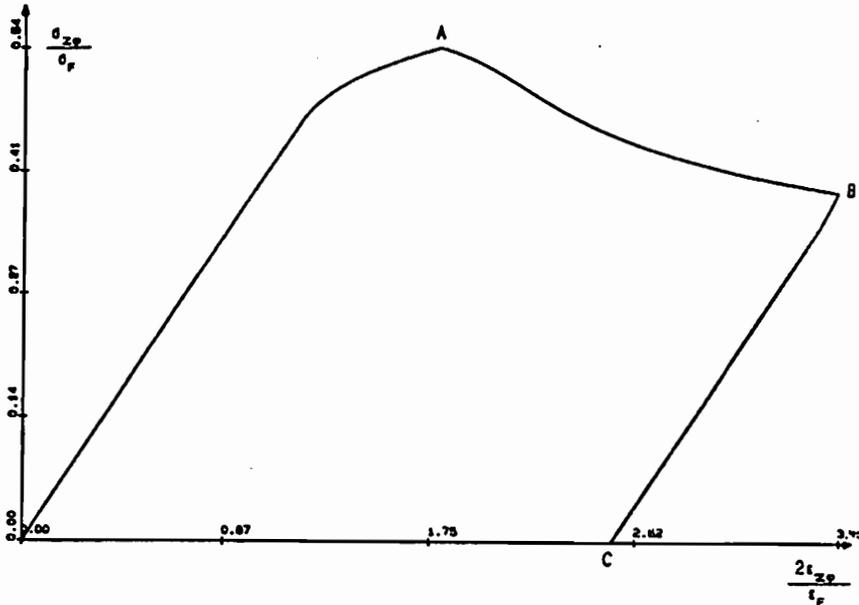


Fig.C.10

III) Ein Beispiel für einen dehngesteuerten Prozeß

i) Fig. C.11 zeigt den Verlauf der Steuergrößen $\epsilon_{zz}, \epsilon_{z\varphi}$ für einen quadratischen Weg OABCDEA in der $\epsilon_{zz} - \epsilon_{z\varphi}$ -Ebene. Die Kantenlänge beträgt $4\epsilon_F$. Die Strecken OA, BC, DE werden jeweils mit $|\dot{\epsilon}_{zz}| = 10^{-1}$ durchlaufen, die Strecken AB, CD, EA mit $|2\dot{\epsilon}_{z\varphi}| = 10^{-1}$.

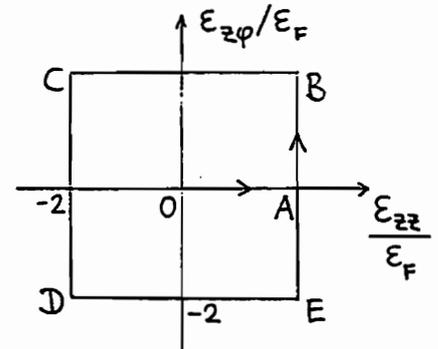


Fig. C.11.

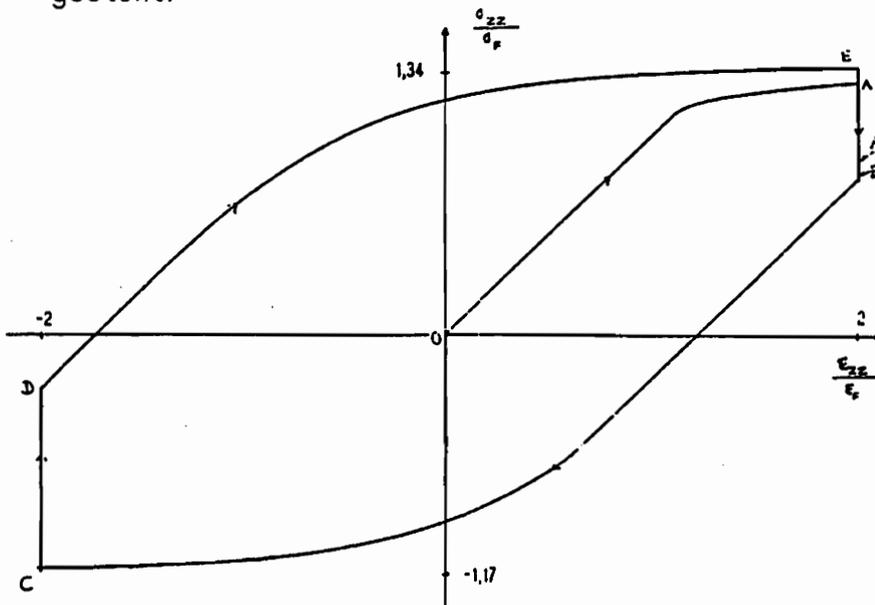


Fig.C.12 $\sigma_{zz}(\epsilon_{zz})$

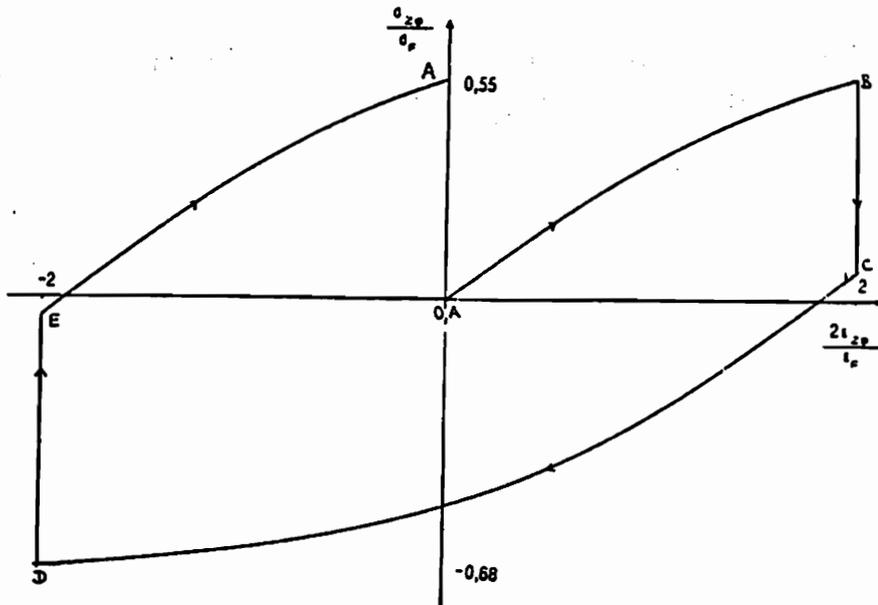


Fig.C.13. $\sigma_{z\varphi}(\varepsilon_{z\varphi})$

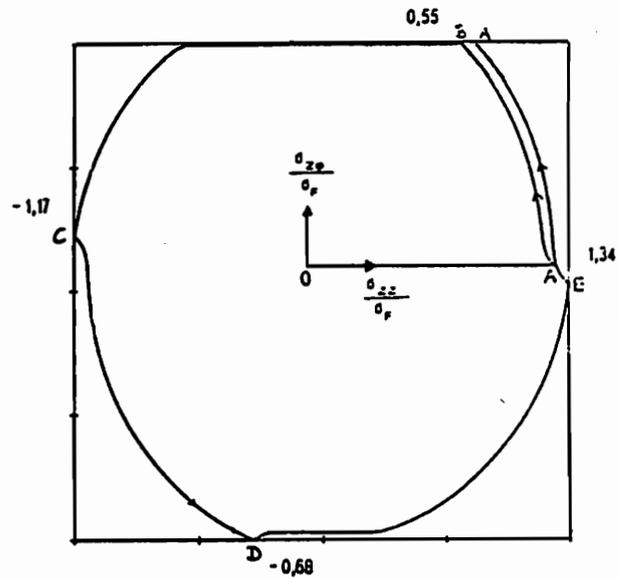


Fig.C.14. $\sigma_{zz} - \sigma_{z\varphi}$ - Verlauf

Es sind uns leider keine Experimente bekannt, die man zum Vergleich heranziehen könnte. *Pape* [157] untersucht ausführlich u.a. Dehnungspfade wie in Fig.C.11, jedoch unter Bedingungen, bei denen überwiegend athermisches Verhalten zu erwarten ist ($\|\dot{\varepsilon}\| = 5 \cdot 10^{-4}$).

Es sei noch angemerkt, daß unser Modell bei mehrachsigen Beanspruchungen höhere Spannungen liefert als im einachsigen Fall. Das liegt daran, daß durch die zusätzlichen Verzerrungskomponenten bzw. deren Raten ein Anstieg von $PG = \|\dot{\varepsilon}\|$ hervorgerufen wird. Dieser Spannungsanstieg hängt also mit der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Modells zusammen und ist zu unterscheiden von der erhöhten Verfestigung bei nichtradialer langsamer Prozeßführung (cross-hardening), die in [157] zur Diskussion steht.

C.3. Testrechnungen - Teil 2: Simulation großer inhomogener Deformationen mit Wellenausbreitung

I) In diesem Kapitel untersuchen wir den Taylor-Test mit den Gleichungen von Modell 1.2.LD unter der Annahme hinreichend kleiner Aufprallgeschwindigkeiten, so daß ein einachsiger Spannungszustand vorliegt. Das Kriterium für das Vorliegen eines einachsigen Spannungszustandes hängt außer von der Aufprallgeschwindigkeit v_{IMP} auch noch von den Querschnittsabmessungen des aufprallenden Stabes ab. Aufgrund der Daten von Nowacki [53] scheint $v_{IMP} = 100$ m/sec zulässig und mit diesem Wert wurde im folgenden gerechnet.

II) Das Rechenmodell

I) Die räumliche Diskretisierung erfolgt mit dem sog. Massenpunktmodell, siehe Fig.C.15. Dieses Modell entspricht einem FE-Modell mit eindimensionalen Simplex-Elementen (constant stress elements). Aufgrund des übersichtlichen Aufbaus lassen sich die Bilanzgleichungen aber ad hoc, d.h. ohne Anwendung eines FE-Formalismus (Elementmatrizen, Richtungs- und Koinzidenztransformation) aufstellen.

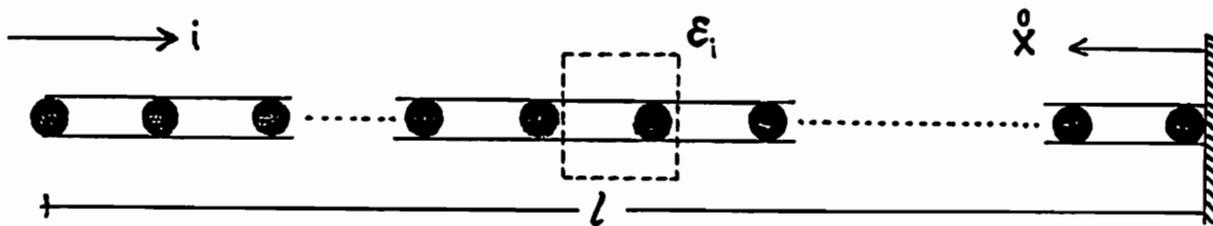


Fig.C.15.

II) Das auftreffende Projektil der Länge l wird zerlegt in N_e Elemente \mathcal{E}_i , bestehend aus einer Masse m_i und einem Verbindungselement der Ausgangslänge l_{0i} . Jedes Verbindungselement erfährt eine homogene Verformung. Wir beschränken uns bei der folgenden Rechnung auf den Fall $m_i \equiv m$ und $l_{0i} \equiv l_0$. Zur Beschreibung der Ausbreitungsvorgänge sollte man mindestens 20 Elemente verwenden.

Jedes Verbindungselement wird charakterisiert durch die ihm zugeordneten Werte von $\sigma, \Theta, \chi, \chi_T, Z, \tau = \text{diag}(\tau, \tau_q, \tau_q), u, \vartheta, A_{vL}, D = \text{diag}(D, D_q, D_q), \Delta = \det F_x = \det F$ und $E = \text{diag}(\varepsilon, \varepsilon_q, \varepsilon_q)$.

Hierbei ist E der Green'sche Verzerrungstensor in der Ausgangskonfiguration χ_0 , ε_q ist die Green'sche Querdehnung und D_q ist die Quer-Dehngeschwindigkeit. Die Matrizen beziehen sich auf ein sowohl in χ_0 als auch in χ_t benutztes Zylinderkoordinatensystem.

Beim einachsigen Spannungszustand ist $L = D$ und $W = W_i = \Omega = 0$. Der Deformationsgradient besitzt die Darstellung

$$F = \text{diag} \left(\sqrt{1+2\varepsilon}, \sqrt{1+2\varepsilon_0}, \sqrt{1+2\varepsilon_0} \right) \quad (\text{C.3})$$

und für die Umrechnung der Querschnittsflächen A_0, A in Ausgangs- bzw. Momentankonfiguration gilt

$$A = \frac{\Delta}{\sqrt{1+2\varepsilon}} A_0 \quad (\text{C.4})$$

Die zur Umrechnung der Flächenelemente allein benötigte Längsdehnung ε ergibt sich durch Integration von

$$\dot{\varepsilon} = (1+2\varepsilon) D \quad (\text{C.5})$$

Die Charakterisierung der Verbindungselemente ist damit abgeschlossen. Jedem Massenpunkt wird noch eine Geschwindigkeit \dot{w} , eine Verschiebung w und ein Wärmefluß q zugeordnet.

III) Aufstellung der Feldgleichungen

Die Übersetzung der Evolutionsgesetze in das Massenpunktmodell ist trivial. Eini-ger Aufmerksamkeit bedarf hingegen die Modellierung der Ortsableitungen:

Die kinematische Bedingung lautet nun

$$D_i = \frac{\dot{w}_i - \dot{w}_{i-1}}{l_{0i} + w_i - w_{i-1}} \quad (\text{C.6})$$

die Impulsbilanz lautet $m_i \ddot{w}_i = A_{i+1} \sigma_{i+1} - A_i \sigma_i$, (C.7)

und den Temperaturgradienten ersetzen wir durch

$$(\text{grad } \Theta)_i = \frac{2(\Theta_{i+1} - \Theta_i)}{l_{i+1} + l_i} \quad (\text{C.8})$$

l_i ist dabei die aktuelle Länge des Elementes.

Hinsichtlich der in der Wärmeleitungsgleichung zu bildenden Divergenz des Wärmeflusses gehen wir zunächst von der integralen Form der Energiebilanz aus:

$$\int_{\mathcal{E}_i} \rho \Theta \dot{\eta} dV = \int_{\mathcal{E}_i} \mathcal{D} dV - \int_{\partial \mathcal{E}_i} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{C.9})$$

\mathcal{D} ist dabei die Dissipation. Für homogene Verformungen von \mathcal{E}_i entsteht daraus

$$(\rho \Theta \dot{\eta})_i = \mathcal{D}_i - \frac{q_i A_i - q_{i-1} A_{i-1}}{A_i l_i} \quad (\text{C.10})$$

iv) Randbedingungen

Es wird angenommen:

- der linke Rand ist spannungsfrei und behält die Ausgangstemperatur $\Theta_0 = 300\text{K}$,
- am rechten Rand verschwinden Verschiebung und Wärmefluß.

Die Annahme $q_{N_{e+1}} = 0$ ist eine Verlegenheitslösung, die von der Vorstellung ausgeht, daß sich das starre Targetmaterial in gleichem Maße erwärmt wie das vorderste Element des Projektils. I.a. wird aber die Reibung zwischen Projektil und Target eine zusätzliche Erwärmung verursachen, die in der jetzigen Formulierung des Problems noch nicht berücksichtigt ist.

III) Ergebnisse von Testrechnungen

i) Aus der Theorie elastischer Wellen erwartet man, daß wegen $\sigma = \rho c_{el} v$ und $v \approx v_{IMP}$ das Material bis $v_{IMP} \approx 10\text{m/sec}$ elastisch bleibt. Dies wurde verifiziert.

ii) Die nachfolgenden Rechnungen beziehen sich auf den senkrechten Aufprall eines Stabes mit $l = 5 \cdot 10^{-2}\text{ m}$ und Durchmesser $6 \cdot 10^{-3}\text{ m}$ auf eine starre Wand. Die Aufprallgeschwindigkeit beträgt $v_{IMP} = 100\text{ m/sec}$. Es wurden 25 Elemente benutzt.

Es soll untersucht werden

- der Einfluß der Wärmeleitung auf die Lösung,
- die Verteilung der Defekte in Stablängsrichtung,
- der Einfluß der schädigungsinduzierten Entfestigung,
- der Einfluß der räumlichen Diskretisierung auf die Ergebnisse.

Zu all diesen Aspekten sind noch umfangreiche Untersuchungen im Gange. Wir stellen einige Zwischenergebnisse vor.

III) Einfluß der Wärmeleitung

Fig.C.16 - Fig.C.18 zeigen die Verteilung von Cauchy-Spannung und Temperaturzunahme über dem Ort (Koordinaten $\overset{\circ}{x}$ der Ausgangskonfiguration) für verschiedene Zeiten ($1\mu\text{sec}$, $1,14\mu\text{sec}$, $1,85\mu\text{sec}$, $2,44\mu\text{sec}$, $3,29\mu\text{sec}$). Die Rechnung wurde jeweils nach $\varepsilon \approx 9,5\%$ abgebrochen. Zu diesem Zeitpunkt war mit bloßem Auge noch kein Einfluß der Wärmeleitung auf die Spannungsverteilung zu erkennen, weshalb wir mit Fig.C.16 nur $\sigma(\overset{\circ}{x})$ für den Fall $q \neq 0$ angegeben haben.

Fig.C.17 zeigt $\Delta\Theta(\overset{\circ}{x})$ für $q \neq 0$, Fig.C.18 zeigt hingegen $\Delta\Theta(\overset{\circ}{x})$ für $q = 0$. Sowohl hinsichtlich der Temperaturverteilung als auch hinsichtlich der Maximal-Temperatur hat q einen erheblichen Einfluß, der sich bei genügend langer Prozeßführung dann natürlich auch auf σ und die anderen Variablen auswirkt.

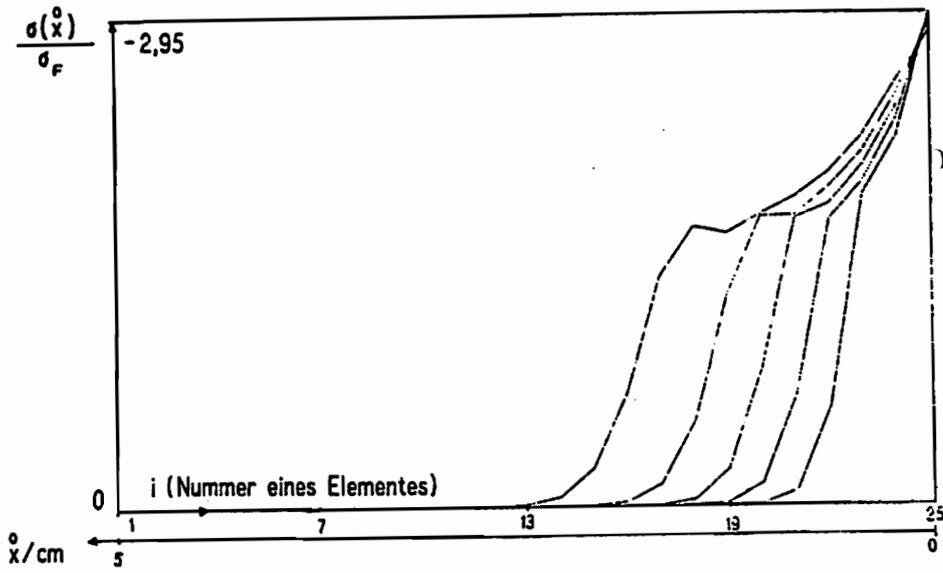


Fig. C.16 $\sigma(x)$ für $q \neq 0$ (vollständiges Modell 1.2.LD)

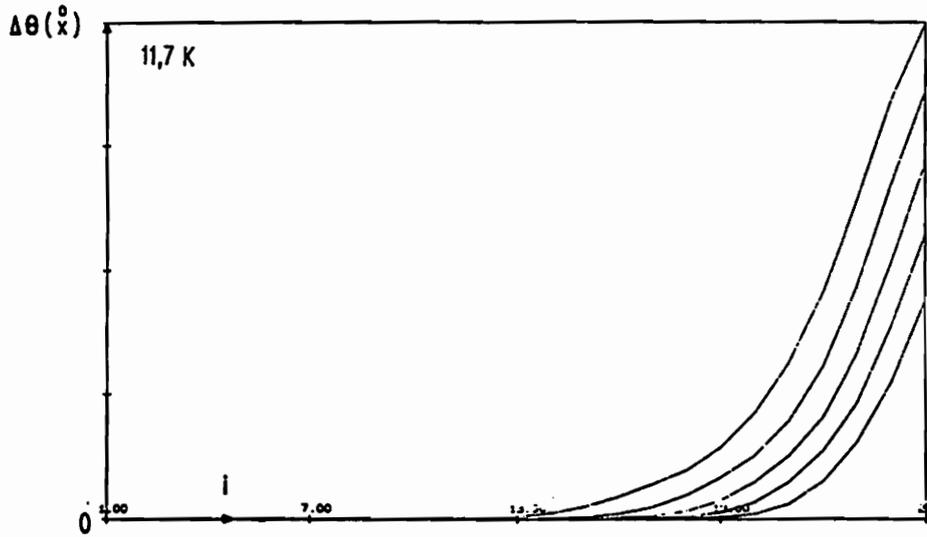


Fig.C.17. $\Delta\theta$ für $q \neq 0$

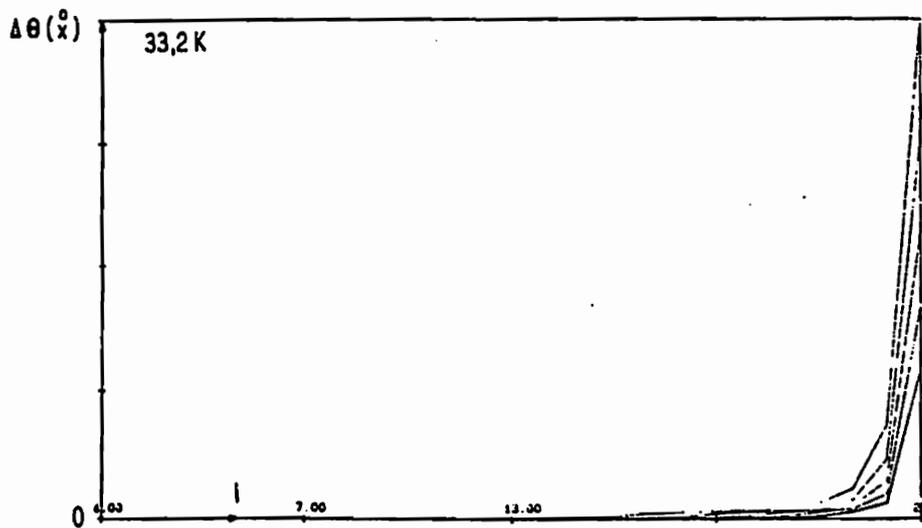


Fig.C.18 $\Delta\theta$ für $q = 0$

Dieses Beispiel bestätigt, was ohnehin durch eine Abschätzung der Größenordnung der Summanden im ersten Hauptsatz klar sein sollte: Auch bei sehr schnellen Prozessen darf man nicht ohne weiteres eine adiabate Prozeßführung annehmen, wenn gleichzeitig große Temperaturgradienten auftreten. In Kap.A.6. wurde aber erwähnt, daß in zahlreichen Modellen zur Beschreibung von HGDen (z.B. [111]) „adiabat gerechnet“ wird; die mit solchen Modellen erzielten Ergebnisse sind also fragwürdig.

iv) Verteilung der Gitterdefekte, Einfluß von Strukturänderungen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Lösung der Gleichungen von Modell 1.2.LD für einen Prozeß, bei dem die elastische Welle gerade den Stab einmal durchlaufen hat. Dies ist in Fig.C.19 gut zu erkennen, in der $\sigma(\overset{\circ}{x})$ für die Zeiten 1,4 μsec , 2,44 μsec , 4,65 μsec , 6,74 μsec , 9,76 μsec aufgetragen ist.

Fig.C.20,C.21 zeigen die Verteilung der Green'schen Dehnung ε und der Geschwindigkeit \dot{w} zu den gleichen Zeiten.

In Fig.C.22, C.23 ist die Verteilung von $\Delta\theta(\overset{\circ}{x})$ bzw. $q(\overset{\circ}{x})$ angegeben.

Wir kommen nun zur Verteilung der Versetzungsdichte N und der Scherbandschädigung Z längs der Stabachse. N wird gemäß (B.63) aus x umgerechnet. Für die schon erwähnten festen Zeitpunkte ist $N(\overset{\circ}{x})$ in Fig.C.24 aufgetragen. Man erkennt daran, daß die inelastischen Deformationen nach 9,76 μsec noch nicht einmal bis zur Hälfte des Stabes fortgeschritten sind. Der Wert von N_{max} ist noch um einen Faktor $\approx 0,1$ vom Wert der maximal möglichen Versetzungsdichte entfernt.

Fig.C.25. zeigt die Verteilung der Schädigung. Diese konzentriert sich auf die 3 vordersten Elemente. Der bei $\varepsilon = 14,1\%$ erreichte Wert $Z = 1,53/\text{m}$ ist in der Kontinuumstheorie noch zulässig, wenn wir das Volumen eines Verbindungselementes \mathcal{E}_i als ΔV einführen; dann ist $\Delta V = 5,65 \cdot 10^{-8} \text{m}^3$ und mit (B.170) verifiziert man $Z_{\text{max}} < (\Delta V)^{-1/3}$.

Die Schädigung führt zur Entfestigung; diese beobachtet man sowohl im $\sigma(\overset{\circ}{x})$ - Verlauf aus Fig.C.19 als auch im $\sigma(t)$ -Verlauf für das vorderste Element. Solche Spannungs-Zeit-Verläufe sind in Fig.C.26 für $i = 10, 15, 20, 23, 25$ bzw. $\overset{\circ}{x} = 1\text{mm}, 5\text{mm}, 11\text{mm}, 21\text{mm}, 31\text{mm}$ dargestellt.

Fig.C.27 zeigt Dehnungs-Zeit-Verläufe für dieselben Verbindungselemente.

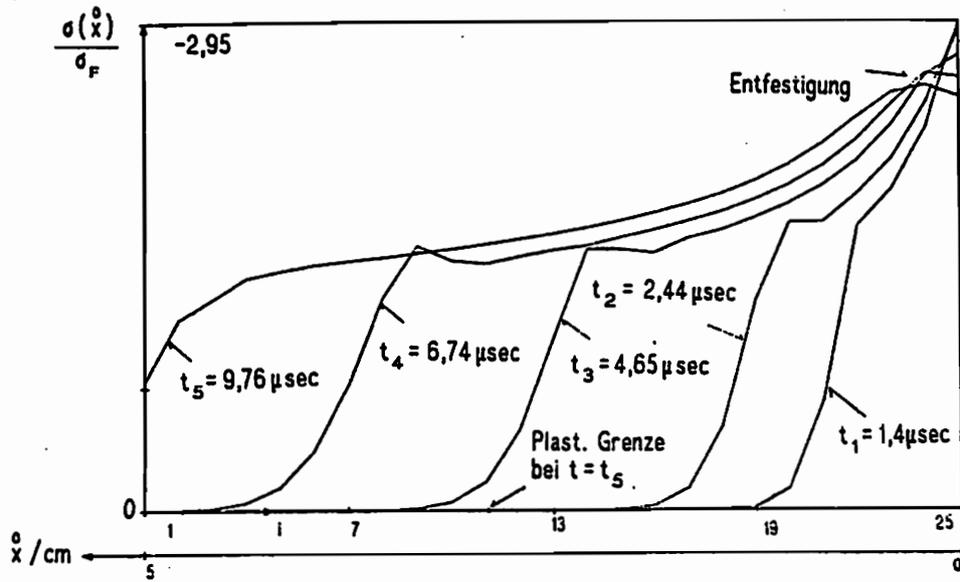


Fig.C.19 $\sigma(x)$ für die Zeiten $t/\mu\text{sec} = 1,4, 2,44, 4,65, 6,74, 9,76$

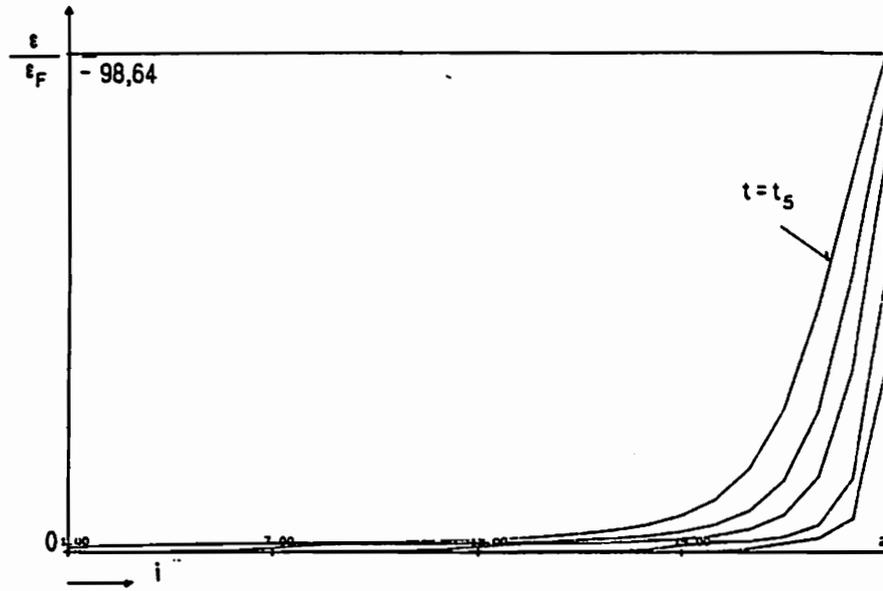


Fig.C.20 $\epsilon(x)$, $\max |\epsilon| = 14,1\%$

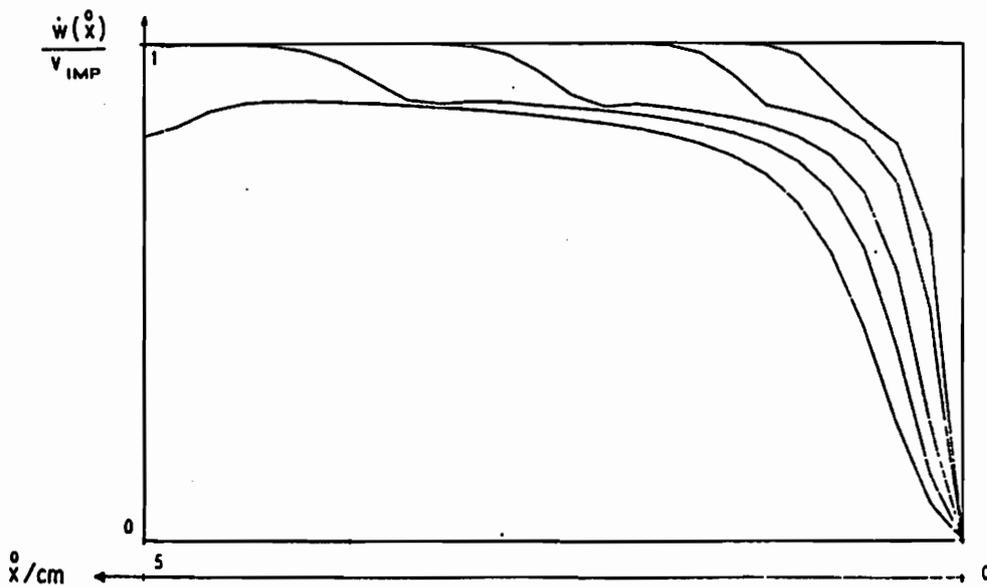


Fig.C.21 Geschwindigkeit \dot{w}

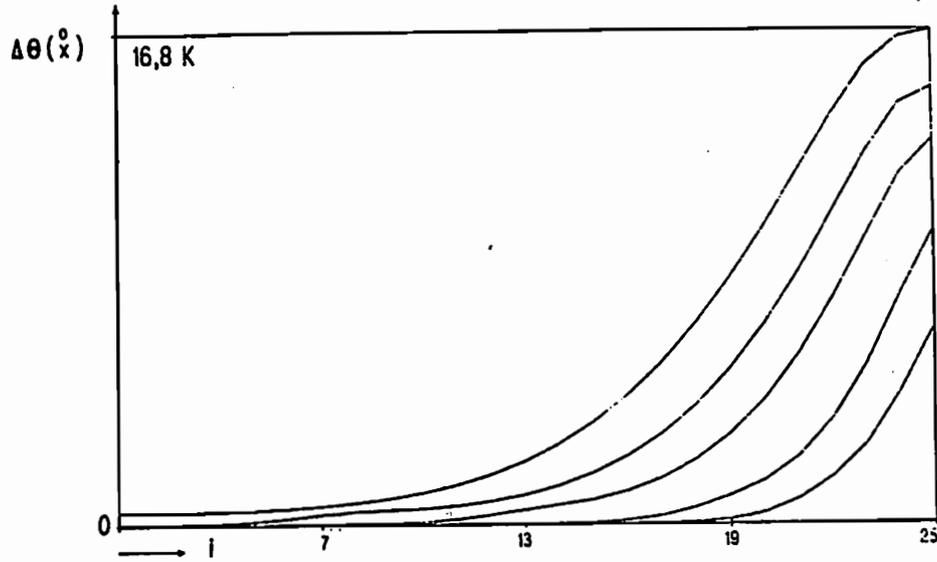


Fig.C.22 $\Delta\theta(x)$, $\theta_{\max} = 316,8$ K

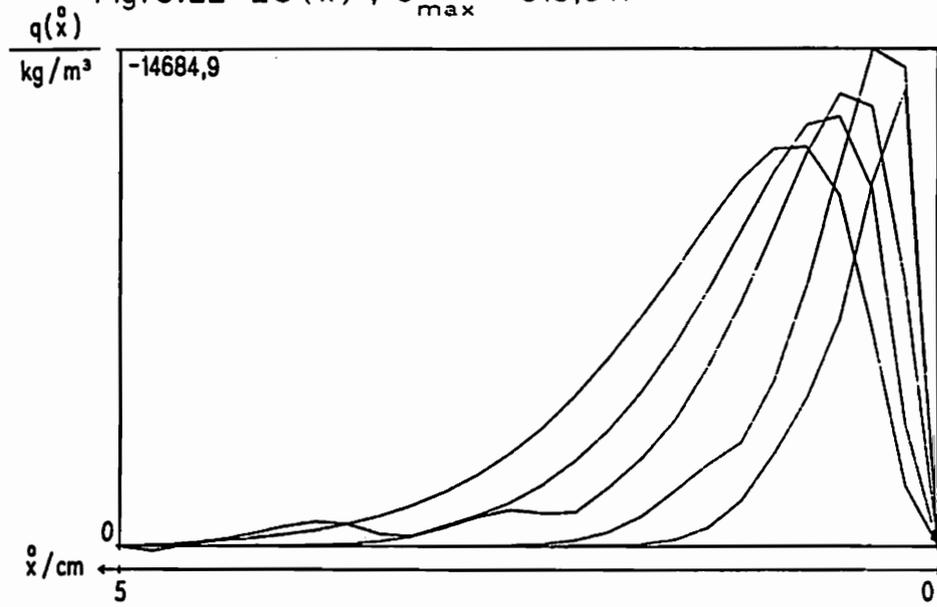


Fig.C.23 $q(x)$, $\max|q| = 14684,9 \text{ kgm}^{-3}$

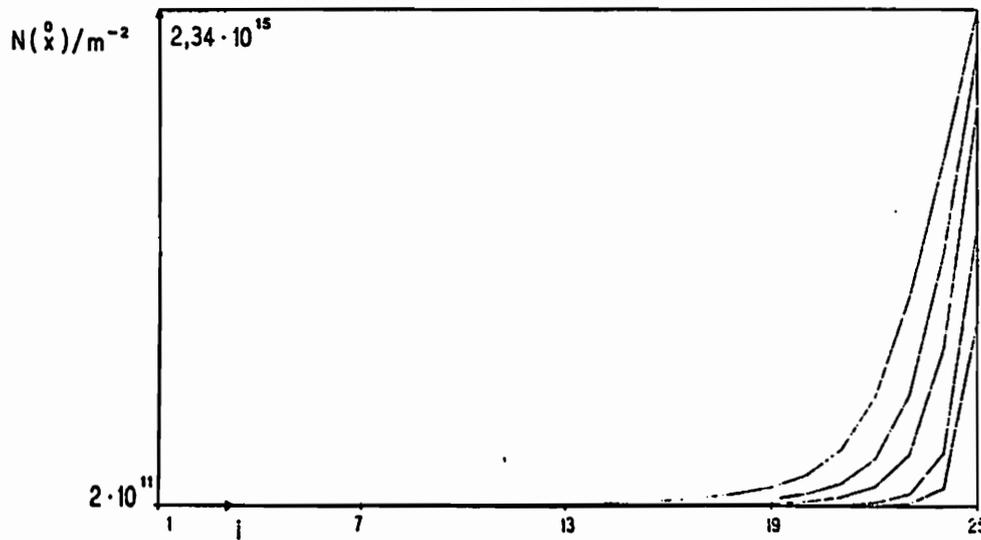


Fig.C.24 Versetzungsdichte $N(x)$, $N_{\max} = 2,3 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$

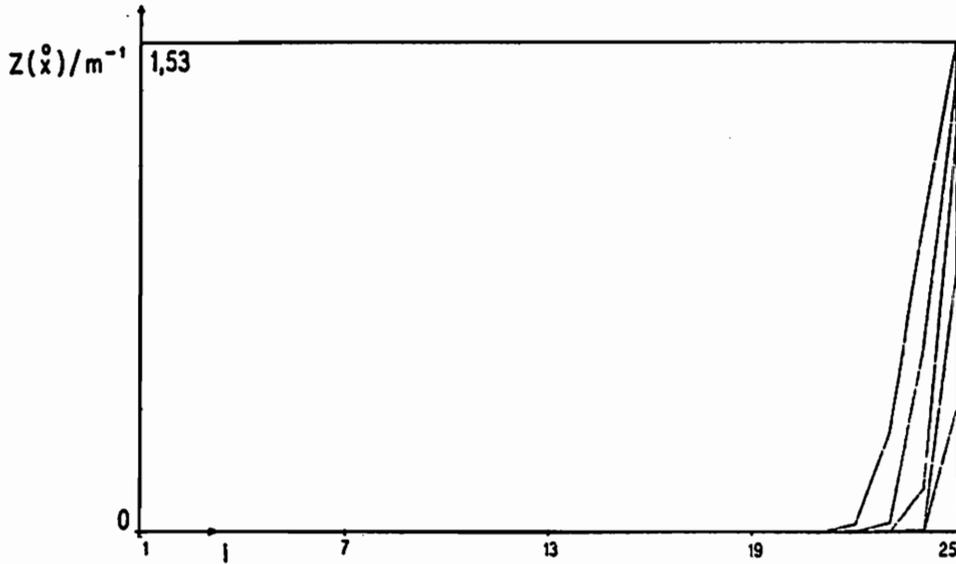


Fig. C.25 $Z(x)$, $Z_{\max} = 1,53 \text{ m}^{-1}$

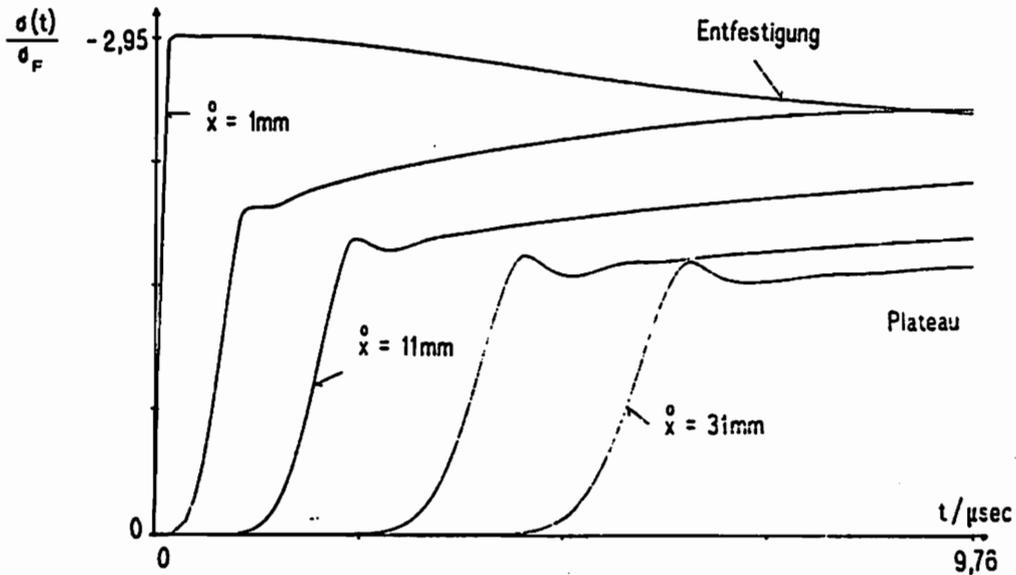


Fig. C.26 $\sigma(t)$ für Elemente $i = 10, 15, 20, 23, 25$

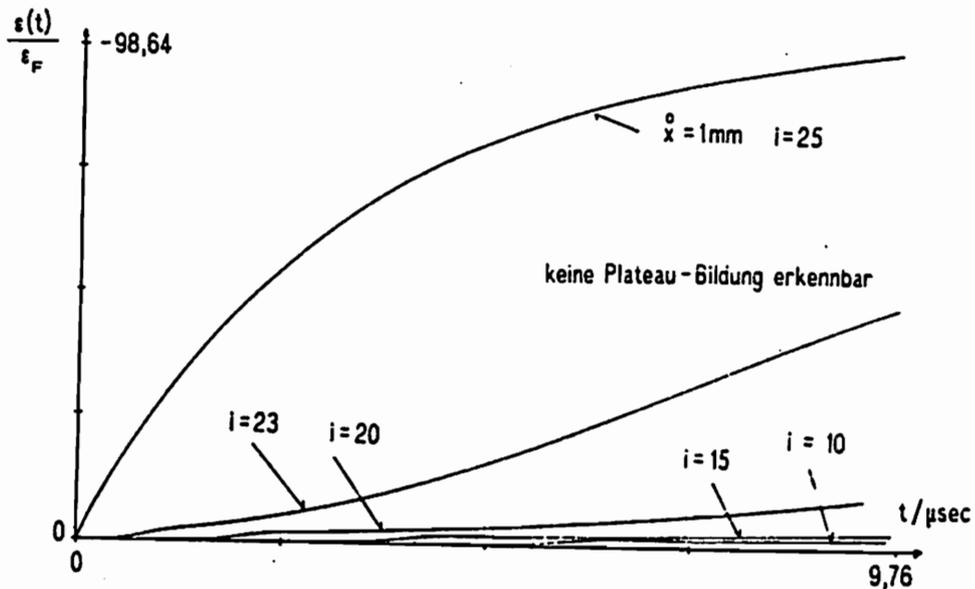


Fig. C.27 $\epsilon(t)$ für Elemente $i = 10, 15, 20, 23, 25$

Die Fig.C.26,C.27 dienen auch zur Kontrolle der Ausbreitungsgeschwindigkeit c_b der Beschleunigungswellen. In [3], Kap.4. wurde folgender Ausdruck für c_b hergeleitet:

$$c_b = \sqrt{\Xi_1 + \Xi_2} \quad (C.11)$$

mit
$$\Xi_1 = \frac{k + \tau_q c_{\sigma x} E}{2\tau_q (\rho c_{\sigma x} - \alpha_T^2 \Theta E)} \quad (C.12)_1$$

$$\Xi_2 = \frac{\sqrt{\rho^2 (k + \tau_q c_{\sigma x} E)^2 - 4\rho\tau_q k E (\rho c_{\sigma x} - \alpha_T^2 \Theta E)}}{2\rho\tau_q (\rho c_{\sigma x} - \alpha_T^2 \Theta E)} \quad (C.12)_2$$

Diese Gleichungen bleiben auch richtig, da sich die Modifikationen des Stoffgesetzes gegenüber der in [3],Kap.4. benutzten Version nur auf den Vektor \underline{d} im Dgl.-System (A.1) auswirken.

Mit den hier benutzten Zahlenwerten unterscheidet sich c_b nur unwesentlich von $\sqrt{E/\rho}$ und dies kann man auch aus Fig.C.26 ablesen.

v) Einfluß der räumlichen Diskretisierung

Bei vorgegebener Geschwindigkeit der Randpunkte hat die Auswahl der Diskretisierung (d.h. von l_0) einen Einfluß auf die Dehnungsraten im Elementinnern; im vorliegenden Fall ist z.B. die maximale Dehnungsrate im vordersten Element

$$\max |D| = \frac{v_{IMP}}{l_0} \quad (C.13)$$

Dieser Effekt ist bei einer FE-Formulierung ebenso unvermeidlich wie die Auswirkungen dieses Effekts auf die Integration eines g.a. Stoffgesetzes.

In dem hier besprochenen Beispiel bewirkt etwa die extreme Verringerung der Elementanzahl von 25 auf 10 eine Abnahme der maximalen Spannung von fast 15%. Dies liegt daran, daß eine Verkleinerung von N_e eine Zunahme von l_0 , also eine Abnahme von D und der Fließgrenze nach sich zieht. Wie schon erwähnt, ist eine solche Abhängigkeit des Ergebnisses von der Diskretisierung typisch für alle g.a. Materialmodelle.

ZUSAMMENFASSUNG UND ABSCHLIESSENDE BEMERKUNGEN

I) In dieser Arbeit wurden Modelle zur Beschreibung des Verhaltens von Metallen bei hohen Deformationsgeschwindigkeiten und großen Verformungen vorgestellt. Aufbauend auf einer ausführlichen Literaturrecherche in Teil A wurden folgende Richtlinien für die Modellbildung aufgestellt:

- a) Es sind unterschiedliche Modelle für Phase 1 ($t < t^*$) und Phase 2 erforderlich; t^* ist dabei der Zeitpunkt der Entstehung eines Makrodefekts.
- b) Die Kontinuums-Damage-Theorie für Phase 1 soll
 - die Entstehung des Makrodefekts determinieren,
 - auch für langsame Prozesse gültig sein,
 - den Postulaten P1, P2 aus Kap.A.5 genügen.
- c) Die Fragmentierungstheorie für Phase 2 soll das Wachstum des Makrodefekts \mathcal{M} beschreiben.

II) I) In dem durch diese Richtlinien abgesteckten Rahmen können verschiedene Materialtheorien formuliert werden. Wir haben uns für eine inkrementelle Theorie mit inneren Variablen und Prozeßvariablen entschieden, die jeweils durch eine Homogenisierung identifiziert werden. In diesem Zusammenhang sind die Vereinfachungen (B.37,53) und Annahme 1 zu beachten.

II) Im Vergleich mit anderen Materialmodellen für HGDen sind folgende Merkmale unserer Kontinuums-Damage-Theorie hervorzuheben:

- a) Die Berücksichtigung thermodynamischer Restriktionen durch die CDU und die Formulierung damit verträglicher Evolutionsgesetze.
- b) Die Einführung von Variablen τ, ϑ als Mittelwerte lokaler Störungen von Spannung und Temperatur und die Formulierung von Nebenbedingungen für die Damagevariablen im (τ, ϑ) -Raum.
- c) Die Einführung der Prozeßvariable u als Maß der Prozeßgeschwindigkeit zur Beschreibung des Überganges von langsamen zu schnellen versetzungsinduzierten Prozessen.

Die Einführung der Größe u kann kaum hoch genug eingeschätzt werden. Neben dem für die Theorie wichtigen Übergang bei der Beschreibung verschiedener Deformationsmechanismen ermöglichen erst die Funktionen $u_{\varepsilon_0}^{-1}(u)$ und $g_{\tau}(\cdot, \cdot, u)$ auch die Berechnung von Prozessen mit über ca. 10 Zehnerpotenzen schwankenden Dehnungsraten. Zudem läßt sich die Fließregel für $\dot{\varepsilon}_{\nu\tau}$ viel einfacher integrieren als bei Modellen, bei denen der Anstieg von $\sigma(\varepsilon)$ mit der Dehnungsrate allein durch eine geeignete Überspannungsfunktion Φ_{τ} modelliert werden muß.

III) Neben der Version 1.1. des Modells wurde noch eine vereinfachte Version 1.2. erarbeitet. Deren Eigenschaften wurden bei der Simulation inhomogener, nichtradialer und nichtisothermer Prozesse getestet. Die dabei benötigten Materialparameter wurden an das vorgegebene Verhalten eines sog. Vergleichsmaterials angepaßt. Modell 1.2. beschreibt u.a. folgende Effekte:

- Zunahme der Spannung mit $\dot{\epsilon}$ für alle ϵ
- Zunahme der Proportionalitätsgrenze mit $\dot{\epsilon}$
- Isotrope und kinematische Verfestigung
- Entfestigung bzw. verminderte Verfestigung durch Temperaturzunahme insbesondere bei schnellen Prozessen
- Abnahme der Proportionalitätsgrenze mit Θ
- Entfestigung durch Scherband - Schädigung
- Scherband - Schädigung setzt nur bei hohen Dehnungsraten ein und bei Druck früher als bei Zug
- Relaxieren, primäres Kriechen
- Gewisse strain-rate-history-effects, z.B. bleibt die σ - ϵ -Kurve eines zwischenzeitlich verlangsamten Prozesses stets unterhalb der Kurve für den konstant schnellen Prozeß.

IV) Einige kritische Bemerkungen

Die fünf im folgenden genannten Merkmale des Modells sind als umstritten zu bezeichnen:

- I) Der Verzicht auf die Konsistenzbedingung in der Fließregel für $\dot{\epsilon}_{vA}$
- II) Die Einführung einer g.u. Gleichung für $\dot{Z}, \dot{\epsilon}_0$
- III) Die Konkretisierung des Kriteriums $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{krit}$ für die Entstehung eines Makro-Scherbandes
- IV) Der Gültigkeitsbereich der Approximation von ρg , vor allem beim Auftreten großer Drücke
- V) Die Annahme 2 über die Unabhängigkeit der Evolution der Versetzungsvariablen von den Damage - Variablen.

Zu diesen "weak spots" der Theorie wollen wir nochmals Stellung nehmen:

Die Akzeptanz des Merkmals I) ist unserer Meinung nach eine Frage der Gewöhnung; es ist uns nicht bekannt, daß I) gegen ein kontinuumsmechanisches Prinzip oder gegen experimentelle Befunde verstößt.

Eine Entscheidung für oder gegen II) kann derzeit nicht aufgrund von Experimenten gefällt werden. Die Einführung von g.a. Evolutionsgesetzen wäre aber recht unproblematisch, falls sich aufgrund neuer Experimente eine derartige Änderung als nötig erweisen sollte: Die Anzahl der Parameter wird nicht verändert, da die Belastungsbedingungen LC_2, LC_0 ja aus G_2, G_0 abgeleitet werden; die Auswertung

der CDU würde sich vereinfachen und es verbliebe die Neuanpassung der Funktionen d_z, d_p .

Bei der Formulierung des Kriteriums $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{krit}$ ist es denkbar, daß nicht genügend Versuche als experimentelle Grundlage herangezogen wurden. Die Frage ist insbesondere, ob die Ebene, in der M^* entsteht, tatsächlich determiniert ist oder ob es nur beim Taylor-Test und beim "plugging" diesen Anschein hat.

Der Gültigkeitsbereich der Approximation von ρg kann erst beurteilt werden, wenn wir durch Weiterentwicklung des von *Fornfeld* entwickelten FEM-Programms auch Prozesse mit hohem Druck rechnen können. Dann lassen sich berechnete $\text{tr } \sigma - \rho$ -Kurven mit Experimenten vergleichen und evtl. muß man dann in ρg Terme mit $(\text{tr } \sigma)^n$ und $(\Theta - \Theta_0)^n, n > 2$ hinzunehmen.

Annahme 2 hat in Verbindung mit dem Ansatz für ρg zur Folge, daß Schädigungsmechanismen und Versetzungsmechanismen die CDU jeweils separat erfüllen. Es kann nicht beurteilt werden, ob dadurch in Wirklichkeit vorhandene Wechselwirkungen ausgeschlossen werden; z.B. könnte D_{vt} in (B.121) in der Realität auch negative Werte annehmen, die durch ein genügend großes positives D_z kompensiert werden.

V) Weitere geplante Untersuchungen

i) Kurzfristig gilt es seitens der Stoffgesetzentwicklung, Modell 1.2. hinsichtlich der Kriecheigenschaften und der Materialerholung zu verbessern, z.B. durch Änderung der Funktion γ_t oder durch Hinzunahme von $\dot{\chi}^*$. Hinsichtlich der Berechnung muß das FE-Modell komplettiert werden und es lohnt sich, andere Verfahren zur Zeitintegration zu testen.

ii) Mittel- und langfristige Ziele sind:

- Anpassung von Modell 1.2. an reale Materialien
- Erweiterung von Modell 1.2. zur Beschreibung weiterer Damage-Mechanismen
- Numerische Rechnungen zur Ausbreitung von Makro-Scherbändern.

Die Hinzunahme weiterer Damage-Mechanismen ist notwendig, um auch eine allgemeine HGD berechnen zu können, bei der ja, wie z.B. aus Fig.A.7 zu entnehmen ist, mehrere Schädigungsmechanismen gleichzeitig auftreten. In Abhängigkeit davon, ob der zu untersuchende Werkstoff bei dynamischer Zugbelastung zur Poren- oder zur Ribbildung neigt, muß man zwei neue Variable ($y^0, \dot{\epsilon}_p^0$) für Schädigung durch Poren bzw. ($Y^0, \dot{\epsilon}_c^0$) für Schädigung durch Mikrorisse einführen. Weitere Variablen sind nicht erforderlich, da $\tau, \vartheta, \epsilon_{vl}$ auch zur Formulierung von Nebenbedingungen für die weiteren Damage-Mechanismen herangezogen werden können.

Anhang 1: Zur Interpretation des Damage-Tensors

1) Die in (B.38) definierte Größe $\zeta(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ beschreibt den Anteil der Scherbandfläche an einer in ΔV enthaltenen Ebene $\Delta A \mathbf{n}$. ζ läßt sich wie folgt durch \mathbf{Z}_m abschätzen:

Satz 1: Sei $I_{\Delta A}$ die Indexmenge aller $\Delta A \mathbf{n}$ schneidenden MiSBs und ΔV_A sei dasjenige Volumen, welches alle MiSBs aus $I_{\Delta A}$ enthält. n_{MiSB} sei die Anzahl der MiSBs pro Volumeneinheit. Dann gilt

$$\int_{\Delta V_A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{Z}_m \mathbf{n} \, dV \leq \zeta(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \Delta A \leq n_{\text{MiSB}} \Delta V \sqrt{\int_{\Delta V_A} \|\mathbf{Z}_m\|^2 \, dV} \quad (1)$$

Beweis:

a) Konstruktion der unteren Schranke:

Aus $\mathbf{n} \cdot \mathbf{Z}_m \mathbf{n} = \sum_{I_{\text{SB}}} \delta A_\alpha (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{n})^2 \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_\alpha)$ folgt

$$\int_{\Delta V_A} \mathbf{n} \cdot \mathbf{Z}_m \mathbf{n} \, dV = \sum_{I_{\Delta A}} \delta A_\alpha (\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{n})^2 \leq \sum_{I_{\Delta A}} \delta A_\alpha |\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{n}| = \zeta \Delta A \quad ,$$

d.h. die linke Seite von (1).

b) Konstruktion der oberen Schranke:

Zur Berechnung von $\|\mathbf{Z}_m\|$ ist es zweckmäßig, \mathbf{Z}_m auf eine kartesische Basis zu beziehen. Seien also

$$\mathbf{z}_\alpha = \delta A_\alpha \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_\alpha) \quad (2)$$

$$\mathbf{e}_\alpha = P_i^\alpha \mathbf{b}_i \quad , \quad \mathbf{b}_i : \text{kartesische Basis} \quad (3)$$

$$Z_{ij}^\alpha = z_\alpha P_i^\alpha P_j^\alpha \quad (4)$$

$$\rightarrow Z_{ij}^m = \sum_{\alpha=1}^{N_{\text{SB}}} Z_{ij}^\alpha \quad , \quad (5)$$

wobei die Scherbänder von 1 bis N_{SB} durchnummeriert wurden. Es gilt dann

$$\mathbf{Z}_m = Z_{ij}^m \mathbf{b}_i \otimes \mathbf{b}_j \quad (6)$$

$$\text{und} \quad P_i^\mu P_j^\nu = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_\nu \quad , \quad P_i^\mu P_i^\mu = 1 \quad . \quad (7)$$

Nach diesen Vorbereitungen wird

$$\|Z_m\|^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^{N_{SB}} z_{ij}^\alpha z_{ij}^\beta = \sum_{\alpha, \beta=1}^{N_{SB}} z_\alpha z_\beta (e_\alpha \cdot e_\beta)^2 \geq \sum_{\alpha=1}^{N_{SB}} z_\alpha^2 \quad (8)$$

Der letzte Schritt stellt eine recht grobe Abschätzung dar. (8) wird nun über ΔV_A integriert:

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_{\Delta V_A} \|Z_m\|^2 dV} &\geq \sqrt{\int_{\Delta V_A} \sum_{I_{SB}} z_\alpha^2 dV} = \sqrt{\sum_{I_{\Delta A}} \delta A_\alpha^2} \stackrel{(*)}{\geq} c_1 \sum_{I_{\Delta A}} \delta A_\alpha \\ &\geq c_1 \sum_{I_{\Delta A}} \delta A_\alpha |e_\alpha \cdot n| = c_1 \zeta \Delta A \end{aligned} \quad (9)$$

An der mit (*) bezeichneten Stelle wurde dabei von der Äquivalenz der euklidischen Norm und der Betragsnorm Gebrauch gemacht. Zur Identifikation des Parameters c_1 verwenden wir die Schwarz'sche Ungleichung:

$$\left| \sum_{i=1}^n v_i w_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2} \quad (10)$$

setzen $w_i = 1$ und finden

$$\left| \sum_{i=1}^n v_i \right| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \leq n \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (11)$$

weshalb im obigen Fall $c_1^{-1} = N_{\Delta A} \leq N_{SB}$ ist. Man kann deshalb (9) fortsetzen

$$\dots \geq \frac{\Delta A \zeta}{N_{\Delta A}} \geq \frac{\Delta A \zeta}{N_{SB}} = \frac{\Delta A \zeta}{n_{MISB} \Delta V} \quad (12)$$

Damit ist die rechte Seite von (1) bewiesen.

▲

II) Im Hinblick auf die Anwendung in der Kontinuumsmechanik interessiert, ob zu (1) analoge Aussagen auch für $\langle Z_m \rangle$ oder für $Z^0 \equiv Z$ gelten. Hierauf gibt der folgende Satz eine Antwort.

Satz 2 : Es gilt

$$\|Z\|^2 \geq \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \|Z_m\|^2 dV \quad (13)$$

$$\text{und } n_{MISB} \leq \frac{\|Z\|^2}{\text{Min}(\delta A_\alpha)^2} \quad (14)$$

Beweis:

a) Beweis von (13) : Zunächst gilt trivialerweise

$$\int_{\Delta V_A} \|Z_m\|^2 dV \leq \int_{\Delta V} \|Z_m\|^2 dV \quad (15)$$

Ausgehend von der Darstellung

$$\langle Z_m \rangle = \sum_{\alpha=1}^{N_{sb}} \hat{z}_{ij}^\alpha b_i * b_j \quad (16)$$

$$\text{mit } \hat{z}_{ij}^\alpha = \delta A_\alpha P_i^\alpha P_j^\alpha f(x+y_\alpha) \frac{1}{\Delta V} \quad (17)$$

berechnen wir zunächst

$$\|\langle Z_m \rangle\|^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^{N_{sb}} \delta A_\alpha \delta A_\beta f(x+y_\alpha) f(x+y_\beta) \left(\frac{1}{\Delta V}\right)^2 (e_\alpha \cdot e_\beta)^2 \quad (18)$$

und hieraus mit (8)

$$\begin{aligned} \|\langle Z_m \rangle\|^2 &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \|Z_m\|^2 dV \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^{N_{sb}} \delta A_\alpha \delta A_\beta \left(\frac{1}{\Delta V} e_\alpha \cdot e_\beta\right)^2 \left\{ f(x+y_\alpha) f(x+y_\beta) - 1 \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

Über das Vorzeichen der geschweiften Klammer ist i.a. keine Aussage möglich; im Sonderfall einer Theorie nullter Ordnung entsteht jedoch auf der linken Seite $\|Z\|^2$ und rechts ist $f(\cdot)$ jeweils an der Stelle x zu nehmen, so daß $\{\dots\} = f(x)^2 - 1 > 0$ wird. Daraus folgt die Behauptung.

b) Beweis von (14): Mit (8) folgt

$$\int_{\Delta V} \|Z_m\|^2 dV \geq \int_{\Delta V} \sum_{\alpha=1}^{N_{sb}} z_\alpha^2 dV \geq \text{Min}(\delta A_\alpha)^2 N_{sb} \geq \text{Min}(\delta A_\alpha)^2 \Delta V n_{MiSB} \quad (20)$$

Wir lösen nach n_{MiSB} auf, beachten (13) und kommen so zu (14)

▲

Anhang 2: Zur Beschreibung des Überganges von athermischen zu thermisch aktivierten Versetzungsmechanismen

I) Die gleichzeitige Berücksichtigung athermischer und thermisch aktivierter Versetzungsbewegung kann erforderlich werden, wenn ein Materialmodell sowohl langsame als auch moderate Prozeßgeschwindigkeiten erfassen soll. Aber auch bei HGDen spielen athermische Mechanismen noch eine Rolle, wie die Untersuchungen von *Nowacki* [53] zeigen und wie auch aufgrund der mikromechanischen Betrachtungen aus Kap.A.3. zu erwarten ist. Prinzipiell ist zu unterscheiden, ob man Mittelwerte für einen Polykristall ΔV oder einen Einkristall δV sucht. Wir betrachten hier nur den ersten Fall.

Es gibt zwei Konzepte zur Realisierung einer Materialtheorie, die sowohl athermische als auch thermisch aktivierte Mechanismen beschreibt:

- a) Zerlegung der Spannung, aber nur eine inelastische Verzerrung (z.B. *Lehmann* [107],[133], *Bruhns* [108]).
- b) Zerlegung der inelastischen Verzerrung, aber nur eine Spannung (z.B. *Mandel* [131], *Sidoroff* [132], *Nowacki* [53], und unser in Teil B1 entwickeltes Modell)

II) Zu Konzept a)

Ausgangspunkt ist die Darstellung (in der Notation von *Bruhns* [108])

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_t \quad (1)$$

Wie kommt man auf die Idee, die Spannungen additiv zu zerlegen? Es gibt hierzu 3 Möglichkeiten:

I) Über Ergebnisse aus der Metallurgie (z.B. *Jähn* [52], *Frost & Ashby* [70]): Man geht davon aus, daß die Schubspannung in den Gleitebenen einen kritischen Wert τ_{CRSS} annehmen muß, der sowohl sog. athermische Anteile aus weiter entfernten starken Hindernissen als auch sog. thermische Anteile aus schwachen Hindernissen berücksichtigt. Das Schmidt'sche Gesetz lautet dann

$$\tau \stackrel{!}{=} \tau_{CRSS} = \tau_{CRSS,a} + \tau_{CRSS,t} \quad (2)$$

Wir stellen fest: Zerlegt wird nicht $\sigma = \langle \sigma_m \rangle$, nicht σ_m , nicht die Projektion von σ_m auf eine Gleitrichtung, sondern lediglich der Vergleichswert dieser Projektion! (1) aus (2) motivieren zu wollen, scheint doch etwas weit hergeholt, zumal etwa über Versetzungsklettern oder -quergleiten keine Aussage mittels (2) möglich ist.

II) Aus rheologischen Modellen: Für bestimmte rheologische Modelle mit parallel

geschaltetem Dämpfer und Reibungsklotz ergibt sich im einachsigen Fall tatsächlich eine Zerlegung

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_t \quad \dot{\epsilon}_1 = \dot{\epsilon}_a = \dot{\epsilon}_t \quad (3)$$

wobei σ_a die Spannung im Reibungsklotz und σ_t die „Überspannung“ im Dämpfer ist. Die Bezeichnung „Überspannung“ rührt daher, daß $\sigma > \sigma_a$ sein muß, damit sich das inelastische Element überhaupt verformt. Man kann nun vom Standpunkt der Materialtheorie einwenden, daß rheologische Modelle nur ingenieurmäßige Verlegenheitslösungen darstellen und nicht Ausgangspunkt einer versetzungstheoretisch konsistenten Theorie sein können. Akzeptiert man aber als Ingenieur unter dem Gesichtspunkt der Pragmatik solche einachsigen rheologischen Modelle, so muß man das Problem der Verallgemeinerung auf mehrachsige Spannungszustände lösen. Die in [108],[133] vorgeschlagene Verallgemeinerung von (3)₂ lautet (bei Beschränkung auf kleine Verzerrungen und Vernachlässigung eines von *Lehmann* in [133] berücksichtigten nicht-assoziativen Anteils):

$$\dot{\epsilon}_p = 2 \dot{\lambda} (\sigma_a^I - X) \quad \dot{\epsilon}_{vp} = 2 \tilde{\gamma} \Phi(F) (\sigma^I - X) \quad (4)$$

Hierbei ist $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}(\dot{\sigma}_a, \dot{X}, \dots)$ aus der Konsistenzbedingung

$$0 = 2(\sigma_a^I - X) \cdot (\dot{\sigma}_a^I - \dot{X}) - \dot{g}(x) \quad (5)$$

zu bestimmen und X ist der beiden Anteilen gemeinsame kinematische Verfestigungstensor. Die Aufgabe (4), die g.a. Gleichung für $\dot{\epsilon}_{vp}$ mit der g.u. Gleichung für $\dot{\epsilon}_p$ zur Identität zu bringen, scheint unlösbar. Tatsächlich gelingt es *Bruhns* aber nachzuweisen, daß für spezielle Verfestigungsgesetze ohne Begrenzungs- oder Erholungsterm eine mit (4) verträgliche Gleichung für $\dot{\sigma}_a$ gefunden werden kann. Diese Gleichung für die Spannung der g.u. Mechanismen ist aber g.a. und physikalisch nur schwer zu deuten. Auch Gleichung (85) in [133] kann ohne Annahmen über σ_a nicht nachvollzogen werden.

III) Über die Thermodynamik, speziell das Konzept des Zwangsgleichgewichts (constraint equilibrium state):

Raniecki [140], *Suquet* [92], *Lehmann* [133] zerlegen σ in „Spannungen im constraint equilibrium state“ und in „Nichtgleichgewichtsspannungen“; die Summanden dieser Zerlegung werden manchmal auch als „reversible“ und „irreversible“ Spannungen bezeichnet. Dabei ist σ_a mit den Spannungen im Zwangsgleichgewicht und σ_t mit den Nichtgleichgewichtsspannungen zu identifizieren. Die zitierten Arbeiten unterscheiden sich dadurch, daß *Raniecki*, *Suquet* das Hooke'sche Gesetz für σ_a verwenden, *Lehmann* hingegen für die gesamte Spannung σ .

III) Zu Konzept b)

i) Die Zerlegung der versetzungsinduzierten Verzerrungsrate in simultan präsente Anteile $\dot{\epsilon}_{vA}$, $\dot{\epsilon}_{vT}$ läßt sich durch die Homogenisierung (B.66) motivieren. Realisierungen des Ansatzes

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{vA} + \dot{\epsilon}_{vT} \quad (6)$$

stammen bereits von *Mandel* [131] und *Sidoroff* [132]. Deren Ansätze unterscheiden sich von unserem Modell 1.1. durch die Verwendung einer einzigen Fließbedingung $F \leq 0$; die Einführung der Konsistenzbedingung hat aber die in Kap.B1.3.1 I) geschilderten Nachteile zur Folge.

ii) Wir wollen an dieser Stelle unseren Ansatz

$$\dot{\epsilon}_v = [\gamma_A]_A \langle LC_A \rangle_A N_A + \gamma_T [\Phi_T]_T N_T \quad (7)$$

nochmals erläutern. Das erste Problem einer Steuerung der Anteile von $\dot{\epsilon}_{vA}$, $\dot{\epsilon}_{vT}$ an der gesamten versetzungsinduzierten Deformation ist durch die Einführung von u gelöst. Der zweite Problemkreis umfaßt die Formulierung der Nebenbedingungen und unser Lösungsvorschlag soll hier an einem Beispiel demonstriert werden. Für dieses Beispiel nehmen wir o.B.d.A. vereinfachend an:

- $\dot{\epsilon}_{vA}$, $\dot{\epsilon}_{vT}$ genügen einer Normalenregel.
- Die Änderung der Fließflächenradien wird vernachlässigt.
- Die Erholungsterme der kinematischen Verfestigung werden vernachlässigt.
- Die Prozeßgeschwindigkeit ist nahezu konstant und für das zugehörige $u \approx u_{eq}$ ist $g_A < g_T$.

- Die Anfangsbedingungen sind $\sigma = 0$, $\epsilon_v = 0$, $X_A = 0$, $X_T = 0$
- Alle Schädigungseffekte sind vernachlässigbar.
- Temperaturänderungen sind vernachlässigbar.

Unter diesen Voraussetzungen wird das Modell charakterisiert durch

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{vA} &= [\gamma_A]_A \langle LC_A \rangle_A (\sigma^I - X_A) & \dot{X}_A &= c_A \dot{\epsilon}_{vA} \\ \dot{\epsilon}_{vT} &= \gamma_T [\Phi_T]_T (\sigma^I - X_T) & \dot{X}_T &= c_T \dot{\epsilon}_{vT} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Wir betrachten zunächst einen deviatorisch radialen Prozeß, d.h. die Spannung wird so gesteuert, daß

$$\dot{\sigma}^I \parallel \sigma^I \quad (11)$$

Wegen (8) wird zuerst die Fließfläche $F_A = 0$ erreicht bei $t=t_A$. Die dann auftretenden Inkremente $\dot{\epsilon}_{VA}, \dot{X}_A$ sind wegen (9),(10) zu σ^I parallel. t_T sei die Zeit, bei der die Fließfläche $F_T = 0$ erreicht wird. In $[t_A, t_T]$ verschiebt sich der Kreis $F_A = 0$ bis zu einem Punkt A_1 , siehe Fig.1, Fig.2. Wegen (11) gilt in diesem Zeitintervall stets

$$\dot{\epsilon}_{VA} \sim \sigma^I, \dot{X}_A \sim \sigma^I \longrightarrow \epsilon_{VA} \sim \sigma^I, X_A \sim \sigma^I \quad (12)$$

Ab t_T ändert sich auch ϵ_{VT} ; (12) gilt dann sinngemäß auch für ϵ_{VT}, X_T . Bei einem deviatorisch radialen Prozeß verschieben sich $F_A = 0$ und $F_T = 0$ parallel bis zu Punkten A_1', A_2 , siehe Fig.3. In den genannten Abbildungen sind e_I, e_{II}, e_{III} Einheitsvektoren in Richtung der Hauptachsen von σ .

Es ist in unserem Modell übrigens ausdrücklich zugelassen, daß sich die Fließflächen $F_A = 0$ und $F_T = 0$ schneiden! Das bedeutet dann, daß in manchen Belastungsrichtungen zuerst die thermisch aktivierten Mechanismen angeregt werden, in anderen Richtungen hingegen die athermischen Mechanismen. Die physikalische Ursache dafür kann sein, daß bei deviatorisch radialen Prozessen die Versetzungsdichte auf den aktivierten Gleitebenen zunimmt und schwache Hindernisse geschaffen werden, d.h. man erwartet schließlich einen Übergang zu thermisch aktivierter Bewegung, während bei anderen Belastungsrichtungen starke Hindernisse dominieren.

Ab einer Zeit $t_1 > t_T$ wird in $[t_1, t_2]$ die Belastungsrichtung geändert, so daß aber $LC_A > 0$ bleibt. Die plastischen Verzerrungsinkremente und die Mittelpunkte der Fließflächen verschieben sich zunächst noch in Richtung $\sigma^I(t_1)$. Für $t = t_1 + \Delta t$ ist dies in Fig.4 skizziert. Durch die Abweichung von der radialen Belastungsrichtung sind $\sigma^I - X_A, \sigma^I - X_T$ dann nicht mehr parallel, die Fließflächen verschieben sich in unterschiedliche Richtungen.

Nach einer beliebigen nichtradialen Belastung seien die Fließflächen etwa wie in Fig.5 angeordnet. Zeigt das neue Spannungsincrement in den Halbraum $LC_A > 0$, so liegt das inelastische Verzerrungsincrement in dem schraffierten Keil, ist also durch $\sigma^I - X_A, \sigma^I - X_T$ selbst noch nicht bestimmt. Unser Modell kann somit gewisse Eigenschaften nichtassoziativer Stoffgesetze wiedergeben, obwohl die einzelnen Deformationsmechanismen einer assoziierten Fließregel genügen.

Ausgangszustand

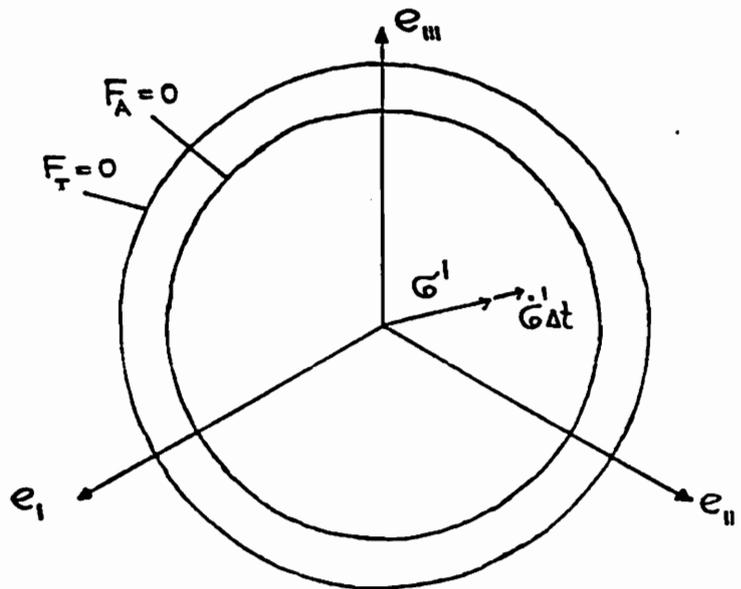


Fig.1

$t_A < t < t_T$

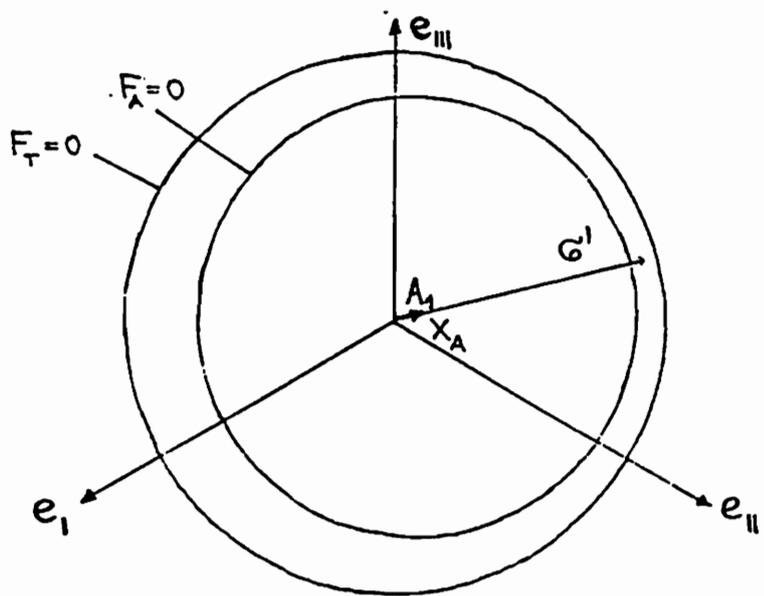


Fig.2.

$t_T < t < t_1$

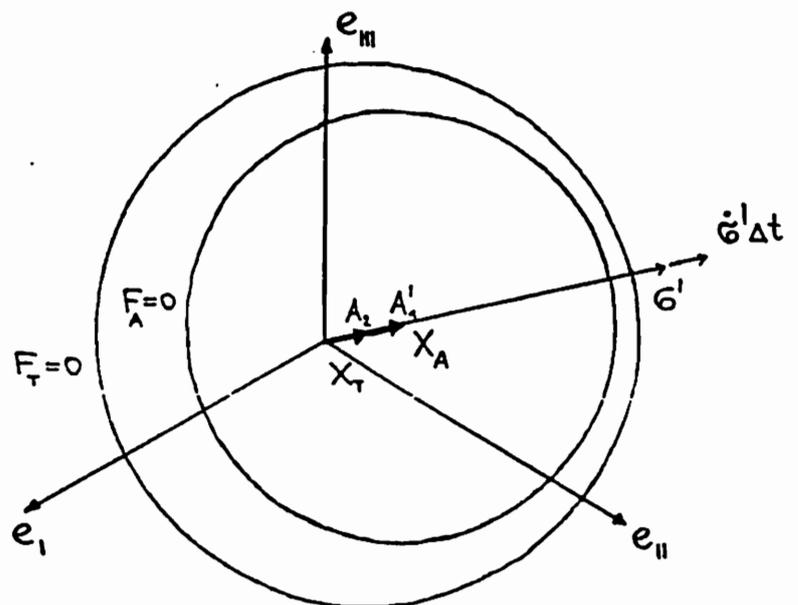


Fig.3.

Anhang 3: Zum Ansatz (B.91,92) für den Spannungskonzentrations- tensor τ

I) Aus der Theorie elastischer Composites ist bekannt, daß die lokalen Spannungen und die mittleren Spannungen i.a. nicht koaxial sind. Die anisotrope Verknüpfung von $\dot{\tau}$, $\dot{\sigma}$ soll unter Verwendung von Darstellungssätzen für Tensorfunktionen (z.B. [135]) durch eine isotrope Verknüpfung von $\dot{\tau}$ mit $\dot{\sigma}$ und den Damage-Variablen τ , Z approximiert werden. Man nimmt m.a.W. an, daß die Ursache für die Nichtkoaxialität von $\dot{\tau}$, $\dot{\sigma}$ in einem ansonsten isotropen Polykristall in den durch τ , Z beschriebenen Defekten zu sehen ist. Setzen wir also für den Bereich reversibler Verzerrungsraten und unter Vernachlässigung von Temperaturänderungen

$$\dot{\tau} = \mathcal{D}(\dot{\sigma}, \tau, Z) \quad , \quad (1)$$

so soll für $\mathcal{D}(\cdot)$ gelten:

- $\mathcal{D}(\cdot)$ ist eine isotrope Funktion seiner Argumente
- $\mathcal{D}(\cdot)$ stellt eine g.u. Verknüpfung von $\dot{\tau}$, $\dot{\sigma}$ dar
- $\mathcal{D}(\cdot)$ ist ein Polynom.

Durch die Beschränkung auf Polynome wird auf Summanden mit $\sqrt{\dot{\sigma} \cdot \dot{\sigma}}$, $\sqrt[3]{\det \dot{\sigma}}$, die nichtlinear, aber homogen in $\dot{\sigma}$ sind, verzichtet. Dies erleichtert die Erfüllung von Postulat P1 über die Quasilinearität.

II) Nach [135] besitzt \mathcal{D} die Gestalt

$$\mathcal{D}(\dot{\sigma}, \dots) = \sum k_\nu E_\nu \quad , \quad (2)$$

wobei die Erzeugenden E_ν linear in $\dot{\sigma}$ sind und es sich bei den k_ν um isotrope Funktionen von τ , Z handelt. Die Erzeugenden sind nach [135], p.325 die symmetrischen Anteile folgender Tensoren:

$$\begin{array}{cccccc} (\text{tr } \dot{\sigma})1 & \dot{\sigma} & \tau \dot{\sigma} & Z \dot{\sigma} & (\text{tr } \dot{\sigma})\tau & (\text{tr } \dot{\sigma})Z \\ (\text{tr } \dot{\sigma})\tau^2 & (\text{tr } \dot{\sigma})Z^2 & \tau^2 \dot{\sigma} & Z^2 \dot{\sigma} & \tau Z \dot{\sigma} & \dot{\sigma} \tau Z \\ \tau^2 Z \dot{\sigma} & Z^2 \dot{\sigma} \tau & \dot{\sigma} \tau^2 Z & \tau Z^2 \dot{\sigma} & \tau^2 Z^2 \dot{\sigma} & \tau^2 Z \tau \dot{\sigma} \\ Z^2 \dot{\sigma} Z \tau & & & & & \end{array} \quad . \quad (3)$$

Auch der Katalog (3) ist noch zu umfangreich. Wir beschränken uns deshalb auf in Z , τ tensoriell höchstens lineare Terme; das sind die ersten 6 Ausdrücke in (3). Mit dieser Darstellung ist (B.92) verträglich. Die Vernachlässigung der mit $\text{tr } \dot{\sigma}$ zu bildenden Erzeugenden dient nur der Vereinfachung und läßt sich physikalisch nicht begründen.

Anhang 4: Das Verhalten der Felder der Kontinuums-Damage-Theorie in der Nähe eines Makro-Scherbandes bei kleinen Deformationen in \mathcal{B} und \mathcal{M}

1. Einleitung

I) Die in Kap. B2.2. getroffene Voraussetzung kleiner Verzerrungen ist in der Nähe einer Riß- oder Scherbandspitze i.a. ungültig. Eine Beschreibung im Rahmen einer geometrisch linearen Theorie kann man wie folgt rechtfertigen: Man ersetzt den geometrisch nichtlinear verformten realen Körper durch einen fiktiven geometrisch linear verformten Körper mit gleichem Stoffgesetz unter der Annahme, daß Änderungen der im realen Körper vorhandenen Felder bijektiv zu Änderungen der Stärke möglicher Singularitäten im fiktiven Körper sind. Diese Singularitäten ermittelt man durch spezielle im Nahfeld gültige Ansätze. Im einfachsten Fall geht man von einem Produktansatz

$$\psi(r, \varphi, t) = r^m \hat{\psi}(\varphi, t) \quad (1)$$

aus. r, φ sind Polarkoordinaten in einem mit der Riß- oder Scherbandspitze fest verbundenen Koordinatensystem. Allgemeinere Ansätze findet man bei *Nguyen* [93] und *Achenbach* [152]. Eliminiert man Zeitableitungen im Fall des Defektwachstums durch

$$\frac{\partial}{\partial t} (\cdot) \approx - \frac{\partial}{\partial x} (\cdot) \cdot c \quad , \quad (2)$$

so wird das zunächst hyperbolische Gleichungssystem elliptisch und die Separation von r, t in (1) ist zulässig [123].

II) Das Konzept der Nahfeldlösungen erwies sich in der LEBM als sehr fruchtbar. Eine Übersicht über Anwendungen auf ideal-plastische Körper oder auf mit der Deformationstheorie beschriebene Plastizitätsprobleme (HRR-Lösung) findet man bei *Atluri* [153]. Grundsätzlich werden dabei nur Risse mit spannungsfreien Oberflächen behandelt; Anwendungen auf Scherbänder sind uns nicht bekannt. Die publizierten Untersuchungen über Risse in plastischen Körpern enthalten Materialmodelle ohne innere Variable; wir erwähnen die Arbeiten von *Lo* [154] (Überspannungsmodell wie in (A.30)) und *Achenbach et al.* [152] (Modell von *Bodner* ohne Verfestigung).

III) Zur Durchführung der Nahfeldanalyse:

I) Die abhängigen und unabhängigen Variablen der Kontinuumstheorie seien zu ψ_k , $k = 1, \dots, N$ zusammengefaßt und nach (1) gelte

$$\boxed{\psi_k(r, \varphi, t) = r^{m_k} \hat{\psi}_k(\varphi, t) \quad k = 1, \dots, N} \quad (3)$$

im Nahfeld. Zur Bestimmung der m_k stehen N Bilanz- und Evolutionsgesetze zur Verfügung. Man setzt (3) ein und reduziert die Gleichungen auf Beziehungen zwischen den dominierenden Exponenten. Dabei wird eine Fallunterscheidung erforderlich:

II) Fall 1: Trägheitskräfte werden vernachlässigt

Aus der Gleichgewichtsbedingung kürzen sich die r -Potenzen heraus; es verbleibt eine Gleichung zur Ermittlung der Winkelverteilung von σ . Das restliche Gleichungssystem ist bzgl. der m_k unterbestimmt und liefert nur Verhältnisse m_k/m_j . Zur eindeutigen Festlegung der m_k braucht man die sog. Intensitätsbedingung. Unter Intensitäten \mathcal{Q} sind integrale Energieausdrücke mit der Eigenschaft

$$\mathcal{Q} = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} j ds = \text{endlicher Wert} \quad (4)$$

zu verstehen. Der Integrand muß also $\sim r^{-1}$ sein. Intensitäten müssen extra definiert werden [153].

III) Fall 2: Trägheitskräfte werden berücksichtigt

Man erhält nun ein überbestimmtes System für die m_k , da die Impulsbilanz eine weitere Verknüpfung der m_k beinhaltet. Man kann aber auf die Intensitätsbedingung nicht verzichten, da Bilanz- und Evolutionsgleichungen nach wie vor nur Verhältnisse der Exponenten liefern.

iv) Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, daß die m_k im statischen bzw. im dynamischen Fall unterschiedliche Werte haben können, wie dies z.B. in der LEBM von der Geschwindigkeit v bekannt ist.

IV) Ziele, Zusammenstellung der Grundgleichungen

I) Die Untersuchung des Nahfeldes an der Scherbandspitze wird mit dem Ziel durchgeführt

- Annahme 7 aus Kap.B2.2 zu verifizieren
- die asymptotische Wegunabhängigkeit von G_1, G_2 nachzuweisen.

Hierzu genügt die Kenntnis der Potenzen m_k ; wir verzichten auf die Berechnung der Winkelabhängigkeiten $\hat{\psi}_k(\cdot)$. Ferner skizzieren wir den Gang der Rechnung nur für das Materialmodell in \mathcal{B} ; eine ausführlichere Darstellung findet man in [5].

Wir wollen an dieser Stelle zwei stillschweigend getroffene Vereinfachungen kommentieren:

- (3) gilt in dieser Form nur für ebene Probleme. Wir beschränken uns deshalb wie auch in Kap. B2.2 auf die Untersuchung eines nichtgekrümmten Teilstückes von \mathcal{L} , auf dem wir Unabhängigkeit aller Felder von s erwarten.

◦ Wir haben \mathcal{M} in Kap.B2.1 mit endlicher Dicke h eingeführt und sprechen hier aber von einer „Scherbandspitze“. Das bedeutet, daß die Nahfeldlösung mindestens in einem Kreis vom Radius $R \gg h/2$ dominieren muß, so daß wir die Scherbandfront als Spitze idealisieren können.

II) Die Charakterisierung des Scherbandwachstums durch G_1, G_2 ist nur sinnvoll, wenn diese Größen Intensitäten sind. Es genügt hier, G_1 als Intensität zu definieren, für G_2 kann diese Eigenschaft dann bewiesen werden.

III) Die Approximation von ρg wird in Gebieten mit großen Strukturänderungen fragwürdig. Ein unkritisches Einsetzen des vollständigen ρg -Ansatzes und der vollständigen Evolutionsgleichungen führt dann auf unrealistische Ergebnisse. Die Gleichungen müssen vorher auf relevante Anteile reduziert werden. Das Verhalten des Materials im Nahfeld ist durch folgende Merkmale gekennzeichnet:

- Es handelt sich lokal um einen schnellen Prozeß ($\dot{\epsilon}_{vA}$ vernachlässigbar gegen $\dot{\epsilon}_{vT}$, Recovery-Terme bei τ, X_A, X_T, χ sind vernachlässigbar).
- Das Material vor \mathcal{L} ist stark geschädigt, d.h. $\dot{\tau} \approx d_4 (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{vT}) \tau, \dot{Z} \approx \dot{Z}_w, LC_z \approx LC_{zz}, LC_0 \approx LC_{0z}$.

IV) Aufgrund der erstgenannten Eigenschaft liegt es nahe, Modell 1.2. für \mathcal{B} zu verwenden. Mit den obigen Näherungen lauten die Materialgleichungen wie folgt:

Damage-Variable

$$\dot{\tau} = K d_4 (\sigma \cdot \dot{\epsilon}_{vT}) \tau \tag{5}$$

$$\dot{Z} = d_2 (\mu_4 + \omega) LC_{zz} Z \quad \text{mit } LC_{zz} = (2\tau^I - \nu_2 1) \cdot \dot{\tau} \tag{6}$$

$$\dot{\epsilon}_0 = d_0 LC_{0z} \frac{\sigma^I}{\|\sigma^I\|} \quad \text{mit } LC_{0z} = LC_{zz} \tag{7}$$

$$\dot{\epsilon}_{vL} = \gamma_{vL} g_{vL} \frac{\tau^I}{\|\tau^I\|} \tag{8}$$

$$\dot{\vartheta} = T_1(u) \left\{ 1 - \frac{T_2(u) \vartheta}{1 + T_2(u) \vartheta} \right\} g_{vL} \tag{9}$$

Versetzungsvariable

$$\dot{\epsilon}_{vT} = \gamma_T \Phi_T \frac{\sigma^I - X_T}{\|\sigma^I - X_T\|} \tag{10}$$

$$\dot{\chi} = K(\chi) \sigma \cdot \dot{\epsilon}_{vT} \tag{11}$$

$$\dot{X}_T = c_T \dot{\epsilon}_{vT} \tag{12}$$

Variable zur Beschreibung thermoelastischen Verhaltens

$$L(u) := \ddot{u} + c(\alpha + PG)\dot{u} + \frac{c^2}{4}(\alpha + PG)^2 \{u - u_{\varepsilon_0}(PG)\} = 0 \quad (13)$$

$$\varepsilon_r = \lambda_2(\Theta - \Theta_0)1 + \lambda_3(\zeta)(\text{tr}\sigma)1 + \lambda_4(\zeta)\sigma \quad (14)$$

$$\tau_q \dot{q} + q = -k \text{grad}\Theta \quad (15)$$

Energiebilanz

$$\begin{aligned} \rho c_{\sigma x} \dot{\Theta} + \alpha_T \Theta \text{tr}\dot{\sigma} &= \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_{vT} + \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_D + (\mu_4 + \omega)Z \cdot \dot{Z} - K d_4 \mu_1 (\text{tr}\tau)^2 \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_{vT} \\ - K d_4 \mu_2 (\tau \cdot \tau) \sigma \cdot \dot{\varepsilon}_{vT} + \mu_6 \dot{\vartheta} \vartheta - \nu_2 \sigma \cdot \dot{X}_T - \nu_3 x \dot{x} + \nu_4 \Theta_0 \dot{x} - \text{div} q \end{aligned} \quad (16)$$

Intensitätsbedingung

$$\{\sigma \cdot \varepsilon_r - \rho g\} e_c \cdot n_\Gamma - \sigma(\nabla u) e_c \cdot n_\Gamma \sim r^{-1} \text{ im Nahfeld} \quad (17)$$

Kinematische Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_{vT} + \dot{\varepsilon}_D \\ \varepsilon &= \text{sym grad} u \end{aligned} \right\} (18)$$

Impulsbilanz $\rho \ddot{u} = \text{div} \sigma \quad (19)$

v) Zur Nahfeldanalyse benötigen wir auch das asymptotische Verhalten der Materialfunktionen. Aus Anhang 5 bzw. aus [4] übernehmen wir: Die Funktionen

$$d_D, T_1, T_2, \gamma_T, \Phi_T, c_T, \lambda_3, \lambda_4, K$$

sind beschränkt; ferner gilt

$$d_4 \sim \|\tau\|^{-2}, d_z \sim \|Z\|^{-3}, \omega \sim \|\sigma\|^2 \|Z\|^{-3}, q_{vl} \sim \|\tau\|. \quad (20)$$

vi) Singularitäten - Ansätze

Wie schon erwähnt, können die Potenzen m_k für den stationären bzw. instationären Fall unterschiedlich sein. Wir verzichten aber darauf, dies extra zu kennzeichnen.

Felder mit $m_k \geq 0$ bezeichnen wir als regulär. In der folgenden Tabelle sind die Ansätze zusammengefaßt.

$$\begin{aligned}
 \sigma &= r^{m_1} \hat{\sigma} & q &= r^{m_9} \hat{q} \\
 \varepsilon &= r^{m_2} \hat{\varepsilon} & \vartheta &= r^{m_{10}} \hat{\vartheta} \\
 u &= r^{m_3} \hat{u} & \varepsilon_{VL} &= r^{m_{11}} \hat{\varepsilon}_{VL} \\
 \varepsilon_R &= r^{m_4} \hat{\varepsilon}_R & x &= r^{m_{12}} \hat{x} \\
 \Theta &= r^{m_5} \hat{\Theta} & \varepsilon_{VT} &= r^{m_{13}} \hat{\varepsilon}_{VT} \\
 Z &= r^{m_6} \hat{Z} & u &= r^{m_{14}} \hat{u} \\
 \varepsilon_D &= r^{m_7} \hat{\varepsilon}_D & X_T &= r^{m_{15}} \hat{X}_T \\
 \tau &= r^{m_8} \hat{\tau}
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

2. Singularitäten im Nahfeld bei stationärem Makro-Scherband und statischer Beanspruchung

I) Erste Folgerungen

i) Bei stationärem MaSB haben $\psi, \dot{\psi}$ gleiche Singularitäten: $\dot{\psi} = r^m \hat{\dot{\psi}}$

ii) Aus der Fließregel für ε_{VT} folgt bei beschränkter rechter Seite die Regularität von ε_{VT} . X_T ist dann ebenfalls regulär.

iii) Die Gleichung für u ist erfüllt für $PG \rightarrow \infty, u \rightarrow u_\infty, \dot{u} = 0$. u ist regulär.

ii) Über (5),(15),(8),(9),(12),(18) lassen sich sofort $m_3, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_8$ durch die restlichen Potenzen $m_1, m_2, m_4, m_5, m_6, m_7$ ausdrücken. Deren Berechnung gestaltet sich wegen mehrerer Fallunterscheidungen recht unübersichtlich. Wir geben deshalb nur das Ergebnis an, die Herleitung findet man in [5].

$m_1 = -\frac{1}{2}$	$m_6 = -\frac{1}{4}$	$m_{11} = -\frac{1}{4}$	(22)
$m_2 = -\frac{1}{2}$	$m_7 = -\frac{1}{2}$	$m_{12} = -\frac{1}{2}$	
$m_3 = +\frac{1}{2}$	$m_8 = -\frac{1}{4}$	$m_{13} > 0$	
$m_4 = -\frac{1}{2}$	$m_9 = 0$	$m_{14} > 0$	
$m_5 = 1$	$m_{10} = -\frac{1}{4}$	$m_{15} > 0$	

III) Folgerungen aus (22)

I) Energiefluß $\mathbf{q} = \sigma \dot{\mathbf{u}}$ und Entropiefluß \mathbf{q} / Θ sind proportional zu r^0 und damit regulär. Annahme 7 ist korrekt, soweit es \mathcal{B} betrifft.

II) Der Integrand von G_1 kann in \mathcal{B} als

$$g_i = \sigma_{kr} \varepsilon_{kr}^R e_i^c - \rho g e_i^c - \sigma_{ki} u_{k,r} e_r^c \quad (23)$$

geschrieben werden. Es gilt unter Beachtung der Ergebnisse aus Kap.B1.4 :

$$g_{i,i} = \sigma_{kr} \varepsilon_{kr,i}^R e_i^c - \lambda_2 \sigma_{kk} \Theta_{,i} e_i^c - \mu_4 Z_{kr} Z_{kr,i} e_i^c - \nu_3 x x_{,i} e_i^c + \nu_2 \sigma_{kr} X_{\tau kr,i} - (\tau_q / k\Theta) q_k q_{k,i} e_i^c - \sigma_{ki,i} u_{k,r} e_r^c - \sigma_{ki} \varepsilon_{ki,r} e_r^c - \mu_6 \vartheta \vartheta_{,i} e_i^c + \text{weniger singuläre Terme.}$$

Mit den zuvor ermittelten Nahfeldlösungen gilt $g_{i,i} \sim r^{-2}$ (24)

und der Anteil von G_1 in \mathcal{B} ist nach [123] asymptotisch wegunabhängig, da r^{-2} die stärkste noch zugelassene Singularität ist.

III) Wegen $u_{k,r} u_{k,m} \sim r^{-1}$ ist auch G_2 eine Intensität und es ist gleichfalls asymptotisch wegunabhängig.

IV) Die Untersuchung des Werkstoffmodells für \mathcal{M} mit den Gleichungen (B.383 - 387) liefert sofort:

$$m_1 = -\frac{1}{2} = m_2 = -m_3 = m_4, \quad m_5 = 1, \quad m_9 = 0 \quad (25)$$

und die Folgerungen i)-iii) können auch für \mathcal{M} getroffen werden.

3. Singularitäten im Nahfeld bei instationärem Makro-Scherband

I) Wir können annehmen, daß für die materiellen Punkte im Nahfeld bei Scherbandwachstum die Trägheitskräfte nicht vernachlässigt werden können, so daß wir mit der Näherung (2) für die Zeitableitung und mit der vollständigen Impulsbilanz (19) rechnen (der Fall des Makrodefektwachstums bei quasistatischer Beanspruchung der Umgebung, wie er z.B. beim Kriechbruch vorliegt, ist hier also irrelevant). Wir bezeichnen mit ξ den von der Scherbandspitze aus gemessenen Ortsvektor mit $\|\xi\| = r$ und mit \mathbf{a} den Vektor zur Scherbandspitze. Es gilt also $\mathbf{x} = \xi + \mathbf{a}$. Im Rahmen der Theorie kleiner Deformationen ist $\mathbf{x} \approx \overset{0}{\mathbf{x}}$ und es gilt

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \mathbf{c} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = O(r^{m-1}) + O(r^m) \quad (26).$$

Nun sind die materiellen Ableitungen im Gegensatz zum Fall $c = 0$ also stärker singulär als die Variablen selbst.

II) Ergebnisse

Bzgl. der Details der Herleitung sei wieder auf [5] verwiesen. Man findet

$m_1 = -\frac{1}{2}$	$m_6 = -\frac{1}{12}$	$m_{11} = +\frac{5}{4}$	(27)
$m_2 = -\frac{1}{2}$	$m_7 = +\frac{1}{2}$	$m_{12} = +\frac{1}{2}$	
$m_3 = +\frac{1}{2}$	$m_8 = +\frac{1}{4}$	$m_{13} = 1$	
$m_4 = -\frac{1}{2}$	$m_9 = -\frac{5}{12}$	$m_{14} > 0$	
$m_5 = -\frac{5}{12}$	$m_{10} = +\frac{5}{4}$	$m_{15} = 1$	

III) Folgerungen aus (27)

I) Der Energiefluß $\mathbf{q} - \sigma \dot{\mathbf{u}}$ ist nun proportional zu r^{-1} . Die Gültigkeit von Annahme 7 ist daher nicht so offensichtlich wie im Fall $c = 0$. $\Delta \partial \mathcal{B}_\Gamma$ ist die seitliche Zylinderdeckfläche mit Flächenelement $r dr d\varphi$, d.h.

$$\int_{\Delta \partial \mathcal{B}_\Gamma} (\mathbf{q} - \sigma \dot{\mathbf{u}}) dA \sim \int_{\Delta \partial \mathcal{B}_\Gamma} \hat{\sigma} \hat{\mathbf{u}} r dr d\varphi \quad (28)$$

und dieses Integral verschwindet wie gewünscht für $\Gamma \rightarrow 0$, d.h. $r \rightarrow 0$. Für den Entropiefluß gilt $\mathbf{q}/\Theta \sim r^{-10/12}$; er ist also schwächer singulär als der Energiefluß. Annahme 7 trifft erst recht zu.

II) Zur Untersuchung der asymptotischen Wegunabhängigkeit: Es gilt wieder (24) und man überzeugt sich rasch anhand von (27) davon, daß $\sigma_{kl} \varepsilon_{kl,i}^R \sim r^{-2}$ der am stärksten singuläre Term ist. Dessen Singularität ist aber zulässig.

III) Auch G_2 ist eine Intensität und asymptotisch wegunabhängig (mit gleicher Begründung wie in Kap.2).

IV) Die Aussagen i)-iii) lassen sich auf \mathcal{M} übertragen.

v) $m_1 = m_2 = m_4$ bedeutet nicht, daß sich das Material vor der Scherbandfront elastisch verhält, sondern nur, daß die damage-induzierte Verzerrungsrate klein bleibt. Die Schädigung selbst nimmt aber zu ($m_6 < 0$)!

Anhang 5: Zusammenstellung der Materialfunktionen und Materialparameter für Modell 1.2.

I) Materialfunktionen zur Beschreibung thermisch aktivierter Versetzungsmechanismen

I) Der Fließflächenradius g_r

$$g_r(x, \theta, u) = \Gamma_{T1}^{(0)}(x, \theta) \Gamma_{T1}^{(1)}(x, \theta) \Gamma_{T2}(u)$$

$$\Gamma_{T1}^{(0)}(x, \theta) = g_{T0} \left\{ 1 + \frac{\chi_{g11} x + \chi_{g13} x^2}{1 + \chi_{g12} x} \right\}^2 \left\{ 1 - \chi_{g14} \arctan \left(\chi_{g15} \left(\frac{\theta}{\theta_0} - 1 \right) \right) \right\}$$

$$\Gamma_{T1}^{(1)}(x, \theta) = 1 - \chi_{g19} \arctan \left(\chi_{g110} x \left(\frac{\theta}{\theta_0} - 1 \right) \right)$$

$$\Gamma_{T2}(u) = \chi_{g16} + \frac{\chi_{g17}}{u \chi_{g18}}$$

$\Gamma_{T1}^{(0)}$ beschreibt das anfängliche Verfestigungsverhalten; $\Gamma_{T1}^{(1)}$ wird erst bei großen Versetzungsdichten aktiv.

Alle hier und im weiteren aufgeführten Materialparameter sind auf SI - Einheiten bezogen; wir geben nur die Maßzahlen an.

$$\begin{array}{lll} \chi_{g11} = 1,6 \cdot 10^{-7} & \chi_{g12} = 1,8 \cdot 10^{-6} & \chi_{g13} = 3,44 \cdot 10^{-15} \\ \chi_{g14} = 0,33 & \chi_{g15} = 2 & \chi_{g16} = -0,253 \\ \chi_{g17} = 0,1196 & \chi_{g18} = 0,517 & \chi_{g19} = 0,64 \\ \chi_{g110} = 10^{-8} & g_{T0} = 6 \cdot 10^{16} & \end{array}$$

II) Der Gleichgewichtswert der Prozeßgeschwindigkeit

$$u_{\varepsilon_0}(\text{PG}) = u_0 - 2(u_0 - u_\infty) (U(\text{PG}))^2 + (u_0 - u_\infty) (U(\text{PG}))^4$$

$$U(\text{PG}) = \frac{1}{\chi_{u2}} \log(1 + \chi_{u3} \text{PG})$$

$$u_0 = 10^{-2} \quad u_\infty = 10^{-3} \quad \chi_{u2} = 10,177 \quad \chi_{u3} = 2,6 \cdot 10^4$$

III) Die Überspannungsfunktion Φ aus der Fließregel für ε_{vT}

$$\Phi_r(\mathcal{F}_r) = 1 - \exp(-\chi_{v6} \mathcal{F}_r)$$

$$\mathcal{F}_T = (\sqrt{(\sigma^I - X_T) \cdot (\sigma^I - X_T)} - \sqrt{g_T}) / \sqrt{g_T} \quad , \quad \chi_{16} = 25$$

iv) Die Funktion γ_T aus der Fließregel für \mathbf{s}_{vT}

$$\gamma_T(x, u) = \chi_{17} u_{\varepsilon_Q}^{-1}(u) \left\{ \chi_{11} + \chi_{12} e^{-\chi_{13} x} + \chi_{14} e^{-\chi_{15} x} \right\}$$

$$\chi_{11} = 1,47 \qquad \chi_{12} = -0,4387 \qquad \chi_{13} = 9,424 \cdot 10^{-6}$$

$$\chi_{14} = 0,3008 \qquad \chi_{15} = 5,6233 \cdot 10^{-7} \qquad \chi_{17} = 0,838$$

$u_{\varepsilon_Q}^{-1}$ ist die Umkehrfunktion zu u_{ε_Q} (PG)

v) Die Funktion c_T aus der Evolutionsgleichung der kinematischen Verfestigung

$$c_T(x) = \chi_{c16} \left\{ e^{C(x)} - 1 \right\}$$

$$C(x) = \chi_{c11} + \chi_{c12} e^{-\chi_{c13} x} + \chi_{c14} e^{-\chi_{c15} x}$$

$$\chi_{c11} = 0,832 \qquad \chi_{c12} = 3,535 \qquad \chi_{c13} = 1,099 \cdot 10^{-6}$$

$$\chi_{c14} = 3,687 \qquad \chi_{c15} = 4,68 \cdot 10^{-7} \qquad \chi_{c16} = 10^7$$

vi) Die Funktion $K(x, \Theta) \equiv K(x)$:

$$K(x) = \left(1 - \frac{x}{x_{\max}} \right)$$

II) Materialgleichungen zur Beschreibung der Scherbandschädigung

i) Materialfunktionen aus der Evolutionsgleichung für τ : Es sei $\tau := \|\tau\|$

$$d_1(\tau, u) = \chi_{101} e^{-\chi_{102} u - \chi_{103} \tau}$$

$$d_2(\tau) = \chi_{104} e^{-\chi_{105} \tau}$$

$$d_3(\tau) = \frac{\chi_{106}}{(1 + \chi_{107} \tau)^{\chi_{108}}}$$

$$d_4(\tau) = \frac{\chi_{109}}{(1 + \chi_{1010} \tau)^{\chi_{1011}}}$$

$$m(\tau, \|\mathbf{s}_{vL}\|) = \frac{\chi_{1012} \|\mathbf{s}_{vL}\|}{(1 + \chi_{1013} \tau)^{\chi_{1014}} (1 + \chi_{1015} \|\mathbf{s}_{vL}\|)^{\chi_{1016}}}$$

$$\chi_{101} = 13 \qquad \chi_{102} = 10^3 \qquad \chi_{103} = 7 \cdot 10^{-6} \qquad \chi_{104} = 6 \cdot 10^{-8}$$

$$\begin{array}{llll} \chi_{,05} = 2,3 \cdot 10^{-5} & \chi_{,06} = 10^5 & \chi_{,07} = 3,5 \cdot 10^{-5} & \chi_{,08} = 5,5 \\ \chi_{,09} = 1,2 & \chi_{,10} = 6,6 \cdot 10^{-3} & \chi_{,11} = 2 & \chi_{,12} = 2 \cdot 10^7 \\ \chi_{,13} = 2 \cdot 10^{-6} & \chi_{,14} = 3 & \chi_{,15} = 1 & \chi_{,16} = 1 \end{array}$$

II) Materialfunktionen für die Evolution von Z

$$v_z = \text{konst}$$

$$h_z(\vartheta) = \frac{h_{z0}}{1 + \chi_{z1} \vartheta}$$

$$d_z(\zeta, \varrho_z) = \frac{d_{z0}}{(1 + \chi_{z2} \zeta)^{\chi_{z3}}} \arctan(\varrho_z)$$

mit $\zeta := \|Z\|$, $\varrho_z = G_z / h_{z0}$

$$v_z = 3 \cdot 10^4 \quad h_{z0} = 1,75 \cdot 10^{12} \quad \chi_{z1} = 2$$

$$d_{z0} = 8 \cdot 10^{-15} \quad \chi_{z2} = 0,8 \quad \chi_{z3} = 3$$

III) Materialfunktionen aus der Fließregel für ε_o

$$v_o = \text{konst}$$

$$h_o(\zeta) = \frac{h_{o0}}{1 + \frac{2}{\pi} \chi_{z4} \arctan(\chi_{z5} \zeta)}$$

$$d_o(\zeta, \varrho_o) = \frac{d_{o0} \zeta}{1 + \chi_{z6} \zeta} \arctan(\chi_{z7} \varrho_o)$$

mit $\varrho_o := G_o / h_{o0}$

$$v_o = 3 \cdot 10^4 (=v_z) \quad h_{o0} = 3,5 \cdot 10^{12} \quad \chi_{z4} = 35$$

$$\chi_{z5} = 1 \quad \chi_{z6} = 0,1 \quad \chi_{z7} = 10^2$$

IV) Materialfunktionen aus der Evolutionsgleichung für ε_{vl}

$$\gamma_{vl} = \text{konst}$$

$$h_v = \text{konst}$$

$$\Phi_{vL}(a_{vL}) = a_{vL} \quad \text{mit } a_{vL} = (\sqrt{\tau^I \cdot \tau^I} - \sqrt{h_v}) / \sqrt{h_v}$$

$$\gamma_{vL} = 0,612 \quad h_v = 3 \cdot 10^9$$

v) Materialfunktionen aus der Evolutionsgleichung für ϑ

$$d_{\Theta v}(u, \vartheta, a_v) = T_1(u) \left\{ 1 - \frac{T_2(u) \vartheta}{1 + T_2(u) \vartheta} \right\} a_v$$

$$T_1(u) = \chi_{\Theta_1} (1 + \chi_{\Theta_2} e^{-\chi_{\Theta_3} u})$$

$$T_2(u) = \chi_{\Theta_4} u^{\chi_{\Theta_5}}$$

$$\chi_{\Theta_1} = 10^{-2} \quad \chi_{\Theta_2} = 7,5 \cdot 10^4 \quad \chi_{\Theta_3} = 5 \cdot 10^2 \quad \chi_{\Theta_4} = 2 \cdot 10^4 \quad \chi_{\Theta_5} = 4$$

III) Materialfunktionen und -parameter zur Beschreibung thermoelastischen Verhaltens

I) Einfluß der Schädigung auf das elastische Verhalten

$$\lambda_3(\zeta) / \lambda_{3,0} = \lambda_4(\zeta) / \lambda_{4,0} = 1 + \frac{k_1 \zeta}{1 + k_2 \zeta}$$

$$k_1 = 300 \quad k_2 = 1000 \quad \lambda_{3,0} = -1,428 \cdot 10^{-12} \quad \lambda_{4,0} = 6,19 \cdot 10^{-12} \quad (\rightarrow E = 2,1 \cdot 10^{11})$$

II) Dgl. für u

$$c = 5 \cdot 10^4 \quad \alpha = 10^{-4} \quad \chi_{u1} = 10^{-5}$$

III) Parameter aus dem Ansatz für die Enthalpie

$$\rho = 7,5 \cdot 10^3 \quad \lambda_2 = 10^{-5} \quad c_{\sigma\epsilon} = 480 \quad \tau_q = 2,53 \cdot 10^{-8}$$

$$k = 12 \quad \mu_1 = \mu_2 = 6,76 \cdot 10^{-9} \quad \mu_3 = 3,5 \cdot 10^{-17}$$

$$\mu_4 = 10^7 \quad \mu_6 = 1,1 \cdot 10^8 \quad \nu_2 = 1,677 \cdot 10^{-12} \quad \nu_3 = 5 \cdot 10^{-11} \quad \nu_4 = 1,66 \cdot 10^{-4}$$

IV) Materialfunktionen und -parameter für den inelastischen Spin

$$\Phi_{TW}(\mathcal{F}_T) = \Phi_T(\mathcal{F}_T)$$

$$\gamma_{TW}(u) = \chi_{i10} u_{EQ}^{-1}(u)$$

$$\chi_{i10} = 0,979$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H.Diehl, W.Fornefeld: Werkstoffverhalten bei hochdynamischer Beanspruchung - Teil 1, Interner Bericht Inst. f. Mechanik der GhKassel, August 1986
- [2] H.Diehl, W.Fornefeld: Werkstoffverhalten bei hochdynamischer Beanspruchung - Teil 2, Interner Bericht Inst. f. Mechanik der Gh Kassel, Februar 1987
- [3] H.Diehl, W.Fornefeld: Werkstoffverhalten bei hochdynamischer Beanspruchung - Teil 3, Interner Bericht Inst. f. Mechanik der Ruhruniversität Bochum, März 1988
- [4] H.Diehl, W.Fornefeld: Werkstoffverhalten bei hochdynamischer Beanspruchung - Teil 4, Interner Bericht Inst. f. Mechanik der Ruhruniversität Bochum, Februar 1989
- [5] H.Diehl, W.Fornefeld: Werkstoffverhalten bei hochdynamischer Beanspruchung - Teil 5, Interner Bericht Inst. f. Mechanik der Ruhruniversität Bochum, erscheint Mitte 1989
- [6] J.Harding (Ed.): Mechanical Properties at High Rates of Strain, The Institute of Physics, Bristol and London, 1974
- [7] J.Harding (Ed.): Mechanical Properties at High Rates of Strain, The Institute of Physics, Bristol and London, 1979
- [8] J.Harding (Ed.): Mechanical Properties at High Rates of Strain, The Institute of Physics, Bristol and London, 1984
- [9] J.Philibert (Ed.): Proceedings of the Conference on Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic Loading DYMAT '85, Journal de Physique C-5, 1985
- [10] C.Y.Chien, H.D.Kunze, L.W.Meyer (Eds.): Impact Loading and Dynamic Behaviour of Materials (Proc.IMPACT '87), DGM Informationsgesellschaft, 1988
- [11] K.Kawata, J.Shioiri (Eds.): High Velocity Deformation of Solids, IUTAM - Symposium Tokyo 1977, Springer-Verlag 1978
- [12] K.Kawata, J.Shioiri (Eds.): Macro - and Micro-Mechanics of High Velocity Deformation and Fracture, IUTAM-Symposium Tokyo 1985, Springer-Verlag 1987

- [13] S.Nemat-Nasser, R.J.Asaro, G.A.Hegemier (Eds.): Theoretical Foundation for Large-Scale Computations for Nonlinear Material Behavior, Martinus Nijhoff Publishers, 1984
- [14] J.A.Zukas, T.Nicholas, H.F.Swift,L.B.Gresczuk, D.R.Curran (Eds.): Impact Dynamics, John Wiley & Sons, 1982
- [15] J.Chandra, J.E.Flaherty (Eds): Computational Aspects of Penetration Mechanics, Lecture Notes in Engineering 3, Springer-Verlag 1983
- [16] N.Perrone, S.N.Atluri (Eds): Nonlinear and Dynamic Fracture Mechanics, ASME AMD - Vol. 35, 1979
- [17] M.A.Meyers, L.E.Murr (Eds.): Shock Waves and High-Strain-Rate Phenomena in Metals, Plenum Press 1981
- [18] L.E.Murr, K.P.Staudhammer, M.A.Meyers (Eds.): Metallurgical Applications of Shock-Wave and High-Strain-Rate Phenomena, Marcel Dekker Inc., 1986
- [19] G.I.Taylor: The Use of Flat-Ended Projectiles for Determining Dynamic Yield Stress, Part 1, Proc.Roy.Soc.London, A 194,289-299, 1948
- [20] Th.v.Karman, P.Duwez: The Propagation of Plastic Deformation in Solids, J.Mech.21, 987-994,1950
- [21] T.Belytschko: An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures, in: T.Belytschko, T.J.R.Hughes (Eds.): Computational Methods for Transient Analysis, North-Holland, 1983
- [22] P.S.Follansbee: High Strain Rate Deformation of FCC Metals and Alloys, in [18]
- [23] T.Nojima, K.Ogawa: New Applications of Split Hopkinson Bar to Materials Testing, in [9]
- [24] D.R.Curran, L.Seaman, D.A.Shockey: Linking Dynamic Fracture to Microstructural Processes, in [17]
- [25] S.R.Bodner: Response of Structures to Impact Loading: 'Exact' Solutions, Approximate Methods and Experimental Techniques, in [8]
- [26] R.Clifton: Plastic Waves - Theory and Experiment, in: S.Nemat-Nasser (Ed.): Mechanics Today Vol.1 , 1972
- [27] W.K.Nowacki: Stress Waves in Non-Elastic Solids, Pergamon Press, 1978

- [28] N.Cristescu, I.Suliciu: Viscoplasticity, Martinus Nijhoff Publishers, 1982
- [29] B.Raniecki: Ordinary Waves in Inviscid Plastic Media, in: J.Mandel, L.Brun (Eds.): Mechanical Waves in Solids, CISM Courses and Lectures No 222, Springer-Verlag 1975
- [30] K.Nakagawa, N.Urushi, R.Kawai, O.Mahrenholtz: Focusing of Stress-Waves in Viscoelastic and Elasto-Viscoplastic Plates, in [10]
- [31] R.J.Clifton : Dynamic Plastic Deformation for Non-Proportional Loading Paths, in: J.P.Boehler (Ed.): Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids, Proc. Euromech Colloq.115, Martinus Nijhoff Publishers, 1982
- [32] K.Stiebler, L.W.Meyer, E.Staskewitsch : Untersuchungen mit zweiachsigen Belastungen durch kombinierte Beanspruchungen aus Torsion und Zug, Einzelbericht EB 10/85 des IFAM Bremen, 1985
- [33] L.E. Malvern: Experimental and Theoretical Approaches to Characterisation of Material Behavior at High Rates of Deformation, in [8]
- [34] W.Kosinski: One-Dimensional Shock Waves in Solids with Internal State Variables, Arch. Mech. 27,1975, 445-458
- [35] J.D. Campbell : Dynamic Plasticity - Macroscopic and Microscopic Aspects, Materials Science and Engineering 12,1973, 3-21
- [36] J.Güldenpfennig: Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elastoplastischer Wellen, Mitt.Nr. 12 aus dem Institut für Mechanik der Ruhruniversität Bochum, 1977
- [37] T.H.Lin : Physical Theory of Plasticity, Adv.Appl. Mech 11,1971,256-312
- [38] P.Germain, E.H.Lee: Plane Waves in Elastic-Plastic Solids, in [74]
- [39] R.B.Stout : Analysis of Dislocation Kinetics Across Shocks, in [18]
- [40] W.Johnson: Impact Strength of Materials, Edward Arnold Publishers, 1972
- [41] S.Kaliszky : Plastizitätslehre, VDI-Verlag 1984
- [42] S.Kaliszky : Dynamic Plastic Response of Structures, in [45]
- [43] J.B.Martin, P.S.Symmonds: Mode Approximations for Impulsively Loaded Rigid-Plastic Structures, J.Engng. Mech. Div. 92, 1966, 43-66

- [44] M.Ravid, S.R.Bodner, I.Holcman: Analysis of Very High Speed Impact, in [10]
- [45] G.Bianchi, A.Sawczuk (Eds.): Plasticity Today, Elsevier, 1985
- [46] K.H. Hartmann, H.D.Kunze, L.W.Meyer: Metallurgical Effects on Impact Loaded Materials, in [17]
- [47] J.Harding: Material Behaviour at High Rates of Strain, in [10]
- [48] L.W.Meyer, E.Staskewitsch: Mechanical Behaviour of Some Steels under Dynamic Loading, in [10]
- [49] L.W.Meyer, H.D.Kunze, K.Seifert: Dynamic Behaviour of High Strength Steels under Tension, in [17]
- [50] R.J.Clifton: Experiments and Micromechanics of Viscoplasticity, in [45]
- [51] R.J.Clifton, P.Kumar: Dislocation Configurations Due to Plate Impact, in [11]
- [52] F.Jähn: Ein neues Verfahren zur Bestimmung der Fließspannungen von metallischen Werkstoffen bei höchsten Dehngeschwindigkeiten, Dissertation Universität Karlsruhe 1979
- [53] W.K. Nowacki: Thermal Effects in Dynamic Plasticity. Numerical Solution and Experimental Investigation, in [9]
- [54] D.A. Shockey: Materials Aspects of the Adiabatic Shear Phenomenon, in [18]
- [55] M.E.Backman, W.Goldsmith: The Mechanics of Penetration of Projectiles into Targets, Int. J. Engng. Sci. 16, 1978, 1-99
- [56] D.A. Shockey, L.Seaman, D.R. Curran: Microfailure Models and Their Application to Nonlinear Dynamic Fracture Problems, in [16]
- [57] M.A.Meyers, L.E.Murr: Defect Generation in Shock Wave Deformation, in [17]
- [58] J. Shioiri et al.: Experimental Studies on the Behaviour of Dislocations in Copper at High Rates of Strain, in [11]
- [59] J. Shioiri: An Ultrasonic Study of the Rate Controlling Mechanism of Dislocation Motion at High Rates of Strain, in [9]
- [60] J. Shioiri, K.Sakino: Comparison of Flow Stresses of Aluminium at High Rates of Strain Calculated on the Basis of Ultrasonic Study of Dislocation Behavior with Directly Measured Ones, in [10]

- [61] J.Weertman, P.S.Follansbee: Finite Amplitude Plastic Shock Wave Treated with Summed Infinitesimal Amplitude Elastic-Plastic Waves Through Dislocation Dynamics, Mech.of Mat.2, 1983,265-285
- [62] R.J. Asaro : Micromechanics of Crystals and Polycrystals, Adv. Appl. Mech 23 , 1983, 2-117
- [63] R. Mavljutov, O.Kaibyshev : The Influence of High Rate Deformation on Structure and Properties of Materials in the Presence of Stress Concentrators, in [11]
- [64] D.A. Shockey, D.C.Erich: Metallurgical Influences on Shear Band Activity, in [17]
- [65] D.R.Curran : Dynamic Fracture, in [14]
- [66] L.Seaman et al.: Shear Band Observations and Derivations of Requirements for a Shear Band Model, in [9]
- [67] D.R.Curran, L.Seaman: Computational Models for Nucleation, Growth and Coalescence of Adiabatic Shear Bands, in [9]
- [68] D.A. Shockey, D.R.Curran, L.Seaman: Computer Modelling of Microscopic Failure Processes under Dynamic Loads, in [11]
- [69] E.Kröner, C.Teodosiu: Lattice Defect Approach to Plasticity and Viscoplasticity, in [74]
- [70] H.J.Frost, M.F.Ashby: Deformation Mechanism Maps, Pergamon Press 1982
- [71] H.Mecking, K.Lücke: A new Aspect of the Theory of Flow Stress of Metals, Scripta Metallurgica 4, 1970, 427-432
- [72] P.Perzyna, R.B.Pecherski : Modified Theory of Viscoplasticity - Physical Foundations and Identification of Material Functions for Advanced Strains, Arch. Mech. 35, 1983, 423-436
- [73] J.J. Gilman: The Microdynamics of Plastic Flow, in [74]
- [74] A.Sawczuk (Ed.): Problems of Plasticity, Noordhoff, 1974
- [75] P.Perzyna: Stability Problems for Inelastic Solids with Defects and Imperfections, Arch. Mech. 33, 1981, 587-602
- [76] O.Vöhringer, Universität Karlsruhe, persönliche Mitteilung

- [77] J.M.Kelly : Dislocation Models in Continuum Laws, in: K.C.Valanis (Ed.): Constitutive Equations in Viscoplasticity - Phenomenological and Physical Aspects, ASME AMD - Vol.21, 1976
- [78] L.Zslodos, I.Kovacs: Dislocations and Plastic Deformation, Oxford, 1973
- [79] G.L.Moss, D.S.Pritchard: Adiabatic Shear Band Velocities, in [9]
- [80] J.R.Rice: The Localization of Plastic Deformation, in : Proc. 14th IUTAM Congress, W.T.Koiter (Ed.), North-Holland, 1976
- [81] O.T.Bruhns : Bifurcation Problems in Plasticity, in [91]
- [82] G.B.Olson, J.F.Mescall, M.Azrin: Adiabatic Deformation and Strain Localization, in [17]
- [83] R.Dormeval: Adiabatic Shear Phenomena, in [10]
- [84] J.Burbach : Zur Unzulänglichkeit der Ergebnisse der werkstoffmechanischen und metallphysikalischen Grundlagenforschung für die Interpretation der Verformungsvorgänge während hochdynamischer Beanspruchungen. Abschlußbericht IFAM Bremen 1981
- [85] C.Fressengeas, A.Molinari : Instability and Localization of Plastic Flow in Shear at High Strain Rates, J.Mech.Phys.Solids 35, 1987, 185-211
- [86] T.W.Wright, R.C.Batra : Adiabatic Shear Bands in Simple and Dipolar Plastic Materials, in [12]
- [87] D.E.Grady, M.E.Kipp : The Growth of Unstable Thermoplastic Shear with Application to Steady-Wave Shock Compression in Solids, J.Mech.Phys. Solids 35, 1987, 95-118
- [88] S.Kuriyama, M.A.Meyers : Numerical Analysis of Adiabatic Shear Band in an Early Stage of its Propagation
- [89] M.Korzen: Beschreibung des inelastischen Materialverhaltens im Rahmen der Kontinuumsmechanik: Vorschlag einer Materialgleichung vom viskoelastisch-plastischen Typ, Dissertation TH Darmstadt, 1988
- [90] Th.Lehmann : General Frame for the Definition of Constitutive Laws for Large Non-Isothermic Elastic-Plastic and Elastic-Viscoplastic Deformations , in [91]

- [91] Th.Lehmann (Ed.): The Constitutive Law in Thermoplasticity, CISM Courses and Lectures No 281, Springer-Verlag 1984
- [92] P.M.Suquet: Local and Global Aspects in the Mathematical Theory of Plasticity, in [45]
- [93] Nguyen Quoc Son: A Thermodynamic Description of the Running Crack Problem, in: S.Nemat-Nasser (Ed.): Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture, IUTAM-Symp. Dourdan 1980, North-Holland 1981
- [94] H.Demiray, A.C.Eringen: A Nonlocal Model for Plug Formation in Plates, Int.J.Engng.Sci. 16, 1978, 287-297
- [95] P.Perzyna: Fundamental Problems in Viscoplasticity, Adv. Appl. Mech. 9, 1966
- [96] A.Tate: A Simple Hydrodynamic Model for the Strain Field Produced in a Target by the Penetration of a High Speed Long Rod Projectile, Int.J. Engng. Sci. 16, 1978, 845-858
- [97] Hong Ki Hong: Deformation and Flow of a Bulky Body Penetrated by a Deformable Projectile, in [12]
- [98] R.C.Batra: Steady-State Penetration of Viscoplastic Targets, Int.J.Engng. Sci. 25, 1987, 1131-1141
- [99] G.Johnson: Short Presentation in [13]
- [100] A.Baltov, N.Bontcheva: A Rule of Anisotropic Hardening with Taking into Account Preliminary and Actual Plastic Deformations and Strain Rates, in: J.P.Boehler (Ed.): Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids, Proc. Euromech Colloq.115, Martinus Nijhoff Publ. ,1982
- [101] H.Lippmann, O.Mahrenholtz: PLastomechanik der Umformung metallischer Werkstoffe, Springer-Verlag 1967
- [102] P.Perzyna: Thermodynamic Theory of Viscoplasticity, Adv.Appl.Mech.11, 1971
- [103] S.R.Bodner: Material Modelling at High Rates of Strain, in [10]
- [104] S.R.Bodner, Y.Partom: A Representation of Elastic-Viscoplastic Strain Hardening Behaviour for Generalized Straining Histories, in [6]
- [105] P.Perzyna: The Constitutive Equations Describing Thermomechanical Behaviour of Materials at High Rates of Strain, in [6]

- [106] P.Perzyna: Internal Variable Description of Plasticity, in [74]
- [107] Th.Lehmann: On a Generalized Constitutive Law for Finite Deformations in Thermo-Viscoplasticity, in [161]
- [108] O.T.Bruhns: On the Constitutive Relations of Austenitic Stainless Steels, in [161]
- [109] J.Lubliner: A Thermodynamic Yield Criterion in Viscoplasticity, *Acta Mechanica* 30, 1978, 165-174
- [110] R.B.Pecherski: Rate Sensitive Finite Deformations with Anisotropic Hardening and Evolution of Substructure, in: O.T.Bruhns (Ed.): Workshop über große plastische Formänderungen, Bad Honnef 1988, erscheint als Mitteilung aus dem Institut für Mechanik der Ruhruniversität Bochum
- [111] Hong Ki Hong, Yi An Chyu: A Continuum Damage Thermomechanics Model for Ductile Fracture, in [10]
- [112] L.Davison, A.L.Stevens, M.E.Kipp: Theory of Spall Damage Accumulation in Ductile Metals, *J.Mech.Phys. Solids* 25, 1977, 11-28
- [113] P.Perzyna: Constitutive Modelling for Brittle Dynamic Fracture in Dissipative Solids, *Arch.Mech.* 38, 1986, 725-738
- [114] Seminar über Kontinuums-Damage-Theorie, Inst.f.Mechanik der Ruhruniversität Bochum, 1988
- [115] D.A.Shockey: Recent Progress in Dynamic Fracture Testing and Treatment, in [10]
- [116] S.Murakami, N.Ohno: A Continuum Theory of Creep and Creep Damage, in: A.R.S.Ponter, D.Hayhurst (Eds.): *Creep in Structures*, IUTAM Symp. Leicester 1980, Springer 1981
- [117] R.IIankamban, D.Krajcinovic: A Constitutive Theory for Progressively Deteriorating Brittle Solids, *Int.J. Solids Structures* 23, 1987, 1521-1534
- [118] P.J.Rabier: Some Remarks on Damage Theory, *Int.J.Engng. Sci.* 27, 1989, 29-54
- [119] M.Saje, J.Pan, A.Needleman: Void Nucleation Effects on Shear Localization in Porous Plastic Solids, *Int.J.Fracture* 19, 1982, 163-182

- [120] Nguyen Quoc Son: Normal Dissipativity and Energy Criteria in Fracture, in: S.Nemat-Nasser (Ed.): Variational Methods in the Mechanics of Solids, IUTAM-Symposium Evanston 1980, Pergamon Press 1980
- [121] C.Stolz: General Relationships between Micro and Macro Scales for the Nonlinear Behaviour of Heterogeneous Media, in [126]
- [122] P.Germain, Nguyen Quoc Son, P.Suquet: Continuum Thermodynamics, J.Appl.Mech. 50, 1983, 1010-1020
- [123] F.Nilsson, P.Stahle: Crack Growth Criteria and Crack Tip Models, SM Archives 13, 1988, 193-238
- [124] D.S.Barr, S.C.Christides: One-Dimensional Theories for Cracked Beams, in: H.Irretier, I.Elishakoff (Eds.): Proc. Euromech Colloq.219: Refined Dynamical Theories for Beams, Plates and Shells and Their Applications, Lecture Notes in Engng., Springer-Verlag 1988
- [125] S.Nemat-Nasser: Overall Stresses and Strains in Solids with Microstructure, in [126]
- [126] J.Gittus, J.Zarka (Eds.): Modelling Small Deformations of Polycrystals, Elsevier 1986
- [127] J.D.Jackson: Classical Electrodynamics, J.Wiley & Sons, 1962
- [128] W.Kosinski: Thermal Waves in Inelastic Bodies, Arch.Mech.27,1975,733-748
- [129] L.E.Malvern: Introduction to the Mechanics of Continuous Media
- [130] Th. Lehmann: On a Generalized Constitutive Law in Thermoplasticity, in [45]
- [131] J.Mandel: Plasticite classique et viscoplasticite, CISM Courses and Lectures No 97, Springer 1971
- [132] F.Sidoroff: On the Formulation of Plasticity and Viscoplasticity with Internal Variables, Arch.Mech. 27, 1975, 807-819
- [133] Th.Lehmann: Internal Variables in Thermoplasticity, Lecture Notes of the CISM Course "Internal Variables in Thermodynamics and Continuum Mechanics", coord. by J.Kestin, erscheint im Springer-Verlag
- [134] G.J.Dvorak: Mechanical Properties of Composites, in: J.P.Boehler (Ed.): Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids, Proc. Euromech Colloq. 115, Martinus Nijhoff Publ., 1982

- [135] A.J.M. Spencer: Theory of Invariants, in: A.C.Eringen: Continuum Physics Vol. 1, Pergamon Press 1971
- [136] I.Müller : Thermodynamik - Grundlagen der Materialtheorie, Bertelsmann 1973
- [137] I.Müller : Thermodynamic Theories of Thermoelasticity and Special Cases of Thermoplasticity, in [91]
- [138] J.Lubliner: On the Structure of the Rate Equations of Materials with Internal Variables, Acta Mechanica 17, 1973, 109-119
- [139] B.Loret : On the Effects of Plastic Rotation in the Finite Deformation of Anisotropic Elastoplastic Materials, Mechanics of Materials 2, 1983,287-304
- [140] B.Raniecki, K.Thermann : Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-plastic Deformations - Basic Concepts . Mitt.Nr.2 aus dem Institut für Mechanik der Ruhruniversität Bochum, 1978
- [141] E.H.Lee: Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains, J.Appl.Mech. 36, 1969, 1-6
- [142] P.Haupt: On the Concept of an Intermediate Configuration and its Application to a Representation of Viscoelastic-Plastic Material Behaviour, Int.J.Plasticity 1, 1985, 303-316
- [143] Y.F.Dafalias: A Missing Link in the Macroscopic Constitutive Formulation of Large Plastic Deformations, in [45]
- [144] J.Mandel : Thermodynamics and Plasticity , in: J.J.Delgado Domingos, M.N.R. Nina, J.H.Whitelaw (Eds.): Foundations of Continuum Thermodynamics, Macmillan, 1974
- [145] Y.F.Dafalias : The Plastic Spin, J.Appl.Mech. 52, 1985, 865-871
- [146] Ch.Tsakmakis : Über inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung grosser inelastischer Deformationen, Dissertation TH Darmstadt 1987
- [147] J.E.Paulun, R.B.Pecherski : On the Application of the Plastic Spin Concept for the Description of Anisotropic Hardening in Finite Deformation Plasticity, erscheint in Int.J.of Plasticity
- [148] H.D.Bui, A.Ehrlacher, Q.S.Nguyen : The Dynamic Crack Propagation Problem in Coupled Thermoelasticity, in [12]

- [149] M.E.Gurtin: Thermodynamics and the Griffith-Criterion for Brittle Fracture, Int.J. Solids Structures 15, 1979, 553-560
- [150] S.N.Atluri : Energetic Approaches and Path-Independent Integrals in Fracture Mechanics, in [153]
- [151] S.Flügge (Ed.): Handbuch der Physik III / 1
- [152] J.D.Achenbach, N.Nishimura, J.C.Sung: Crack-Tip Fields in a Viscoplastic Material, Int. J. Solids Structures 23, 1987, 1035-1052
- [153] S.N.Atluri (Ed.): Computational Methods in the Mechanics of Fracture, North-Holland , 1986
- [154] K.K.Lo: Dynamic Crack-Tip Fields in Rate-Sensitive Solids, J.Mech.Phys. Solids 31, 1983, 287-305
- [155] G.P.Moeckel: Thermodynamics of an Interface, Arch.Rat.Mech.Anal. 57, 1974, 255-280
- [156] I.Rechenberg: Evolutionsstrategie, Friedrich Frommann Verlag, 1973
- [157] A.Pape: Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells, Mitteilung Nr. 57 aus dem Institut für Mechanik der Ruhruniversität Bochum, 1988
- [158] A.L.Gurson: Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth Part 1 - Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media , J. Engng.Mat.Techn. 99, 1977, 2-15
- [159] W.Becker : Dugdale -Riß-Lösungen und deren Verwendung zur mikromechanischen Modellierung von anisotropem Damage, Dissertation TH Darmstadt, 1988
- [160] E.T.Onat, F.A.Leckie: Representation of Mechanical Behaviour in the Presence of Changing Internal Structure, J.Appl.Mech. 55, 1988, 1-10
- [161] C.S.Desai, E.Krempf, P.D.Kiousis, T.Kondo (Eds.): Constitutive Laws for Engineering Materials, Elsevier, 1987

Sachwortverzeichnis

Anisotrope Verfestigung	12,38,60-61,66,80
Annahme 1	56
Annahme 2	63
Annahme 3	69
Annahme 4	69
Annahme 5	125
Annahme 6	127
Annahme 7	127
Annahme 8	128
Annahme 9	140
Annahme 10	140
Annahme 11	140
Axis of compression (AOC)	89-91
Belastungsbedingung (σ -Raum)	30,63
Belastungsbedingung (τ -Raum)	70,72
Beschleunigungswellen	19-21,29,30,31,161
Bodner-Modell	36
Bruchmechanik	2,3,41-42, 120,122,176-178
CFC-Test	14,15,94
Chain rule property	101
Clausius-Duhem-Ungleichung	31,35,38,46-48,73-78, 110-112
Damage-induzierte Verzerrungen	14,30,72
Damage-Theorie	29,39-41
Damage-Variable	
- Skalar	39
- Tensor	40, 53,55,69-71, 148,161,165-168
Defekterzeugung	
- homogen	15
- an "weak spots"	14-17,41,71
Deformationsgradient	29,154
- Zerlegung	102,103
Deformationstheorie	19,21,27,32-33
Dissipation	78,79
Durchschlagversuch	10,91
Entfestigung	
- thermisch	15, 159
- durch Schädigung	145,147, 159,161
Enthalpie (freie)	46,74,78- 81,110
Entropie	73, 85
Erster Hauptsatz	85,97,100
- im Nahfeld	128
Evolutionsgesetze	22,37,44-46,63-73

Evolutionsstrategie	143
Flat Plate Impact Test	6,9,19
Fließbedingung (σ -Raum)	30,31,34,42,63,65,137
Fließbedingung (τ -Raum)	70,72
Fließbedingung ((G_1, G_2) -Raum)	132
Fließregel	30-31, 48, 63-65, 72, 137, 171-174
Fließtheorie	33-35
Frenkel'sche Gewaltscherung	26
Generalized Standard Material	47-48,79
Geschwindigkeitswechselfersuch	8, 68, 148-150
Gleichgewichtsmethode	26,27
Globale Analyse	41-42,74, 119-129
Große Deformationen	2, 101-117
Hauptschubspannungen	89-90
Homogenisierung	3,21, 49-56,105
Inelastischer Spin	103, 107, 109
Innere Variable	44-47, 56-61,62
Intensität	176
Kinetische Methode	27, 132
Konsistenzbedingung	25,35,64
Kontinuumselektrodynamik	40,54
Legendre-Transformation	46,77
Makro-Scherbänder	2,11,13-18,26-27, 71, 88-94, 118-119
Massenpunktmodell	154-156
Mikrofelder	3,23,40,49-56
Mikro-Poren	1,13,14,28
Mikro-Risse	1,2,11,13,14,28
Mikro-Scherbänder	1,13-18,28,30,37, 53, 55-56,69-71
Momente	54-56
Nahfeldlösung	176-182
Nichtlokale Effekte	30, 91,94
Normalenregel	38,48,64,72,81,83,171
Orowan-Gleichung	11,21,23,32,71
Plateau	20,161
Plugging	10,17
Postulate 1 und 2	31
Prozeßgeschwindigkeit	58-59,152
Prozeßvariable	44
Recovery	64,66
Repräsentatives Volumenelement	23,29,49-50
Reversible Verzerrung	76-77, 84-85,113,115
Schockwellen	19,22,33
Spalling	10,11
Spannungskonzentrationen	49,50,53,56

Spannungskonzentrationstensor	55, 68-69, 147, 175
Spannungszerlegung	169-170
Spezifische Wärme	85
Split Hopkinson Bar	6-8, 19
Stored Energy	12, 86
t^*	29, 93
Taylor-Test	5, 9-10, 17, 89-91, 153
Temperaturkonzentration	55, 148
Thermodynamisches Gleichgewicht	79
Torsionsversuch	150-153
Transportgleichung	20
Transporttheorem	121-122
Übergangsbedingungen	139-141
Überspannungen	31, 35-37, 65
Vergleichsmaterial	4, 142-143
Vergleichskonfiguration	123
Versagenskriterien	17, 39, 42, 87-94
Versetzungsbewegung	
- athermisch	8, 23-25, 28, 30, 63
- thermisch aktiviert	8, 23-25, 28, 31, 35, 65, 137
- viskos gedämpft	8, 23, 24, 28, 30, 38, 137
Versetzungsdichte	
- gesamte V.	6, 11-13, 22-25, 44, 59-60, 66, 160
- bewegl. V.	11-13, 22-25, 44, 59
Versetzungsinduzierte Verzerrungen	14, 30, 53, 55, 63-65
Version 1.1.	94-97
Version 1.2.	97-100, 183-186
Version 1.2.LD	114-117
Version 2.1.	138-139
Wachstumsgeschwindigkeit c	41, 119, 132-133
Wärmeleitung	56, 61, 75, 156-158
Wegunabhängigkeit, asymptotisch	41, 131, 180-182
Wellen - siehe: Beschleunigungs- wellen, Schockwellen	
Zeitintegration	144
Zweiter Hauptsatz	73-74, 128
- für Nahfeld	130

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalem Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Guldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity

- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr.18 Uwe Kolberg:
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells

- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktwise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorie unter Berücksichtigung großer Rotationen

- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowsky/H. Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotations-symmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 J. Makowski/H. Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Schädigung durch Scherbänder

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 66**