

**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

O. T. Bruhns

Große plastische Formänderungen  
- Bad Honnef 1988

Heft Nr. 63



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

**INSTITUT FÜR MECHANIK  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

**O. T. BRUHNS**

**GROSSE PLASTISCHE FORMÄNDERUNGEN**

**BAD HONNEF 1988**

**MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 63**

**JANUAR 1989**

**Herausgeber:**

**Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum**

© 1989 Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns  
Lehrstuhl für Mechanik I  
Ruhr-Universität Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung  
(Fotokopie, Mikrokopie) bedarf der vorherigen Zustimmung des  
Autors.

## VORWORT

In der Woche vom 12.09.-16.09.1988 fand im Physikzentrum Bad Honnef das 48. WEH-Seminar statt. Dieses Seminar stand unter dem Thema " Große plastische Formänderungen " und war nach entsprechenden Veranstaltungen in den Jahren 1977, 1979, 1982 und 1985 bereits die fünfte Veranstaltung zu diesem Thema. Wie in den Vorjahren wurden dabei inhaltlich die folgenden vier Schwerpunkte behandelt:

- physikalische und kontinuumsmechanische Grundlagen inelastischen Materialverhaltens
- Berechnung inelastischer Formänderungen
- experimentelle Grundlagenuntersuchungen
- technische Anwendungen

Das vorliegende Heft enthält die Kurzfassungen der auf dem Seminar gehaltenen Vorträge. Es soll damit auch jedem Teilnehmer die Gelegenheit geben, sich nochmals in aller Ruhe mit dem Vorgetragenen auseinanderzusetzen.

Das Gelingen einer Tagung wird neben dem wissenschaftlichen Programm, zu dem die Teilnehmer selbst durch Vortrag und Diskussion beitragen, ganz entscheidend auch durch die Organisation der Veranstaltung bestimmt. Es ist mir deshalb ein Anliegen, meinen Mitarbeitern Dr.-Ing. M. Pitzer und Dipl.-Ing. F. Szepan recht herzlich für ihre viele Mühe im Zusammenhang mit der Vorbereitung und Durchführung des Seminars zu danken. Ein besonderer Dank gilt auch der WE-Heraeus-Stiftung, die durch ihre großzügige Förderung sehr zum Gelingen der Veranstaltung beigetragen hat.

## VERZEICHNIS DER TEILNEHMER

Appeltauer, J.	TU Hamburg-Harburg
Besdo, D.	Universität Hannover
Bischoff-Beiermann, B.	Ruhr-Universität Bochum
Boer, R. de	Universität - Gh Essen
Börnsen, M.	Universität Hannover
Bruhns, O.T.	Ruhr-Universität Bochum
Butters, T.	RWTH Aachen
Chan Ho Chin	RWTH Aachen
Chua Ma	Universität Hannover
Diehl, H.	Ruhr-Universität Bochum
Dung, N.L.	TU Hamburg-Harburg
Ehlers, W.	Universität - Gh Essen
Feldmüller, A.	Ruhr-Universität Bochum
Fornefeld, W.	Ruhr-Universität Bochum
Gilges, S.	RWTH Aachen
Gramann, R.	Universität Hannover
Groche, P.	Universität Hannover
Gröhlich, H.	TU Braunschweig
Hackenberg, H.-P.	TH Darmstadt
Haupt, P.	TH Darmstadt
Helisch, W.	RWTH Aachen
Herrmann, M.	Universität Stuttgart
Hoerster, C.	MPI Düsseldorf
Imatani, S.	Kyoto University
Klöhn, C.	Universität - Gh Kassel
Kollmann, F.G.	TH Darmstadt
Korzén, M.	TH Darmstadt
Kublik, F.	TU Braunschweig

Lange, H.-W.	Universität Hannover
Lehmann, Th.	Ruhr-Universität Bochum
Marten, J.	Universität Hannover
Mey Dan Li	RWTH Aachen
Miehe, C.	Universität Hannover
Müller, D.	TH Darmstadt
Müller-Hoeppe, N.	Universität Hannover
Pape, A.	Ruhr-Universität Bochum
Paulun, J.	Universität Hannover
Pawelski, O.	MPI Düsseldorf
Pecherski, R.	Universität Hannover
Pitzer, M.	Ruhr-Universität Bochum
Rasp, W.	MPI Düsseldorf
Rohrig, K.	Universität - Gh Kassel
Rott, U.	Ruhr-Universität Bochum
Rußwurm, S.	Universität Erlangen
Sansour, C.	Universität Stuttgart
Schilling, R.	Universität Dortmund
Schmidt, R.	Universität - Gh Wuppertal
Schreiber, L.	Universität - Gh Kassel
Schroeder, R.	TH Darmstadt
Seydel, M.	Universität Hannover
Steck, E.	TU Braunschweig
Stein, E.	Universität Hannover
Szegan, F.	Ruhr-Universität Bochum
Tsakmakis, Ch.	TH Darmstadt
Winter, W.	Universität Erlangen
Wriggers, P.	Universität Hannover

VERZEICHNIS DER VORTRAGSTHEMEN

	Seite
<b>D. Besdo:</b> Spannungsraum- und Dehnungsraum-Formulierungen - Ein Vergleich	7
<b>J. E. Paulun:</b> Verfestigende Werkstoffe unter zyklischer Belastung	9
<b>M. Korzén:</b> Über eine Materialgleichung vom viskoelastisch-plastischen Typ	11
<b>Ch. Tsakmakis:</b> Über das Anfangswertproblem der kinematischen Verfestigung	13
<b>J. Marten:</b> Ein Vergleich thermomechanischer Stoffgesetzformulierungen und deren numerische Umsetzung	16
<b>P. Haupt:</b> Zur Thermodynamik der geschwindigkeitsunabhängigen Hysterese	18
<b>H. Diehl, W. Fornefeld:</b> Zur Beschreibung des inelastischen Verhaltens von Metallen bei hohen Deformationsgeschwindigkeiten	21
<b>S. Imatani:</b> Material anisotropy under non-proportional cyclic loading condition	27
<b>J. Appeltauer, O. Mahrenholtz:</b> Numerische Simulation bei dreidimensionaler plastischer Umformung	30
<b>M. Herrmann, P. Keck, M. Wilhelm:</b> Finite-Element-Simulation für die Blechumformung	33
<b>N. Müller-Hoeppe, E. Stein:</b> Formulierung eines elastisch-plastischen 2-D-Elementes in der Momentankonfiguration nach J. C. Simo	38
<b>W. Winter:</b> Große Formänderungen durch lokale Schädigung - Ein Simulationsmodell für den Gebirgsschlag -	42

	Seite
<b>S. Rußwurm:</b>	45
Berechnung des J-Integrals bei ebener inkrementeller Elastoplastizität mittels BEM	
<b>F. G. Kollmann, V. Bergmann, H.-P. Hackenberg:</b>	48
Ein neues hybrides finites Element für die Analyse axialsymmetrischer inelastischer Schalen	
<b>P. Wriggers:</b>	50
Zur numerischen Behandlung von Materialinstabilitäten bei großen inelastischen Deformationen	
<b>F. Kublik:</b>	53
Finite-Element-Rechnungen mit einem makroskopischen Kriechmodell	
<b>Th. Lehmann:</b>	56
Einige thermodynamische Betrachtungen zur Plastizität	
<b>M. Börnsen:</b>	57
Zum Einfluß von Gefügeumwandlungen auf elastisch-plastische Körper	
<b>H. Gröhlich:</b>	61
FEM-Formulierungen für elastische und große plastische Verformungen	
<b>W. Rasp:</b>	64
Probleme bei praxisnaher Bestimmung der Fließspannung	
<b>D. Müller, G. Hartmann:</b>	67
Identifikation von Werkstoffparametern mit einem numerischen Optimierungsverfahren nach der Evolutionsstrategie	
<b>A. Pape:</b>	69
Zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens von Stahl unter wechselnder Beanspruchung	
<b>W. Ehlers:</b>	76
Zur Thermodynamik flüssigkeitsgefüllter, elastisch-plastisch deformierbarer poröser Körper	



	<b>Seite</b>
<b>T. Butters:</b> Zum rotationssymmetrischen Kriechbeulverhalten dünnwandiger Kreiszyinderschalen	79
<b>M. Pitzer:</b> Einige Bemerkungen zu verschiedenen FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes	80
<b>C. Miehe:</b> Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse mit großen Deformationen	85
<b>P. Groche:</b> Anwendung eines schädigungsmechanischen Modells auf Vorgänge der Blechumformung	90
<b>C. Hoerster:</b> Einfluß der Reibung auf den Werkstofffluß beim Warmflachwalzen	93
<b>M. Seydel:</b> Blechumformung mit anisotropem Material	98

SPANNUNGSRAUM- UND DEHNUNGSRAUM-FORMULIERUNGEN - EIN VERGLEICH -

D. Besdo, Institut für Mechanik, Universität Hannover

Ein übliches Stoffgesetz der Elastoplastizitätstheorie besteht aus einem Fließkriterium ( $\underline{\underline{\sigma}}$  = Cauchy-Spannungstensor)

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{a}}, Y) \leq 0,$$

einer Fließregel ( $\underline{\underline{\lambda}}$  = Formänderungsgeschwindigkeitstensor)

$$\underline{\underline{\lambda}} = \underline{\underline{\lambda}}^e + \underline{\underline{\lambda}}^p$$

mit

$$\underline{\underline{\lambda}}^e \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}^e(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\dot{\sigma}}}) \rightarrow \frac{1}{E} \left\{ (1 + \nu) \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \nu \underline{\underline{1}} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{1}}) \right\} \text{ und } \underline{\underline{\lambda}}^p = \chi \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

und Entwicklungsgesetzen

$$\dot{Y} = \dot{Y}(\underline{\underline{\lambda}}^p, Y, \bar{\varphi}, \mathfrak{J}), \quad \dot{\underline{\underline{a}}} = \dot{\underline{\underline{a}}}(\dots)$$

Während sich  $\underline{\underline{\lambda}}^e \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}^e$  mit der Zaremba-Jaumann-Ableitung  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  wegen

$$\underline{\underline{\lambda}}^e = \underline{\underline{\lambda}}^e \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^e - \underline{\underline{\varepsilon}}^e \cdot \underline{\underline{\lambda}}^e \stackrel{!}{=} \underline{\underline{\varepsilon}}^e$$

rechtfertigen läßt, bleibt die Frage, welches  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$  in der Fließregel und welches  $\dot{\underline{\underline{a}}}$  im Entwicklungsgesetz zu erscheinen hat. Das letzte bleibt auch im Dehnungsraum unklar. Für  $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$  erhält man nach einer Rücktransformation der vom Autor 1980 bis 1983 veröffentlichten Gesetze ([1] bis [3]) bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung die Aussage:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} \rightarrow (\underline{\underline{1}} \cdot \underline{\underline{\lambda}}) \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{\lambda}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\lambda}}$$

Diese scheinbar eindeutige Aussage ist leider nicht unmittelbare Folge der Beschreibung im Dehnungsraum als solcher,

sondern sie hängt von der Form des elastischen Potentials  $\psi = \tilde{\psi}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{U}}, \underline{\underline{J}})$  ab, aus dem man über

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} = 2 \tilde{\rho} \partial \tilde{\psi} / \partial \underline{\underline{C}}$$

die Spannungen bestimmt.

Während  $\psi = \hat{\psi}_1 = (G/\tilde{\rho}) \{ \underline{\underline{\gamma}}^e \cdot \underline{\underline{\gamma}}^e + (\nu/(1-2\nu)) (\underline{\underline{\gamma}}^e \cdot \underline{\underline{1}})^2 \}$  das obige Ergebnis produziert, folgt mit einem Potential  $\psi = \psi_2$ , bei dem der Greensche Tensor  $\underline{\underline{\gamma}}^e$  durch den Almansi-Tensor  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$  ersetzt ist,

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} \rightarrow (\underline{\underline{1}} \cdot \underline{\underline{\lambda}}) \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}^* - \underline{\underline{\lambda}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\lambda}}$$

mit  $\psi \rightarrow \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2)$  ergibt sich gerade

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} \rightarrow (\underline{\underline{1}} \cdot \underline{\underline{\lambda}}) \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}^*$$

Der Blick auf den Dehnungsraum klärt also diese bei Spannungsraum-Darstellungen recht wichtige Frage nicht. Diese Frage wird im Dehnungsraum stets und im Spannungsraum dann unerheblich, wenn man auch dort explizit von der Zwischenkonfiguration Gebrauch macht und so die Beschreibung der Elastizität von der "Last" der Raten-Beschreibung befreit.

#### Literaturverzeichnis

- [1] Besdo, D.: Zur Formulierung von Stoffgesetzen für plastisch anisotrope/elastisch isotrope Medien im Dehnungsraum. Z. Angw. Math. Mech. 60 (1980) T101-T103.
- [2] Besdo, D.: Zur Formulierung von Stoffgesetzen der Plastomechanik im Dehnungsraum nach Ilyushins Postulat. Ing.-Archiv 51 (1981) 1-8.
- [3] Besdo, D.: Zur Beschreibung des Bauschinger-Effektes im Dehnungsraum. Z. Angew. Math. Mech. 63 (1983) T144-T147.

## Verfestigende Werkstoffe unter zyklischer Belastung

J.E. Paulun, Institut für Baumechanik und Numerische  
Mechanik

Zur Erfassung des Materialverhaltens plastizierender metallischer Werkstoffe ist die plastische Vergleichsdehnung als Bezugsmaß in vielen Fällen ungeeignet. Als monoton wachsende Größe kann sie beispielsweise Werkstoffe mit rein kinematischer Verfestigung unter zyklischer Belastung nicht wieder zum Ausgangszustand zurückführen. Die Ausgangsgleichungen für kinematische und gemischt isotrop-kinematische Verfestigung

$$f = \frac{1}{2}(\underline{s}-\underline{a}) : (\underline{s}-\underline{a}) - k^2 = 0, \quad (\text{Fließbedingung})$$

$$\underline{d}^{pl} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \lambda (\underline{s}-\underline{a}), \quad (\text{Fließgesetz})$$

$$\underline{\dot{a}} = \frac{2}{3} h \underline{a} \underline{d}^{pl}, \quad (\text{Verfestigungsgesetz})$$

formuliert für große Formänderungen, lassen die Einführung einer weiteren Bezugsgröße zu, ohne daß Widersprüche durch Parametertausch entstehen.

Als neue Bezugsgröße wird hier

$$\underline{d}_v := \sqrt{\frac{3}{2} \underline{a} : \underline{a}} \geq 0$$

eingeführt. Diese Bezugsgröße kann auch fallen und wieder den Wert  $\underline{d}_v=0$  annehmen. Beide Bezugsgrößen werden wie folgt verwendet:

$$k = f(\underline{\epsilon}_v^{pl}) \quad (\text{isotroper Anteil})$$

$$h = g(\underline{d}_v) \quad (\text{kinematischer Anteil})$$

Der in /1/ gewählte Ansatz

$$\dot{\underline{a}} = \dot{\underline{a}} - \underline{\Omega} \underline{a} + \underline{a} \underline{\Omega}$$

wird durch Neuformulierung

$$\underline{\Omega} = \underline{W} - \eta (\underline{a} \underline{d}^{pl} - \underline{d}^{pl} \underline{a})$$

und durch den Austausch

$$\begin{aligned} \epsilon_v^{pl} &\longrightarrow \alpha_v / h_d, \\ \eta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{3 \alpha_v}{h_d^2 + 3 \alpha_v^2} \end{aligned}$$

auch für zyklische Belastung anwendbar.

Ein Vergleich numerischer Ergebnisse mit experimentellen Ergebnissen von SWIFT /2/ an dünnwandigen Kupferrohren mit zyklischer Torsionsbeanspruchung liefert eine gute Übereinstimmung.

Literaturverzeichnis:

- /1/ Paulun, J.E. and Pecherski, R.B., On the Application of the Spin Concept for the Description of Anisotropic Hardening in Finite Deformation Plasticity, Int. J. Plasticity 3 (1987), 303-314
- /2/ Swift, H.W., Length Changes in Metals under Torsional Overstrain, Engineering 163 (1947), 253

## ÜBER EINE MATERIALGLEICHUNG VOM VISKOELASTISCH-PLASTISCHEN TYP

M. Korzeń, Institut für Mechanik, TH Darmstadt

Die vorzustellende Materialgleichung (/1/, /2/) besteht im wesentlichen aus drei Teilen:

- (i) einer Zerlegung der Deformation  $\epsilon$  in einen viskoelastischen Anteil  $\epsilon_v$  und einen plastischen Anteil  $\epsilon_p$ ;
- (ii) einem geschwindigkeitsunabhängigen Funktional  $\mathcal{R}$  der gesamten Deformationsgeschichte für  $\epsilon_p$ ;
- (iii) einem geschwindigkeitsabhängigen Funktional  $\mathcal{F}$  der viskoelastischen und der plastischen Deformationsgeschichte für die Spannung  $\sigma$  mit den folgenden speziellen Eigenschaften: Für langsame Prozesse ( $\dot{\epsilon} \rightarrow 0$ ) strebt  $\mathcal{F}$  gegen eine Funktion  $f_\infty(\epsilon_v)$  und für schnelle Prozesse ( $\dot{\epsilon} \rightarrow \infty$ ) gegen eine andere Funktion  $f_0(\epsilon)$ .

Das Konzept dieser Materialgleichung besitzt die wichtige Eigenschaft, daß  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{F}$  jeweils unabhängig voneinander gewählt werden können.

Die Materialantwort für langsame Prozesse  $\sigma_\infty = f_\infty(\epsilon_v)$  heißt GLEICHGEWICHTSSPANNUNG, die Differenz  $\sigma_{\text{SUR}} := \sigma - \sigma_\infty$  ÜBERSPANNUNG. Aufgrund der Geschwindigkeitsunabhängigkeit von  $\sigma_\infty$  unterscheidet sich diese Definition einer Überspannung grundsätzlich von derjenigen der klassischen Viskoplastizität.

Dem Materialgleichungskonzept entsprechen die folgenden physikalischen Eigenschaften: In einem  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm wird für langsame Prozesse eine Hystereseschleife im Sinne der Elastoplastizität wiedergegeben, während für schnelle Prozesse die Materialantwort rein elastisch erfolgt. Außerdem streben Prozesse mit  $\epsilon = \text{const.}$  (Relaxation) in Abhängigkeit von der Belastungsgeschichte gegen eine entsprechende Gleichgewichtsspannung.

Detailliertere Aussagen sind natürlich erst auf der Grundlage einer speziellen Wahl der beiden Funktionale  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{F}$  möglich. Bemerkenswert ist allerdings, daß bereits ohne die Kenntnis von  $\mathcal{R}$  allein durch die Wahl einer Darstellung für  $\mathcal{F}$  grundsätzliche Eigenschaften des Werkstoffmodells mit analytischen Methoden aufgezeigt werden können.

Dazu zählen z.B. Aussagen über das Verhalten bei konstanter Belastungsgeschwindigkeit sowie das Verhalten bei ihrer sprunghaften Änderung. Von besonderer Bedeutung sind asymptotische Beziehungen, da sie vorteilhaft zur Materialidentifikation als auch zur Kontrolle numerischer Rechnungen verwendet werden können.

#### Literaturverzeichnis

- /1/ KORZEN, M.: Beschreibung des inelastischen Materialverhaltens im Rahmen der Kontinuumsmechanik: Vorschlag einer Materialgleichung vom viskoelastisch-plastischen Typ. Dissertation TH Darmstadt (1988).
- /2/ HAUPT, P.; KORZEN, M.: A New Constitutive Model for the Phenomenological Representation of Rate-Dependent and Rate-Independent Material Behaviour. International Seminar on the Inelastic Behaviour of Solids: Models and Utilization, Besançon, France, August 30 - September 1, 1988, I/41 - I/52. Proceedings of MECAMAT, Besançon, 1988.

## Über das Anfangswertproblem der kinematischen Verfestigung

CH. TSAKMAKIS, Institut für Mechanik, TH Darmstadt

Die Entwicklung von Materialgleichungen zur Darstellung der kinematischen Verfestigung im Rahmen der inkrementellen Plastizitätstheorie ist durch den Ansatz

$$\dot{\mathbf{X}} = c \dot{\mathbf{E}}_p \quad (1)$$

eingeleitet worden. Dabei ist  $\mathbf{X}$  der Translationstensor der kinematischen Verfestigung und  $\mathbf{E}_p$  der plastische Anteil des linearisierten GREEN'schen Verzerrungstensors. Es sollen kleine Deformationen vorausgesetzt werden.  $(\cdot)$  bezeichnet die materielle Zeitableitung der Größe  $(\cdot)$  und  $c$  ist eine Materialkonstante. Die Evolutionsgleichung (1) liefert bei homogener Zug-Druck-Beanspruchung in Kombination mit den übrigen Materialgleichungen des klassischen elastisch-plastischen Materialmodells einen bilinearen Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie. Daher rührt auch die Bezeichnung **Lineare Kinematische Verfestigung**. Zur Formulierung einer nichtlinearen kinematischen Verfestigung können Evolutionsgleichungen mit Erzeugungs- und Begrenzungstermen eingeführt werden. Ein Beispiel dafür ist der Ansatz von ARMSTRONG/FREDERICK [1] :

$$\dot{\mathbf{X}} = c \dot{\mathbf{E}}_p - b \dot{s} \mathbf{X} \quad (2)$$

$$\dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}}_p \cdot \dot{\mathbf{E}}_p} \quad (3)$$

In diesen Gleichungen bezeichnet  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$  das Innere Produkt zweier Tensoren;  $b$  ist eine weitere Materialkonstante. Gl. (2) ist von CHABOCHE [2] insbesondere bei zyklischen Belastungsprozessen untersucht worden. Im weiteren sollen nur solche Evolutionsgleichungen für den Translationstensor  $\mathbf{X}$  betrachtet werden, die einen zu  $\mathbf{X}$  proportionalen Begrenzungsterm aufweisen. Mit

$$\dot{\mathbf{E}}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{s} \mathbf{N}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1 \quad (4)$$

wird Gl. (2) zunächst umgeschrieben:

$$\dot{\mathbf{X}} = c \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{s} \mathbf{N} - b \dot{s} \mathbf{X} \quad (5)$$

Eine Verallgemeinerung dieser Gleichung entsteht, wenn man als Erzeugungsterm eine tensorielle Richtung  $\mathbf{n}$  ansetzt, die eine Funktion der plastischen Bogenlänge ist, d.h.,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ :

$$\dot{\mathbf{X}} = c \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{s} \mathbf{n} - b \dot{s} \mathbf{X} \quad (6)$$



Nach Division durch  $\dot{s}$  erhält man eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d}{ds} \mathbf{X}(s) = c \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{n}(s) - b \mathbf{X}(s) \quad (7)$$

oder allgemeiner

$$\frac{d}{ds} \mathbf{X}(s) = \mathbf{H}[\mathbf{n}(s), \mathbf{X}(s)]. \quad (8)$$

Im folgenden wird zur Trennung des elastischen und des elastisch-plastischen Zustandsbereiches die Existenz einer Fließfunktion  $f(\mathbf{T}, \mathbf{X})$  ( $\mathbf{T}$  = Spannungstensor) postuliert. Speziell wird für  $f$  eine v. MISES-Fließfunktion mit kinematischer Verfestigung angenommen:

$$f(\mathbf{T}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} (\mathbf{T} - \mathbf{X})^I \cdot (\mathbf{T} - \mathbf{X})^I - \frac{1}{3} k^2 \quad (k = \text{const.}) \quad (9)$$

In Gl. (9) bezeichnet  $\mathbf{A}^I$  den deviatorischen Anteil des Tensors  $\mathbf{A}$ .

Es sei nun durch die Funktion  $\mathbf{T}(\tau)$  ( $0 \leq \tau \leq s$ ) eine Belastungsgeschichte im plastischen Bereich vorgegeben.  $\mathbf{T}(\tau)$  nimmt Werte in einem noch zu bestimmenden Raum an. Für die tensorwertige Funktion  $\mathbf{n}(s)$  in Gl. (7) bzw. Gl. (8) wird angenommen, daß sie als Funktional der Spannungsgeschichte determiniert ist:

$$\mathbf{n}(s) = \mathfrak{F} \left[ \mathbf{T}(\tau) \right]_{0 \leq \tau \leq s} \quad (10)$$

Gesucht sind jetzt Lösungen  $\mathbf{X}(s)$  der folgenden Anfangswertaufgabe mit Nebenbedingung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbf{X}(s) &= \mathbf{H}[\mathbf{n}(s), \mathbf{X}(s)] \\ &= \mathbf{H} \left\{ \mathfrak{F} \left[ \mathbf{T}(\tau) \right]_{0 \leq \tau \leq s}, \mathbf{X}(s) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$$

$$\frac{1}{2} (\mathbf{T}(s) - \mathbf{X}(s))^I \cdot (\mathbf{T}(s) - \mathbf{X}(s))^I = \frac{1}{3} k^2$$

Hinreichende Bedingungen für die Existenz von Lösungen findet man in der Kontrolltheorie. Insbesondere bezeichnet man in der Kontrolltheorie die Funktion  $\mathbf{n}(s)$  als Kontrollfunktion. Ist insbesondere  $\mathbf{n}(s)$  integrierbar und die rechte Seite der Differentialgleichung stetig in  $\mathbf{n}$ , so fällt das Problem in den Rahmen der klassischen Analysis, und es gelten die bekannten Sätze über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Für das Folgende wird angenommen, daß das Anfangswertproblem (11) eine eindeutige Lösung besitzt. Eine notwendige zur Erfüllung der Nebenbedingung für beliebig vorgegebene Belastungsgeschichten läßt sich aus der

**Konsistenzbedingung**

$$\left( \mathbf{T}(s) - \mathbf{X}(s) \right)^I \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{T}(s) = \left( \mathbf{T}(s) - \mathbf{X}(s) \right)^I \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{X}(s) \quad (12)$$

**herleiten: Aus der Belastungsbedingung**

$$\left( \mathbf{T} - \mathbf{X} \right)^I \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{T} > 0 \quad (13)$$

**die während der plastischen Belastungsgeschichte gilt, folgt schließlich als notwendige Bedingung**

$$\left( \mathbf{T}(s) - \mathbf{X}(s) \right)^I \cdot \frac{d}{ds} \mathbf{X}(s) > 0 \quad (14)$$

Man kann zeigen, daß beispielsweise der Ansatz von CHABOCHE/ DANG-VAN/GORDIER [3] oder der Ansatz von TSENG/LEE [4] die Ungleichung [14] erfüllt. Als Gegenbeispiel gilt die folgende Aussage: Für den Fall, daß in Gl. (7)

$$n = \frac{\dot{\mathbf{T}}^I}{\sqrt{\dot{\mathbf{T}}^I \dot{\mathbf{T}}^I}} \quad (15)$$

gewählt wird, ist die Ungleichung (14) nicht immer erfüllt.

#### **Literatur**

- 1 P.J. ARMSTRONG, C.O. FREDERICK: A Mathematical Representation of the Multiaxial Bauschinger Effect, CEGB, Report RD/B/N731, 1966.
- 2 J.L. CHABOCHE: Description Thermodynamique et Phénoménologique de la Viscoplasticité Cyclique avec Endommagement, Thèse de Doctorat, Paris VI, 1978.
- 3 J.L. CHABOCHE, K. DANG-VAN, G.GORDIER: Modelization of the Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel, 5th SMiRT, Paper L11/3, Berlin 1979.
- 4 N.T. TSENG, G.C. LEE: Simple Plasticity Model of Two-Surface Type, J. Eng. Mech. 109 (1983), S. 795-810.

## Ein Vergleich thermomechanischer Stoffgesetzformulierungen und deren numerische Umsetzung

J. Marten, Institut für Mechanik, Universität Hannover

Die Beschreibung des thermomechanischen Verhaltens eines elastisch-plastischen Kontinuums erfolgt durch die stoffunabhängigen Bilanzgleichungen für Masse, Kräfte, Momente und Energie, durch die das Materialverhalten beschreibende Stoffgesetzgleichung sowie durch Gleichungen, die die Irreversibilität des Prozesses beschreiben.

Basis für meisten Formulierungen ist die Rationale Thermodynamik von Coleman und Noll, im Rahmen derer der thermomechanische Prozeß als instationäres Feldproblem behandelt wird. Als Feldvariablen treten das elastische Deformationsmaß  $\underline{\underline{\gamma}}^e$  (Green-Tensor) sowie die Temperatur  $\Theta$  auf. ( In der Dehnungsraumformulierung wird  $\underline{\underline{\gamma}}^e$  durch den rechten Cauchy-Green der Gesamtdeformation  $\underline{\underline{C}}$  und den inversen rechten Cauchy-Green der plastischen Deformation  $\underline{\underline{\hat{B}}}$  ersetzt.) Eine Reihe von Ansätzen führen zusätzlich eine interne Variable  $x$  ein, die die inneren Materialverzerrungen beschreiben soll. Mit diesen Variablen lassen sich die Zustandsfunktionen spezifische innere Energie  $u$ , spezifische Entropie  $\eta$  und die spezifische freie Energie  $\Phi$  formulieren. Die Irreversibilität wird unter der Annahme, sich in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichtes zu befinden, durch die Clausius - Duhem - Ungleichung (lokale Form des 2. Hauptsatzes) ausgedrückt.

Alle nachfolgenden Ausführungen und Gleichungen beziehen sich auf eine thermomechanische Formulierung in Lagrange'scher Betrachtungsweise mit einer Stoffgesetzformulierung im Dehnungsraum.

Das **mechanische** Verhalten eines Kontinuums wird im wesentlichen durch das Kräfte-/ Momentengleichgewicht unter Berücksichtigung eines elastisch - plastischen Stoffgesetzes im Dehnungsraum /1/ (elastisches Teilstoffgesetz, Konsistenzbedingung, Fließregel aus Ilyushins Postulat und zugehörigen Entwicklungsgesetzen) beschrieben. Das Stoffgesetz beschreibt vereinfacht dargestellt die Änderung des 2. Piola - Kirchhoff - Spannungstensor  $\underline{\underline{\tilde{T}}}$  in Abhängigkeit von Deformations-  $\underline{\underline{\tilde{\gamma}}}$  und Temperaturinkrementen  $\bar{\Theta}$ .

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} = \underline{\underline{C}}^{ep} \cdot \underline{\underline{\tilde{\gamma}}} + \underline{\underline{C}}^{\Theta} \bar{\Theta} \quad (1)$$

( $\underline{\underline{C}}^{ep}$  und  $\underline{\underline{C}}^{\Theta}$  sind der elastisch - plastische und der temperaturabhängige Tangentenmodul.)

Als Basis für die FE - Formulierung wird als schwache Form des Kräfte-/ Momentengleichgewichtes eine inkrementelle, teillinearisierte Form des Prinzips der virtuellen Arbeit in Lagrange'scher Formulierung verwendet, wie sie von Bathe, Ramm und Wilson in /2/ vorgestellt wurde.

$$\delta W = \delta u_i \left\{ [K_{ij}^I + K_{ij}^{nI}] \bar{u}_j - [R_i - F_i^{\Theta} - F_i^{\gamma}] \right\} = 0 \quad (2)$$

Zur Beschreibung des **thermischen** Verhalten wird der 1. Hauptsatz (Energiebilanz) unter Berücksichtigung des 2. Hauptsatzes und nach Einführung der spezifischen Wärmekapazität bei konstanter Deformation  $c_\gamma$  in die Differentialgleichung der instationären Wärmeleitung überführt. Die zugehörige schwache Formulierung erhält man bei Einführung der FE - Näherungsansätzen nach Verwendung der Galerkin Methode.

$$\delta Q = \delta \Theta_i \left\{ C_{\gamma ij} \dot{\Theta}_i + [K_{ij}^{th} + K_{ij}^{mec}] \Theta_i - [\dot{P}_i^w + \dot{Q}_i] \right\} = 0 \quad (3)$$

Die **gegenseitige Koppelung** der mechanischen und der thermischen schwachen Formulierung besteht darin, daß einerseits in  $\delta W$  der elastisch-plastische Tangentenmodul  $\underline{C}^{ep}$  und die Lastanteile  $F^\Theta$  und  $F^\gamma$  temperaturabhängig sind und andererseits in  $\delta Q$  sowohl die thermische und mechanische Steifigkeiten ( $K^{th}$ ,  $K^{mec}$ ) als auch die Lastvektoren infolge plastischer Dissipation  $\dot{P}^w$  und sonstiger thermischer Einflüsse  $\dot{Q}$  von den Verschiebungsinkrementen  $\bar{u}$  abhängen.

Eine **simultane Koppelung** der thermischen und der mechanischen Gleichung erhält man nach Anwendung eines Zeitintegrationschemas für alle 'rate'-Größen durch vollständige Linearisierung von  $\delta W$  und  $\delta Q$  bezüglich der Verschiebungs- und Temperaturinkremente ( $\bar{u}$ ,  $\bar{\Theta}$ ). Man erhält auf diese Weise eine FE-Formulierung mit  $\bar{u}$  und  $\bar{\Theta}$  als Knotenfreiheiten sowie eine zugehörige unsymmetrische Steifigkeitsmatrix.

$$\begin{bmatrix} \delta W_{/u}^{i-1} & \delta W_{/\Theta}^{i-1} \\ \delta Q_{/u}^{i-1} & \delta Q_{/\Theta}^{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}^i \\ \Delta \bar{\Theta}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta W^{i-1} \\ \delta Q^{i-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ein weniger aufwendiges Verfahren mit nur den Verschiebungsinkrementen  $\bar{u}$  als Knotenfreiheiten wird durch die **nichtsimultane Koppelung** realisiert. In dem rein mechanischen Iterationsprozess

$$[K^l + K^nl] \Delta \bar{u}^i = R - F^{i-1}(\bar{\underline{\tau}}^{i-1}) \quad (5)$$

ist die Spannung (2. PK) u. a. auch eine Funktion der Temperatur und der Temperaturableitung  $\bar{\underline{\tau}}^{i-1} = \bar{\underline{\tau}}^{i-1}(\underline{C}^{l-1}, \hat{\underline{B}}^{l-1}, \underline{\Theta}, \dot{\underline{\Theta}})$ . Die bei der Stoffgesetzintegration benötigte Temperatur  $\Theta$  und deren Zeitableitung  $\dot{\Theta}$  werden in einer gesondert durchgeführten thermischen FE-Feldrechnung ermittelt. Bei dieser Rechnung wird ein explizites Zeitintegrationsverfahren mit diagonalisierter Wärmekapazitätsmatrix  $C_{ij}^{lummp}$  verwendet, so daß sich ein sehr effektiver und einfacher Algorithmus ergibt.

Je nach Einbau der thermischen Rechnung in die mechanische unterscheidet man zwei Arten der nichtsimultanen Koppelung.

Bei **inkrementell gekoppelten** Verfahren wird die mechanische Rechnung mit den 'alten', d.h. mit um einen halben Zeitschritt zurückliegenden, Temperaturen und deren Zeitableitungen durchgeführt. Im Anschluß daran wird mit den so berechneten mechanischen Größen die thermische Feldrechnung durchgeführt.

Bei der **iterativen Koppelung** ist die thermische Feldrechnung in dem mechanischen Iterationsprozeß eingebaut, so daß thermische und mechanische Größen lediglich um einen Iterationsschritt differieren.

## Zur Thermodynamik der geschwindigkeitsunabhängigen Hysterese

P. HAUPT, Institut für Mechanik, TH Darmstadt

In seiner grundlegenden Arbeit zur Thermodynamik untersucht CARATHEODORY **Einfache Systeme**: Der Zustand eines einfachen Systems wird durch endlich viele Deformationsgrößen sowie durch eine weitere nichtmechanische Variable gekennzeichnet. Wesentlich ist die folgende Eigenschaft: Eine hinreichende Verlangsamung der Prozeßführung bewirkt, daß eine Folge von Gleichgewichtszuständen approximiert werden kann. CARATHEODORY entwickelt aus seinen Annahmen die Begriffe Entropie und Absolute Temperatur, die in diesem Sinne aus dem thermodynamischen Gleichgewicht heraus motiviert sind. Die Allgemeingültigkeit seines Vorgehens relativiert er mit der folgenden einschränkenden Bemerkung [1, S. 368]: *...Dagegen ist es denkbar, auch physikalisch denkbar, daß Substanzen in der Natur vorkommen können, die man nie als Bestandteile eines einfachen Systems ansehen kann. Dies würde zum Beispiel der Fall sein, wenn die innere Reibung der betrachteten Substanz, die im allgemeinen Funktion der Deformationsgeschwindigkeit ist, bei quasistatischen Zustandsänderungen nicht gegen Null konvergieren würde. Dann würden nämlich die Kräfte, welche die äußere Arbeit  $A$  liefern, mit den Gleichgewichtskräften nicht mehr vergleichbar sein; die äußere Arbeit  $A$  selbst könnte nicht mit Hilfe eines Pfaff'schen Ausdrucks dargestellt werden, und die quasistatischen Zustandsänderungen wären endlich nicht reversibel. Unsere Theorie läßt sich nicht ohne weiteres auf derartige Systeme übertragen, was übrigens für die klassische Thermodynamik gleichfalls der Fall sein dürfte.* Die von CARATHEODORY beschworene Situation trifft genau auf die geschwindigkeitsunabhängige Plastizität zu: Inkrementell formulierte Materialgleichungen der klassischen Plastizitätstheorie implizieren ein Hystereseverhalten, das nicht von der Prozeßgeschwindigkeit abhängt, das heißt: Es ist unmöglich, durch Verlangsamung der Prozeßführung eine Annäherung an eine Folge von Gleichgewichtszuständen zu erreichen. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, die Verwendung der Begriffe Temperatur und Entropie im Rahmen der Theorie des geschwindigkeitsunabhängigen Materialverhaltens zu begründen. Dies gilt auch für alle Konsequenzen, wie beispielsweise die Definition der Freien Energie, oder insbesondere auch die Berechnung der Materialgleichung für die Entropie durch Differentiation der Freien Energie nach der Temperatur. Die unreflektierte Benutzung derartiger Begriffe und Relationen in der Thermoplastizität durch viele Autoren kann hier nicht diskutiert werden; Es wäre zu klären, ob eine rationale Motivation existiert, die Begriffe und Relationen der klassischen (bzw. irreversiblen) Thermodynamik auf die Plastizitätstheorie zu übertragen. Eine befriedigende Antwort auf diese Frage kann hier sicherlich nicht gegeben werden. Statt dessen mag es sinnvoll sein, die Anwendung der Theorie der Inneren Variablen im Hinblick auf ihre Ausdrucksmöglichkeiten zur Darstellung inelastischer Materialeigenschaften etwas genauer zu untersuchen. Reduziert man diese Theorie der Einfachheit halber zunächst auf ihren rein mechanischen Gehalt (isother-

me und eindimensionale Prozesse), so werden die Materialeigenschaften durch eine Stoffgleichung für die Freie Energie beschrieben, die zu ergänzen ist durch einen Satz von Evolutionsgleichungen für die Inneren Variablen. Im einfachsten Fall einer einzigen Inneren Variablen gelten die Gleichungen:

$$\psi = \hat{\psi}(\epsilon, q) \quad (1)$$

$$\dot{q} = f(\epsilon, q) \quad (2)$$

Die CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung als eine konventionelle Formulierung des Zweiten Hauptsatzes nimmt für eindimensionale isotherme Deformationen speziell die Form

$$-\dot{\psi} + \frac{1}{\rho} \sigma \cdot \dot{\epsilon} \geq 0 \quad (3)$$

an; hinreichend dafür sind die folgenden Potentialbeziehungen:

$$\sigma = \varphi(\epsilon, q) = \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \epsilon} \quad (4)$$

$$\dot{q} = f(\epsilon, q) = -C \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial q} \quad C > 0 \quad (5)$$

Üblicherweise wird über die Evolutionsgleichung (5) die folgende Annahme vorausgesetzt:

1) Zu jedem  $\epsilon$  existiert eindeutig ein Gleichgewichtswert  $\bar{q} = g(\epsilon)$  mit  $f(\epsilon, \bar{q}) = 0$ .

2) Alle Gleichgewichtszustände  $\{\epsilon, \bar{q} = g(\epsilon)\}$  sind (global) asymptotisch stabil.

Diese Annahmen implizieren Fading Memory Eigenschaften, das heißt, sie definieren viskoelastisches Materialverhalten (Relaxation, Kriechen sowie geschwindigkeitsabhängige Hystereseeffekte, die für hinreichend langsame Prozeßgeschwindigkeiten asymptotisch verschwinden).

Eine interessante Modifikation der Viskoelastizität entsteht, wenn man auf die globale Stabilität der Evolutionsgleichung verzichtet: Es ist vorstellbar, daß ein Gleichgewichtszustand bei einer bestimmten kritischen Größe der Deformation instabil wird, und daß ein Relaxationsvorgang einsetzt, der in den nächstgelegenen stabilen Gleichgewichtszustand hineinläuft: Dieser Vorgang kann sich periodisch wiederholen und für langsame Deformationsprozesse zu einer geschwindigkeitsunabhängigen Hysterese führen. Die Idee, plastische Deformationen als Folge von Instabilitäten zu modellieren, wurde zuerst von PONTER, BATAILLE und KESTIN [2] physikalisch motiviert und dann von GROLIG [3] im Rahmen der Thermodynamik der Inneren Variablen genauer konkretisiert. Grundlage ist die folgende Materialgleichung für die Freie Energie (vgl.[3]):

$$\rho \hat{\psi}(\epsilon, q) = \frac{E}{2} (\epsilon - q)^2 + \frac{EA}{k} (1 - \cos kq) + \frac{E_t}{2} q^2 \quad (6)$$

aus der man nach (4) und (5) die Spannungs-Dehnungs-Beziehung und die Evolutionsgleichung erhält:

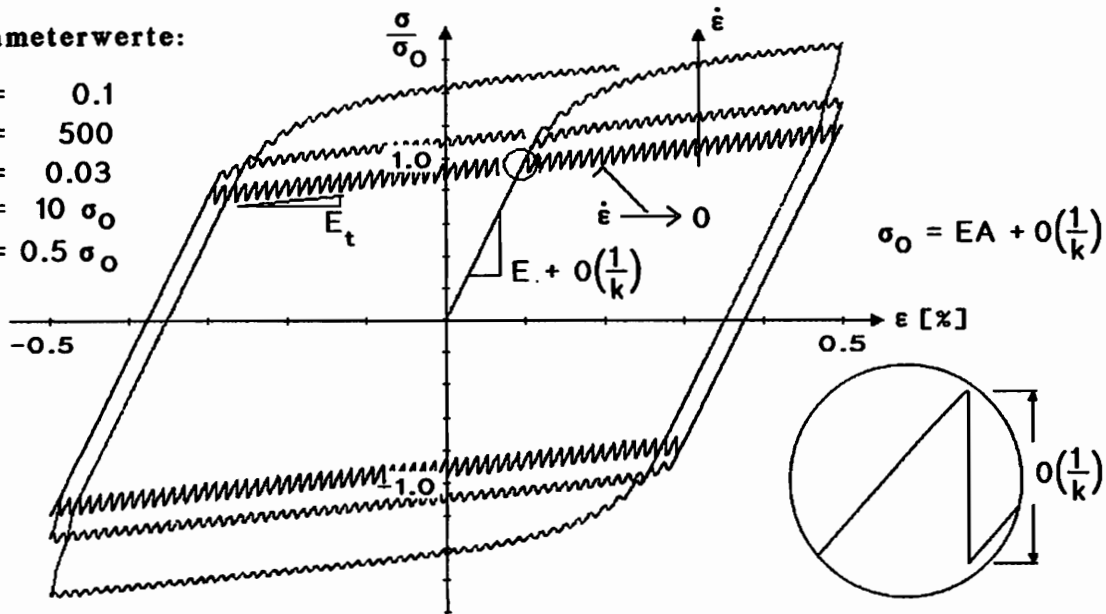
$$\sigma = \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \epsilon} = E(\epsilon - q) \quad (7)$$

$$\dot{q} = -C \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial q} = \frac{E}{\eta} \left[ \varepsilon - \left( 1 + \frac{E_t}{E} \right) q - A \sin kq \right] \quad (8)$$

Man bemerkt, daß zu vorgegebenen Werten der Dehnung  $\varepsilon$  in der Regel mehrere Gleichgewichtswerte  $q$  mit periodisch wechselnden Stabilitätseigenschaften gehören. Mit den angegebenen Gleichungen läßt sich quasistatisches Hystereseverhalten in einem (wenn auch sehr speziellen) thermodynamischen Rahmen modellieren: Das folgende Bild zeigt eine Spannungs-Dehnungs-Kennlinie als Ergebnis einer numerischen Integration der Differentialgleichung (8) im Zusammenhang mit Gl. (9):

Parameterwerte:

$$\begin{aligned} A &= 0.1 \\ k &= 500 \\ \eta &= 0.03 \\ E &= 10 \sigma_0 \\ E_t &= 0.5 \sigma_0 \end{aligned}$$



Die Kennlinie entspricht einer bilinearen Approximation, wobei sich im plastischen Bereich als Folge aus den periodisch auftretenden Instabilitäten Oszillationen ergeben, deren Amplitude von der gewählten Wellenzahl abhängt.

#### Literatur

- 1 C. CARATHEODORY: Grundlagen der Thermodynamik. Mathematische Annalen 67 (1909), pp 355-386
- 2 A.R.S. PONTER, J. BATAILLE, J. KESTIN: A Thermodynamic Model for the Time Dependent Plastic Deformation of Solids. J. de Méchanique, Vol. 18 (1979), pp 511-539
- 3 G. GROLIG: Plastische Deformation als Ausdruck mikroskopischer Instabilität. Dissertation Darmstadt 1985
- 4 G. GROLIG: Ein thermodynamisches Modell zur Beschreibung viskoplastischer Deformationen. ZAMM 65 (1985), pp T138-T140

## ZUR BESCHREIBUNG DES INELASTISCHEN VERHALTENS VON METALLEN BEI HOHEN DEFORMATIONS- GESCHWINDIGKEITEN

H.Diehl, W.Fornefeld, Lehrstuhl für Mechanik I,  
Ruhruniversität Bochum

### 1. Einleitung

i) Hochgeschwindigkeitsdeformationen (HGDen) sind durch Deformationsmechanismen mit unterschiedlichen räumlichen Schwankungen charakterisiert: Das Material wird fragmentiert infolge der Entstehung, des Wachstums und der Vereinigung von Mikrodefekten (je nach Belastung entstehen Scherbänder, Risse oder Poren), wobei die einzelnen Fragmente durch Versetzungsbewegung verformt werden. In der vorliegenden Arbeit soll der Einfluß der Scherbänder und der Versetzungsbewegung untersucht werden.

ii) Das repräsentative Volumenelement  $\Delta V$  ist hier ein Polykristall, der eine endliche Zahl von Mikrodefekten enthält. Solange die Abmessung der Defekte  $\leq \Delta V$  ist (d.h. für  $t \leq t^*$ ), läßt sich eine Kontinuums-Damage-Theorie anwenden ( $\rightarrow$  Kap.2, Kap.3), während für Zeiten  $t \geq t^*$  die Ausbreitung diskreter Makrodefekte in einem geschädigten Kontinuum zu beschreiben ist ( $\rightarrow$  Kap.4).

iii) Experimentelle Daten über (Mikro-)Scherbänder findet man in [1],[2]. Die Scherbanddichte ( $10^4 \text{cm}^{-3}$ ) ist groß genug, um eine Kontinuumsbeschreibung zu rechtfertigen. Scherbänder entstehen bei HGDen thermisch infolge "adiabatic heating" oder athermisch an Spannungskonzentrationen, die nicht rechtzeitig durch lokale Versetzungsbewegung abgebaut werden konnten.

iv) Experimentelle Daten über Versetzungsbewegung findet man in [3]-[5]. Man hat bei der phänomenologischen Beschreibung zu unterscheiden zwischen athermischer, thermisch aktivierter und durch viskose Dämpfung behinderter Versetzungsbewegung (letztere dominiert ab  $\dot{\epsilon} \approx 10^4 \text{sec}^{-1}$ ). Ist  $N$  die Versetzungsdichte,  $N_m$  die Dichte mobiler Versetzungen und  $u := N_m / N$ , so gilt:

$$\frac{\partial N(\epsilon, \dot{\epsilon})}{\partial \dot{\epsilon}} > 0 \quad , \quad \frac{\partial u(\epsilon, \dot{\epsilon})}{\partial \dot{\epsilon}} < 0 \quad . \quad (1)$$



## 2. Die Kontinuums-Damage-Theorie für $t \leq t^*$

i) Allgemeine Merkmale:

- Geometrische Linearität
- $\dot{\epsilon} \leq 10^4 \text{ sec}^{-1}$
- Thermodynamische Konsistenz bzgl. der CDU
- Quasilineares hyperbolisches System, um Ausbreitungsvorgänge sinnvoll modellieren zu können

ii) Die Identifikation der Variablen einer Kontinuumstheorie folgt dem nun angegebenen Schema:

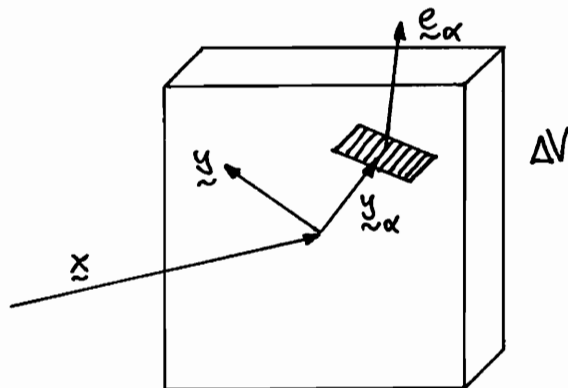


Fig.1.

$$\sigma_m(y) = \sigma_{\text{hom}}(y) + \sum \Delta \sigma_\alpha(y) \quad (2)$$

$$Z_m(y) = \sum \delta A_\alpha e_\alpha \otimes e_\alpha \delta(y - y_\alpha) \quad (3)$$

HOMOGENISIERUNG

Viskoplastizitätstheorie  
versetzungsinduzierter  
Prozesse mit kinemat.  
und isotroper Verfest.

$$\sigma \approx \langle \sigma_{\text{hom}} \rangle, \dot{\epsilon}_v$$

Damage-Theorie

$$\sigma^0 \approx \langle \sum \Delta \sigma_\alpha \rangle$$

$$Z^0 \approx \langle Z_m \rangle$$

$$\dot{\epsilon}_d^0$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_R + \dot{\epsilon}_v + \dot{\epsilon}_d^0 \quad (4)$$

$$g = g(\sigma, \theta; Z^0, \sigma^0, \dots; \chi, \dots) \quad (5)$$

Hierbei ist  $\sigma_m(\mathbf{y})$  die angenommene Verteilung der Spannungen in  $\Delta V$ , die sich aus einem quasihomogenen Anteil mit überlagerten Störungen an den Mikrodefekten zusammensetzt. Ähnlich verhalten sich alle Felder. Die lokalen Störungen bestimmen das Schädigungsverhalten. Der sog. Spannungskonzentrationstensor  $\sigma^0$  ist ein Maß für die lokalen Spannungsstörungen. Entsprechend wird eine Temperaturkonzentration  $\Theta^0$  definiert.  $Z^0$  ist der Damage-Tensor, der in nullter Näherung die Auswirkungen von  $Z_m(\mathbf{y})$  auf der Makroebene erfaßt. Die beiden Zweige der Materialbeschreibung hängen über die Kinematik (4) und die Thermodynamik (5) zusammen.

Gesucht sind nun Evolutionsgesetze für die zuvor identifizierten Variablen. Details hierzu findet man in [6]-[10].

iii) Merkmale der Viskoplastizitätstheorie versetzungsinduzierter Prozesse:

Sehr kleine  $\dot{\epsilon}$  : Athermische Versetzungsbewegung; wird phänomenologisch beschrieben durch eine geschwindigkeitsunabhängige Fließregel mit Fließ- und Belastungsbedingung

$$\dot{\epsilon}_v \approx \dot{\epsilon}_{va} = \gamma_A LC n_A \quad \text{falls } LC \geq 0, F_A \geq 0 \quad . \quad (6)$$

Moderate  $\dot{\epsilon}$  : Thermisch aktivierte Versetzungsbewegung; wird phänomenologisch beschrieben durch eine geschwindigkeitsabhängige Fließregel vom Überspannungstyp mit einer Fließbedingung

$$\dot{\epsilon}_v \approx \dot{\epsilon}_{vt} = \gamma_T \Phi_T(F_T) n_T \quad \text{falls } F_T \geq 0 \quad . \quad (7)$$

Es gibt verschiedene Konzepte zur Beschreibung eines Übergangs von (6) zu (7). Wir schlagen vor

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{va} + \dot{\epsilon}_{vt} \quad \forall t \quad (8)$$

$$= \gamma_A(u, \dots) LC n_A + \gamma_T(u, \dots) \Phi_T(F_T) n_T \quad . \quad (9)$$

Die Größe  $u$  aus (1) wird als ein Maß der Prozeßgeschwindigkeit benutzt und steuert die Anteile der verschiedenen Versetzungsmechanismen.  $\gamma_A$  und  $\gamma_T$  sind bzgl.  $u$  mindestens  $\epsilon C^1$ . Man benötigt eine Evolutionsgleichung für  $u$ ; hierfür wird eine lineare Dgl. 2. Ordnung mit von  $\dot{\epsilon}$  abh. Koeffizienten gewählt.  $u$  ist keine innere Variable, sondern eine Prozeßvariable, so daß die Evolutionsgleichung für  $u$  keinen thermodynamischen Restriktionen unterliegt.

Die Evolutionsgleichungen der Verfestigungsvariablen und die Fließregeln für  $\dot{\varepsilon}_v$  sind Nebenbedingungen im Raum  $(\sigma, \Theta)$  unterworfen.

iv) Merkmale der Damage-Theorie

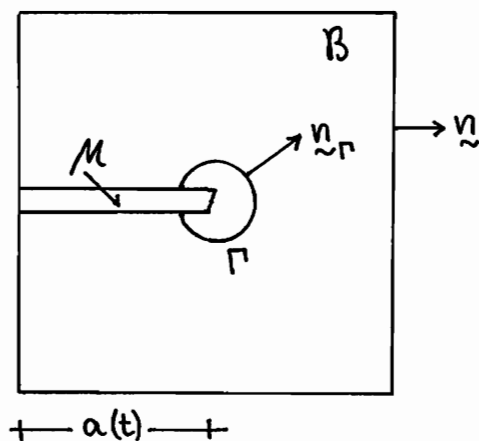
Die Evolution der Damage-Variablen unterliegt Nebenbedingungen im Raum  $(\sigma^0, \Theta^0)$ . Aus  $Z^0$  können Versagenskriterien abgeleitet werden [9],[10]. Insbesondere gibt es ein (von  $\Delta V$  abhängiges) Kriterium für die Entstehung eines Makro-Scherbandes  $\mathcal{M}$ , wobei die Fläche und die Orientierung von  $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}(t^*)$  aus den Daten der Damage-Theorie bestimmt werden.

**3. Numerische Testrechnungen mit dem Kontinuums-Damage-Modell**

Fig.2. zeigt Kurven  $\sigma(\varepsilon)$  für einachsige, monotone dehngesteuerte Zugversuche mit  $\dot{\varepsilon} = \text{konst.}$  Die von  $\dot{\varepsilon}$  abh. Fließgrenzen und die Kurve mit  $\dot{\varepsilon} = 10^{-1} \text{sec}^{-1}$  wurde zur Anpassung benutzt, die anderen Kurven sind berechnet. Fig.3. zeigt den Verlauf  $\sigma(\varepsilon)$  für einen Prozeß mit stückweise konstanter Dehnungsrate. Während in Fig.2,3 der Einfluß der Schädigung noch außer acht gelassen wurde, zeigt Fig.4. die entfestigende Wirkung von  $\dot{\varepsilon}_D^0$  bei sehr hohem  $\dot{\varepsilon}$  im Vergleich zum ungeschädigten Verlauf bei moderatem  $\dot{\varepsilon}$ . Der Grund hierfür liegt im Verhalten des Spannungskonzentrationstensors, der bei hohem  $\dot{\varepsilon}$  anwächst und ein Damage-Kriterium erfüllt, bei moderatem  $\dot{\varepsilon}$  hingegen rechtzeitig abgebaut wird (Fig.5.).

**4. Ausbreitung eines Makro-Scherbandes  $\mathcal{M}$**

Das Wachstum von  $\mathcal{M}$  soll durch Materialgleichungen beschrieben werden mit Methoden, die sich an diejenigen der Bruchmechanik anlehnen [11]. Diskutiert wird der einfachste Fall der geradlinigen Ausbreitung eines ebenen Scherbandes. Gesucht ist die Gleichung für  $c = \dot{a}$ . Wir verwenden eine spezielle Form des 2.HS, um einschränkende Bedingungen für eine solche Gleichung zu erhalten. Das Ziel ist eine integrale Beurteilung des Nahfeldes an der Scherbandspitze durch Integrale über  $\Gamma$ .



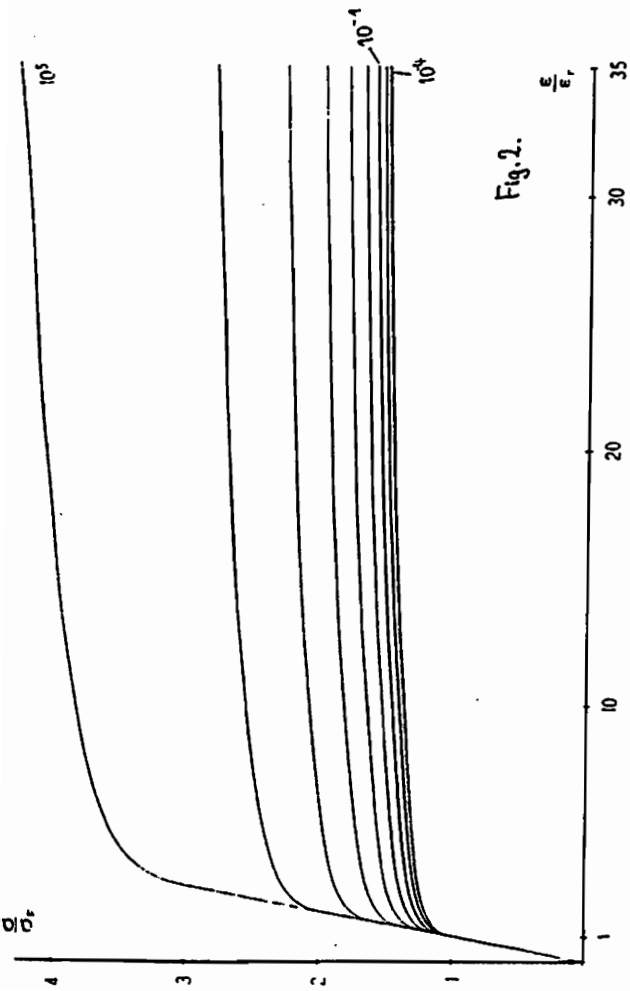


Fig. 2.

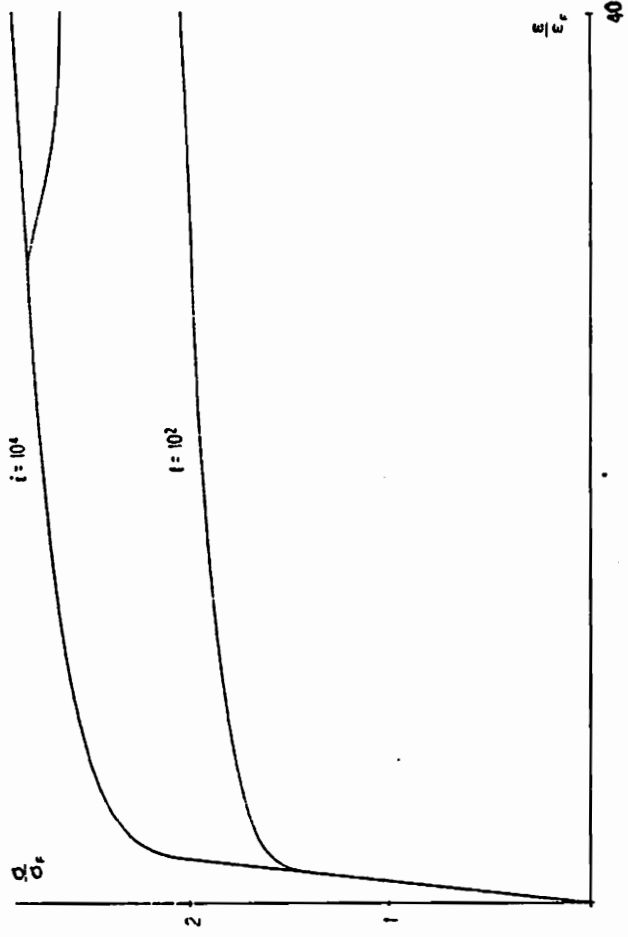


Fig 4

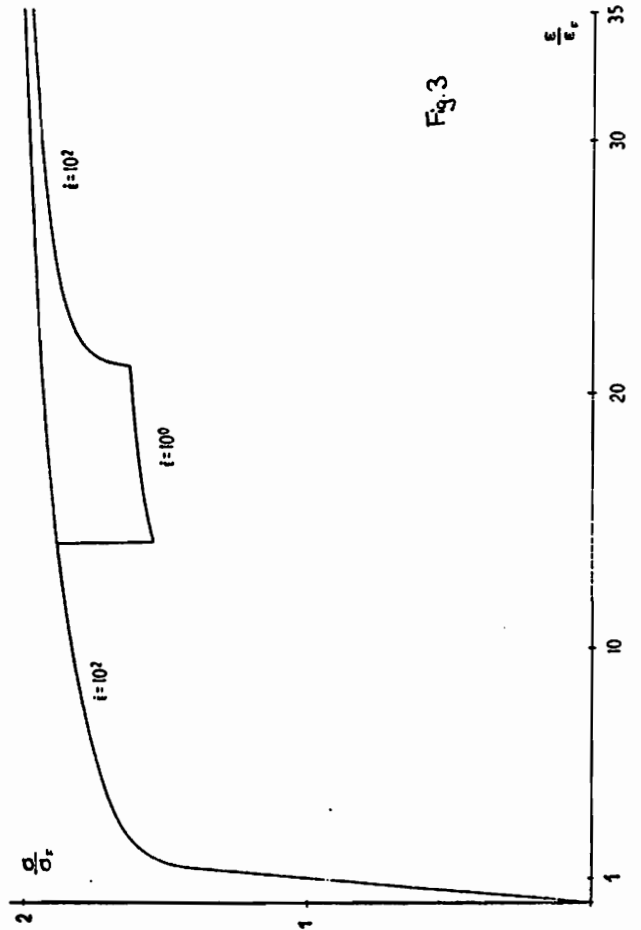


Fig. 3

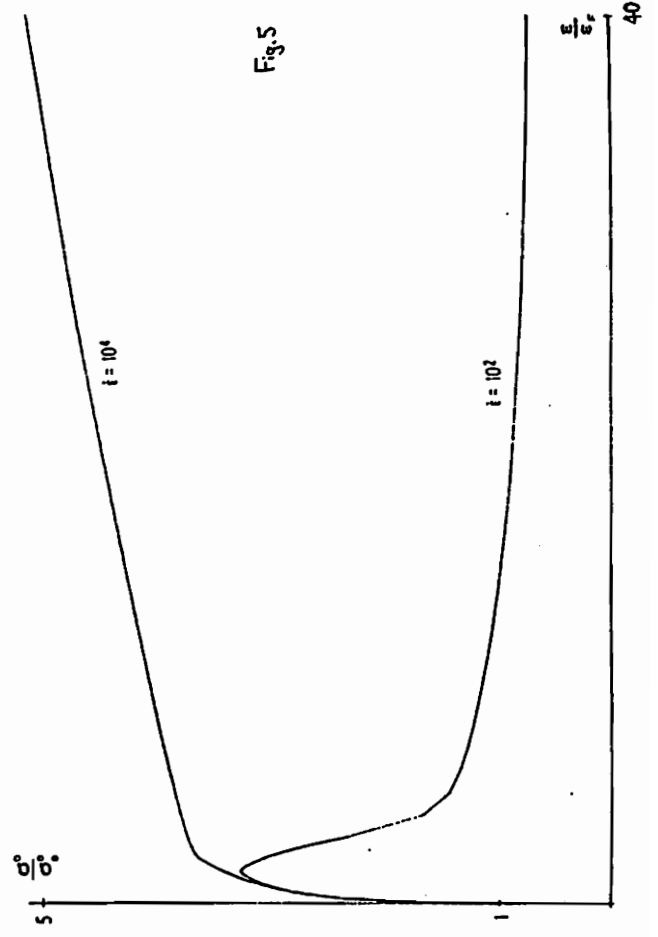


Fig. 5

Der 2.Hauptsatz für das Nahfeld lautet

$$(G_1 - G_2 c^2 - 2\gamma) c \geq 0 \quad \text{für } c \geq 0 \quad . \quad (10)$$

$G_1, G_2$  sind im Nahfeld definierte Integrale, die insbesondere von der freien Energie abhängen und damit Informationen über die Schädigung und die Erwärmung an der Scherbandspitze enthalten. Sie hängen nur von Momentanwerten ab.  $\gamma$  entspricht der Oberflächenenergie bei Rißproblemen und hat hier die Bedeutung einer spez. Umwandlungswärme, falls die Scherbandausbreitung von einem Phasenübergang begleitet wird. Der Ansatz

$$c = \hat{c}(G_1, G_2, \gamma) \quad (11)$$

liegt nahe. Für den Fall  $G_2 = 0$  (vernachlässigbare Trägheitskräfte) läßt sich (10) durch den Ansatz

$$c = \frac{\partial \Lambda}{\partial (G_1 - 2\gamma)} \quad , \quad \Lambda \geq 0 \text{ konvex, } \Lambda(0)=0 \quad (12)$$

erfüllen; für den allgemeinen Fall (10) ist ein derartiger Ansatz noch unbekannt.

#### Literaturverzeichnis

- [1] D.A.Shockey et.al.: Computer Modelling of Microscopic Failure Processes under Dynamic Loads, in [5]
- [2] L.Seaman et alt.: Shear Band Observations and Derivation of Requirements for a Shear Band Model, in : Journal de Physique Coll. C5 , 1985
- [3] H.J.Frost,M.F.Ashby: Deformation Mechanism Maps, Pergamon Press, 1982
- [4] P.Perzyna: Internal Variable Description of Plasticity in: A.Sawczuk (Ed.): Problems of Plasticity, Noordhoff 1974
- [5] K.Kawata,J.Shioiri (Eds.): High Velocity Deformation of Solids, IUTAM-Symposium Tokyo 1977, Springer-Verlag 1978
- [6]-[9]: H.Diehl, W.Fornefeld: Berichte für die Fraunhofer-Gesellschaft, Lehrstuhl für Mechanik I, Ruhruniversität Bochum
- [10] O.T.Bruhns, H.Diehl: An Internal Variable Theory of Inelastic Behaviour at High Rates of Strain, eingereicht bei Arch.Mech.
- [11] Nguyen Quoc Son: A Thermodynamic Description of the Running Crack Problem, in: S.Nemat-Nasser(Ed.): Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture, IUTAM-Symposium Dourdan 1980, Springer-Verlag 1981

MATERIAL ANISOTROPY UNDER NON-PROPORTIONAL CYCLIC LOADING CONDITION

Shoji IMATANI

Department of Mechanical Engineering,  
Kyoto University, Kyoto 606 Japan

1. INTRODUCTION

Many metallic materials exhibit the characteristic hardening behavior under non-proportional cyclic loading condition. In order to describe such a behavior, the development of kinematic and/or isotropic hardening variables as well as the yield criterion and the flow rule should be evaluated since they may have an influence on the inelastic response of the materials.

This report deals with the material anisotropy induced by the complicated loading paths. First, the stress-strain responses under uniaxial loading and circular out-of-phase strain path [1] are compared and discussed from the view point of the deformation mechanism, and the subsequent yield surfaces are measured for both cases. Taking account of the induced anisotropy in a plastic constitutive model, the strain accumulation in mechanical ratcheting is analyzed as an extended example.

2. INDUCED ANISOTROPY IN BIAxIAL STRESS STATE

Figure 1 represents the hysteresis loops for Ck15 steel [2] under the circular strain cycles and the uniaxial cycles with increasing strain range (the diameter of strain circle). As obviously seen in the figure, the shape of the hysteresis loops in the biaxial cycling is different from the uniaxial case, and moreover, the stress amplitudes in the out-of-phase cycles are much larger than those in the uniaxial cycles.

It is well-known that much more dislocations are induced during the reversal loading process than the monotonic tension, so that the cyclic hardening may be observed for most polycrystalline materials. On the other hand, the circular strain path is characterized by the change of the principal stress direction. When the material has the random orientation in the structure as a whole, this could activate more dislocations than the uniaxial case since the uniaxial cycling has only one predominant stress direction.

In order to clarify what kind of variable may affect the remarkable hardening behavior in the circular strain path, the subsequent yield surfaces are measured, which are shown in Fig.2. The radius of the yield surface is evidently expanded, so that the variation of yield stress may play an important role in the circular strain history. Moreover, the plastic strain rates are not always normal to the yield surfaces, but some deviation from so-called

normality rule [3] is obtained. This should be also taken into account for the constitutive modeling.

### 3. SIMULATION OF BIAXIAL MECHANICAL RATCHETING

As an application of the constitutive equation to one of the most complicated phenomena, the biaxial mechanical ratcheting is simulated by a simply modified constitutive model. Table 1 gives the schematic representation of the model, in which the symbols and the nomenclatures are subjected to the customary use. Here, the terms of the deformation-induced anisotropy as well as of the deviation from the normality rule are added to the usual form.

Figure 3 shows the relation between the axial strain and the shear strain, in which the cyclic shear straining is imposed for SUS304 steel under the steady axial stress level. The axial strain component is cumulative with the shear cycles, and the axial strain increment per cycle becomes smaller according to the cyclic process. The anisotropic model still provides too large ratcheting strain though there is some improvement compared with the isotropic model which is based on the von Mises criterion and the normality rule.

In order to evaluate the effect of the anisotropy on the accumulation behavior, the subsequent yield surface is measured at the 3rd semi-cycle (see Fig.4). Here, we can point out two characteristics: one is that more distorted shape appears remarkably, and the other is that the axial strain rate in the reversal point becomes negative. Consequently, the evolution of the anisotropy and the anisotropic flow rule in subsequent states should be preferably considered in further development of the constitutive modeling.

### 4. CONCLUSION

The plastic responses of polycrystalline materials in biaxial stress state are discussed incorporating the variation of yield surface. The circular strain path test reveals that the yield stress expands isotropically during the process, and the description of both the distortion and the translation of the yield surface plays an essentially important role in predicting the plastic behavior of the materials. The evolution of the deformation-induced anisotropy as well as the deviation from the normality rule should be taken into account of any inelastic constitutive equation.

### References

- [1] S. Imatani, Internal Report, Ruhr-Universität Bochum (1986)
- [2] A. Pape, Dr. Thesis, Ruhr-Universität Bochum (1988)
- [3] Th. Lehmann, CISM Courses & Lectures, 289 (1984) 379.

Table 1 Schematic representation of the constitutive model developed.

$$\text{Yield function : } F = \frac{1}{2} N_{ijkl} (s_{ij} - \alpha'_{ij})(s_{kl} - \alpha'_{kl}) - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_y^2 = 0$$

$$N_{ijkl} = N_{ijkl} (s_{ij}, \alpha'_{ij}, \bar{\sigma}_y)$$

$$\text{Hardening laws : } \dot{\alpha}'_{ij} = C_1 \dot{\epsilon}_{ij}^p - C_2 (s_{kl} - \alpha'_{kl}) \dot{\epsilon}_{kl}^p \alpha'_{ij}$$

$$\dot{\bar{\sigma}}_y = R_1 (R_2 - \bar{\sigma}_y) (s_{ij} - \alpha'_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

$$\text{Flow rule of } \epsilon_{ij}^p : \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \kappa \dot{s}_{ij}$$

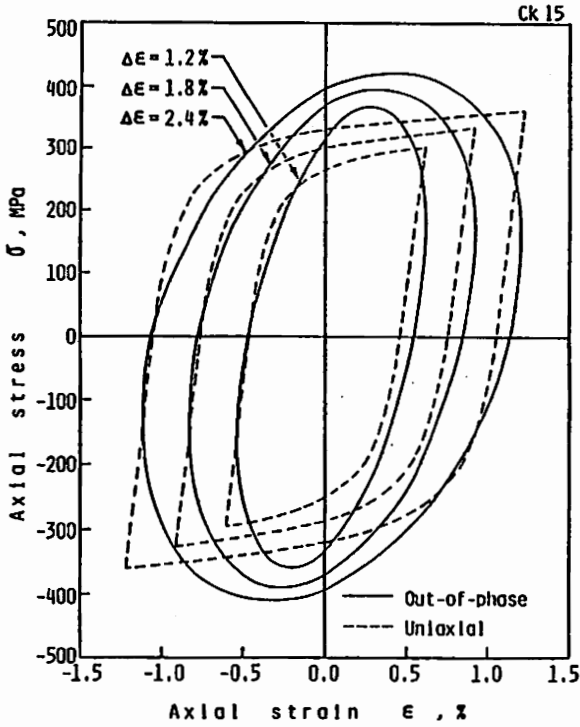


Fig.1 Hysteresis loops of the uni-axial cycle and the circular strain path.

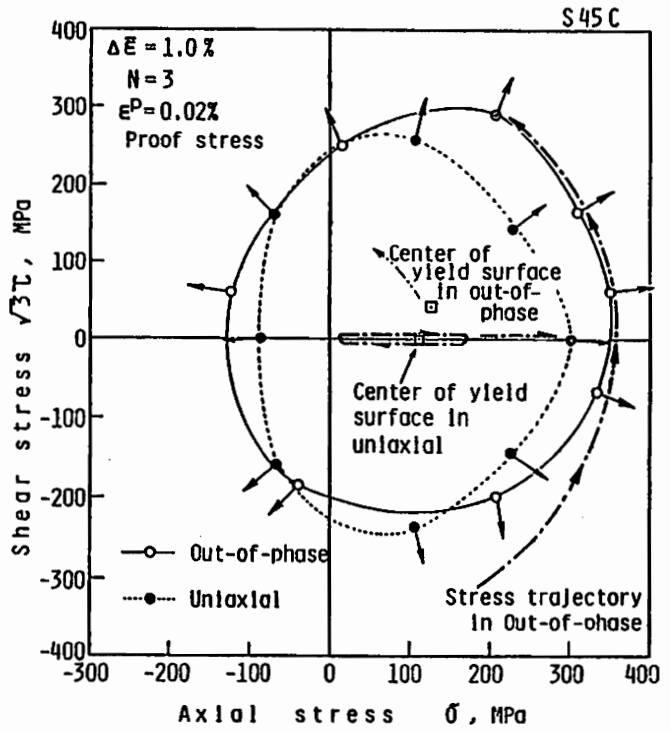


Fig.2 Yield surfaces of the uni-axial cycle and the circular path.

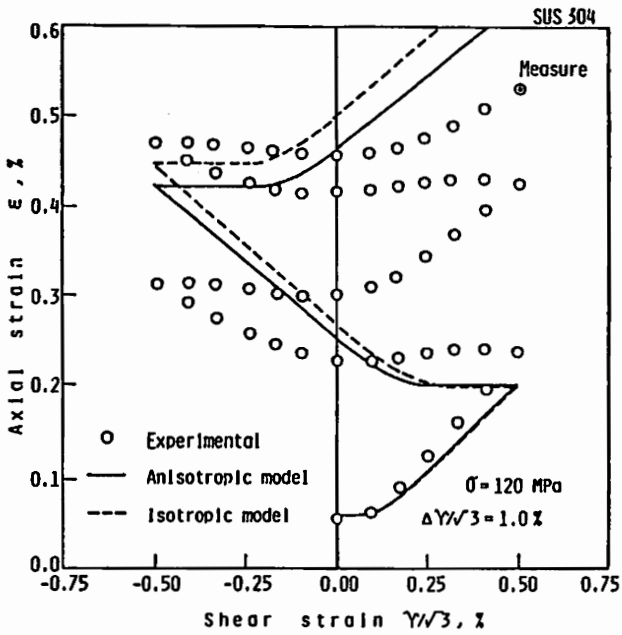


Fig.3 Accumulation behavior under the mechanical ratcheting.

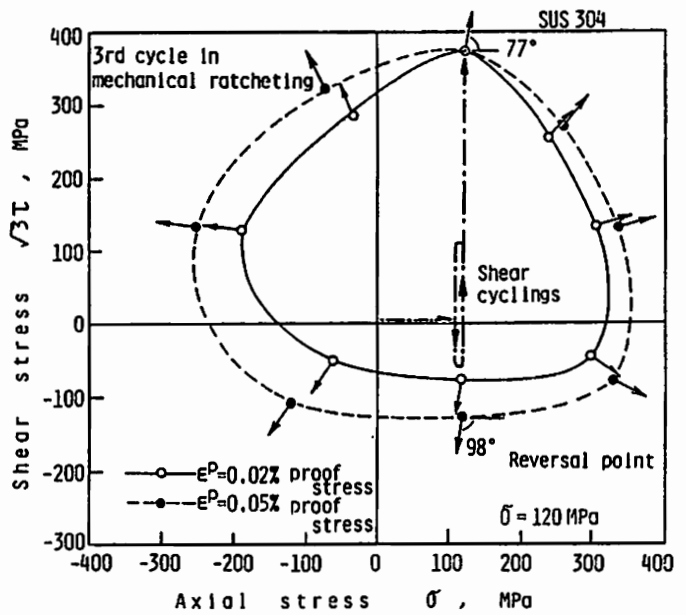


Fig.4 Yield surface at the 3rd semi-cycle in the ratcheting process.



## NUMERISCHE SIMULATION BEI DREIDIMENSIONALER PLASTISCHER UMFORMUNG

J. Appeltauer, O. Mahrenholtz, Technische Universität Hamburg-Harburg

### 1. Physikalisches und mathematisches Modell

Der instationäre Prozeß dreidimensionaler plastischer Umformung ist durch fortschreitende Gestaltänderung und durch entsprechende Spannungsfelder gekennzeichnet. Zu ihrer Bestimmung werden die allgemeinen Erhaltungssätze von Masse, Impuls und Energie durch das Stoffgesetz ergänzt. Bei isothermer Kaltumformung homogener, isotroper Metalle kann man den visko-elastischen Verformungsanteil unterdrücken. Wird für das starr-plastische Stoffverhalten auch der Drehtensor vernachlässigt, stellt die mit der Fließbedingung von Huber-Mises gekoppelte isochore Fließregel nach Saint-Venant-Levy-Mises ein hinlängliches Stoffgesetz dar. Es bildet mit den Gleichgewichtsbedingungen, den kinematischen Verknüpfungen und den Randbedingungen das mathematische Modell eines Randwertproblems. Dabei beziehen sich die umstrittensten Randbedingungen auf die Reibkräfte zwischen Werkstück und Werkzeug.

Da es numerisch sehr schwierig ist Geschwindigkeitsfelder zu finden, die gleichzeitig auch die Nebenbedingung der Inkompressibilität erfüllen, wird das Randwertproblem in ein duales Variationsproblem überführt. Das entsprechende Funktional

$$\delta \left( \int_V \bar{\sigma} \bar{\varepsilon} \, dV + \int_V \sigma_m \dot{\varepsilon}_{ii} \, dV - \int_{S_\sigma} t_i v_i \, dS \right) = 0 \quad (1)$$

enthält die Dilatationsleistung auf eine 'natürliche' Art und kann mit Hilfe von Lagrange-Parametern oder einer Straffunktion von der Nebenbedingung befreit werden. Ein günstiger Ansatz für die Straffunktion ist durch

$$\sigma_m = c \frac{\bar{\sigma}}{3\bar{\varepsilon}} \dot{\varepsilon}_{ii} \quad (2)$$

gegeben, worin  $c$  ein nur von der Wortlänge des Rechners abhängiger Zahlenwert ist.

## 2. Finite-Element-Analyse

Die Zeiteffizienz des Verfahrens erfordert Diskretisierung in Hexaeder mit Eckknoten. Bei isoparametrischer Wahl bestimmen die trilinearen Formfunktionen sowohl die Koordinatentransformation als auch die Geschwindigkeitsinterpolation. Für den durch die finiten Elemente zusammengefügtten Punkthaufen wird (1) zu

$$\sum_n \left( \int_V \frac{2}{3} \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\epsilon}} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{V}} dV + \int_V c \frac{\bar{\sigma}}{3\bar{\epsilon}} \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{V}} dV - \int_{S_\sigma} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{T}} dS \right) = 0 \quad , \quad (3)$$

mit

$$\bar{\epsilon} = \left( \frac{2}{3} \underline{\underline{V}}^T \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{V}} \right)^{1/2} \quad . \quad (4)$$

In (3) wird eine selektiv verminderte numerische Integration ausgeführt, indem die Integration der Dilatationsleistung in einem einzigen Stützpunkt (Elementschwerpunkt), die Integration der Scherleistung in sechs Ironsschen Stützpunkten (Flächenmittelpunkte) statt der üblichen acht Gaußschen Stützpunkte und die Integration der Reibleistung in neun Flächenpunkten (nach Gauß) vorgenommen wird. Dadurch kann ein rechnergerecht geschriebenes Unterprogramm die Rechenzeit der Steifigkeitsmatrix des finiten Elementes auf etwa die Hälfte verringern. Somit führt (3) zum nichtlinearen Gleichungssystem

$$\underline{\underline{C}} \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{R}} \quad , \quad (5)$$

worin  $\underline{\underline{C}}$  die Gesamtsteifigkeitsmatrix,  $\underline{\underline{V}}$  den Vektor der Knotengeschwindigkeiten und  $\underline{\underline{R}}$  den Vektor der Reibleistung bedeuten.

Das Geschwindigkeitsfeld  $\underline{\underline{V}}$  als Lösung des Gleichungssystems (5) stellt eine Momentaufnahme des Umformprozesses dar. Werden solche Momentaufnahmen dicht aneinandergereiht, kann der instationäre Umformprozeß mit stationären 'Zeitschritten' näherungsweise nachvollzogen werden. In einem jeden Zeitschritt muß das nichtlineare System durch jeweils linearisierende Iteration gelöst werden. Nur durch kombinierte Iterationsverfahren kann im ersten Zeitschritt bzw. bei hohen Umformgraden zufriedenstellende Konvergenz erreicht werden.

### 3. Anwendung auf Freiformschmieden

Die für Stauchung mit Reibkraft erhaltenen Verzerrungsbilder und globale Stauchkraftverläufe stimmen mit bekannten Versuchsergebnissen zufriedenstellend überein. Weitere Untersuchungen sollen einige lokale Störungen im Verzerrungsbild und in den Spannungsfeldern zu vermeiden helfen.

#### Auszug aus dem Literaturverzeichnis

- /1/ Park, J.J. and S. Kobayashi, Three-Dimensional Finite Element Analysis of Block Compression, Int. J. Mech. Sci. 26 (1984), 165-176
  
- /2/ Hughes, Th.J.R., Liu, W.K. and A. Brooks, Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Function Formulation, J. Comput. Phys. 30 (1979), 1-60
  
- /3/ Irons, B.M., Quadrature Rules for Brick Based Finite Elements, Int. J. Num. Meth. Engng. 3 (1971), 293-294

## **Finite-Element-Simulation für die Blechumformung**

Martin Herrmann, Peter Keck, Martin Wilhelm  
Institut für Umformtechnik, Universität Stuttgart

Unter dem Aspekt des Einsatzes von Finite-Element-Programmen für die Vorausberechnung von Umformvorgängen sind derzeit weniger Probleme in Zusammenhang mit der Entwicklung und Erprobung neuer, weitergehender (komplexer) Stoffgesetze von Bedeutung, als vielmehr Schwierigkeiten, die direkt in der Natur der Umformvorgänge - insbesondere der Blechumformvorgänge - begründet sind.

- Blechteile sind in der Praxis häufig sehr groß und flächenhaft, allerdings mit teilweise sehr scharfen Übergängen (Radien usw.) in einzelnen Teilbereichen. Dies erfordert einen sehr hohen Idealisierungs- und Berechnungsaufwand.
- Durch den Blecheinzug und das Anlegen von Werkstückbereichen an das Werkzeug tritt während des Vorgangs eine u.U. starke Veränderung der Beanspruchungen in den einzelnen Teilbereichen ein.
- Diejenigen Maßnahmen, die die eigentliche Technologie der Umformung ausmachen, z.B.
  - gezielte Schmierung,
  - Steuerung des Blecheinzugs mit Hilfe von Ziehstäben und
  - die Wirkung des Niederhalterslassen sich nur äußerst unbefriedigend modellieren.

Daher kann zum gegenwärtigen Zeitpunkt die Aufgabe der Prozeßsimulation im Konstruktionsprozeß nicht in einer möglichst genauen Berechnung des Vorgangs gesehen werden, als vielmehr in einer ersten, groben Überschlagsrechnung - als Ersatz für erste Vorversuche - die gleichzeitig auch zum besseren Verständnis für den Vorgang und seine wichtigsten Einflußgrößen beitragen kann.

Die ausgeprägte Nichtlinearität der Vorgänge, die im Stoffgesetz, der starken Änderung der geometrischen Größen und den ständig wechselnden Randbedingungen (Kontakt: Anlegen-Lösen) begründet ist, erfordert für die Simulation robuste und effektive Algorithmen, die in der Lage sind, insbesondere den Anforderungen an den Kontaktalgorithmus Rechnung zu tragen.

Nichtlineare kommerzielle Programmpakete genügen diesen Anforderungen nur bedingt und erlauben darüber hinaus den Benutzern, durch die Restriktionen in der Verfügbarkeit des Quellprogrammes, einen Eingriff in den Programmablauf nur über definierte Schnittstellen. Aus diesem Grund wird am Institut für Umformtechnik seit mehreren Jahren an der Entwicklung eigener FE-Programme für die Berechnung von Umformvorgängen gearbeitet. Für die Probleme der Blechumformung kommt dabei das Programm EPDAN /1/ zum Einsatz.

EPDAN besitzt eine implizite Formulierung, die auf der mitgehenden Lagrangeschen Betrachtungsweise aufbaut. Grundlage der Formulierung ist ein isotropes, elastisch-plastisches Stoffgesetz mit Kaltverfestigung. Thermische Vorgänge werden vernachlässigt. Die Iteration des Gleichgewichts innerhalb eines Zeit-(Last-)inkrements erfolgt über ein vollständiges Newton-Raphson-Verfahren mit Line search.

Gegenwärtig sind im Programm die folgenden isoparametrischen Elemente verfügbar:

- \* 4-Knoten-Kontinuumselement für axiale Symmetrie und ebene Formänderung
- \* 8-Knoten-Kontinuumselement für 3D-Vorgänge
- \* 3-Knoten-Membranelement für ebenen Spannungszustand in der Blechebene.

Die Bedingung der Volumenkonstanz im plastischen Bereich wird über die reduzierte Integration der elastischen Volumenänderung realisiert /2/. Die Integration des Stoffgesetzes erfolgt bei den Kontinuumselementen über den klassischen "Radial Return" - Algorithmus /3/; beim Membranelement wird ein von Ramm/Matzenmiller beschriebener Algorithmus verwendet. Als

Dehnungsmaße der inkrementellen Formulierung werden das "mid-point strain increment" /4/ oder das "rotation neutralized strain increment" /5/ verwendet.

Beispiele für die Anwendung des Programmes sind

- 1) axialsymmetrisches Tiefziehen einer Stahlplatte, reibungsfrei, 4 x 40 Elemente (Bild 1)
- 2) hydraulisches Tiefziehen rechteckiger Platten mit Hilfe von Membranelementen (Bild 2)
- 3) hydraulisches Tiefziehen einer kreisrunden Platte mit 2 x 48 4-Knoten-Ringelementen (Bild 3)
- 4) Flachzugversuch mit 14 x 8 x 2 3D-Kontinuumselementen .

Die Kontaktbedingung wird im Programm mit Hilfe eines sog. Straffunktions-Ansatzes (Penalty method) /7/ berücksichtigt. Insbesondere auf dem Gebiet der Kontakttermittlung sind zukünftig noch umfangreiche Arbeiten nötig.

#### Literaturverzeichnis

- /1/ Tekkaya, A.E.: Ermittlung von Eigenspannungen in der Kaltmassivumformung. Berichte Inst. f. Umformtechnik, Universität Stuttgart, Nr. 85. Berlin: Springer 1986.
- /2/ Hughes, T.J.R.: The Finite Element Method. Englewood Cliffs: Prentice Hall 1987.
- /3/ Krieg, R.D.; Krieg, D.B.: Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model. J. Pressure Vessel Techn. 99 (1977), S. 510-515.
- /4/ Ramm, E.; Matzenmiller, A.: Computational Aspects of Elasto-Plasticity in Shell Analysis. In: Computational Plasticity (Part I). Ed. Owen, D.R.J. et al. Swansea: Pineridge Press 1987.
- /5/ Nagtegaal, J.C.; Rebelo, N.: On the Development of a General Purpose Finite Element Program for Analysis of Forming Processes. Int. J. Num. Meth. Engg., Vol. 25 (1988), S. 113-131.

- /6/ Hughes, T.J.R.: Numerical Implementation of Constitutive Models: Rate-Independent Deviatoric Plasticity. Workshop on Theoretical Foundations for Large Scale Computations of Nonlinear Material Behaviour, Northwestern University, Evanston (IL) 1983.
- /7/ Hallquist, J.; Goudreau, G.L.; Benson, D.J.: Sliding Interfaces with Contact-Impact in Large-Scale Lagrangian Computations. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 51 (1985), S. 107-137.

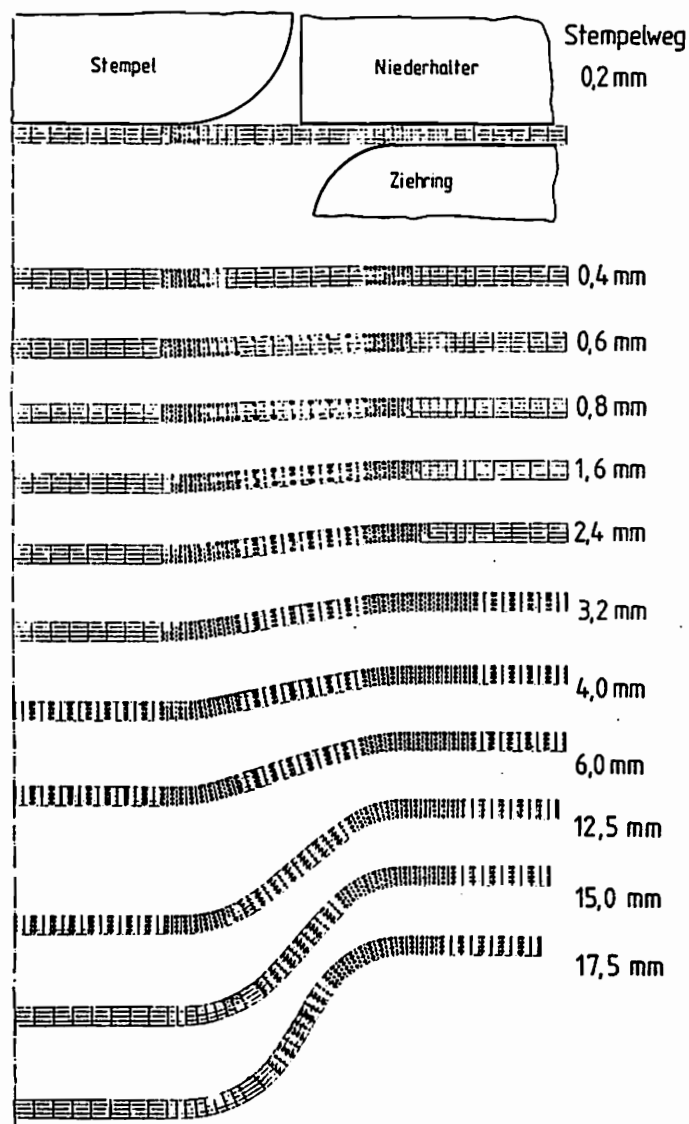


Bild 1: Axialsymmetrisches Tiefziehen : Ausbreitung der plastischen Zone .

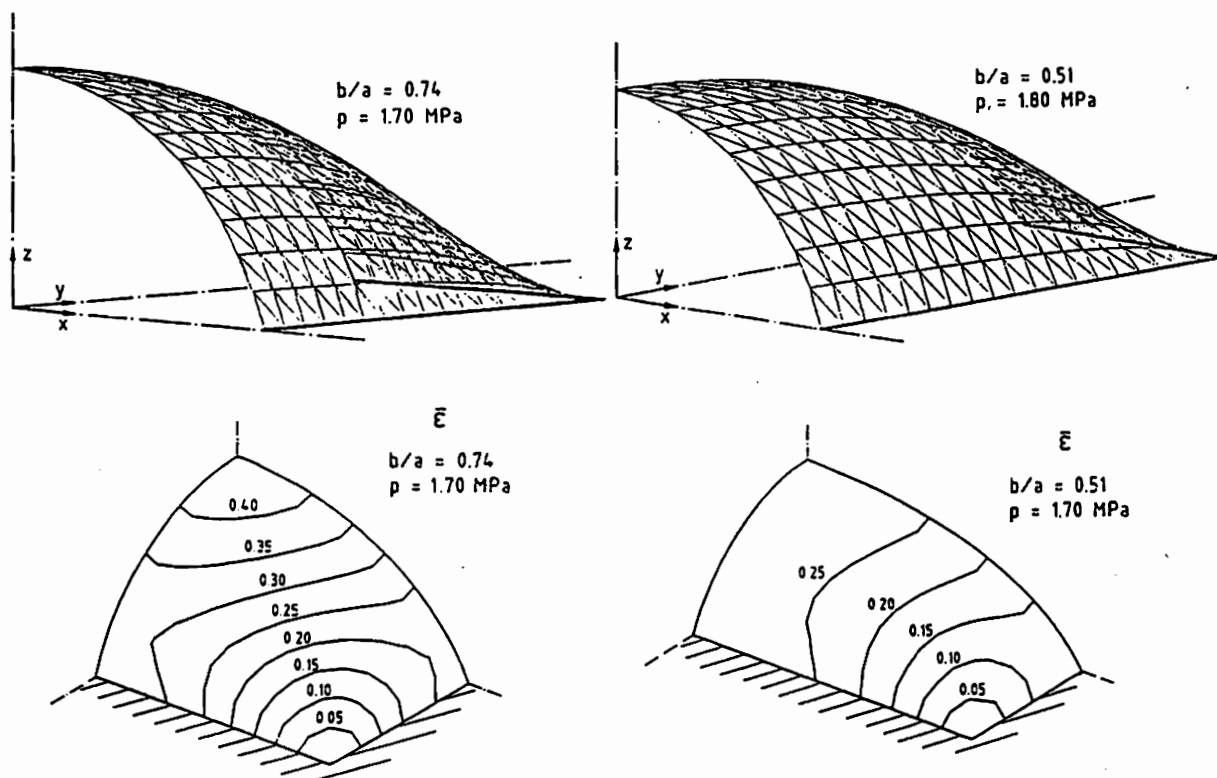


Bild 2: Hydraulisches Tiefen: Verzernte Elementnetze und Verteilung der Vergleichsformänderung.

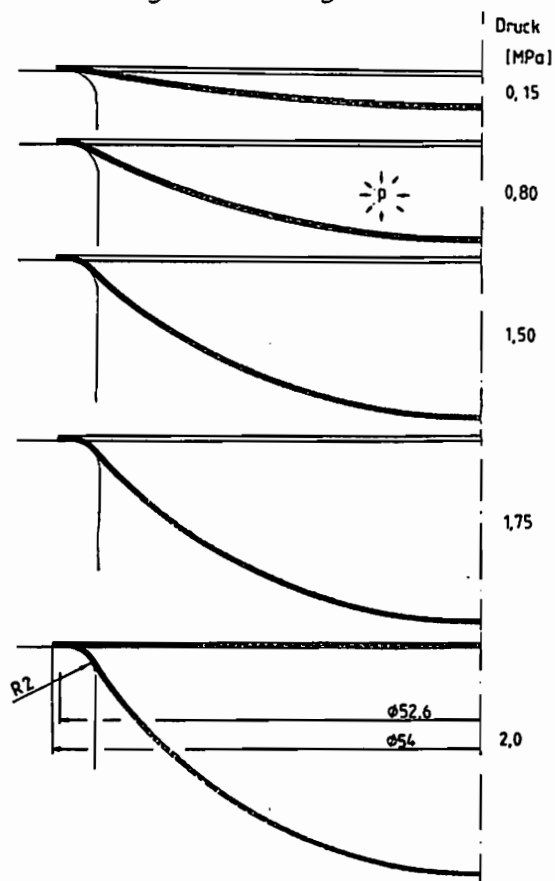


Bild 3: Hydraulisches Tiefen: Geometrie bei unterschiedlichen Innendrücken.



## FORMULIERUNG EINES ELASTISCH-PLASTISCHEN 2-D-ELEMENTES IN DER MOMENTANKONFIGURATION NACH J.C. SIMO

N. Müller-Hoeppe und E. Stein,  
Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik,  
Universität Hannover

### 1. Einleitung

Den Arbeiten /1/ und /2/ entsprechend soll ein 2-D-4-Knoten-Element (ebener Verzerrungszustand) zur Behandlung endlicher elastisch-plastischer Deformationen angegeben werden. Dabei liegen folgende Annahmen zugrunde:

- eine räumliche Betrachtungsweise,
- ein v.Mises-Material mit isotroper Verfestigung,
- Werkstoffeigenschaften von Metallen, d.h. Fließspannung  $\ll$  elastische Moduli.

### 2. Kontinuumsmechanische Grundlagen

Ausgehend von der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (2.1)$$

lassen sich mit  $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  und  $\mathbf{b}_e = \mathbf{F}_e\mathbf{F}_e^T$  folgende räumliche Verzerrungstensoren ableiten:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{b}^{-1}), \\ \mathbf{e}_e &= \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{b}_e^{-1}), \\ \mathbf{e}_p &:= \mathbf{e} - \mathbf{e}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_e^{-1} - \mathbf{b}^{-1}), \\ \mathbf{g} &: \text{räumlicher Metriktensor.} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Mit der Einführung objektiver Flüsse als *Lie*-Ableitung der räumlichen Verzerrungsgrößen lassen sich analog zu  $\mathbf{d} = L_v \mathbf{e} = \frac{1}{2} L_v \mathbf{g}$  ( $\mathbf{d}$ : räumliche Verzerrungsgeschwindigkeit) elastische und plastische Verzerrungsraten definieren:

$$\mathbf{d}_e := L_v \mathbf{e}_e, \quad \mathbf{d}_p := L_v \mathbf{e}_p = \frac{1}{2} L_v \mathbf{b}_e^{-1}. \quad (2.3)$$

Es wird die Existenz eines Potentials der freien Helmholtzenergie

$$\Psi = \Psi(\mathbf{g}, \mathbf{b}_e^{-1}, q) \quad (2.4)$$

$q$  : interne plastische Variablen

gefordert, so daß sich die Spannungen und der tangentialer Stofftensor nach der Doyle-Ericksen-Formel /3/ zu

$$\boldsymbol{\tau} = 2\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{g}}, \quad J\boldsymbol{\Phi} = 4\rho_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{g} \partial \mathbf{g}} \quad (2.5)$$

ergehen.

### 3. Elastisches Stoffgesetz

Zur Formulierung eines hyperelastischen Teilstoffgesetzes wird für die freie Helmholtzenergie ein Ansatz gewählt, der ein kompressibles Neo-Hooke-Material beschreibt:

$$\rho_0 \Psi = \frac{1}{2} \mu (\hat{I}_e - 3) + \frac{1}{2} K (\ln J_e)^2, \quad (3.1)$$

$K$  : Kompressionsmodul,  $\mu$  : Schubmodul;

$\hat{I} = J^{-\frac{2}{3}} \text{tr}(\mathbf{b}_e)$ ,  $J^e = \sqrt{\det \mathbf{b}_e}$  : Invarianten.

Durch Ableiten gemäß (2.5) erhält man die Kirchhoffspannungen und das elastische Teilstoffgesetz. Dieser Ansatz führt auf eine additive Zerlegung der Kirchhoffspannungen in Deviator- und Kugeltensor.

### 4. Fließbedingung und Fließgesetz

Die Fließbedingung von v.Mises wird als Funktion des isochoren Anteils der Deformation betrachtet:

$$\hat{\Phi}(\hat{\mathbf{g}}, \mathbf{b}_e^{-1}, q) = |\mathbf{s}| - \sqrt{\frac{2}{3}} \kappa = 0, \quad (4.1)$$

$\kappa$  : Vergleichswert,  
 $\mathbf{s}$  : Deviator der Kirchhoffspannungen.

Das Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipationsarbeit führt auf eine Variationsungleichung, die hier nicht angegeben wird. Statt der Variationsungleichung wird das hierzu äquivalente Sattelpunktproblem gelöst. Das führt bezüglich der Momentankonfiguration unter gewissen Voraussetzungen auf das folgende Fließgesetz:

$$L_v \mathbf{s}^p = 2\bar{\mu} \dot{\gamma} \mathbf{n} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|}, \quad \bar{\mu} = \frac{1}{3} \mu \hat{I}. \quad (4.2)$$

## 5. Formulierung einer konsistenten Tangente bei Verwendung eines Projektionsalgorithmus

Die Verwendung der Radial-return-Methode zur Integration der Fließregel (4.2) führt auf ein Prediktor-Korrektor-Verfahren:

- elastischer Prediktor

$$\mathbf{s}_{n+1}^t = \mu \operatorname{dev} \hat{\mathbf{b}}_{e_{n+1}}^t, \quad (5.1)$$

- plastischer Korrektur

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^t - 2\bar{\mu} \Delta\gamma_{n+1} \mathbf{n}. \quad (5.2)$$

$\Delta\gamma_{n+1}$  wird durch lokale Iteration aus der Fließbedingung bestimmt.

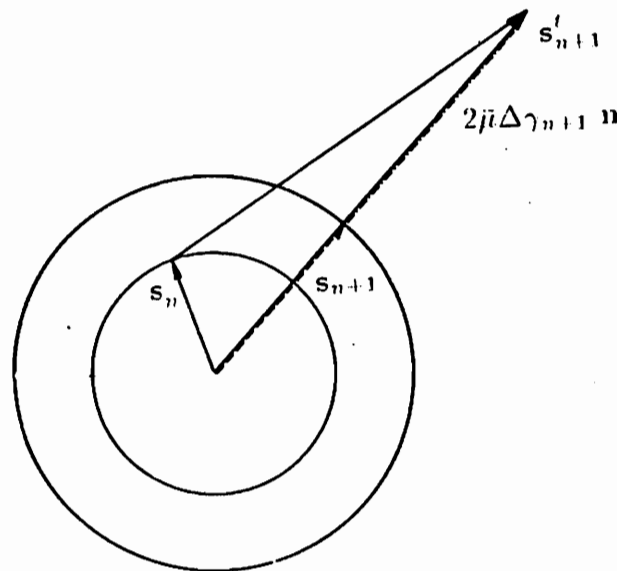


Bild 1: Darstellung von Prediktor- und Korrektorschritt im 3-D-Fall

Die projizierten Deviatorspannungen werden um den Kugeltensoranteil ergänzt und in das Prinzip der virtuellen Arbeit eingesetzt:

$$G = \int_B \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\partial B_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, do = 0, \quad (5.3)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  : Cauchyspannungen,

$\boldsymbol{\eta}$  : virtuelle Verrückung,

$\hat{\mathbf{t}}$  : äußere eingeprägte Spannungen.

Bei Anwendung des Newton-Verfahrens zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems ist die Linearisierung des Prinzips der virtuellen Arbeiten erforderlich:

$$DG \cdot \mathbf{u} = \int_B \text{tr}(\text{grad} \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\sigma} \text{grad}^S \mathbf{u}) + (\text{grad} \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\Phi} : \text{grad}^S \mathbf{u}) \, dv. \quad (5.4)$$

$\boldsymbol{\Phi}$  wird mit Hilfe von (2.5) bestimmt und ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} J\boldsymbol{\Phi} &= K \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} - 2 K \ln J \mathbf{1} \\ &+ (1 - \delta_1) \left[ 2\bar{\mu} \left( \mathbf{1} - \frac{1}{3} \mathbf{g}^{-1} \otimes \mathbf{g}^{-1} \right) - \frac{2}{3} \mu (\mathbf{g}^{-1} \otimes \text{dev} \hat{\mathbf{b}} + \text{dev} \hat{\mathbf{b}} \otimes \mathbf{g}^{-1}) \right] \\ &+ \delta_2 (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \delta_3 (\mathbf{n} \otimes \text{dev} \mathbf{n}^2) \\ \text{mit } \delta_1 &= \frac{2\bar{\mu} \Delta \gamma}{|\mathbf{s}^t|}, \\ \delta_2 &= -\frac{4}{3} |\mathbf{s}^t| \Delta \gamma + \frac{4\bar{\mu} \Delta \gamma}{|\mathbf{s}^t|} - \frac{2\bar{\mu}}{1 + \frac{1}{3\bar{\mu}} \kappa'} + \frac{\frac{4}{3} \Delta \gamma |\mathbf{s}^t|}{1 + \frac{1}{3\bar{\mu}} \kappa'}, \\ \delta_3 &= 4\bar{\mu} \Delta \gamma - \frac{2|\mathbf{s}^t|}{1 + \frac{1}{3\bar{\mu}} \kappa'}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Mit der hier beschriebenen Theorie wurde ein 2-D-4-Knoten-Element kodiert und an Beispielen getestet.

## 6. Literatur

- /1/ J.C. SIMO: *A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I: Continuum formulation*; Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 66 (1988), 199-219.
- /2/ J.C. SIMO: *A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part II: Computational aspects*; Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 68 (1988), 1-31.
- /3/ T.C. DOYLE, J.L. ERICKSEN: *Nonlinear elasticity*, Adv. Appl. Mech. IV, Academic Press, New York, 1956.

**GROSSE FORMÄNDERUNGEN DURCH LOKALE SCHÄDIGUNG  
- EIN SIMULATIONSMODELL FÜR DEN GEBIRGSSCHLAG -**

**W. Winter, LTM, Universität Erlangen-Nürnberg**

**1. Einführung**

Bekanntlich kann der Gebirgsschlag als ein rein elastisches Phänomen nicht verstanden werden /1/ werden. Auch bleiben meist die Anisotropie infolge Kohleschichtung ebenso wie deren Inhomogenitäten und die damit verbundenen Eigenspannungen bei kontinuumsmechanischen Modellierungen des Gebirgsschlages außer Betracht. Da die mit dem Gebirgsschlag zusammenhängenden Stoffgesetze nicht eindeutig bekannt sind, wird versucht, gebirgsschlagsähnliche Effekte an bewährten einfachen, diskreten Systemen zu modellieren, um dann geeignete kontinuumsmechanische Stoffgesetze formulieren bzw. modellieren zu können. Da sich Stabwerke als diskrete Modelle sowohl für elastische, elastisch-plastische als auch für starr-plastische Berechnungen als geeignet erwiesen haben (vgl.u.a./2/), sollen im folgenden auch die komplexen Zusammenhänge des Gebirgsschlages mit Stabwerken untersucht werden.

**2. Modellierung**

Zusätzlich für das in /2/ verwendete ebene Stabwerk, wird neben der Stabsteifigkeit  $c^K$  (Elastizität) sowie der Stabfließgrenze  $Y^K > 0$  (Plastizität) für den Stab  $\kappa$  mit der Stabkraft  $S^K$  ein Schädigungsparameter  $D^K$  eingeführt, wobei für  $S^K < 0$  bei

$$S^K = -Y^K; S^K = -Y^K(1-D^K) \quad (1)$$

angenommen wird. Durch den Schädigungsparameter  $D^K$  soll eine plötzliche, orientierte lokale Mikrorißbildung modelliert werden, wie sie bei druckbeanspruchtem, spröden Material experimentell zu beobachten ist /3/.

Die lokalen Materialeigenschaften eines materiellen Punktes (Volumen  $dV = A l$  mit Einheitsdicke  $l$  und Fläche  $A$ ) modelliert dann ein ebenes Stabwerk unter Einbeziehung der

kinematischen Verfestigung. Elastische Isotropie bzw. Anisotropie läßt sich durch geeignete Wahl der Stabsteifigkeiten einstellen /2/. Die gegenseitige Verknüpfung der Einzelstabwerke zu einem globalen Stabwerk modelliere dann eine charakteristische Kohleschichtung. Die numerische Beanspruchung des globalen Stabwerkes erfolgt über die freibeweglichen Knotenpunkte, wobei die Knotenverschiebungen weggesteuert aufgebracht werden.

### 3. Ergebnisse

Wie die vorgestellten numerischen Ergebnisse verdeutlichen, lassen sich im wesentlichen folgende Auswahlkriterien für Stoffgesetze zur Behandlung des translatorischen Gebirgsschlages erkennen:

- elastische Anisotropie,
- orientierte, lokale Schädigung (lokale Mikrorißbildung),
- Orientierungsänderungen im elastischen und plastischen Stoffgesetz,
- Beeinflussung des translatorischen Gebirgsschlages durch Eigenspannungen.

### 4. Kontinuumsmechanische Deutung

Während sich die elastische Anisotropie in bekannter Weise modellieren läßt, werden für das plastische Stoffgesetz zwei mögliche Fließkriterien vorgeschlagen:

- a) ein modifiziertes Drucker-Prager-Fließkriterium mit Schädigung der Scherfließgrenze  $k$  der Form

$$Y_v \left[ (1-\alpha) + 3\alpha \left( \frac{\sigma_H}{Y_v} \right) \right] \leq Y_\phi k(1-D), \quad (2)$$

wobei  $Y_v$  die v. Mises-Vergleichsspannung,  $\sigma_H$  die hydrostatische Spannung,  $\alpha$  und  $Y_\phi$  vom inneren Gleitwinkel  $\phi$  abhängige Materialparameter sind;

- b) ein energetische Fließkriterium mit Schädigung der Form

$$Y_v \left[ \alpha^* + \beta \left( \frac{\sigma_H}{Y_v} \right)^2 \right]^{1/2} \leq Y^* (1-D) \quad (3)$$

mit den von der Querdehnzahl  $\nu$  abhängigen Parametern  $\alpha^*$  und  $\beta$  sowie der "Vergleichsspannung"  $Y^*$ .

Als Schädigungsgesetz für den Schädigungsparameter  $D$  in (2) bzw. (3) gelte in Abhängigkeit vom hydrostatischen Druck  $\sigma_H$  für  $\sigma_H < 0$

$$dD = \left( \frac{|\sigma_H|}{\tilde{\sigma}_H} \right)^\psi d\sigma_H \quad (4)$$

mit der Materialkonstanten  $\tilde{\sigma}_H$  und dem Schädigungsexponenten  $\psi$ . Nach Integration von (4) folgt

$$D - D_0 = \left( \frac{\sigma_H}{Y_H} \right)^{\psi+1} - \left( \frac{\sigma_{0H}}{Y_H} \right)^{\psi+1} \quad (5)$$

mit den Anfangswerten  $D_0$  und  $\sigma_{0H}$  sowie einer charakteristischen, für die Mikrorißbildung verantwortlichen hydrostatischen Spannung  $Y_H$

$$Y_H = \left[ (\psi + 1) \tilde{\sigma}_H^\psi \right]^{1/(\psi+1)}. \quad (6)$$

Welches der vorgeschlagenen Stoffgesetze sich zur Modellierung gebirgschlagsähnlicher Effekte besser eignet, werden numerische Berechnungen und deren Vergleich mit experimentellen Ergebnissen zeigen.

#### Literaturverzeichnis

- /1/ Lippmann, H.: Mechanik des plastischen Fließens: Grundlagen und technische Anwendungen. Berlin, usw.: Springer 1981.
- /2/ Lippmann, H.; Winter, W.: Elastisch-plastische Stabwerke mit kinematischer Verfestigung als Modell für vielkristallines Werkstoffverhalten unter Wechselbelastung.  
Teil I: Modellierung und Simulation der Ermüdung  
Teil II: Zyklische Verfestigung  
Ing. Archiv 57 (1987) 431-445 und 58 (1988) 47-57.
- /3/ Ashby, MF. and Hallam, SD.: The failure of brittle solids containing small cracks und compressive stress states. Acta Met. 34 (3), 1986, 497-510.

## Berechnung des J-Integrals bei ebener inkrementeller Elastoplastizität mittels BEM

S. Rußwurm, Lehrstuhl f. Techn. Mechanik,  
Universität Erlangen-Nürnberg

In der linearelastischen Bruchmechanik ist der Wert des J-Integrals

$$J = \int_{\Gamma} \left[ W dx_2 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right]$$

für beliebige Integrationswege um die Rißspitze anderen bruchmechanischen Kenngrößen gleichwertig. Im Gegensatz zu den Spannungsintensitätsfaktoren  $K$  behält das Kriterium für beginnenden Rißfortschritt  $J = J_c$  auch bei realem elastoplastischen Materialverhalten und ausgedehnten plastischen Zonen seine Aussagekraft /1/. Voraussetzungen dafür sind neben der Berücksichtigung der elastoplastischen Werte für Spannungen und Verschiebungsableitungen die Ergänzung der Verzerrungsenergiedichte um einen plastischen Anteil

$$W^p = \int \sigma_{ij} (\epsilon_{ij}^p) d\epsilon_{ij}^p$$

und der Ausschluß von Entlastungsvorgängen. Letzteres ist Tribut an die zum Nachweis der Wegunabhängigkeit bei Elastoplastizität verwendete Deformationstheorie.

Die numerische Auswertung des J-Integrals kann im Rahmen einer elastoplastischen BOUNDARY-ELEMENT-METHOD-Rechnung mit geringem zusätzlichen Aufwand vorgenommen werden.

Die Ausgangs-Randintegralgleichung der elastoplastischen BEM lautet in inkrementeller Darstellung /2/ (der Punkt über einer Größe kennzeichnet die zeitliche Ableitung):

$$C_{ij} \dot{u}_i = \int_{\Gamma} U_{ij} \dot{t}_j d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij} \dot{u}_j d\Gamma + \int_{\Omega} \Sigma_{ijk} \dot{\epsilon}_{jk}^p d\Omega$$

Für Innenpunkte folgt daraus durch Ableiten und Einsetzen in das verallgemeinerte HOOKEsche Stoffgesetz:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \int_{\Gamma} U_{ijk} \dot{t}_k d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ijk} \dot{u}_k d\Gamma + \int_{\Omega} \Sigma_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^p d\Omega + f_{ij} (\dot{\epsilon}_{kl}^p)$$



Der Einfluß der Plastifizierung wird über plastische Anfangsverzerrungen in einem Gebietsintegral erfaßt, das nur in der plastischen Zone ausgewertet werden muß. Eine Gebietsdiskretisierung ist folglich nur im Bereich erwarteter Plastizität erforderlich. Die äquivalente Formulierung mittels plastischer Anfangsspannungen ermöglicht die Anwendung alternativer Lösungsalgorithmen zur iterativen Bestimmung der plastischen Größen /3/.

Die elastoplastische Rechnung erfolgt in drei Stufen:

1. elastische Berechnung der  
Randgrößen  $\sigma_r^e, \epsilon_r^e, u_r^e$  :  $\underline{A} \underline{u}_r^e = \underline{B} \underline{t}_r^e$
2. elastische Innenpunktauswertung für  $\sigma_i^e, \epsilon_i^e, u_i^e$  :  $\underline{u}_i^e = \underline{G} \underline{u}_r^e + \underline{H} \underline{t}_r^e$   
 $\underline{\sigma}_i^e = \underline{\tilde{G}} \underline{u}_r^e + \underline{\tilde{H}} \underline{t}_r^e$
3. inkrementelle Lastaufbringung  $\underline{u}^p = \underline{u}^e + \underline{K} \underline{\epsilon}^p$   
und dabei iterative Bestimmung  $\underline{\sigma}^p = \underline{\sigma}^e + \underline{\tilde{K}} \underline{\epsilon}^p$   
der Spannungen an jedem Knoten.

Für die anschließende Berechnung des J-Integrals ist während der inkrementellen Lastaufbringung zusätzlich die plastische Verzerrungsenergiedichte zu akkumulieren. Bei kleinen Lastinkrementen genügt die Näherung

$$\Delta W_i^p = \frac{\sigma_{v,i-1} + \sigma_{v,i}}{2} \cdot \Delta \epsilon_{v,i}^p$$

Bei zwei vorgestellten Beispielen - GRIFFITH-Riß im Streifen endlicher Breite und CT-Probe - konnte sehr gute Übereinstimmung der elastischen Ergebnisse mit der analytischen Lösung bzw. mit FEM-Vergleichsrechnungen /4/ erzielt werden. Bei der elastoplastischen Berechnung der CT-Probe mit punktweise vorgegebenem Spannungs-Dehnungs-Verhalten von St E 47 traten für einzelne Integrationswege abweichende Werte auf, deren Ursache noch ungeklärt ist.

Perspektiven der weiteren Arbeit sind die Einbindung der J-Integral-Berechnung bei Verwendung anderer Fließkriterien als der bisher realisierten MISES-Fließbedingung (TRESCA, MOHR/COULOMB, DRUCKER/PRAGER) und die Koppung mit der bereits bestehenden Berechnungsmöglichkeit für elastische Rißprobleme durch Verwendung spezieller GREENscher

Fundamentallösungen /5/ einschließlich der Zulässigkeit schließender Risse. Angestrebt ist weiterhin die Ausweitung dieses Vorgehens auf elastoplastisches Materialverhalten. Die Hinzunahme des  $T^*$ -Gebietsintegrals zur Behandlung zyklischer Beanspruchung erscheint ebenfalls erfolgversprechend.

#### Literaturverzeichnis

- /1/ RICE, J.R.: Mathematical analysis in the mechanics of fracture.  
In: Fracture, an advanced treatise, Vol II.  
Edited by H. Liebowitz  
New York, London: Academic Press, 1968.
  
- /2/ BAUSINGER, R. und KUHN, G.: Die Boundary-Element-Methode.  
Ehningen bei Böblingen: expert-Verlag, 1987.
  
- /3/ SIPPEL, H.: Elastoplastische Berechnungen mittels der Boundary-Element-Methode.  
Diss. Universität Erlangen-Nürnberg (erscheint).
  
- /4/ OWEN, D.R.J., und FAWKES, A.J.: Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications.  
Swansea: Pineridge Press Ltd, 1983.
  
- /5/ MEWS, H.: Berechnung von K-Faktoren mittels der Boundary-Element-Methode.  
Diss. Universität Erlangen-Nürnberg (erscheint).

## EIN NEUES HYBRIDES FINITES ELEMENT FÜR DIE ANALYSE AXIAL-SYMMETRISCHER INELASTISCHER SCHALEN

F.G. Kollmann, Fachgebiet Maschinenelemente und Getriebe,  
Technische Hochschule Darmstadt

V. Bergmann, Department of Theoretical and Applied Mechanics,  
Cornell University

H.-P. Hackenberg, Fachgebiet Maschinenelemente und Getriebe,  
Technische Hochschule Darmstadt

Das vorgeschlagene hybride Element beruht auf einer von Kollmann und Mukherjee [1] entwickelten Theorie inelastischer Schalen. Vorausgesetzt wird, daß der Tensor  $\epsilon$  der Gesamtverzerrungen additiv in einen elastischen—  $\epsilon^n$  und einen inelastischen Anteil  $\dot{\epsilon}^n$  aufgespalten werden kann. Ferner wird ein inelastisches Werkstoffmodell mit n inneren Variablen  $q^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) und Evolutionsgleichungen

$$\dot{\epsilon}^n = \dot{\epsilon}^n(\sigma, q^{(k)}) \quad (1)$$

$$\dot{q}^{(k)} = \dot{q}^{(k)}(\sigma, q^{(r)}) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

angenommen, wobei  $\sigma$  der Spannungstensor ist. Als nächstes wird ein verallgemeinerter Verschiebungsvektor  $v$

$$v^T := [u^T, \delta^T] \quad (3)$$

eingeführt, wobei  $u$  der Verschiebungsvektor der Schalenmittelfläche  $S$  und  $\delta$  der Differenzvektor sind. Ferner wird ein verallgemeinerter Verzerrungsvektor definiert

$$\gamma^T := [e^T, \kappa^T, \phi^T] \quad (4)$$

Hierin ist  $e$  der Tensor der Membranverzerrungen,  $\kappa$  ein mit den Verkrümmungen der Schalenmittelfläche zusammenhängender Tensor und  $\phi$  der Vektor der Querschubverzerrungen.

Kollmann und Mukherjee [1] haben folgendes Variationsprinzip angegeben

$$\delta \int_S \left[ \frac{1}{2} \dot{\gamma}^T D \dot{\gamma} - 2 \dot{\gamma}^T L_{\gamma v} \dot{v} + \dot{F}_L^T \dot{v} + \dot{F}^{N^T} L_{\gamma v}^N \dot{v} \right] dS = 0 \quad (5)$$

Hierin sind  $D$  eine verallgemeinerte Elastizitätsmatrix,  $L_{\gamma v}$  ein verallgemeinerter Elastizitäts-Verzerrungs-Verschiebungsoperator,  $\dot{F}_L$  ein verallgemeinerter Belastungsvektor,  $\dot{F}^N$  ein Vektor der inelastischen Pseudoknotenkräfte und  $L_{\gamma v}^N$  ein linearer inelastischer Operator. Allgemeine Ausdrücke für diese Größen und spezialisierte für ein axialsymmetrisches konisches Schalenelement wurden von Kollmann und Bergmann [2] angegeben.

Bei dem hybriden Element werden die Verzerrungen auf Elementebene statisch herauskondensiert und daher gilt

$$K_{\gamma v}^T K_{\gamma\gamma}^{-1} K_{\gamma v} \dot{v} = -\dot{P}_L - \dot{P}_N \quad (6)$$

wobei unterschiedliche Ansatzfunktionen  $N$  bzw.  $\bar{N}$  für die Verschiebungen und Verzerrungen zugelassen werden. Die Matrizen  $K_{\gamma v}$ ,  $K_{\gamma\gamma}$  und der Lastvektor  $\dot{P}_L$  bzw. der inelastische Pseudokraftvektor  $\dot{P}_N$  folgen durch Standardoperationen. In [4] werden elastische und inelastische Testbeispiele berechnet. Es ergibt sich eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit bekannten analytischen bzw. numerischen Lösungen.

#### Literaturverzeichnis

- [1] Kollmann, F.G. and Mukherjee, S.: A general geometrically linear theory of inelastic thin shells, *Acta Mechanica* 55 (1985), 41-67
- [2] Kollmann, F.G. and Bergmann, V.: A new finite element for geometrically linear, inelastic analysis of plates and shells. Part 1: Element formulation and tests. Ithaca: Cornell University, Department of Theoretical and Applied Mechanics, unpublished report, 1986
- [3] Kollmann, F.G. and Bergemann, V.: A new hybrid strain finite element for geometrically linear, inelastic analysis of axisymmetric shells. Part 1: Element formulation, submitted for publication
- [4] Bergmann, V., Kollmann, F.G. and Hackenberg, H.-P.: A new hybrid strain finite element for geometrically linear, inelastic analysis of axisymmetric shells. Part 2: Results for elastic and inelastic shells, submitted for publication

## ZUR NUMERISCHEN BEHANDLUNG VON MATERIALINSTABILITÄTEN BEI GROSSEN INELASTISCHEN DEFORMATIONEN

P. Wriggers, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover

### 1 Vorbemerkungen

Materialinstabilitäten können in vielen technischen Anwendungen auftreten und führen dort zu Schädigungen oder sogar zum Systemversagen. Aus diesem Grund ist es wichtig, diese Problemstellungen sowohl unter theoretischem als auch numerischem Aspekt behandeln zu können. In diesem Beitrag steht die numerische Lösung im Vordergrund, die sich im wesentlichen in die folgenden drei Themengebiete unterteilen läßt: die *Berechnung von nichtlinearen Lösungszweigen*, die *Bestimmung von Umkehr- und Verzweigungspunkten* sowie die *Verzweigung in sekundäre Lösungspfade*.

Die numerischen Untersuchungen und Formulierungen werden hier im Rahmen der klassischen  $J_2$ -Plastizitätstheorie unter der Annahme von isotroper Verfestigung, assoziierten Fließregeln und der Vernachlässigung von speziellen Lokalisierungseffekten, wie z.B. der Schubbandbildung, durchgeführt.

### 2 Grundlagen

Die Beschreibung der großen elasto-plastischen Deformationen erfolgt durch die multiplikative Aufteilung des Deformationsgradienten in seinen elastische und plastischen Anteil:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$ . Durch Formulierung der Plastizität im Dehnungsraum kann ausgehend vom Prinzip der maximalen Gestaltänderungsarbeit ein Maximumprinzip formuliert werden, aus dem sich das assoziierte Fließgesetz herleitet, siehe Simo [1]. Die konstitutive Beziehung für die elastischen Anteile wird in Form eines kompressiblen Neo-Hooke Materials angegeben.

Die Finite-Element-Formulierung basiert auf einem Vierknotenelement, das auf die Momentankonfiguration bezogen ist. Durch eine gemischte Formulierung wird die Forderung der plastischen Inkompressibilität erfüllt. Abgekürzt folgt dann die diskretisierte Form des Gleichgewichts

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{P}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{R}^n, \quad \lambda \in \mathcal{R}. \quad (1)$$

$\mathbf{R}$  repräsentiert die innere Arbeit,  $\mathbf{P}$  die angreifenden Kräfte,  $\mathbf{u}$  den Verschiebungsvektor mit  $n$  Unbekannten und  $\lambda$  den Lastfaktor.

### 3 Algorithmen

Für die Berechnung nichtlinearer Lösungszweige wird hier das Bogenlängenverfahren verwendet. Damit ist das Nachfahren beliebiger Lastpfade, die auch abfallend oder sogar rückläufig sein können, möglich. Da diese Verfahren heute zu den Standardverfahren zur Lösung nichtlinearer Probleme gehören, soll dieser Punkt nicht weiter erläutert werden. Einzelheiten siehe z.B. Schweizerhof, Wriggers [2].

Die Bestimmung von Umkehr- und Verzweigungspunkten erfordert die Kenntnis der Tangenten- oder Hesse Matrix der nichtlinearen Gleichung (1), die häufig mit  $\mathbf{K}_T$  bezeichnet wird. Singuläre Punkte sind nun dadurch gekennzeichnet, daß die Determinante der Hesse Matrix verschwindet:  $\det \mathbf{K}_T = 0$ . Löst man in einem solchen Punkt das Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K}_T - \omega \mathbf{1}) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

so kann mit folgender Beziehung zwischen Umkehr- und Verzweigungspunkten unterschieden werden, siehe z.B. Wriggers, Wagner, Mische [3]

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{P} = \begin{cases} = 0 & \text{Verzweigungspunkt} \\ \neq 0 & \text{Umkehrpunkt} \end{cases} \quad (3)$$

Da in der Plastizitätstheorie während des Rechenprozesses eine Entlastung jederzeit auftreten kann, ist durch den entstehenden Knick im Last-Verschiebungsraum die Gleichgewichtsbedingung (1) streng genommen nicht differenzierbar. Damit müssen aus der Elastizitätstheorie bekannte Algorithmen verändert werden. So wird aus dem zur Auffindung von Verzweigungspunkten verwendeten Bisektionsalgorithmus ein einseitiges Verfahren, das Entlastung ausschließt. Mit diesem Verfahren kann nun ein singulärer Punkt in der Last-Verschiebungskurve der Struktur beliebig genau bestimmt werden. An diesem Punkt ist für die Bestimmung der Art der Singularität das Eigenwertproblem (2) zu lösen. Wenn man die mathematische Struktur des linearen Vergleichskörpers von Hill [4] mit der der tangentialen Steifigkeitsmatrix vergleicht, so stellt man fest, daß beide von gleichem Aufbau sind. Damit stellt die tangentiale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  den linearen - oder besser tangentialen - Vergleichskörper an der Stelle der Singularität dar.

Kennt man weiterhin die Ableitung des Produkts aus tangentialer Steifigkeitsmatrix und Eigenvektor  $\boldsymbol{\varphi}$  in Richtung von  $\mathbf{u}$ :  $D(\mathbf{K}_T \boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{u}$ , so ist es möglich die Tangente des Sekundärpfades am Stabilitätspunkt zu bestimmen. Da die Berechnung dieser Ableitung Rahmen der Plastizitätstheorie großer Deformationen analytisch kaum berechenbar ist, muß hier eine numerische Differentiation durchgeführt werden.

Allgemein ergibt sich nun der folgende Algorithmus zur Behandlung von Instabilitäten für Probleme der Plastizitätstheorie

1. Kurvenverfolgung von (1) mittels Bogenlängenverfahren.
2. Tritt bei der Kurvenverfolgung ein Nulldurchgang in der Determinante von  $\mathbf{K}_T$  auf, so ist mittels eines einseitigen Bisektionsverfahren der Stabilitätspunkt genau zu bestimmen.
3. Lösung des Eigenwertproblems (2) zur Bestimmung von  $\boldsymbol{\varphi}$ .
4. Feststellung der Art des Stabilitätspunktes mittels (3).
5. Wenn gewünscht, Verzweigung in den Sekundärpfad, wie oben beschrieben.

#### 4 Beispiel

Als Beispiel sei das diffuse Einschnüren eines runden Zugstabes untersucht. Die Materialdaten sind dem nachfolgenden Bild 1 zu entnehmen, das auch das Finite-Element-Netz zeigt. Die Randbedingungen sind so gewählt, daß ein homogener Spannungszustand im Zugstab auftritt. Bild 2 zeigt den deformierten Zugstab zu unterschiedlichen

Laststufen nachdem in den Sekundärpfad, der mit dem Einschnürprozess verbunden ist, gewechselt wurde. In Bild 3 erkennt man die Sensibilität der Lösung gegenüber Imperfektionen. Hier wurden verschiedene Berechnungen verglichen. Die durchgezogene Kurve zeigt die homogene Lösung, die nach durchlaufen eines Lastmaximums an der Stelle  $B_1$  in den Sekundärpfad verzweigt. Durch die strichpunktierte und die lange gestrichelte Linie sind zwei Lösungen mit Anfangsimperfektion wiedergegeben, wobei als Imperfektion eine kleine Änderung in der Geometrie vorgegeben wurde.

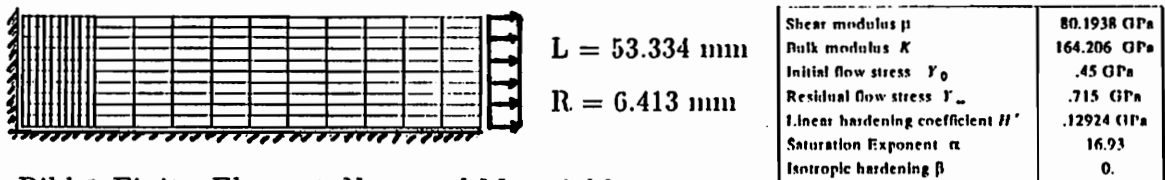


Bild 1 Finite-Element-Netz und Materialdaten.

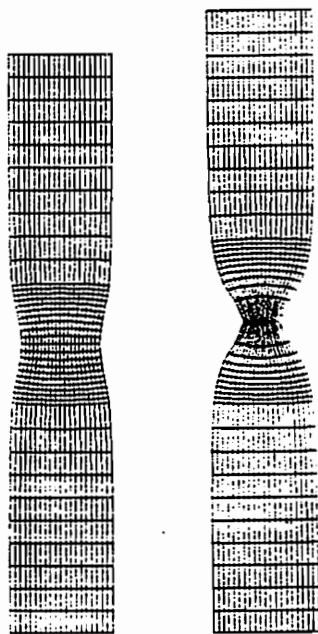


Bild 2 Eingeschnürter Zugstab.

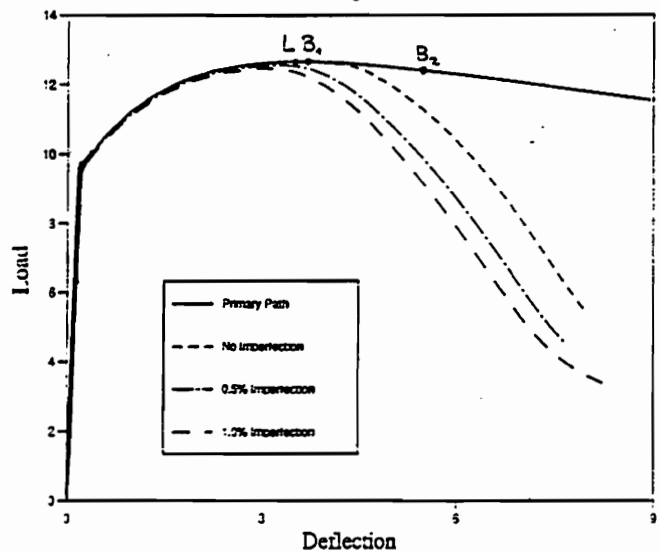


Bild 3 Lastverschiebungsdiagramm.

### Literaturverzeichnis

- [1] Simo, J. C.: A Framework for Finite Strain Elastoplasticity based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition, Part I, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 66 (1988) 199-219.
- [2] Schweizerhof, K.; Wriggers, P.: Consistent Linearization for Path Following Methods in Nonlinear FE Analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 59 (1986) 261-279.
- [3] Wriggers, P.; Wagner, W.; Mische, C.: A Quadratically Convergent Procedure for the Calculation of Stability Points in Finite Element Analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 70, 329-347, 1988.
- [4] Hill, R.: A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids, *J. Mech. Phys. Solids* 6 (1958) 236-249.

FINITE-ELEMENT-RECHNUNGEN MIT EINEM MAKROSKOPISCHEN KRIECHMODELL  
F.Kublik, Institut für Allgemeine Mechanik und Festigkeitslehre,  
Technische Universität Braunschweig

Das vollständige stochastische Werkstoffmodell nach Steck /1/ basiert auf der Beschreibung der plastischen Formänderungen durch die Bewegungen von Fließeinheiten im Material. Fließeinheiten, die man sich als Versetzungen bzw. Versetzungsgruppen vorstellen kann, lagern sich vor Hindernissen wie z.B. Korngrenzen oder Fremdatomen an. Hindernisse können durch das Anlegen einer äußeren Spannung und durch eine thermische Aktivierung überwunden werden. Charakteristisch für die Hindernishöhe ist dabei die zu überwindende Hindernisenergie. Um numerisch mit einer Verteilung der Hindernishöhen in einem Material rechnen zu können, wird von einer diskreten Anzahl an Hindernisenergieklassen ausgegangen. In jeder dieser Klassen befindet sich eine vom Verformungszustand abhängige Anzahl an Fließeinheiten.

Betrachtet man den Hochtemperaturbereich so erfolgt hauptsächlich eine thermische Aktivierung der Fließeinheiten, die sich durch die Arrhenius-Funktion /2/ beschreiben läßt. Von einem Zeitschritt zum nächsten kann eine Fließeinheit in eine Klasse höherer Hindernisenergie (Verfestigung) oder eine Klasse niedriger Energie (Erholung) springen.

Während der Durchführung eines Versuchs verlagern sich die Fließeinheiten und somit auch die Häufigkeitsverteilung in den gewählten Hindernisenergieklassen. Eine besonders charakteristische Rolle wird dabei dem Mittelwert der Hindernisenergie eingeräumt, so daß sich eine Formulierung des Werkstoffmodells um diesen Mittelwert mit nur einer Klasse anbietet. Führt man eine entsprechende Transformation durch, so führt dies auf ein System von drei Differentialgleichungen zur Beschreibung der plastischen Formänderungsgeschwindigkeit und der inneren Variablen. Für den Kriechversuch, bei dem die Spannung und die Temperatur konstant gehalten werden, läßt sich die Anzahl der Fließeinheiten als annähernd konstant ansehen, so daß man zu folgendem Kriechmodell kommt /3/:

$$\dot{\epsilon}_{pl} = \lambda' c_1' \exp^{-\left(1 - \frac{\alpha-1}{\kappa}\right) \frac{U_0}{RT}} \left( 2 \sinh \left( \frac{\Delta V \sigma}{RT} \right) \right)^{1 + \frac{1}{\kappa}} \exp^{-\frac{F}{RT}}$$
$$\dot{F} = \frac{1}{\lambda'} \dot{\epsilon}_{pl} - c_2' \exp^{-\frac{\alpha U_0 - \beta F}{RT}}$$



Die innere Strukturgröße  $F$  beschreibt dabei die zeitliche Entwicklung der mittleren Hindernisenergie.

Die auftretenden Werkstoffparameter können in zwei Schritten angepaßt werden. Zuerst wird mit Hilfe der stationären Kriechdaten ein Teil der Parameter bestimmt. Alle weiteren ergeben sich dann durch Berücksichtigung des transienten primären Kriechbereichs. Für alle folgenden numerischen Untersuchungen wurde auf die angepaßten Daten für Kupfer /3/ zurückgegriffen.

Zur numerischen Integration des DGL-Systems wurden verschiedenen Einschrittverfahren unter dem Aspekt der Anwendung in einem Finite-Element-Programm herangezogen. Während Verfahren höherer Fehlerordnung (Prädiktor-Korrektor nach Heun, Runge-Kutta explizit und implizit) etwas aufwendiger in der Programmierung waren und auch höhere Rechenzeiten benötigten, bewährten sich die einfachen Euler-Verfahren (explizit und implizit) durch ausreichende Genauigkeit (im Vergleich zu Referenzlösungen mit Mehrschrittverfahren) und geringe Rechenzeiten. Bei den impliziten Verfahren wurden für die notwendige Iteration die Verfahren von Newton-Raphson und von Steffensen betrachtet. Während man beim Newton-Verfahren die Ableitungen der Gleichungen benötigt, kommt man bei dem Steffensen-Verfahren ohne Ableitungen aus. Es zeigte sich, daß die Iteration bei Benutzung des Steffensen-Algorithmus noch bei großen Zeitschritten schnell konvergiert, während sie bei Anwendung des Newton-Verfahrens schon bei kleineren Zeitschritten versagt. Bei einem System von gekoppelten Differentialgleichungen läßt sich jedoch das Steffensen-Verfahren nicht mehr anwenden, da es nur für eine DGL ausgelegt ist. Weiterhin konnte man bei einem größeren Zeitschritt die Vorzüge eines impliziten gegenüber einem expliziten Verfahren erkennen. Die guten Ergebnisse bei Anwendung einfacher Verfahren läßt sich durch das System nicht sehr steifer entkoppelter Differentialgleichungen erklären.

Beim numerischen Nachfahren von einachsigen Versuchen ließ sich zeigen, daß sowohl Kriechversuche mit Temperatur- und Spannungssprüngen als auch Warmzugversuche mit monotoner und zyklischer Belastung qualitativ gute Ergebnisse liefern. Quantitative Aussagen konnten mangels entsprechenden Versuchsdaten nicht gemacht werden.

Als weiterer Schritt auf dem Weg zum anwendungsorientierten Einsatz eines Werkstoffmodells wurde die Möglichkeit geschaffen, etwas umfangreichere zweidimensionale Bauteile mit Hilfe eines Finite-Element-Programms zu betrachten. Das FE-Programm SNAPR2 bietet die Möglichkeit bei ebenen Problemen die Verformungsgrößen über einem Verschiebungsansatz in den Elementen zu ermitteln. Es wird dabei geometrisch linear (kleine Dehnungen) gerechnet. Die dreidimensionale Formulierung des Werkstoffmodells erfolgt über die Anwendung der Theorie der zweiten Spannungsinvarianten. Die nichtlinearen Gleichungen werden in Zeitschritten bei Verwendung einer expliziten Zeitintegration berücksichtigt. Bei der Simulation eines Kriechversuchs wird im nullten Zeitschritt die Last aufgebracht. Im Anschluß daran werden in jedem Zeitschritt nacheinander die entsprechenden plastischen Dehnungen, die daraus resultierenden sogenannten "Pseudo"-Lasten und schließlich die Spannunginkremente ausiteriert /vgl. 4/. Bei der gesamten Rechnung wird nur zu Beginn einmal die Steifigkeitsmatrix aufgebaut.

Testrechnungen mit einer Lochscheibe, die mit 226 Freiheitsgraden diskretisiert wurde, ergaben qualitativ gute Ergebnisse /vgl. 5/. Es zeigt sich am höchstbelasteten äußeren Knoten im engsten Querschnitt ein schneller Spannungsabbau, während die Spannungen am Innenknoten langsam zunehmen. Nach kurzer Zeit wird ein quasi stationärer Zustand erreicht, der sich später kaum noch ändert. Bei Betrachtung der plastischen Dehnungen ergeben sich die für einen Kriechversuch typischen Verläufe.

#### Literaturverzeichnis

- /1/ Steck, E.: A Stochastic Model for the High-Temperature Plasticity of Metals, Int. J. of Plasticity 1, 1985
- /2/ Ilschner, B.: Hochtemperaturplastizität, Springer-Verlag, Berlin 1973
- /3/ Schettler-Köhler, R.-W.: Entwicklung eines makroskopischen Kriechgesetzes für Metalle aus einem stochastischen Kriechmodell, Dissertation, TU Braunschweig 1985
- /4/ Hinton, E. and Owen, D.R.J.: Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press, Swansea 1980
- /5/ Hornberger, K. und Stamm, H.: Anwendung viskoplastischer Stoffgesetze in Finite Element Programmen, Bericht KfK, April 1987

Einige thermodynamische Betrachtungen zur Plastizität  
Th. Lehmann, Ruhr-Universität Bochum

Einer phänomenologischen Beschreibung inelastischer Deformationen, gegebenenfalls unter Einschluß von Schädigungsprozessen, seien folgende Annahmen zugrunde gelegt:

- (I) Der Körper kann als klassisches Kontinuum betrachtet werden, auch im Falle der Schädigung durch Mikro-Defekte;
- (II) der thermodynamische Zustand jedes Körperelementes ist durch die aktuellen Werte eines Satzes von externen und internen Zustandsgrößen eindeutig bestimmt, auch im Falle thermodynamischen Nicht-Gleichgewichtes.

Basierend auf diesen Annahmen können vier Klassen von thermodynamischen Prozessen und entsprechende Bilanzgleichungen für Energie und Entropie definiert werden, die eine Erweiterung des klassischen thermodynamischen Rahmens darstellen. Die Bilanzgleichungen repräsentieren einen restriktiven Rahmen für die Formulierung von konstitutiven Gesetzen.

Als Beispiel wird ein elastisch-plastisches Material mit isotroper und anisotroper Verfestigung gewählt. Es wird zunächst gezeigt, wie der Ansatz für die unmittelbar dissipierte mechanische Arbeit zu modifizieren ist, wenn die Fließbedingung den Spannungs-Nullpunkt nicht mehr umschließt. Ferner wird erörtert, welche Änderung in den Ansätzen nötig sind, wenn ein Mehr-Flächen-Modell mit einem kinematischen Verfestigungsgesetz nach MROZ eingeführt wird.

Bei der Beschreibung von (isotropen) Schädigungsprozessen lassen sich zwei Möglichkeiten verfolgen:

- a) Der Schädigungsparameter stellt nur eine Prozeß-Variable (wie die inelastische Verzerrung) dar und geht daher nicht in den Ausdruck für die thermodynamische Zustandsfunktion ein.
- b) Der Schädigungsparameter ist eine thermodynamische Zustandsgröße.

Der Fall a) kann als eine erste Näherung betrachtet werden. Im Falle b) ergeben sich weiterreichende Konsequenzen für die Formulierung des konstitutiven Gesetzes.

ZUM EINFLUSS VON GEFÜGEUMWANDLUNGEN AUF ELASTISCH-PLASTISCHE KÖRPER

M. Börnsen, Institut für Mechanik, Universität Hannover

Beim Abkühlen bzw. Abschrecken vieler metallischer Werkstoffe, insbesondere bei Eisenwerkstoffen, treten Gefügeumwandlungen auf, die einerseits die physikalischen Eigenschaften der Stoffe im abgekühlten Zustand, andererseits aber auch die Eigenspannungszustände der betrachteten Körper entscheidend beeinflussen. Dabei ist festzustellen, daß etwaige Änderungen der Zeit -Temperaturführung des Prozesses starke Auswirkungen auf diese Größen haben können.

Solche Vorgänge stellen ein gekoppeltes thermodynamisch - mechanisches System aus Wärmeleitung, Gefügeumwandlungen und Deformationen dar (vgl. Bild 1). Temperaturänderungen sind hierbei Ursache für Phasenumwandlungen (Pfeil 1 in Bild 1) und bedingen Wärmedehnungen (Pfeil 2). Phasenumwandlungen ihrerseits beeinträchtigen das Temperaturfeld (Umwandlungswärme) (Pfeil 3) und rufen Umwandlungsdehnungen hervor (Pfeil 4), während elastische und plastische Deformationen das Temperaturfeld (Kompression, Dissipation) (Pfeil 5) sowie die Kinetik der Umwandlungen beeinflussen (Pfeil 6).

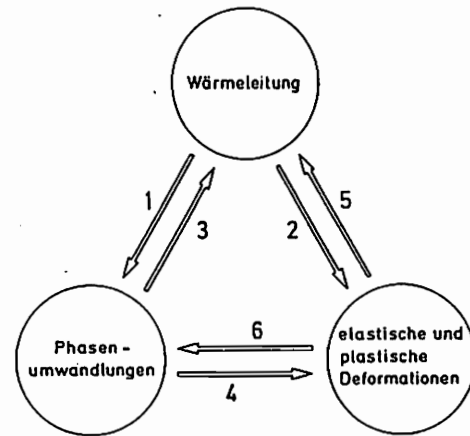


Bild 1: Systemkopplungen

Für die Simulation dieser Vorgänge ist der zeitliche Ablauf der Umwandlungen von entscheidender Bedeutung :

a) Die Kinetik solcher Umwandlungen, die mit Diffusionsvorgängen im Kristallgitter einhergehen, also stets mit zeitlicher Verzögerung Gleichgewichtszustände erreichen, läßt sich nach Avrami /1/ bzw. Johnson und Mehl /2/ für isotherme Vorgänge beschreiben durch :

$$\zeta(t)_{\Theta=\text{const}} = \zeta_{\text{Gl}}(\Theta) \left\{ 1 - \exp[-k(\Theta) t^{n(\Theta)}] \right\} \quad (1)$$

Die temperaturabhängigen Parameter  $n(\Theta)$ ,  $k(\Theta)$  lassen sich aus den isothermischen Zeit-Temperatur-Umwandlungsschaubildern ermitteln.

Dem Umstand, daß bei realen Prozessen die Temperaturänderung in der Regel kontinuierlich stattfindet, die Umwandlung also nicht-isotherm abläuft, wird dadurch Rechnung getragen, daß man die Vorgänge als eine Folge isothermer Schritte auffaßt, in denen der Umwandlungsfortschritt entsprechend der Zeitableitung von Gl.1 berechnet wird :

$$\dot{\zeta}(\zeta, \Theta) = n(\Theta) k(\Theta)^{\frac{1}{n(\Theta)}} \left[ \zeta_{\text{Gl}}(\Theta) - 1 \right] \left\{ \ln \frac{\zeta_{\text{Gl}}(\Theta)}{\zeta_{\text{Gl}}(\Theta) - \zeta} \right\}^{1 - \frac{1}{n(\Theta)}} \quad (2)$$

b) martensitische Umwandlungen laufen dagegen wegen des Fehlens von Diffusionsvorgängen spontan ab, nach Unterschreiten der Martensitstarttemperatur  $M_s$  klappen ohne zeitliche Verzögerung komplette Gitterbereiche um. Die Beschreibung der Kinetik dieser Umwandlungen geht auf Koistinen und Marburger /3/ zurück, deren Ansatz jedoch

von Hougardy /4/ noch besser an Meßergebnisse angepaßt wurde :

$$\zeta_M = 1 - \exp \left[ -k \left( M_s - \Theta \right)^x \right] \quad (3)$$

Neben der Tatsache, daß sich die Vorgänge in relativ großen Temperaturintervallen abspielen, und daher sämtliche Stoffwerte (Temperaturausdehnungskoeffizient  $\alpha$  bzw. spez. Vol.  $v$ , Elastizitätsmodul  $E$ , Querszahl  $\nu$ , Formänderungsfestigkeit  $Y$  bzw. Fließdehnung  $y$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und spez. Wärmekapazität  $c_p$ ) als temperaturabhängig aufzufassen sind, bedingen die Gefügeumwandlungen an sich starke Veränderungen der Stoffwerte. Die in der Rechnung benötigten Werte werden durch lineare Mittelung der temperaturabhängigen Stoffwerte entsprechend der Gefügeanteile der einzelnen Phasen berechnet. Weiterhin ist wegen der veränderlichen Wärmekapazität die Umwandlungswärme eine Funktion der Temperatur.

Der Effekt der Umwandlungsplastizität, das Auftreten bleibender Formänderungen während der Umwandlung — auch wenn die lokalen Vergleichsspannungen stets unterhalb der Fließspannung jeder der beteiligten Phasen liegen — läßt sich nach einem Ansatz von Giusti /5/ in der Form

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^{tp} = \frac{3}{2} K \underline{\underline{g}} \frac{df(\zeta)}{d\zeta} \dot{\zeta} \quad \text{mit } f(\zeta) = \zeta(2 - \zeta) \quad (4)$$

beschreiben. Dabei stellt  $K$  einen Werstoffparameter und  $\underline{\underline{g}}$  den Spannungsdeviator dar.

Zur Beschreibung des thermomechanischen Verhaltens wird eine total Lagrangesche Formulierung im Dehnungsraum herangezogen (vgl. /6/, /7/). Die Zwischenkonfiguration  $\hat{K}$  unterscheidet sich von der Referenzkonfiguration  $\tilde{K}$  (Referenztemperatur  $\tilde{\Theta}$ , Referenzphasenkonzentration  $\tilde{\zeta}_i$ ) lediglich durch die rein plastische Deformation  $\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}$ ,  $\hat{\underline{\underline{c}}}$  bzw.  $\hat{\underline{\underline{\gamma}}}$ . Der Übergang von der Zwischenkonfiguration  $\hat{K}$  zur aktuellen Konfiguration  $K$  ist thermoelastisch, enthält also neben rein elastischer Deformation noch die Wärmedehnung und die Umwandlungsdehnung. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich mit den Invarianten des elastischen Dehnungsmaßes  $\underline{\underline{\gamma}}^{el}$  eine freie Helmholtzenergie  $\Phi$  formulieren :

$$\tilde{\rho} \Phi = G \left( I_2 - \frac{\nu}{1-2\nu} I_1^2 \right) - \frac{E}{1-2\nu} I_1 \frac{v(\zeta_i, \Theta) - v(\tilde{\zeta}_i, \tilde{\Theta})}{3 v(\tilde{\zeta}_i, \tilde{\Theta})} + \tilde{\rho} \int_{\tilde{\Theta}}^{\Theta} -\eta d\Theta + \tilde{\rho} \int_{\tilde{\zeta}_i}^{\zeta_i} \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta_i} - \Theta \frac{\partial \eta}{\partial \zeta_i} \right) d\zeta \quad (5)$$

Die ersten beiden Terme bestimmen das elastische Materialverhalten, während sich das plastische Verhalten aus zwei plastischen Teilstoffgesetzen ergibt. Zunächst sei auf jene Plastizität hingewiesen, die sich nach Erfüllung einer Konsistenzbedingung und Belastungsbedingung (vgl./6/) einstellt. Zusätzlich kann während der Umwandlungen die o. g. Umwandlungsplastizität auftreten. Nach Übersetzung von Gl.4 in eine Dehnungsraumformulierung erhält man als Fließregel

$$\dot{\hat{\underline{\underline{\epsilon}}}} = - \frac{\chi^*}{2} \left[ \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} \cdot \underline{\underline{c}} \cdot \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} - \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} \frac{1}{3} \left( \underline{\underline{c}} \cdot \hat{\underline{\underline{\epsilon}}} \right) \right] \quad (6)$$

Der Fließfaktor  $\chi^*$  setzt sich nun zusammen aus  $\chi$  (entsprechend der Forderung  $\dot{g} = 0$ ) und einem umwandlungsbedingten Anteil  $\chi^{tp}$  mit :

$$\chi^{tp}(\zeta_i, \dot{\zeta}_i) = 6 K G \frac{\rho}{\tilde{\rho}} \frac{df(\zeta_i)}{d\zeta_i} \dot{\zeta}_i \quad (7)$$

Der Einfluß der Umwandlungsplastizität auf den Eigenspannungszustand soll hier anhand zweier Rechnungen (einmal mit Umwandlungsplastizität, einmal ohne diese) exemplarisch dargestellt werden. Es wurde das Abschrecken eines Stahlzylinders von 30 mm Durchmesser und unendlicher Länge mit den Eigenschaften eines Stahls 50CrV4 in Wasser simuliert (Anfangstemperatur 1173 K, Endtemperatur 293 K). Der Zylinder härtet unter diesen Bedingungen durch, d. h. unterhalb  $M_s = 543$  K setzt Martensitbildung ein. Bild 2 zeigt den Temperaturverlauf am Rand (R) und im Kern (K) über der Zeit, Bild 3 den zeitlichen Verlauf der Martensitbildung, Bilder 4 u. 5 die Entwicklung der Umfangsspannungen, die in der gleichen Größenordnung liegen wie die Axialspannungen. Die Radialspannungen sind wesentlich kleiner. Als wichtiges Ergebnis dieser Rechnung muß angesehen werden, daß die zusätzliche Möglichkeit der Plastizierung (Bild 5) die Spannungen während der Martensitbildung erheblich erniedrigt. Diese ruft aber gerade eine grundsätzlich andere Eigenspannungsverteilung nach vollständiger Abkühlung des Zylinders als bei der Rechnung ohne Umwandlungsplastizität (Bild 4) hervor.

Bild 2 :  
Temperaturverlauf  
am Rand  
und  
im Kern

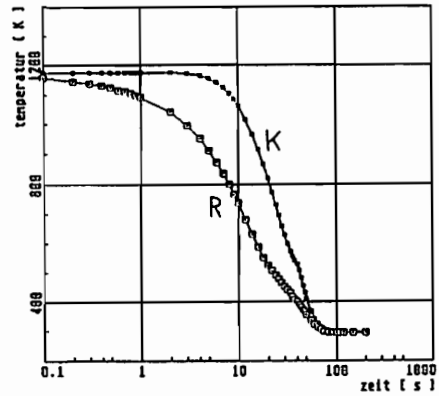


Bild 3 :  
Martensitanteil  
über der  
Zeit

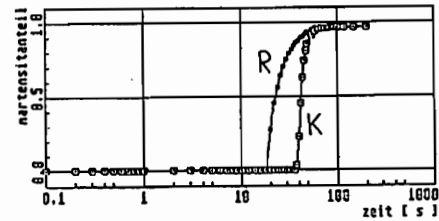


Bild 4 :  
Spannungs-  
entwicklung  
ohne Um-  
wandlungs-  
plastizität

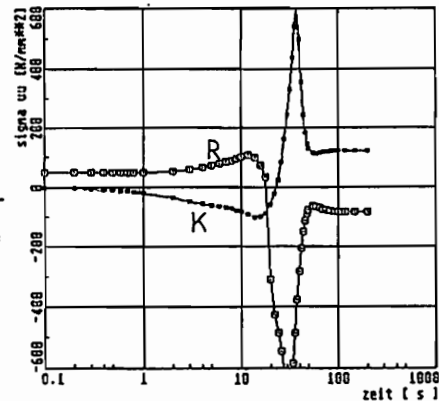
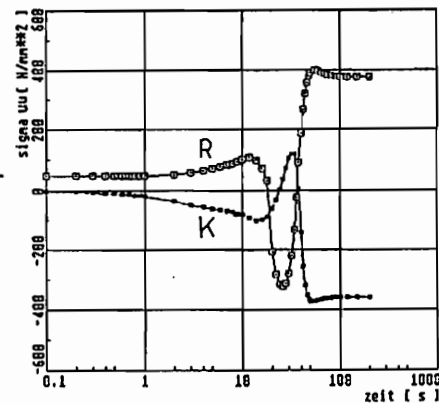


Bild 5 :  
Spannungs-  
entwicklung  
mit Um-  
wandlungs-  
plastizität



#### Literaturverzeichnis

- /1/ Avrami, M. : J. Chem. Phys., 1939, 7, 1103. /dto. 1940, 8, 212. /dto. 1941, 9, 177.
- /2/ Johnson, W. A. u. R. F. Mehl : Trans. AIME, 1939, 135, 416.
- /3/ Koistinen, D. P. u. R. E. Marburger : Acta Metallica, 1959, 7, 59.
- /4/ Hougardy, H. : In : Werkstoffkunde Stahl. Bd.1. Verl. Stahleisen. Düsseldorf 1984.
- /5/ Giusti, J. : Thèse d'Etat, Université de Paris VI, 1981.
- /6/ Besdo, D. : Zur Formulierung von Stoffgesetzen der Plastomechanik im Dehnungsraum nach Ilyushins Postulat. Ing. Arch. 1981, 51, 1-8.

Eine einfache Beispielrechnung eines homogenen, ebenen Stauchvorgangs soll die Unterschiede im Iterationsverhalten und damit im Rechenzeitbedarf sowie in den thermischen und mechanischen Rechengrößen aufzeigen, die sich bei der Verwendung der inkrementellen Koppelung einerseits und der iterativen Koppelung andererseits ergeben.

Der Stauchvorgang wurde adiabatisch und reibungsfrei einmal mit 10 Inkrementen (à 2% Höhenreduktion) und ein zweites Mal mit 100 Inkrementen (à 0.2% Höhenreduktion) bis auf 80% der Anfangshöhe durchgeführt. Eine starke Beeinflussung der mechanischen Rechnung durch die thermische wurde durch eine fiktive, starke Temperaturabhängigkeit der Fließspannung realisiert.

Bei deutlich besserem Iterationsverhalten der inkrementellen gegenüber der iterativen Koppelung (inkrementell: 4 It. / Ink., iterativ: 8 It. / Ink.) zeigten sich doch sehr geringe Unterschiede in den Rechenergebnissen.

Bei 10 Inkrementen (großer Schrittweite) ergaben sich

bei den Temperaturen Abweichungen  $\leq 0.6\%$  und

bei den mechanischen Größen Abweichungen  $\leq 2.3\%$ .

Bei einer Verkleinerung des Lastinkrementes (100 à 0.2%) verringerte sich auch der Unterschied zwischen Rechenergebnissen infolge inkrementeller und iterativer Rechnung um ca. Faktor 10.

### Literaturverzeichnis

/ 1 / Besdo, D., Zur Formulierung von Stoffgesetzen der Plastomechanik im Dehnungsraum nach Ilyushins Postulat, Ing. Archiv 51 (1981)

/ 2 / Bathe, K.-J., Ramm, E., and Wilson, E., L., Finite Element formulation for large deformation dynamic analysis, Int. J. Num. Meth. Engng. Vol 9 (1975), 353-386

FEM-FORMULIERUNG FÜR ELASTISCHE UND GROSSE PLASTISCHE  
VERFORMUNGEN

H. Gröhlich, Institut für Allgemeine Mechanik und Festig-  
keitslehre, TU Braunschweig

Das Differentialgleichungssystem eines 'Unified Model' /1/  
kann in folgender verkürzter Schreibweise angegeben werden:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= f(\underline{x}, \underline{v}) \\ g(\underline{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Die Nebenbedingung symbolisiert die Cauchy'sche Gleichge-  
wichtsbedingung und  $\underline{v}$  das Geschwindigkeitsfeld der mate-  
riellen Punkte des Kontinuums. Da das Geschwindigkeitsfeld  
nicht zeitlich konstant ist, fehlt in dem Stoffgesetz eine  
Bestimmungsgleichung für das aktuelle Geschwindigkeitsfeld.  
Die gesuchte Gleichung erhält man durch die materielle Ab-  
leitung der Gleichgewichtsbedingung /2/. Im folgenden wird  
also mit

$$(\text{div } \underline{\sigma})^{\cdot} = 0 \quad (2)$$

gerechnet.

Das Funktional wird durch Anwendung des Prinzipes der ge-  
wichteten Residuen als Galerkin Methode auf (2) formuliert.  
Das Verfahren von Galerkin führt, wenn das DGL-System und die  
Randterme selbstadjungiert sind auf sym. Matrizen. Das ist  
hier nicht der Fall, da Aufgrund eines Differentialausdruckes  
 $\underline{K}(\underline{v}, \underline{\sigma})$  kein quadratischer Integrand hervorgeht, was bedeutet,  
daß das DGL-System nicht selbstadjungiert ist.

$$\underline{K} = \int_V (\underline{\nabla} \otimes \underline{v}) \cdot \underline{\sigma} - \text{div } \underline{v} \cdot \underline{\sigma} \quad (3)$$

Das Funktional lautet

$$\int_{A_0} \dot{\underline{T}}_0 \cdot \delta \underline{v} \, dA_0 - \int_V (\underline{\sigma} - \underline{K}) \cdot \int_V (\underline{\nabla} \otimes \delta \underline{v}) \, dV = 0 \quad (4)$$

Der Randterm enthält den Spannungsgeschwindigkeitsvektor  $\dot{\underline{T}}_0$   
der aktuellen Konfiguration, der auf die Ausgangskonfigura-  
tion  $A_0$  bezogen ist.



Mit der Methode der Finiten Elemente kann nun das Geschwindigkeitsfeld bestimmt werden. Die dafür benötigten Werte für Spannungen und plastischen Dehngeschwindigkeiten müssen dafür über das Stoffgesetz an den Integrationspunkten der FE-Rechnung berechnet werden.

Neben der Gleichung (2) muß auch die Gleichgewichtsbedingung während der gesamten Rechnung erfüllt werden. Bei numerischen Berechnungen verhindert dies ein sich akkumulierender Fehler, da als Nebenbedingung die materielle Ableitung der Gleichgewichtsbedingung benutzt wird. Durch eine Stabilisierung der Nebenbedingung /2,3,4/, bei der diese durch eine asymptotisch stabile DGL ersetzt wird, kann der so entstandene Fehler eliminiert werden.

$$\dot{\underline{x}} + \alpha \underline{g}(\underline{x}) + \beta \int_{t_0}^t \underline{g}(\underline{x}) d\tau + \mu \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \underline{g}(\underline{x}) d\tau d\tau = 0 \quad (5)$$

$\alpha, \beta, \mu > 0$

Das Funktional (4) wird also mit der Gleichgewichtsbedingung und dem 1. und 2. Integral dieser erweitert. Das DGL-System des Stoffgesetzes wird zur Bestimmung der Integrale um die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_{n+1} &= \underline{g}(\underline{x}) \\ \dot{\underline{x}}_{n+2} &= \underline{x}_{n+1} \end{aligned} \quad (6)$$

erweitert.

Die Parameter  $\alpha, \beta, \mu$  sind nicht beliebig groß wählbar /5,6,7/. Durch Analogien zu regeltechnischen Problemstellungen, aus denen auch die Stabilisierungsvorschrift (5) hervorgeht, reduziert sich die Anzahl der Parameter auf einen /4/. Durch eine adaptive Parameterwahl /8/ wird der Parameter automatisch und optimal gewählt. Dabei wird ausgenutzt, daß zwischen dem gesuchten Parameter und der Schrittweite des verwendeten Zeitintegrationsverfahrens mit Schrittweitensteuerung eine eindeutige Relation besteht.

Durch die Forderung nach Volumenkonstanz im plastischen Be-

reich, können in der FE-Rechnung für EFZ und axialsymmetrische Elemente Konvergenzprobleme entstehen. Es wird deshalb ein Vierknotenviereckselement verwendet, das eine modifizierte B-Matrix /9/ besitzt.

#### Literaturverzeichnis

- /1/ G.Wilhelms, ein phänomenologisches Werkstoffgesetz zur Beschreibung von Plastizität und Kriechen metallischer Werkstoffe, Diss. TU Braunschweig (1984)
- /2/ J.Stickforth, A remark on time-integration of plastic flow and creep, Acta Mech. 59 (1986), 113-121
- /3/ J.Baumgarte, Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems, Comp.Meth.in Appl.Mech. and Eng. 1 (1972), 1-16
- /4/ G.P.Ostermeyer, Mechanische Systeme mit beschränktem Konfigurationsraum, Diss. TU Braunschweig (1983)
- /5/ G.P.Ostermeyer, Die Stabilisierung von Bindungen und ersten Integralen als Regelungsproblem und ihre Konsequenzen, ZAMM 65 (1985) 3, 185-187
- /6/ W.Geiger, Numerische Instabilität und Stabilisierung der kinematischen Quaternionendifferentialgleichung, ZAMM 59 (1979), T118-120
- /7/ W.v.Grünhagen, Zur Stabilisierung der numerischen Integration von Bewegungsgleichungen, Diss. TU Braunschweig (1979)
- /8/ K.Bergmann, Stabilisierung als regelungstechnisches Problem, Diplomarbeit Inst. für Technische Mechanik, TU Braunschweig (1983)
- /9/ J.C.Nagtegaal, D.M.Parks, J.R.Rice, On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, Comp.Meth in Appl.Mech.and Eng.4 (1974), 153-177

## Probleme bei praxisnaher Bestimmung der Fließspannung

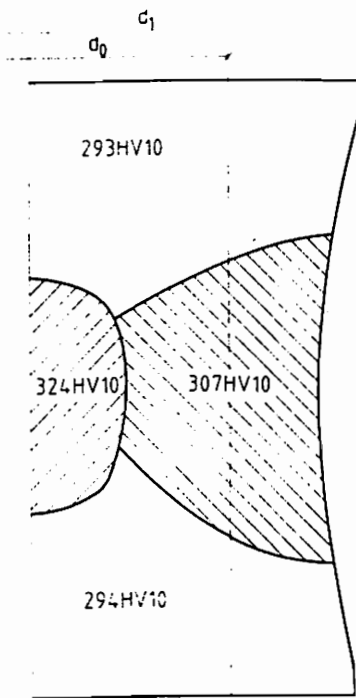
Wolfgang Rasp  
Max-Planck-Institut Düsseldorf

Die Kaltfließkurve wird im allgemeinen dargestellt als Funktion der Fließspannung vom Umformgrad. Dabei unterstellt man, daß der verfestigende und der entfestigende Einfluß der Umformgeschwindigkeit bzw. der Umformtemperatur sich gegenseitig aufheben. Diese Voraussetzung erscheint für viele Formgebungsverfahren durchaus zulässig. Beim Kaltwalzen jedoch muß mit extremen Bedingungen gerechnet werden: Etwa beim Walzen in einer 6-gerüstigen Tandemstraße wird ein Umformgrad von  $\varphi = 2$  erreicht. Dabei kann eine wahre Umformgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_w$  von ca.  $1000 \text{ s}^{-1}$  und eine wahre Umformtemperatur  $\delta_w$  von etwa  $250^\circ\text{C}$  erreicht werden. Die Literatur liefert Fließkurven bis etwa  $\varphi = 1,2$ , wobei allerdings häufig unklar ist, unter welchen Bedingungen die Meßwerte gewonnen wurden. Extrapoliert man die Fließkurve über  $\varphi = 1,2$  hinaus, so wird die Fehlerquelle unüberschaubar groß.

### Experimenteller Teil

Die verschiedene Versuchsserien sowohl an Stahl C15 als auch zum Vergleich an Stahl 15CrNi8 hatten folgende Ziele:

- o Einfluß der Versuchsauswertung
  - Bestimmung der aktuellen Querschnittsfläche aus Messung der Probenhöhe bzw. -durchmesser
- o Wirkung der Probengeometrie
  - Höhen/Durchmesser-Verhältnis
  - Probenform nach Rastegaev
- o Auswirkungen der Schmierbedingungen
  - Inhomogene Formänderung
  - Inhomogene Härteverteilung
  - Evtl. lokale Temperaturerhöhung



$d_1$  = maximaler Durchmesser nach dem dritten Stauchvorgang  
 $d_0$  = Ausgangsdurchmesser nach dem Abdrehen für den folgenden Stauchvorgang  
 $\varphi = 1,2$

Harteverteilung in der ungeschmierten Probe

Darüberhinaus wurde der Einfluß von  $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$  auf  $\Delta\delta$  untersucht und gezeigt, wie stark die Fließspannung  $k_f$  auf eine solche Temperaturerhöhung reagiert.

### Theorie der Oberen Schranke zum Zylinderstauchen

Eine interessante Fragestellung aus theoretischer Sicht ist die experimentell belegte Tatsache, daß Fließkurven mit erhöhter Reibung zu niedrigeren Fließspannungen führen als solche mit bester Schmierung. Hier soll die Vorstellung greifen, daß bei vermehrter Reibung ein Teil der Probe unverformt bleibt und somit sich die zu leistende Umformarbeit auf ein kleineres Volumen bezieht. Dieser Gedanke wird mit der Theorie der Oberen Schranke überprüft.

Für den Zylinderstauchversuch mit maximaler Reibung wurden mehrere unterschiedliche Deformationsmodelle angesetzt. Ein Modell geht davon aus, daß große Teile im Bereich der Stirnflächen nicht an der Umformung teilnehmen. Dadurch wird die Umformleistung geringer und gleichzeitig die Reibleistung, die bei

maximalem Reibungsfaktor  $m = 1,0$  identisch ist mit einer Scherleistung, größer.

Man kann nun den Wirkungsgrad definieren als die maximale Umformleistung bei Reibungsfreiheit  $\dot{W}_U$  bezogen auf die minimale Gesamtleistung  $\dot{W}_{ges}$ . Hier ist der Wirkungsgrad zunächst immer kleiner bzw. gleich eins. Eine erhöhte lokale Temperatur im Bereich der Scherzone hat dort lokal eine niedrigere Fließspannung und damit geringere Scherleistung bzw. Reibleistung zur Folge. Dies kann für die ungeschmierte Probe auch rechnerisch dazu führen, daß der so definierte Wirkungsgrad größer als eins werden kann.

### Zusammenfassung

Bei der Auswertung gestauchter Zylinderproben zeigte sich für die untersuchten Werkstoffe, daß zur Beschreibung einer realen Probe der rechnerische Durchmesser einer homogen gestauchten Probe eine gute Näherung ist, wie ein Vergleich mit gemessenen Durchmessern ergab. Die vorliegende Studie zeigt ferner, daß die für das Kaltwalzen benötigte Fließkurve mit einem gut geschmierten Zylinderstauchversuch gewonnen werden kann, da dann mit einer gleichmäßigen Formänderungsverteilung gerechnet werden kann. Dabei sollte nach einem Umformgrad von  $\varphi \approx 0,2$  der Versuch unterbrochen werden, um isotherme Bedingungen zu gewähren. Bei einem Anfangsverhältnis von  $h/d = 1,5$  sollte nach einem Umformgrad von ca. 0,75 die Probe wieder auf ein  $h/d$ -Verhältnis von 1,5 gedreht werden, um Einflüsse der Schmierbedingungen weitgehend zu vermeiden. Es ist dann unnötig, die aufwendige Probengeometrie nach Rastegaev einzusetzen.

Ein theoretischer Ansatz auf der Basis der Leistungsminimierung mit einer "Oberen-Schranke-Lösung" erklärt, wie man sich vorstellen kann, daß Versuche mit schlechter Schmierung einen besseren Wirkungsgrad haben als solche mit besten Reibbedingungen.

### Weiterführende Literaturhinweise in:

Rasp, W.:

Ermittlung der Fließspannung für das Kaltwalzen von Metallen.  
Bericht Nr. AW 109 des VFWH im VDEh, Düsseldorf 1987.

## Identifikation von Werkstoffparametern mit einem numerischen Optimierungsverfahren nach der Evolutionsstrategie

Dieter Müller, Technische Hochschule Darmstadt  
Gunther Hartmann, Technische Hochschule Darmstadt

### Zusammenfassung

Zur Berechnung mechanisch und thermisch hoch beanspruchter Maschinenkomponenten wurde in den vergangenen Jahren eine Vielzahl von inelastischen Werkstoffmodellen entwickelt. Das gemeinsame Ziel dieser Theorien ist die Beschreibung von inelastischen Verformungen mittels eines Gleichungssystems. Die Übereinstimmung der damit durchführbaren, numerischen Experimente mit entsprechenden experimentellen Befunden ist abhängig von der Wahl der modellspezifischen Materialparameter. Die Bestimmung dieser Parameter stellt mathematisch ein Optimierungsproblem dar. Zur Lösung solcher Probleme stehen eine Vielzahl von Strategien zur Verfügung, die sich in die beiden Gruppen der deterministischen und der stochastischen Verfahren aufteilen lassen. Deterministische Verfahren haben vor allem den Nachteil, beim Vorhandensein von lokalen Optima die globale Optima nicht erreichen zu können. Stochastische Verfahren besitzen aufgrund ihrer Zufallssteuerung die Fähigkeit sich von gefundenen lokalen Optima zu lösen, um somit das absolute Optimum zu finden.

Das hier verwendete stochastische Verfahren basiert auf einfachen Prinzipien nach Überlegungen von Rechenberg [2], und ist universell auf Optimierungsprobleme anwendbar. Die Grundidee dieser Strategie ist der Versuch die biologische Evolution technisch zu simulieren. Um überleben zu können, muß sich jedes Lebewesen seiner ständig veränderbaren, ökologischen Umgebung anpassen. Hierzu muß der genetische Code, der als eine Kette von Informationen aller individuellen Eigenschaften in der DNA vorliegt, verändert werden. Als Angriffspunkte der Evolution werden zwei Mechanismen der Vererbung erkannt. Zum einen besteht die Möglichkeit der direkten Manipulation des genetischen Codes als Vorgang der Mutation (ungeschlechtliche Vererbung); zum anderen können sich die Eigenschaften eines Nachkommens aus den Eigenschaften von verschiedenen Eltern rekombinieren (geschlechtliche Vererbung). Bei der Umsetzung der biologischen Beobachtungen auf technische Systeme werden zunächst die „genetischen“ Informationen durch einen  $n$ -dimensionalen Parametervektor  $g$  ersetzt, wobei  $n$  die Anzahl der das Simulationsverhalten bestimmenden und zu optimierenden Materialparameter  $g_i$  darstellt. Das Ziel des Verfahrens kann beschrieben werden mit

$$q(g) = \text{minimum} \quad , \quad (1)$$

mit dem Wert  $q$  als Qualität der Annäherung der numerischen Simulation an experimen-

telle Befunde. Dieses Ziel soll durch die Anwendung der erwähnten Vererbungsmechanismen erreicht werden. Der Vorgang der Mutation läßt sich mathematisch formulieren als

$$g_{\text{nachkomme}} = g_{\text{elter}} + z \quad (2)$$

Einen neuen Parametersatz  $g$  erhält man durch Übernahme eines bereits vorhandenen Vektors zu dem man einen Vektor  $z$  addiert, dessen Komponenten mittels Zufallsgeneratoren bestimmt werden. Die Variationsbreite der normalverteilten Zufallszahlen kann über die Standardabweichung bei einem festgesetzten Mittelwert von Null gesteuert werden.

Der zweite Mechanismus der Evolution—die Rekombination—benötigt einen Satz von vorhandenen Parametervektoren (Population). Diese Population  $\mathcal{P}$  besteht aus  $m$  Parametervektoren  $g^i$ :

$$\mathcal{P} = (g^1, \dots, g^j, \dots, g^m) \quad (3)$$

wobei der obere Index ein spezifisches Mitglied von  $\mathcal{P}$  identifiziert. Die geschlechtliche Vererbung kann dann beschrieben werden als

$$g_{i_{\text{nachkomme}}} = g_{i_{\text{elter}}}^j \quad i = 1, \dots, n; 1 \leq j \leq m, \quad (4)$$

wobei  $i$  einen speziellen Parameter kennzeichnet. Der Index  $j$  wird über einen Zufallsgenerator ermittelt und bestimmt den Elter-Vektor aus der Population  $\mathcal{P}$ , aus dem der Wert des Parameter  $g_i$  übernommen wird.

Beide Mechanismen lassen sich kombinieren um neue Parametersätze zu ermitteln. Diese müssen auf ihre Tauglichkeit überprüft werden. Durch Simulationsrechnungen mit diesen neuen Parametern und Vergleich mit experimentellen Daten werden die neuen Parameter auf ihre Tauglichkeit geprüft.

$$q = \sum_i w_i \left| \frac{\sigma_{\text{experiment},i} - \sigma_{\text{simulation},i}}{\sigma_{\text{experiment},i}} \right| \quad (5)$$

Der so ermittelte Qualitätswert  $q$  des aktuellen Parametervektors wird mit dem entsprechenden Wert des schlechtesten Mitglieds der Population verglichen. Ist eine Verbesserung zu verzeichnen kann der Nachkomme in die Population eingereiht werden, wobei der schlechteste ausscheiden muß, um eine konstante Populationsgröße beizubehalten. Andernfalls wird der neue Parametersatz verworfen. Dieser Vorgang wiederholt sich bis eine vorgegebene Qualitätswertgrenze unter- oder maximale Laufzeitbegrenzungen überschritten werden.

Das beschriebene Optimierungsverfahren wurde für die Qualitätsprüfung der Parameter mit einem Simulationsprogramm, das verschiedene Werkstoffmodelle beinhaltet, gekoppelt [1]. In dieser Verbindung wurden Materialparameter für das Werkstoffmodell nach Hart bestimmt, wobei der Angleich für Lastrelaxationsexperimente mit dem Werkstoff 25CrMo4 bei verschiedenen Temperaturen (20—500 °C) erfolgte. Mit Hilfe dieses Optimierungsverfahrens konnte gegenüber konventionell ermittelten Parametern eine deutlich bessere Anpassung an experimentelle Befunde erreicht werden.

## Literatur

- [1] Müller, D.; Hartmann, G.: Identification of Materials Parameters for Inelastic Constitutive Models Using Principles of Biologic Evolution. *Journal of Eng. Mat. and Technology* (submitted to publication).
- [2] Rechenberg, I.: *Evolutionsstrategie, Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Stuttgart: Frommann Holzboog 1973.

## Zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens von Stahl unter wechselnder Beanspruchung

A. Pape  
Lehrstuhl für Mechanik I  
Ruhr-Universität Bochum

Experimentelle Untersuchungen an dünnwandigen Stahlrohren aus Ck15 unter kombinierter Zug/Druck- und Torsionsbeanspruchung zeigen, daß die bei zyklischen plastischen Deformationen zu beobachtende Verfestigung im wesentlichen von drei Einflußgrößen, nämlich Belastungsamplitude, Belastungspfad und Prozeßtemperatur bestimmt ist.

In den durchgeführten weggesteuerten Versuchen ( rechnergesteuerte, servohydraulische Prüfmaschine, quasistatische, isotherme Bedingungen ) ist dieser Umstand besonders ausgeprägt bei bestimmten nicht-proportionalen Belastungspfaden, die in Abb.1 dargestellt sind. Sie haben in der normalisierten Dehnungsebene (  $\gamma/\sqrt{3}$ ,  $\epsilon$  -Ebene ) die Form eines Rechtecks, eines Kreises und eines doppelten Dreiecks. Abbildung 2 zeigt beispielhaft Deformationspfad und Spannungsantwort für die Kreisbelastung.

Die Verfestigung bei diesen Versuchen im Vergleich zum Zug/Druckversuch mit gleicher axialer Amplitude ist in Abb.3 in Form der v.Mises Vergleichsspannung über der Anzahl der Zyklen aufgetragen. Die weitaus größte Verfestigung entsteht bei Dreieckbelastung (48% Zuwachs). Aber auch die Rechteck- und die Kreisbelastung ( out-of-phase cycling ) erzeugen deutlich höhere Spannungen als die rein axiale Beanspruchung. Untersuchungen an austenitischen Stählen zeigen zudem, daß die Verfestigung bei Kreisbelastung noch höher ausfallen kann (maximal Faktor 1.8, [1,2] ).

Ein Modell, mit dem diese Effekte annähernd beschrieben werden können, ist in den Abbildungen 4 und 5 angedeutet. Es beruht auf der klassischen Formulierung einer Fließfläche im Spannungsraum, die jedoch um eine Grenzfläche und ein Zusatzverfestigungsgebiet, das als Mikrofläche bezeichnet werden soll, erweitert ist. Die Grenzfläche stellt eine obere Schranke für mögliche Spannungszustände im Sinne der Arbeiten von Dafalias/Popov dar [3]. Zudem ermöglicht sie entsprechend der Mrozschen Regel ein kinematisches Verfestigungsgesetz, das insbesondere bei zweiaxialen Beanspruchungen gute Resultate liefert [4]. Mit Hilfe des Zusatzverfestigungsgebietes läßt sich der Einfluß der Vorgeschichte ( high-low loading ) erfassen.

Die Abbildung 6 ermöglicht den Vergleich zwischen Rechnung und Experiment bei Kreisbelastung. Abbildung 7 zeigt, daß die außerordentlich hohe Verfestigung beim Dreieckspfad noch nicht befriedigend erfaßt ist. In Zukunft sind noch der Temperatureinfluß und damit zusammenhängende thermodynamische Fragen zu berücksichtigen [5].



B. Zweiaxiale Zug/Druck- und Torsionsversuche		
Versuch	Darstellung	Phasenverlauf
<b>B 1</b> Radialer Deformationspfad		
<b>B 2</b> Rechteck		
<b>B 3, C 1, C 2</b> Kreis		
<b>B 4, C 3</b> Dreieck		

Abb.1 Übersicht über weggesteuerte, zweiaxiale Zug/Druck- und Torsionsversuche Ck 15

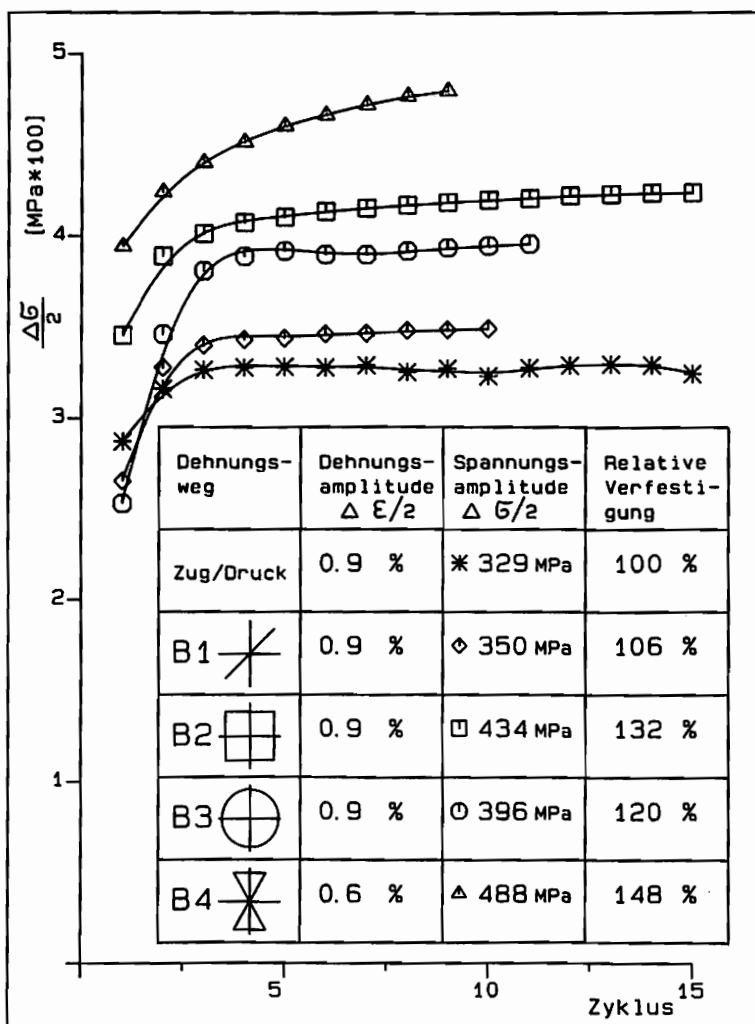
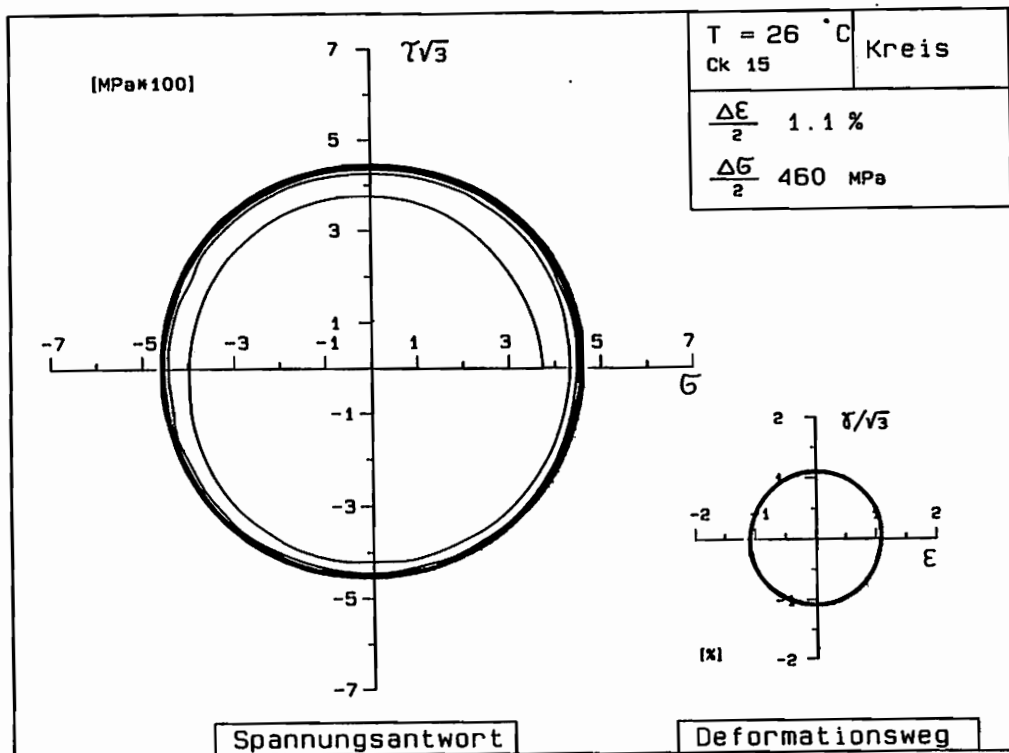
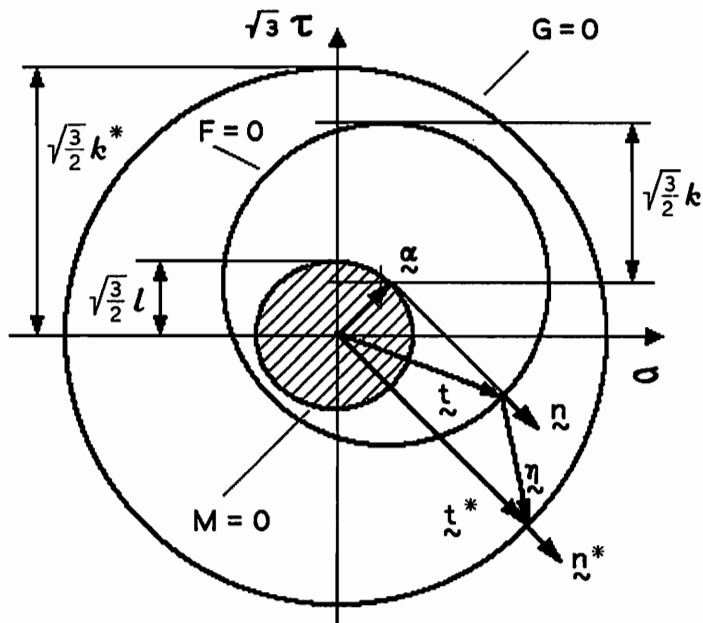


Abb.2  
Kreisförmiger Deforma-  
tionspfad, Experiment

Abb.3  
Verfestigungsverhalten bei  
kombinierter Belastung  
Effektive Spannungsampl.

$$\Delta \sigma / 2 = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Zwei - Flächenmodell mit Zusatzverfestigungsgebiet



MFG - Modell

Mikrofl.  $M = \text{Sp } \underline{\alpha}^2 - l^2 = 0$

Fließfl.  $F = \text{Sp } [\underline{t} - \underline{\alpha}]^2 - k^2 = 0$

Grenzfl.  $G = \text{Sp } \underline{t}^{*2} - k^{*2} = 0$

Isotrope Verfestigung

Radius der Fließfläche  $k$

$$k = k(\mu, T)$$

$$\dot{k} = \frac{\partial k}{\partial \mu} \dot{\mu} + \frac{\partial k}{\partial T} \dot{T} = \Gamma \dot{\mu} + \frac{\partial k}{\partial T} \dot{T}$$

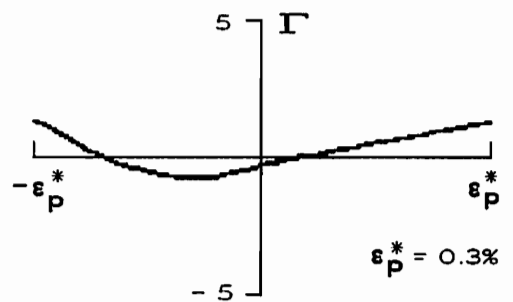
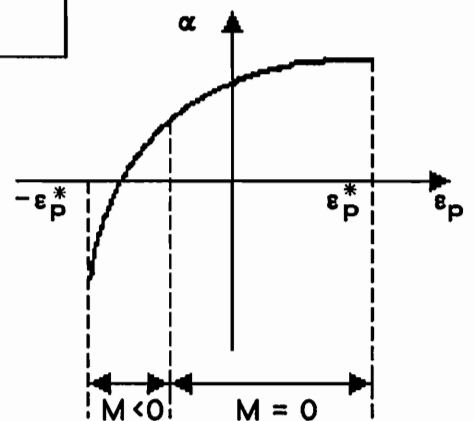
Verfestigungsarbeitsrate

$$\dot{\mu} = (1 - \xi) (\underline{t} - \underline{\alpha}) : \underline{D}_{(P)}$$

Isotroper Modul  $\Gamma$

$$\Gamma = \frac{d}{dk_0} [\hat{k}_{max} - k]$$

$$\hat{k}_{max} = \hat{d}_1 l + \hat{d}_2$$



Stationärer Zustand :

$$\int_{-\epsilon_p^*}^{\epsilon_p^*} \Gamma d\epsilon_p = 0$$

Abb.4 Modell für zyklische, zweiachslale Belastung

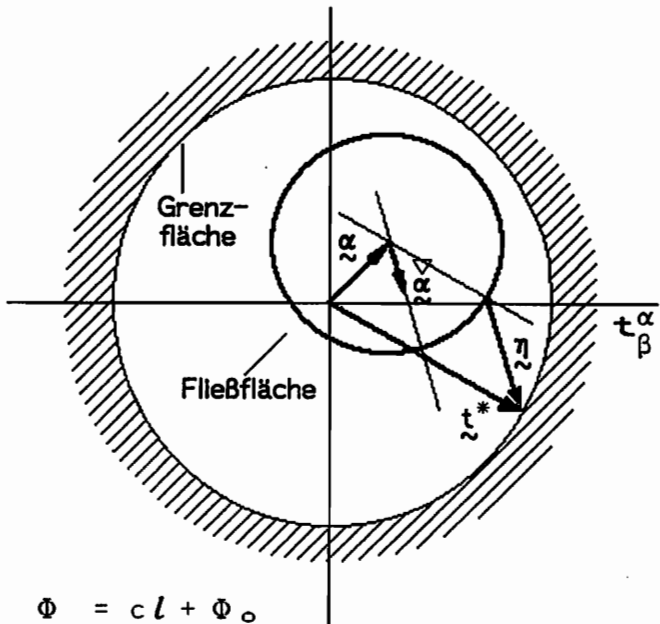
Kinematische Verfestigung

Kinematisches Verfestigungsgesetz

$$\underline{t}^* = k^* \underline{n} = \frac{k^*}{k} (\underline{t} - \underline{\alpha})$$

$$\underline{n} = \underline{t}^* - \underline{t} = \frac{k^*}{k} (\underline{t} - \underline{\alpha}) - \underline{t}$$

$$\underline{\nabla} \underline{\alpha} = \underline{\Delta} \dot{\underline{\mu}} \underline{n}$$



Kinematischer Modul

$$\underline{\Delta} = \frac{a}{\delta} \left[ 1 - \frac{\underline{g} : \underline{n}}{\Phi} \right]$$

$$\Phi = \Phi(l) \quad \text{und} \quad \dot{\Phi} \stackrel{>}{<} 0 \quad : \quad \Phi = cl + \Phi_0$$

$$\delta = \|\underline{\alpha} - \underline{\alpha}^0\| = \sqrt{\text{Sp}(\underline{\alpha} - \underline{\alpha}^0)^2} \quad ; \quad \left. \begin{array}{l} \text{diskrete interne Variable} \\ \text{bei Belastungswechsel} \end{array} \right\} \underline{\alpha}^0 = \underline{\alpha}(t=0)$$

Zusatzverfestigungsgebiet

Transiente Vorgänge :  $\dot{l} \stackrel{>}{<} 0$  und  $\dot{k} \stackrel{>}{<} 0$

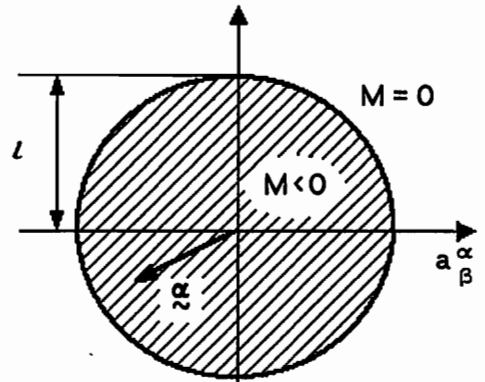
Fall 1 Verfestigung  $M=0$

$$\dot{l} = \frac{\text{Sp} \underline{g} \cdot \underline{\nabla} \underline{g}}{l} = \frac{\text{Sp} \underline{g} \cdot \dot{\underline{g}}}{l} > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} M=0 \\ l \neq 0 \end{array} \right.$$

Fall 2 Entfestigung  $M < 0$

$$\dot{l} = \Delta \dot{\underline{\mu}} < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} M < 0 \\ \text{Sp} \underline{g} \cdot \dot{\underline{g}} \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\Delta = b \left[ \frac{\text{Sp} \underline{g}^2}{l^2} - 1 \right] < 0$$



Mikrofläche M

$$M = \text{Sp} \underline{g}^2 - l^2 = 0$$

Abb.5 Kinematische Verfestigung beim Zweiflächenmodell

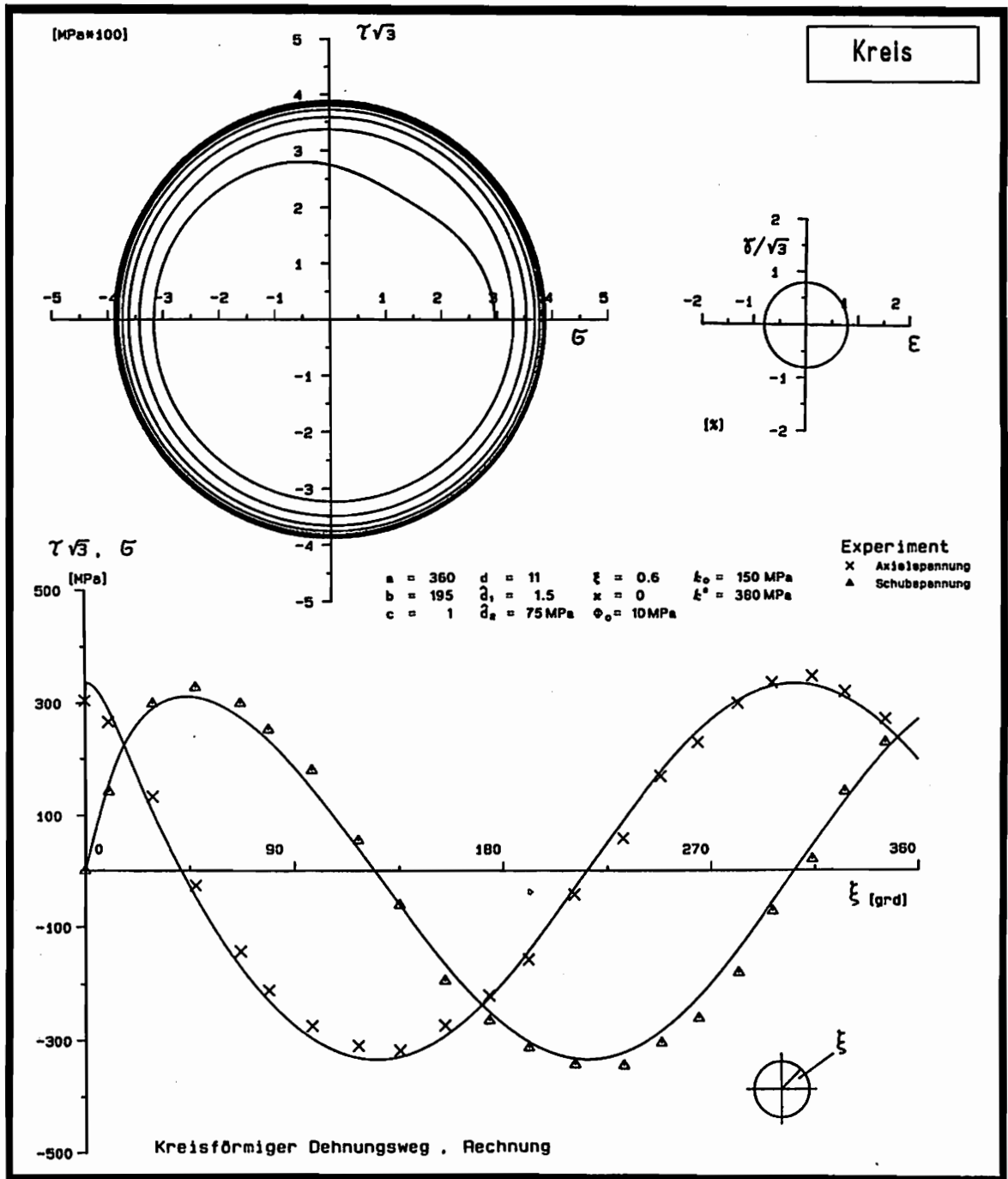


Abb.6 Vergleich Rechnung Experiment, Kreisbelastung

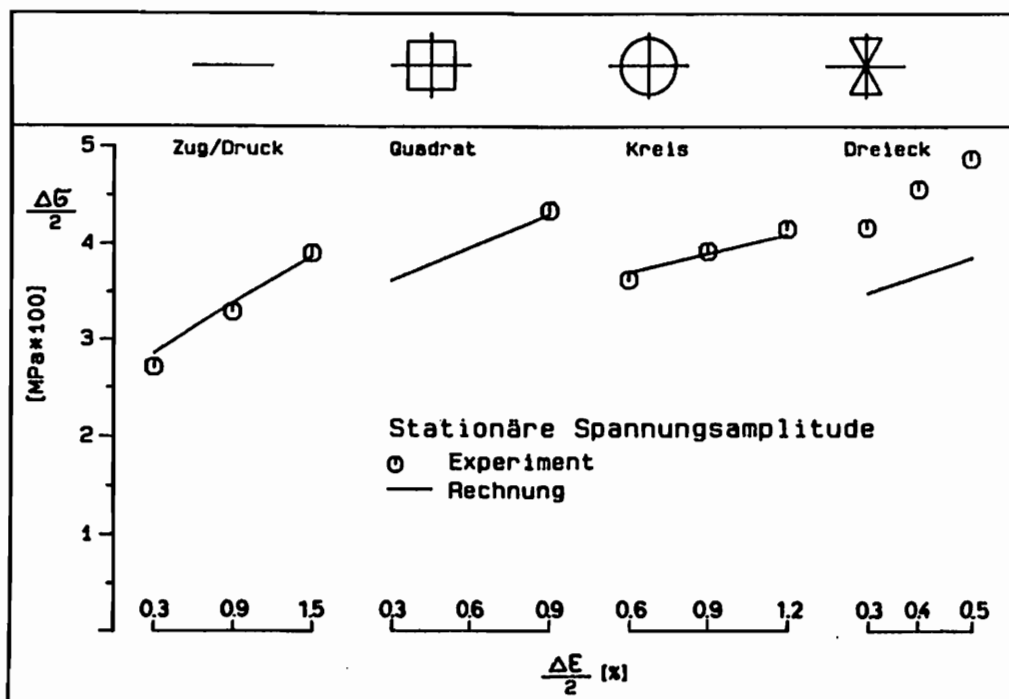


Abb.7 Stationäre Spannungsamplitude Im Vergleich Rechnung und Experiment (unten)

### Literatur

- [ 1 ] OHASHI , Y. / TANAKA , E. / ŌOKA , M.  
Plastic Deformation Behavior of Type 316 Stainless Steel Subject to Out-Of-Phase Strain Cycles , *ASME J. of Eng. Mat. Techn.* , Vol.107, pp. 287 - 292 , 1985
- [ 2 ] KREMPL , E. / LU , H.  
The Hardening and Rate-Dependent Behavior of Fully Annealed AISI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial In-Phase and Out-Of-Phase Strain Cycling at Room Temperature , *ASME J. of Eng. Mat. Tech.* , Vol. 106 , pp. 376 - 382 , 1984
- [ 3 ] DAFALIAS , Y.F. / POPOV , E.P.  
Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity , *ASME J. of Appl. Mech.* , Vol. 43 , pp. 645 - 651 , 1976
- [ 4 ] Pape , A.  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells, Mit. Inst. f. Mech., Ruhr-Universität Bochum, Nr. 57, Mai 1988
- [ 5 ] LEHMANN , Th.  
On Thermodynamically Consistent Constitutive Laws in Plasticity and Viscoplasticity , to be published in *Arch. Mech.*

## ZUR THERMODYNAMIK FLÜSSIGKEITSGEFÜLLTER, ELASTISCH-PLASTISCH DEFORMIERBARER PORÖSER KÖRPER

W. Ehlers, FB10, Fachgebiet Mechanik, Universität-GH-Essen

Flüssigkeitsgesättigte poröse Festkörper /1/ lassen sich im Rahmen einer kontinuumsmechanischen Modellbildung auf der Basis der Mischungstheorie /2/ - Theorie heterogen zusammengesetzter Kontinua mit inneren Wechselwirkungen - beschreiben. Die Mischungstheorie ist dabei um das Konzept der Volumenanteile zu erweitern /3/. Mit diesem Konzept bezieht man die mechanischen Größen der Teilkörper durch Mittelwertbildung im Sinne eines Makromodells auf den örtlichen Gesamtkörper. Um eine ad-hoc-Übersimplifizierung der konstitutiven Theorie poröser Medien zu vermeiden, ist ebenso wie in der Mischungstheorie von Materialien zweiten Grades auszugehen /4/.

Mit dem vorliegenden Beitrag wird das Ziel verfolgt, die grundsätzliche Vorgehensweise bei der Beschreibung flüssigkeitsgesättigter, elastisch-plastisch deformierbarer poröser Körper aufzuzeigen. Einzelheiten können unter anderem /5-8/ entnommen werden. Unter Voraussetzung von Materialien zweiten Grades ist innerhalb der endlichen Elastoplastizitätstheorie eine multiplikative Zerlegung des ersten und zweiten Festkörperdeformationsgradienten durchzuführen /5,8/. Dieses Konzept ist kompatibel mit einer additiven Zerlegung von Verzerrungstensoren und zugehörigen Verzerrungsgeschwindigkeiten ( objektive Lie-Ableitungen ) /8/. Im Rahmen der konstitutiven Modellbildung werden ein nicht-viskoser, inkompressibler Festkörper  $\varphi^S$  und eine viskose, inkompressible Porenflüssigkeit  $\varphi^F$  mit gemeinsamer Temperatur der Teilkörper vorausgesetzt. Die Materialeigenschaft Inkompressibilität bezieht sich dabei auf die jeweiligen Partialvolumina, so daß beide Konstituierenden in Bezug auf den Makrokörper kompressibel bleiben. Für das in dieser Weise definierte Modell führt die Auswertung der Entropiegleichung in der Nähe des Mischungsgleichgewichts auf ein System allgemeiner konstitutiver Gleichungen /8/, das wegen seines Umfangs an dieser Stelle nicht angegeben werden kann.

Bei der Behandlung praxisrelevanter Probleme - z.B. in der Bodenmechanik oder in der Metallintererntechnologie - ist es in der Regel sinnvoll, die Ergebnisse der allgemeinen Theorie mit Hilfe eines "Prinzips der konstitutiven Trennung der Teilkörper" /8/ zu vereinfachen. Dann folgt z.B. für isotherme Prozesse:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^S &= - n^S p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S, \\ \mathbf{T}^F &= - n^F p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^F, \\ \hat{\mathbf{p}}^F &= p \operatorname{grad} n^F + \hat{\mathbf{p}}_E^F. \end{aligned} \quad (1)$$

Darin sind  $p$  der effektive Ruhedruck der Porenflüssigkeit,  $n^i$  ( $i = s, f$ ) die Volumenanteile und  $\mathbf{T}^i$  die Partialspannungen von Festkörper und Flüssigkeit;  $\hat{\mathbf{p}}^F$  kennzeichnet die volumenbezogene Interaktionskraft (Bewegungsgrößenzuwachs). Für die "Extragrößen", Index (...)E, gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_E^S &= \rho^S \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} \frac{\partial \psi^S}{\partial \mathbf{E}_{Se}} \mathbf{F}_{Sp}^T \mathbf{F}_{Se}^T, \\ \mathbf{T}_E^F &= 2 \mu^F \mathbf{D}^F + \lambda^F (\mathbf{D}_F \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_E^F = - \mathbf{S}_v (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_S),$$

$$\text{isotrope Permeabilität} \quad : \quad \mathbf{S}_v = \frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{I},$$

$$\text{Durchlässigkeitskoeffizient} \quad : \quad k^F.$$

Als Restriktion für den Zuwachs der plastischen Arbeit folgt (hinreichende Bedingung):

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{Sp})^\Delta \cdot (\mathbf{t}_E^S - \mathbf{Y}^S) &\geq 0, \\ \mathbf{Y}^S &= \rho_{os}^S \mathbf{F}_{Se} \mathbf{F}_{Sp} \frac{\partial \psi^S}{\partial \mathbf{E}_{Sp}} \mathbf{F}_{Sp}^T \mathbf{F}_{Se}^T. \end{aligned} \quad (3)$$

In (3) kennzeichnen  $(\mathbf{A}_{Sp})^\Delta$  die obere Lie-Ableitung des plastischen Almansi-Tensors und  $\mathbf{t}_E^S$  die Kirchhoffsche Extraspannung von  $\varphi^S$ . Die Größe  $\mathbf{Y}^S$  wird als Translationstensor der kinematischen Verfestigung interpretiert.

Ein neues endliches Elastizitätsgesetz für isotrope poröse Körper kann /7/ entnommen werden. Die Behandlung des plastischen Materialverhaltens für duktile und granulare Stoffe wird in /9/ enthalten sein.

Literatur :

- /1/ de Boer, R. und Ehlers, W., A historical review of the formulation of porous media theories, Acta Mechanica, erscheint demnächst
- /2/ Bowen, R.M., Theory of mixtures, in Eringen, A.C. (ed.), Continuum Physics, Vol. III, Academic Press, New York • San Francisco • London 1976
- /3/ de Boer, R. und Ehlers, W., Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme, Teil I, Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen der Universität-GH-Essen **40**, Essen 1986



- /4/ Müller, I., A thermodynamical theory of mixtures of fluids, Arch. Rational Mech. Anal. **28** (1968), 1 - 39
- /5/ Ehlers, W., Zur Entwicklung konstitutiver Gleichungen für poröse Medien, ZAMM **68** (1988), T170 - T171
- /6/ de Boer, R. und Ehlers, W., Auftrieb und Reibung in flüssigkeitsgefüllten porösen Körpern - eine Klarstellung, ZAMM **68** (1988), 567 - 572
- /7/ Ehlers, W., Ein Elastizitätsgesetz für poröse Medien, erscheint in ZAMM **69** (1989)
- /8/ Ehlers, W., On thermodynamics of elasto-plastic porous media, Arch. Mech., erscheint demnächst
- /9/ de Boer, R. und Ehlers, W., Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme, Teil II, Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen der Universität-GH-Essen, in Vorbereitung

**Zum rotationssymmetrischen Kriechbeulverhalten  
dünnwandiger Kreiszyinderschalen.**

**Tom Butters, RWTH Aachen**

Das Übergangskriechen dickwandiger Druckbehälter ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen, die jedoch erkennen lassen, daß unter Verwendung der auf MISES zurückgehenden tensoriell linearen Stoffgleichung die experimentellen Ergebnisse nur unbefriedigend wiedergegeben werden können. Gute Übereinstimmung mit den Experimenten lassen sich dann feststellen, wenn tensoriell nichtlineare Stoffgleichungen verwendet werden. Da in der Fachliteratur keine Veröffentlichungen über den Einfluß der tensoriellen Nichtlinearität auf die Kriechinstabilität dünnwandiger Zylinderschalen berichten, werden hier mit Hilfe der Kriechpotentialhypothese tensoriell nichtlineare Materialgleichungen vorgestellt und zur Berechnung des Kriechbeulverhaltens dünnwandiger Zylinderschalen herangezogen. Die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen für die Kreiszyinderschale erfolgt am deformierten Schalenelement. Die Gesamtverzerrungsgeschwindigkeiten werden aus der Summe der elastischen und der Kriechverzerrungsgeschwindigkeiten gebildet. Die elastischen Anteile werden über das HOOKEsche Gesetz durch Spannungsgeschwindigkeiten ausgedrückt. Mit ihnen lassen sich die zeitlichen Ableitungen der Normalschnittkräfte und der Biegemomente bestimmen. Damit können die Gleichgewichtsbedingungen in Abhängigkeit von den Verschiebungsgeschwindigkeiten, den Verschiebungen selbst und den Kriechverzerrungsgeschwindigkeiten dargestellt werden. Da eine geschlossene analytische Lösung der Gleichungen bisher nicht gefunden wurde, werden die Differentiale durch finite Differenzen approximiert und die Differenzengleichungen in ein Gleichungssystem der Verschiebungsgeschwindigkeiten überführt. Die numerischen Ergebnisse zeigen einen erheblichen Einfluß der tensoriellen Nichtlinearität auf die Versagenszeit der mit Innendruck und axialer Druckkraft belasteten Zylinderschale.

Einige Bemerkungen zu verschiedenen FE-Formulierungen  
auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes

M. Pitzer, Lehrstuhl für Mechanik I, Ruhr-Universität Bochum

### 1. Einleitung

Bei der Beschreibung inelastisch deformierbarer Körper mit Hilfe der Methode der finiten Elemente kommt einer genauen Erfassung der Extremalspannungen besondere Bedeutung zu, da die in aller Regel von den Spannungen abhängende Fließbedingung über die Art der Feldgleichungen entscheidet. Gewöhnlich kennt man die Spannungen dabei nicht auf der häufig am stärksten beanspruchten Körperoberfläche, sondern nur im Innern der Struktur.

Hergeleitet und verglichen werden verschiedene auf den Verfahren der gewichteten Residuen basierende FE-Formulierungen. Besonderer Wert wird dabei auf eine möglichst genaue Erfassung der Spannungsverläufe gelegt.

### 2. Grundgleichungen

Die Grundgleichungen werden in inkrementeller Form angegeben. Bei der Kinematik gelangt man ausgehend von der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten und unter der Annahme kleiner elastischer Dehnanteile zu einer eindeutigen additiven Aufspaltung des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors  $D$  in elastischen und inelastischen Anteil /1/.  $D$  selbst ist der symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten  $L$ , während der antimetrische Anteil der Spintensor  $W$  ist:

$$L = \text{Grad } \mathbf{v} = D + W$$

$$D = D_e + D_i$$

Aus der zu allen Zeiten gültigen Gleichgewichtsbedingung gewinnt man bei fehlenden volumenhaft verteilten Lasten die Bedingung des fortgesetzten Gleichgewichts in folgender Form /2/:

$$\text{Div} \{ \boldsymbol{\sigma} \cdot + \boldsymbol{\sigma} \text{tr } D - \boldsymbol{\sigma} L^T \} = 0$$

Das verwendete Materialgesetz ist ein von *Bruhns* entwickeltes elastisch-viskoplastisches Stoffmodell vom Überspannungstyp /3/. Es beinhaltet als Kombinationsmodell aus isotroper und kinematischer Verfestigung zwei interne Variablen (Skalar und Tensor 2. Stufe) und dient der Beschreibung von geschwindigkeitsabhängigem Materialverhalten.

Vervollständigt werden die Grundgleichungen durch die Anfangs- und Randbedingungen, die je nach Problemstellung einzuarbeiten sind.

Die Aufbereitung der Feldgleichungen wird analog zur Erlangung der Lamé-Navierschen Gleichungen in der Elastizitätstheorie vorgenommen. Es verbleiben 3 partielle Differentialgleichungen, die die Deformation des Körpers von seinem Ausgangszustand in die aktuelle Lage beschreiben. Zur Lösung dieses Anfangs-Randwertproblems wird eine Updated-Lagrange Vorgehensweise gewählt, die die Gesamtdeformation in eine Folge von  $n$ -Teildeformationen unterteilt. Damit wird eine Entkopplung der Zeit- und Ortsabhängigkeit des Problems

erreicht und es ergibt sich zum betrachteten, festgehaltenen Zeitpunkt ein Randwertproblem, aus dessen Lösung dann mit zeitlicher Integration der benachbarte Zustand ermittelt werden kann. Bei einer hinreichenden Anzahl solcher Zwischenzustände läßt sich der Deformationsgradient zweier aufeinanderfolgender Zustände näherungsweise gleich dem Einstensor setzen und die Feldgleichungen wie auch die natürlichen Randbedingungen werden schrittweise linear im Geschwindigkeitsfeld  $v$ .

### 3. FE-Diskretisierung

Ausgangspunkt der Diskretisierung sind die Verfahren der gewichteten Residuen. Für eine numerische Umsetzung eignen sich besonders das Galerkin-Verfahren und das Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate (Least-Squares-Verfahren).

Durch Hinzunahme der Randterme in die Bestimmungsgleichungen der Verfahren werden die Ansatzfunktionen von der Befriedigung der natürlichen Randbedingungen befreit. Die Verfahren lassen sich auf verschiedene Art kombinieren, wobei hier neben den beiden klassischen Verfahren ein Kombinationsmodell betrachtet wird, das durch Wahl des Galerkin-Verfahrens im Körperinnern und des Least-Squares-Verfahrens auf der Oberfläche entsteht.

Hergeleitet werden 2-D Elemente zur Beschreibung von Rotationskörpern, sowie von Scheiben mit ebenem Spannungszustand.

Da der Diskretisierung nicht die schwache Formulierung zugrunde liegt, erfordern die verschiedenen Verfahren stetige Verläufe der Spannungen beziehungsweise deren Raten über die gesamte Struktur. Für das Geschwindigkeitsfeld, das über alle Elemente hinweg die  $C^1$ -Stetigkeit gewährleisten muß, wird ebenso wie für die Geometrie ein isoparametrischer Ansatz gewählt, der durch in den lokalen Elementkoordinaten bikubische Formfunktionen gebildet wird. Zugrunde liegt dabei ein i.a. krummliniges 4-Knotenelement.

### 4. Zeitintegration

Nach dem Zusammenbau der Elemente zur Gesamtstruktur und der Lösung der entstehenden Gleichungssysteme mit i. a. unsymmetrischen Matrizen verbleibt aus den zum betrachteten Zeitpunkt bekannten Zustandsgrößen und dem ermittelten Geschwindigkeitsfeld die neue Konfiguration zu bestimmen.

Explizite Integrationsverfahren eignen sich weniger, da aus der FE-Analyse das Geschwindigkeitsfeld nur zu diskreten Zeitpunkten vorliegt, im Zeitintervall aber zu "Zwischenzeiten" benötigt wird. Da man die Werte zu den "Zwischenzeiten" nur schätzen kann, akkumulieren sich aber systematisch Fehler, die im Fall des hier vorliegenden steifen Differentialgleichungssystems zu einer instabilen Integration führen können.

Durch Anwendung impliziter Verfahren wie der Trapezformel oder der impliziten Eulerformel in Form einer Prädiktor-Korrektor-Technik mit der Polygonzugmethode als Prädiktor lassen sich anhand des homogenen Beispiels eines spannungsgesteuert belasteten Zugstabes kritische, durch das verwendete Stoffgesetz vorgegebene maximale Zeitschrittweiten bestimmen, bei deren Einhaltung der vorgeschlagene Algorithmus numerische Konvergenz eines Prob-

lems in der Zeitabhängigkeit gewährleistet. Nach jedem Prädiktorschritt ist eine vollständige FE-Analyse durchzuführen, deren Ergebnis die Näherung für den Korrektorschritt darstellt /4/.

### 5. Beispielrechnungen

In den durchgeführten Beispielrechnungen zeigte sich hinsichtlich der Genauigkeit in den Spannungen das Kombinationsverfahren den beiden klassischen Formulierungen deutlich überlegen. In Bild 1 sind die Ergebnisse einer elastischen Vergleichsrechnung für das dickwandige Rohr unter Innendruck dargestellt. Die Diskretisierung erfolgte mit einem Element und linearer Beziehung zwischen globaler und lokaler Koordinate (gleichverteilt). Dargestellt sind jeweils die exakte Lösung strichliert und die FE-Lösungen durchgezogen. Die Bilder 2 und 3 zeigen die Ergebnisse von inelastischen mit dem Kombinationsverfahren durchgeführten Rechnungen.

In Bild 2 sind die Spannungs- und Verfestigungsverläufe aufgetragen, die bei einem Prozeß entstehen, bei dem der Innendruck vom Erreichen der Fließgrenze (Zustand 1) mit einer Geschwindigkeit von 1MPa pro Sekunde auf den doppelten Wert (Zustand 2) gesteigert wurde mit anschließender Haltezeit von 200 Stunden (Zustand 4).

Bild 3 stellt die Ergebnisse einer quadratischen Scheibe unter einer linearen Geschwindigkeitsbelastung dar. Der Rechnung liegt wiederum das kombinierte Verfahren mit einem Element zugrunde. Als Belastung wurde das äußere Geschwindigkeitsfeld bis auf den 10-fachen Wert vom Erreichen der Fließgrenze gesteigert mit anschließender Haltezeit. Aufgetragen sind die Spannungen an der oberen Kante der Scheibe, sowie entlang eines Schnittes  $x = \text{konstant}$ .

### Literaturverzeichnis:

- /1/ **Thermann, K.** : Foundations of Large Deformations  
in: Plasticity today - Modelling, Methods and Applications  
Sawczuk, A. , Bianchi, G. , Ed. , 1983
  
- /2/ **Bruhns, O.** : Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Verzweigungslasten  
elastoplastisch deformierbarer Kontinua  
Mitteilung Nr. 74-9, Institut für konstruktiver Ingenieurbau  
Ruhr-Universität Bochum, 1974
  
- /3/ **Bruhns, O.T.** : On the Constitutive Relations of Austenitic Stainless Steels  
in: Constitutive Laws for Engineering Materials  
Theory and Applications;  
Eds.: Desai, C.S., Krempl, E., Kioussis, P.D. , Kundu, T.  
Elsevier, New York, Amsterdam, London, 1987
  
- /4/ **Pitzer, M.** : Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines in-  
elastischen Stoffgesetzes  
Mitteilung Nr.61 aus dem Institut für Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum, 1988

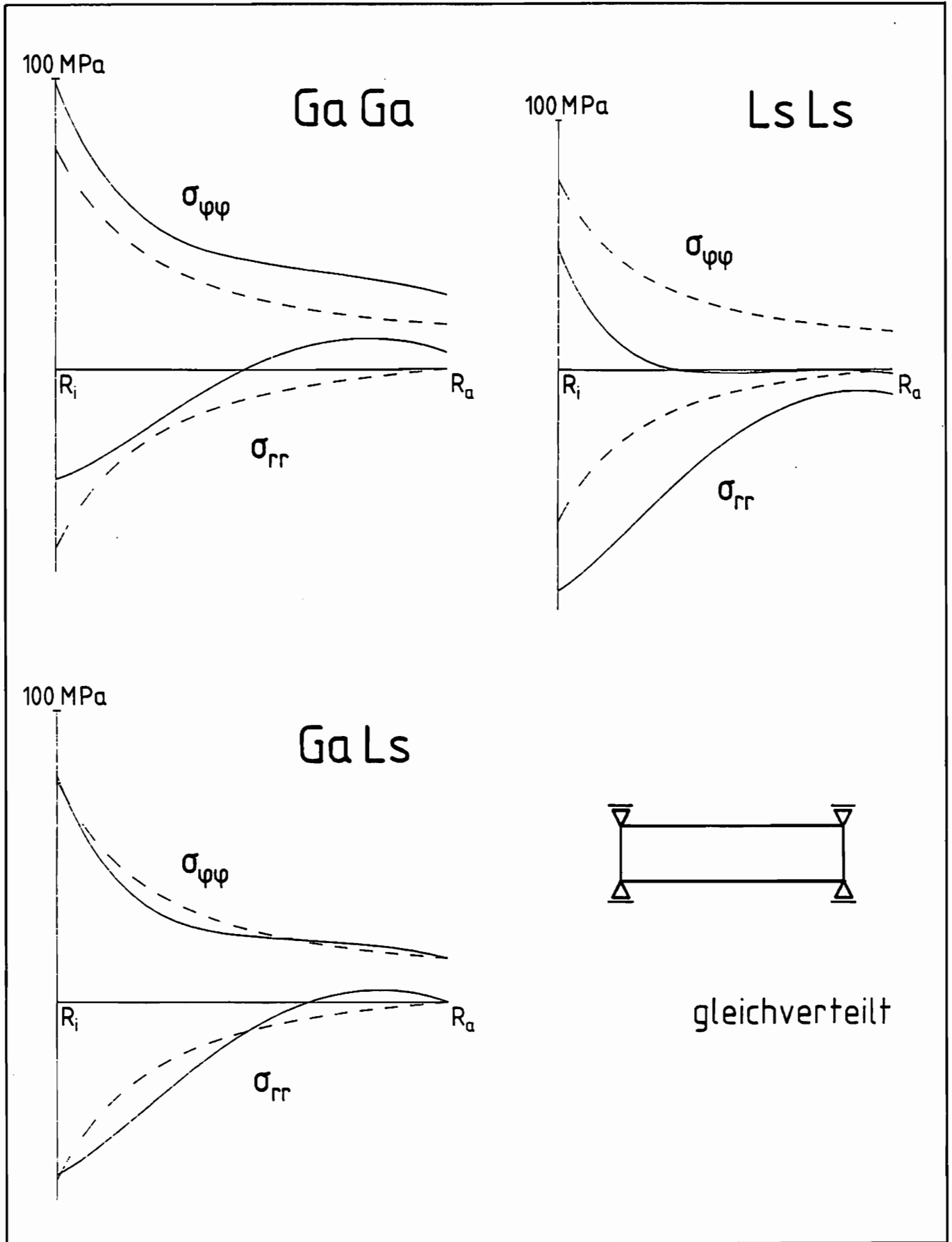


Bild 1

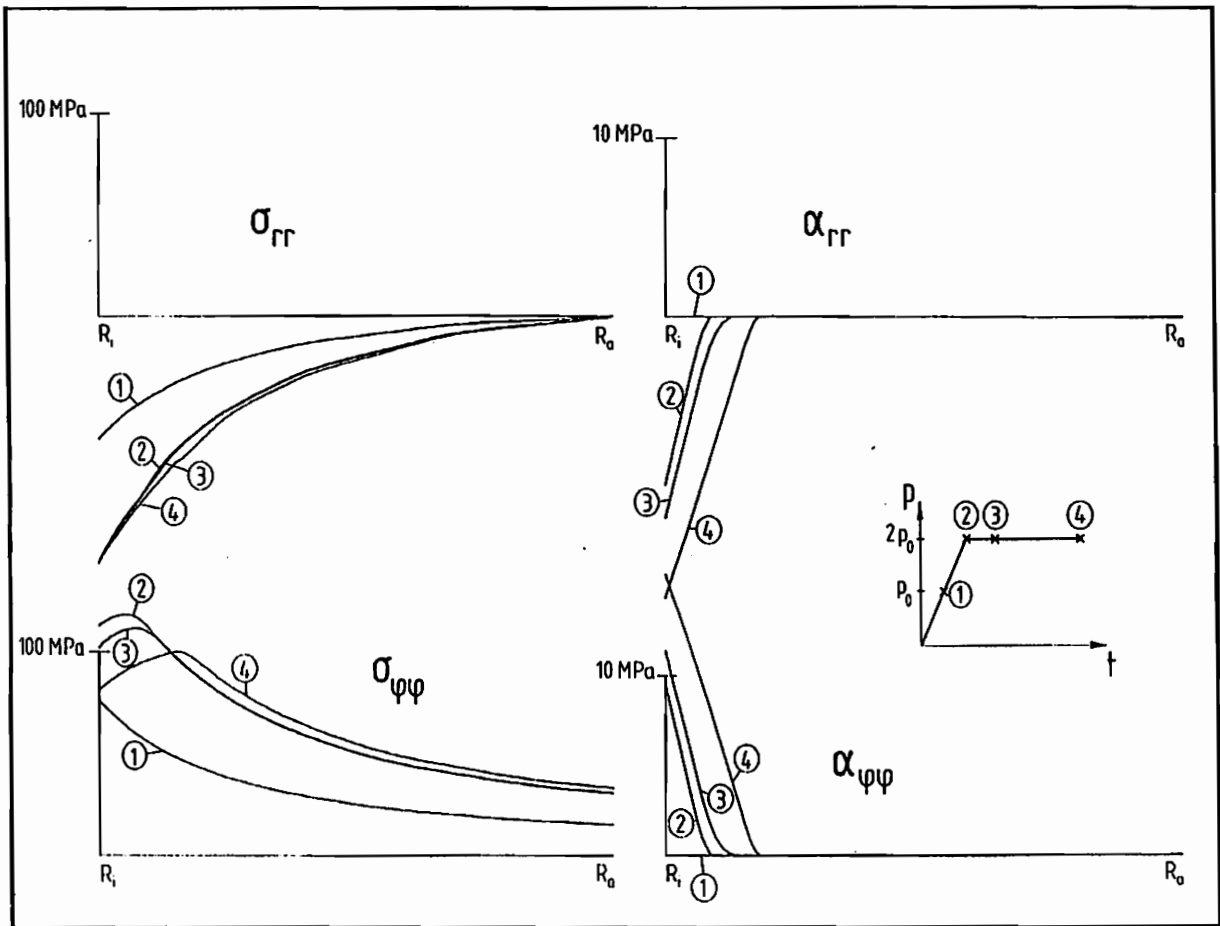


Bild 2

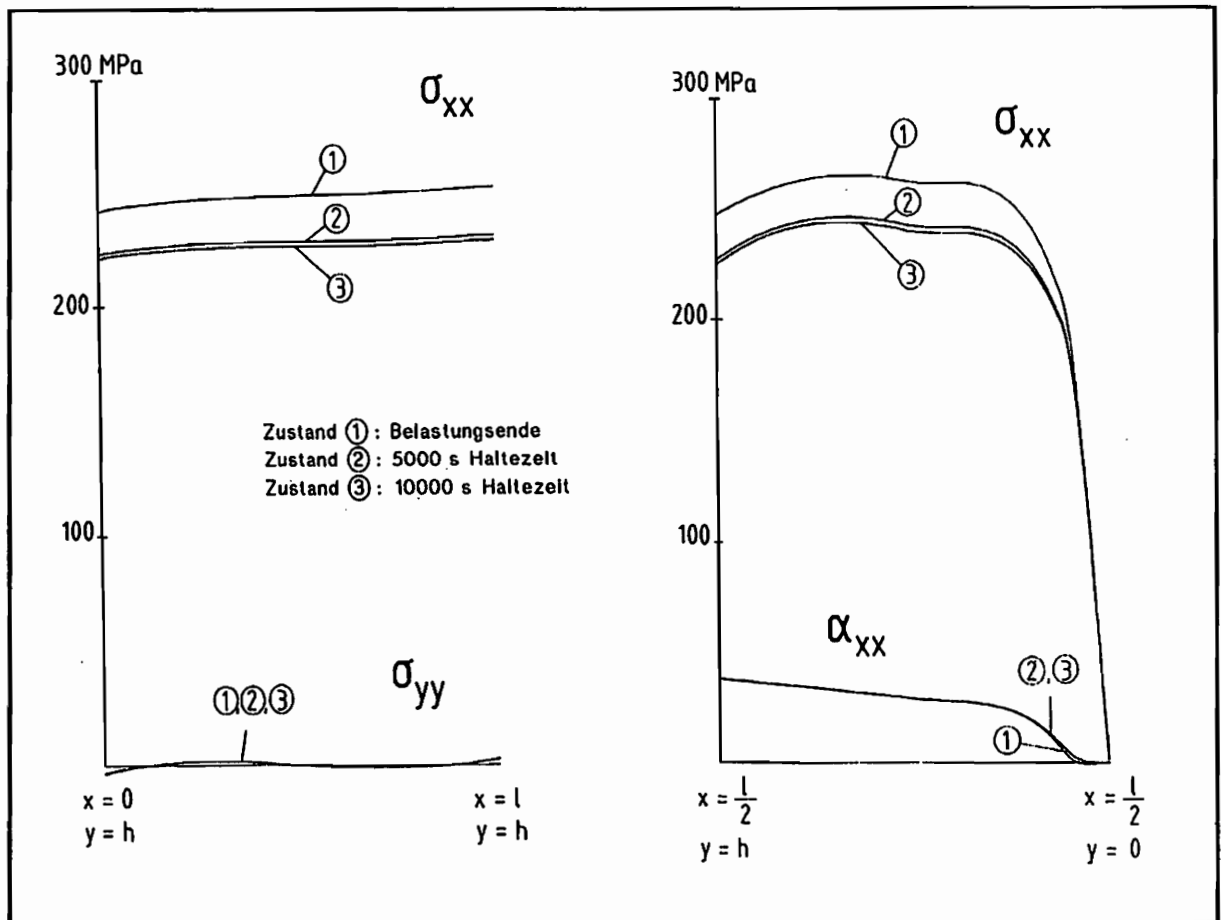


Bild 3

# ZUR NUMERISCHEN BEHANDLUNG THERMOMECHANISCHER PROZESSE MIT GROSSEN DEFORMATIONEN

C. MIEHE

*Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover,  
Appelstr. 9a, 3000 Hannover 1.*

## 1. Einleitung

Bei vielen technischen Anwendungen – etwa bei Umformvorgängen oder Problemen der Materialprüfung – kann eine Kopplung zwischen mechanischen und thermischen Größen nicht vernachlässigt werden. Einerseits ist die thermische Expansion und die Temperaturabhängigkeit mechanischer Materialparameter als Wirkung des thermischen Feldes auf das mechanische Feld zu beachten. Auf der anderen Seite können als Wirkung des mechanischen Feldes auf das thermische Feld thermoelastische und dissipative Aufheizeffekte einen wesentlichen Einfluß auf das Verhalten des Prozesses haben. Bei Prozessen mit großen Deformationen ist die Spannungs- und Wärmeflußberechnung a priori über die nichtlineare Geometrie gekoppelt.

In den letzten Jahren ist bei der numerischen Behandlung von nichtlinearen Problemen der Kontinuumsmechanik ein Trend zur konsequenten Anwendung von Linearisierungstechniken (siehe z.B. [1],[2]) erkennbar. Man strebt sowohl bei physikalisch als auch bei geometrisch nichtlinearen Problemen als Iterationskonzept das Newton-Verfahren an wegen seiner bestmöglichen quadratischen Konvergenzgeschwindigkeit. Diesem Trend folgend sei hier ein Konzept zur numerischen Behandlung voll gekoppelter thermomechanischer Prozesse basierend auf

- einer räumlichen kinematischen Formulierung,
- einer konsequent simultanen Strategie und
- einer konsistenten Linearisierung

vorgestellt.

## 2. Kontinuierliche Formulierung

Zur Beschreibung der finiten Deformation wird eine räumliche kinematische Formulierung gewählt. Sämtliche vektorielle und tensorielle Größen werden auf die mitbewegten Basen der Momentankonfiguration  $\mathcal{B} \subset E^3$  bezogen. Im Sinne der Lie-Algebra seien Operatoren

für eine räumliche Linearisierung  $\{\cdot\}^{\Delta}$  und eine räumliche Variation  $\{\cdot\}^*$  definiert (relativ in der mitbewegten Metrik der Momentankonfiguration) unter Verwendung der in [1] eingeführten "Pull-Back" und "Push-Forward" Operatoren  $\{\cdot\}^*$  und  $\{\cdot\}_*$  (Wechsel zwischen räumlichen und materiellen Basen). So lautet z.B. der Linearisierungsoperator

$$\{\cdot\}^{\Delta}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) := \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \{\cdot\}^*(\mathbf{x} + \varepsilon \hat{\mathbf{x}}) \Big|_{\varepsilon=0} \right]_* \quad (1)$$



Dabei hat  $\overset{\Delta}{\mathbf{x}}$  die Bedeutung eines Tangentialfeldes im Sinne einer inkrementellen Verschiebung an die Momentankonfiguration bei fester Position  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ . Die Linearisierung von auf die Momentankonfiguration bezogenen kinematischen Größen führt i.d.R. zu einfachen, der geometrisch linearen Theorie ähnlichen Größen. Die räumliche Formulierung läßt sich in Verbindung mit der konsistenten Linearisierung als "mitgehende Euler-Formulierung" interpretieren (im Sinne der Summation von Iterationsinkrementen  $\overset{\Delta}{\mathbf{x}}$ ).

Den theoretischen Rahmen zur Behandlung thermomechanischer Prozesse bildet die Rationale Thermodynamik, vgl. etwa [3]. Die den thermomechanische Prozeß beschreibenden gekoppelten stofffreien Kerngleichungen sind das kinetische und das energetische Gleichgewicht (Bilanz des Impulses und der Entropie)

$$\left. \begin{aligned} \rho \ddot{\mathbf{x}} &= + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \\ \rho \dot{\theta} \dot{s} &= - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r + \rho \theta \gamma_i \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

mit den Cauchy-Spannungen  $\boldsymbol{\sigma} = \partial\psi/\partial\mathbf{e}$ , dem räumlichen Wärmeflußvektor  $\mathbf{q}$ , der Entropie  $s = -\partial\psi/\partial\theta$  und der Dissipation  $\rho\theta\gamma_i = -\rho(\partial\psi/\partial\alpha_i)\overset{\circ}{\alpha}_i \geq 0$  der internen Variablen  $\alpha_i$ . Im Sinne des Galerkin-Verfahrens läßt sich formal eine gekoppelte schwache Form der Gleichungen (2) konstruieren und mit dem Operator (1) linearisieren ([5],[6]):

$$\begin{aligned} L G(\mathbf{z}_e, \overset{\Delta}{\mathbf{z}}, \overset{\Delta}{\mathbf{z}}_e) &:= G(\mathbf{z}_e, \overset{\Delta}{\mathbf{z}}) + \overset{\Delta}{G}(\mathbf{z}_e, \overset{\Delta}{\mathbf{z}}, \overset{\Delta}{\mathbf{z}}_e) = 0 = \\ &\mathcal{M} \int_{\mathcal{B}_t} (\dot{\mathbf{e}} : \boldsymbol{\sigma} - \dot{\mathbf{x}} \cdot \rho(\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{x}})) dv - \mathcal{M} \int_{\partial\mathcal{B}_{t,\sigma}} \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t} da \\ &+ \mathcal{T} \int_{\mathcal{B}_t} (\dot{\mathbf{k}} \cdot (-\mathbf{q}) - \dot{\theta} \rho(r + \theta\gamma_i - \theta\dot{s})) dv - \mathcal{T} \int_{\partial\mathcal{B}_{t,q}} \dot{\theta} (-q_n) da \\ &+ \mathcal{M} \int_{\mathcal{B}_t} (\overset{\Delta}{\dot{\mathbf{e}}} : \boldsymbol{\sigma} + \overset{\Delta}{\dot{\mathbf{e}}} : \frac{1}{J} \overset{\Delta}{J} \boldsymbol{\sigma} - \overset{\Delta}{\dot{\mathbf{x}}} \cdot \rho(\overset{\Delta}{\mathbf{b}} - \overset{\Delta}{\ddot{\mathbf{x}}})) dv - \mathcal{M} \int_{\partial\mathcal{B}_{t,\sigma}} \overset{\Delta}{\dot{\mathbf{x}}} \cdot (\overset{\Delta}{\mathbf{t}} da + \overset{\Delta}{\mathbf{t}} \overset{\Delta}{da}) \\ &+ \mathcal{T} \int_{\mathcal{B}_t} (\overset{\Delta}{\dot{\mathbf{k}}} \cdot (-\frac{1}{J} \overset{\Delta}{J} \mathbf{q}) - \overset{\Delta}{\dot{\theta}} \rho(\overset{\Delta}{r} + \frac{\overset{\Delta}{\theta}}{\theta} \gamma_i - \frac{\overset{\Delta}{\theta}}{\theta} \dot{s})) dv - \mathcal{T} \int_{\partial\mathcal{B}_{t,q}} \overset{\Delta}{\dot{\theta}} (-\overset{\Delta}{q}_n da - q_n \overset{\Delta}{da}) \end{aligned} \quad (3)$$

Hierbei ist  $\mathbf{z}_e := (\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}})$  ein "erweiterter thermomechanischer Zustandsvektor", der neben dem Zustandsvektor  $\mathbf{z} := (\mathbf{x}, \theta)$  selbst (aktuelle Position und Temperatur des materiellen Punktes) auch dessen materielle Zeitableitungen enthält.  $\overset{\Delta}{\mathbf{z}} := (\overset{\Delta}{\mathbf{x}}, \overset{\Delta}{\theta})$  seien die Testfunktionen des Galerkin-Verfahrens, die sich als virtuelle Geschwindigkeiten und virtuelle (relative) Temperaturen interpretieren lassen.  $\overset{\Delta}{\mathbf{z}}_e := (\overset{\Delta}{\mathbf{z}}, \overset{\Delta}{\dot{\mathbf{z}}}, \overset{\Delta}{\ddot{\mathbf{z}}})$  ist das Inkrement des erweiterten Zustandsvektors  $\mathbf{z}_e$ .  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{T}$  (i.d.R.  $\equiv 1$ ) sind Skalierungsfaktoren. Die linearisierte schwache Form  $LG$  besteht aus dem an der Stelle  $\mathbf{z}_e$  festen Anteil  $G$  und dem in  $\overset{\Delta}{\mathbf{z}}_e$  linear veränderlichen Anteil  $\overset{\Delta}{G}$ . Der Ausdruck (3) läßt sich als Linearisierung einer verallgemeinerten virtuellen thermomechanische Leistung interpretieren. Er bildet die

stofffreie Grundlage für die Konstruktion von Residuen und Tangentenoperatoren thermo-  
mechanisch gekoppelter finiter Material- und Oberflächenelemente.

Das numerische Konzept sei hier dargestellt in Anwendung auf ein finites thermoelastisches  
Stoffmodell basierend auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in  
volumetrischen und isochoren Anteil  $\mathbf{F} = J^{\frac{1}{3}} \bar{\mathbf{F}}$  sowie in freien thermischen Expansions-  
anteil und spannungserzeugenden volumetrischen Anteil:  $J = J_{\theta} J_e$  mit  $J_{\theta} = e^{3\alpha(\theta - \theta_0)}$ .  
Als Wärmeleitgesetz gelte ein Gesetz vom Fourier-Typ:  $\mathbf{q} = -(k/J) \text{grad}\theta$ . Die multi-  
plikativen Splitting-Ansätze führen zu folgender Funktion für die freie Energie (isotropes  
thermoelastisches Neo-Hooke Modells [5],[6]; vgl. isotherme Formulierung in [4]):

$$\rho_0 \psi(\mathbf{b}, \theta) = \frac{1}{2} K (\ln J)^2 + \frac{1}{2} \mu (I_{\bar{\mathbf{b}}} - 3) - 3\alpha K (\ln J) (\theta - \theta_0) - \rho_0 c (\theta \ln \frac{\theta}{\theta_0} - \theta + \theta_0). \quad (4)$$

### 3. Diskrete Formulierung

Der nichtlineare und transiente thermomechanische Prozess erfordert sowohl eine Zeit-  
als auch eine Raumdiskretisierung. Die Zeitintegrationsansätze bewirken eine Reduktion  
des erweiterten inkrementellen Zustandsvektors  $\overset{\Delta}{\mathbf{z}}_e$  auf den inkrementellen Zustandsvek-  
tors  $\overset{\Delta}{\mathbf{z}}$ . So erhält man bei der Differentialgleichung erster Ordnung des quasistatischen  
Problems und Verwendung der verallgemeinerten Trapezregel die Eliminationsgleichung  
 $\overset{\Delta}{\mathbf{z}}_e = (\overset{\Delta}{\mathbf{z}}, \frac{1}{\delta\tau} \overset{\Delta}{\mathbf{z}})$  mit der Zeitschrittweite  $\tau$  und dem Implizitheitsparameter  $\delta$ . Die Raumd-  
iskretisierung kann mit standard isoparametrischen finiten Elementen erfolgen. Diskretisiert  
werden der Zustandsvektor  $\mathbf{z}$ , der virtuelle Zustandsvektor  $\overset{*}{\mathbf{z}}$  sowie die Iterationsinkremente  
des Zustandsvektors  $\overset{\Delta}{\mathbf{z}}$

$$\mathbf{z}^h = \sum_{I=1}^{n_n} N_I \mathbf{z}_I \quad ; \quad \overset{*}{\mathbf{z}}^h = \sum_{I=1}^{n_n} N_I \overset{*}{\mathbf{z}}_I \quad ; \quad \overset{\Delta}{\mathbf{z}}^h = \sum_{I=1}^{n_n} N_I \overset{\Delta}{\mathbf{z}}_I \quad (5)$$

mit den mechanischen und thermischen Knotenfreiwerten  $\mathbf{z}_I$ ,  $\overset{*}{\mathbf{z}}_I$  und  $\overset{\Delta}{\mathbf{z}}_I$  gekoppelter ther-  
momechanischer Elemente. Der Globalalgorithmus zur Lösung des gekoppelten, transi-  
enten und nichtlinearen Problems ist vom Prediktor-Multikorrekter-Typ und besteht je  
Zeitschritt aus den folgenden Schritten ( $k$  ist Zeitschrittindex,  $i$  ist Iterationsindex)

(i) Prediktor-Schritt:

$$\begin{aligned} {}^0_{k+1} \mathbf{z}^h &= {}_k \mathbf{z}^h + \tau {}_k \dot{\mathbf{z}}^h \\ {}^0_{k+1} \dot{\mathbf{z}}^h &= {}_k \dot{\mathbf{z}}^h \end{aligned}$$

(ii) Korrekter-Schritte  $i = 0, 1, 2, \dots$  bis Konvergenz:

$$\begin{aligned} {}^i_{k+1} \mathbf{k}^{eff} \quad {}^{i+1}_{k+1} \overset{\Delta}{\mathbf{z}}^h &= - {}^i_{k+1} \mathbf{r}^{eff} \\ {}^{i+1}_{k+1} \mathbf{z}^h &= {}^i_{k+1} \mathbf{z}^h + {}^{i+1}_{k+1} \overset{\Delta}{\mathbf{z}}^h \\ {}^{i+1}_{k+1} \dot{\mathbf{z}}^h &= {}^i_{k+1} \dot{\mathbf{z}}^h + \frac{1}{\delta\tau} {}^{i+1}_{k+1} \overset{\Delta}{\mathbf{z}}^h \end{aligned} \quad (6)$$

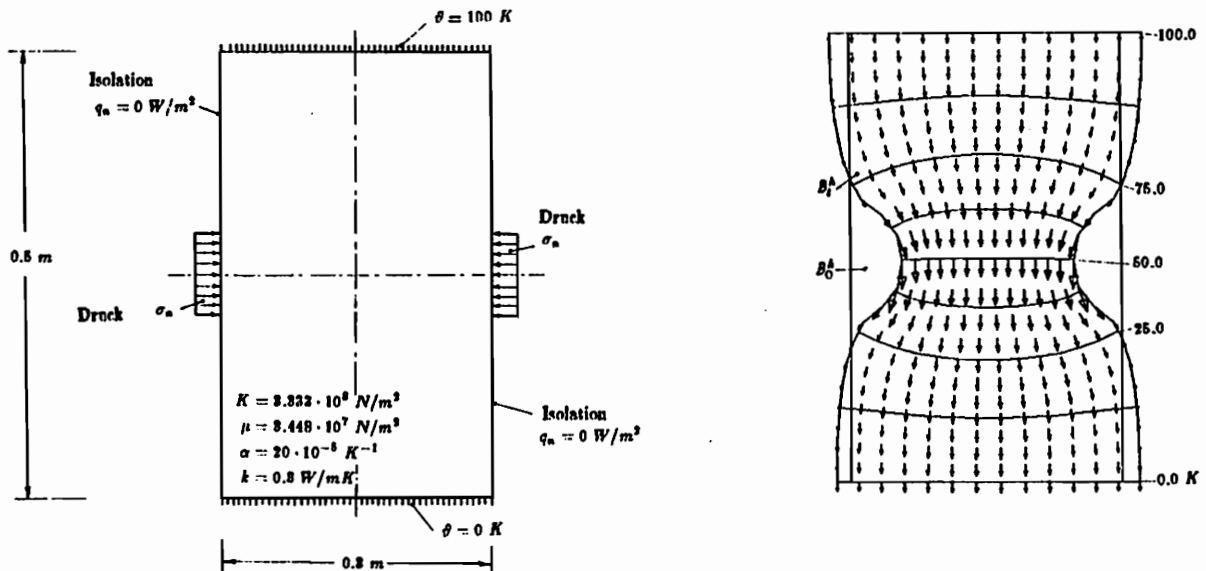
mit dem gekoppelten effektiven Residuum

$${}^i_{k+1} \mathbf{r}_n^{eff} = {}^i_{k+1} \begin{pmatrix} \mathcal{M} \mathbf{r}_M \\ \mathcal{T} \mathbf{r}_T \end{pmatrix}_n^{eff} \quad (7)$$

bezüglich des Elementknotens  $n$  und dem (unsymmetrischen) gekoppelten effektiven Tangentenoperator

$${}^i_{k+1} \mathbf{k}_{nm}^{eff} = {}^i_{k+1} \begin{pmatrix} \mathcal{M} \mathbf{k}_M & \mathcal{M} \mathbf{k}_{T \rightarrow M} \\ \mathcal{T} \mathbf{k}_{M \rightarrow T} & \mathcal{T} \mathbf{k}_T \end{pmatrix}_{nm}^{eff} \quad (8)$$

bezüglich der Knotenkombination  $nm$  des jeweiligen thermomechanischen finiten Materialelementes. Die Koppelterme  $\mathbf{k}_{T \rightarrow M}$  und  $\mathbf{k}_{M \rightarrow T}$  in der Tangentenmatrix enthalten Wirkungen des thermischen Feldes auf das mechanische Feld bzw. Einflüsse in umgekehrter Richtung. Auf der Grundlage von (6)–(8) erhält man deduktiv modifizierte Kopplungsalgorithmen basierend auf entkoppelten Iterationsoperatoren oder versetzten Iterationstechniken mit Wechsel zwischen mechanischer und thermischer Lösungsphase, die jedoch alle eine z.T. erheblich schlechtere Konvergenzgeschwindigkeit aufweisen, vgl. [5],[6].



a) Unbelastetes System.

b) Thermomechanisch belastetes System.

Fig.1: Geometrische thermomechanische Kopplung.

Das numerisches Beispiel in Fig.1 soll das vorgestellte algorithmische Konzept zur numerischen Simulation thermomechanischer Prozesse an einem stationären, stark geometrisch gekoppelten Problem veranschaulichen. Ein an der Ober- und Unterseite vertikal unver-schieblich gehaltener prismatischer Block aus polymeren Material wird infolge einer seitlichen Querbelastung eingeschnürt. Eine Temperaturdifferenz zwischen oberen und unteren Rand bewirkt vertikal einen stationären Wärmefluß. Bei der Deformation paßt sich der

Wärmefluß der starken Deformation des Körpers an: Er durchströmt den seitlich isolierten deformierten Körper. Im Bereich der Einschnürung verdichten sich die Isothermen.

Die Tab.1 zeigt den Verlauf des gekoppelten thermomechanischen Residuums während der Iteration und hebt die Wirkung der konsistenten Linearisierung hervor: Das mechanische und thermische "Un-Gleichgewicht" dieses stark geometrisch gekoppelten Problems wird simultan mit quadratischer Iterationsgeschwindigkeit (bis auf Rechnergenauigkeit) abgebaut.

Iteration	$\ r\ $
1.	$.48186 \cdot 10^0$
2.	$.11254 \cdot 10^0$
3.	$.34920 \cdot 10^{-3}$
4.	$.60255 \cdot 10^{-6}$
5.	$.36730 \cdot 10^{-10}$

Tab.1: Verlauf des thermomechanischen Residuums.

#### 4. Literatur

- [1] MARSDEN, J.E.; HUGHES, T.J.R. (1983) : *Mathematical foundations of elasticity* , Prentice - Hall.
- [2] HUGHES, T.J.R.; PISTER, K.S. (1978) : *Consistent linearization in mechanics of solids and structures* , Comp. & Structures 8 , 391-397.
- [3] COLEMAN, B. D.; GURTIN, M. E. (1967) : *Thermodynamics with internal state variables* , Jour. Chem. Physics 47, 597-613.
- [4] SIMO, J.C.; TAYLOR, R. L. ; PISTER, K.S. (1985) : *Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 51, 177- 208.
- [5] MIEHE, C. (1988) : *Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse* , Dissertation IBNM 1988.
- [6] MIEHE, C.; STEIN, E. (1988) : *A quadratically convergent procedure for the thermomechanical coupling based on spatial formulation* , Proceeding XVII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM), Grenoble, August 21 - 27, 1988.

## ANWENDUNG EINES SCHÄDIGUNGSMECHANISCHEN MODELLS AUF VORGÄNGE DER BLECHUMFORMUNG

P.Groche

Institut für Umformtechnik und Umformmaschinen

Prof. Dr.-Ing. E.Doege

Universität Hannover

In Stählen geht mit plastischen Deformationen ein Prozeß der Werkstoffschädigung einher. Schwache Stellen innerhalb des inhomogenen Gefüges können den aufgetragenen Belastungen nicht mehr standhalten. Als Folge stellen sich kontinuierliche Prozesse von Entstehung, Wachstum und Vereinigung von Hohlräumen ein /1,2/ (Bild 1).

In numerischen Simulationen können die wechselseitigen Einflüsse von Schädigung und Werkstoffverhalten mit Hilfe der Kontinuumsschädigungsmechanik beschrieben werden. Im folgenden betrachten wir das Werkstoffmodell von Gurson und nehmen als Gleichung für die Fließfläche an:

$$F = \frac{3}{2} \frac{\sigma_{ij}^i \sigma_{ij}^i}{K_f^2} + 2f \cdot Q_1 \cdot \cosh\left(\frac{Q_2 \cdot \sigma_{kk}}{2K_f}\right) - f^2 Q_3^2 - 1 = 0$$

Neben den aus der v.Miseschen Plastizitätstheorie bekannten Größen nehmen der hydrostatische Druck, der Schädigungsparameter  $f$  und die Parameter  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $Q_3$  Einfluß auf die Fließfläche.  $K_f$  repräsentiert die Fließspannung des Matrixmaterials. Sie kann aus der Äquivalenz der Inkremente der plastischen Arbeiten im Mikroskopischen und Makroskopischen und einem Verfestigungsgesetz ermittelt werden.

Die Parameter  $Q_1$ ,  $Q_2$  und  $Q_3$  werden sich in guter Näherung mit mikromechanischen Kontinuumsmodellen bestimmen lassen (Bild 2). Dazu wird jedem diskreten Berechnungspunkt ein äquivalenter homogener Schädigungszustand zugeordnet. Mit den Kontinuumsmodellen zu untersuchende Parameter sind Hohlraumvolumenanteil, Hohlraumverteilung und Hohlraumform.

In die Evolutionsgleichung für den Schädigungsparameter gehen Änderungen von Fließspannung, hydrostatischem Druck und Spur der plastischen Dehnung ein. Parameter müssen durch Vergleich mit Experimenten gewonnen werden. Aufgrund der inhomogenen und stochastischen Zustände lassen sie sich mit einer kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise nicht gewinnen.

Bei Anwendung des Gurson-Modells auf Blechumformvorgänge erhält man Aussagen über den Ort der maximalen Schädigung (Bild 3) und - bei entsprechend angepaßten Parametern - den Betrag der Belastung, bei der ein makroskopischer Riß zu erwarten ist.

- /1/ A.L.Gurson, 'Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I-Yield criteria and flow rules for porous ductile materials'. J.Eng.Matl.Tech., 99, 2-15 (1977).
- /2/ V.Tvergaard and A.Needleman, 'Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar', Acta Metallurgica, 32, 157-169 (1984).

Bild 1: Geschädigtes Blech; Vergrößerung 500 : 1

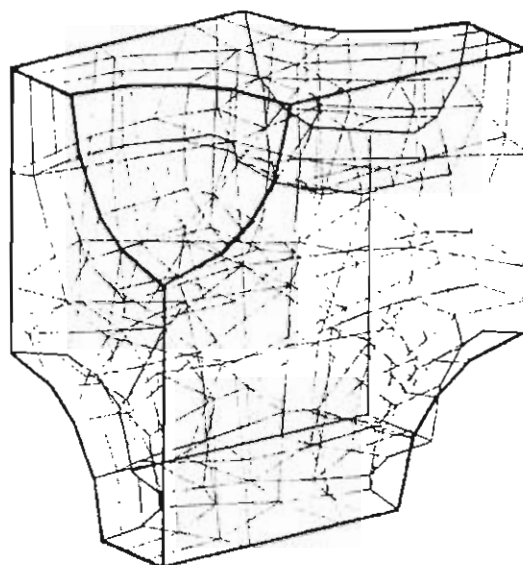
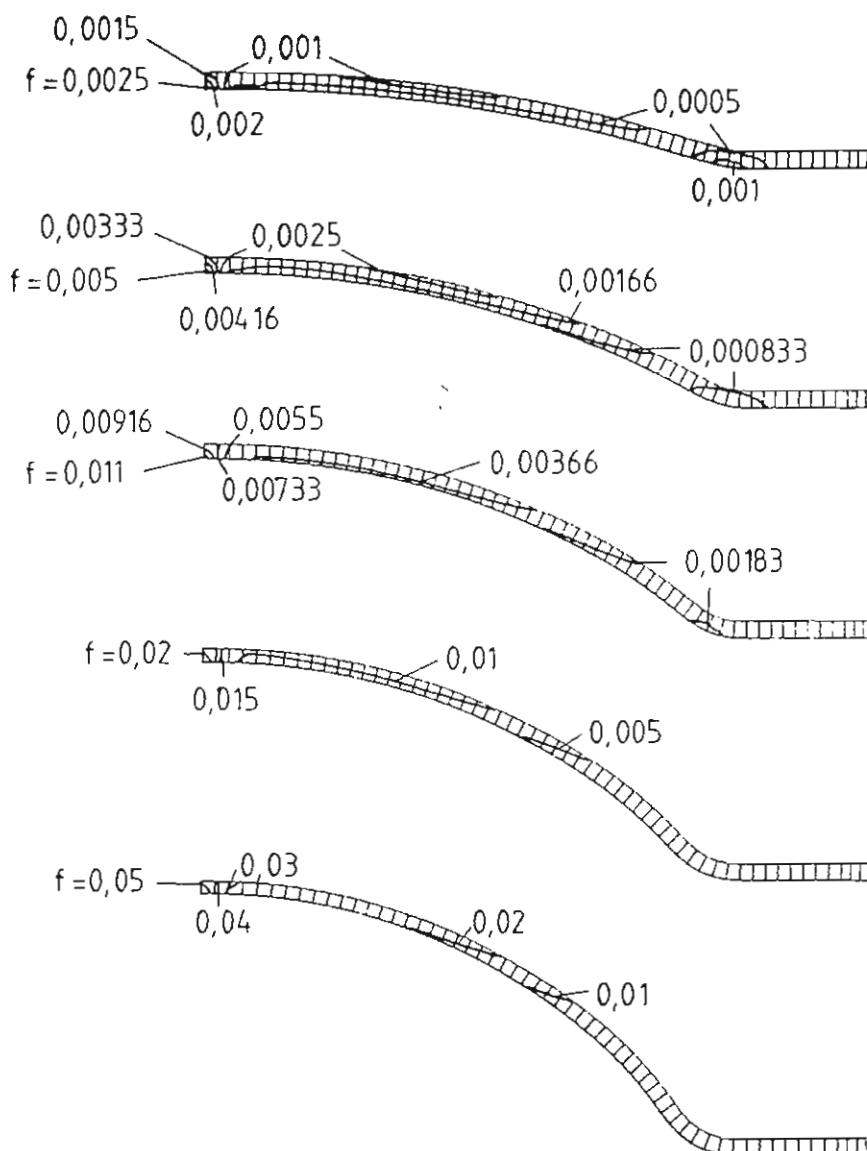


Bild 2: 3D FEM - Modell eines porösen Materials

Bild 3: Verteilung des Schädigungsparameters  $f$  im Verlauf einer hydraulischen Tiefung



Einfluß der Reibung auf den Werkstofffluß  
beim Warmflachwalzen

C. Hoerster, Max Planck Institut für Eisenforschung, Düsseldorf

Einleitung

Das Warmflachwalzen ist ein dreidimensionaler Umformprozeß. Während die Höhenreduktion des Walzgutes durch die Walzenanstellung vorgegeben ist, hängt der Werkstofffluß in Längen- und Breitenrichtung von verschiedenen Einflußparametern ab. Die wichtige Gruppe der geometrischen Einflüsse wie Walzenradius, Probenquerschnitt und Abnahme ist bereits intensiv untersucht worden /1/2/3/. In der Literatur findet sich häufig die Vermutung, daß auch die Reibung im Walzspalt einen Einfluß auf die Breitung ausübt. Diese Fragestellung wurde in einem Forschungsvorhaben untersucht.

Der Schwerpunkt der Arbeit lag im experimentellen Bereich. Aus Warmwalzversuchen an einem Laborwalzwerk wurden Meßwerte der Breitung gewonnen. Ringstauchversuche wurden zur Ermittlung von Reibungsfaktoren durchgeführt. Durch eine Übertragung dieser Reibungsfaktoren auf den Walzprozeß konnte eine Abhängigkeit der Breitung von der Reibung abgeleitet werden.

Ringstauchversuche

Mit Hilfe von Ringstauchversuchen läßt sich der Reibungsfaktor bei großen plastischen Formänderungen bestimmen. Eine zylindrische Probe wird zwischen zwei ebenen Platten gestaucht. Die Änderung von Innen- und Außendurchmesser der Probe ist abhängig von der Reibung in der Kontaktfläche. Die Auswertung der Versuche erfolgt mit der Theorie der Oberen Schranke: Die Innendurchmesserreduktion wird als Funktion der bezogenen Höhenabnahme dargestellt, der Reibungsfaktor  $m$  ist Parameter /4/5/6/.

Die Versuche wurden mit drei verschiedenen Stählen durchgeführt; die Reibungsbedingungen wurden durch ein Schmiermittel verändert; die Umformparameter Temperatur, Umformgrad und Umformgeschwindigkeit wurden variiert.

In den Versuchen ohne Schmiermittel lag der Reibungsfaktor immer im



Bereich zwischen 0,8 und 0,9. Es war kein Einfluß des Werkstoffs, der Zunderdicke, der Temperatur oder der geometrischen Umformbedingungen feststellbar.

Der Einsatz des Schmiermittels bewirkte eine starke Absenkung des Reibungsfaktors, beim Stahl X5 Cr Ni 18 9 bis auf 0,12, siehe Bild 1. Es zeigte sich eine Abhängigkeit der Reibung vom Werkstoff. Höhere Stauchtemperaturen und niedrigere Umformgeschwindigkeiten ließen den Reibungsfaktor ansteigen.

### Warmwalzversuche

Die Walzversuche wurden an einem Laborwalzwerk durchgeführt. Versuche ohne Schmiermittel, d. h. mit einem Reibungsfaktor von etwa 0,85, zeigten die typische Abhängigkeit der Breitung vom Verhältnis aus Anfangsbreite  $b_0$  und Anfangshöhe  $h_0$  der Walzprobe: Steigt  $b_0/h_0$  an, so sinkt die bezogene Breitung ab. Ein Einfluß des Werkstoffs konnte ebensowenig festgestellt werden wie ein Einfluß der Walztemperatur.

Wurde die Reibung durch das Schmiermittel vermindert, so bewirkte dies eine signifikante Absenkung der Breitung bei großen bezogenen Abnahmen, siehe Bild 2. Auch dieses Verhalten war unabhängig vom Werkstoff und von der Walztemperatur. Im Falle großer  $b_0/h_0$ -Verhältnisse ergaben sich sehr kleine Breitungswerte, ein Einfluß der Reibung war hier nicht mehr feststellbar.

Die gemessenen Breitungswerte wurden verglichen mit Ergebnissen einer dreidimensionalen Oberen-Schranke-Theorie des Walzens von Oh und Kobayashi /7/. Es zeigte sich, daß diese Theorie den Einfluß der Reibung auf die Breitung in Abhängigkeit von den verschiedenen Umformparametern in der Tendenz richtig wiedergibt. Für bestimmte Ausgangsgeometrien wurden sogar sehr gute Übereinstimmungen von Meßwerten und Theorie erzielt.

### Zusammenfassung

In einer experimentellen Studie wurde der Einfluß der Reibung auf den Werkstofffluß beim Warmflachwalzen nachgewiesen. Es zeigte sich, daß eine starke Verminderung der Reibung eine Absenkung der Breitung bewirkt. Diese Abhängigkeit gilt für große Abnahmen und kleine  $b_0/h_0$ -Verhältnisse. Ein Einfluß des Werkstoffs auf die Breitung konnte nicht festgestellt werden.

### Literaturangaben

- /1/ Helmi, A.; Alexander, J. M.: Geometric factors affecting spread in hot flat rolling of steel. J. Iron and Steel Inst. (1968) S. 1110/17.
- /2/ Mauk, P. J.; Kopp, R.: Breitung beim Warmwalzen. Der Kalibreur (1982) 37, S. 3/55.
- /3/ Klasen, F.: Werkstofffluß beim Warmwalzen von Stahl auf geneigter Walzbahn. Dr.-Ing.-Diss. RWTH Aachen 1984.
- /4/ Avitzur, B.: In: Metal Forming, Processes and Analysis. New York: McGraw-Hill Book Company 1968.
- /5/ De Pierre, V.; Gurney, F.; Male, A. T.: Mathematical calibration of the ring test with bulge formation. Technical report AFML-TR-7237, 1972, Air Force Materials Laboratory, Ohio.
- /6/ Lahoti, G. D.; Altan, T.: Prediction of temperature distribution in axisymmetric compression and torsion. J. of Engineering Material and Technology (April 1975) S. 113/20.
- /7/ Oh, S. I.; Kobayashi, S.: An approximate method for a three-dimensional analysis of rolling. Int. J. mech. Sci. 17 (1975) S. 293/305.

Bild 1:  
 Reibungsfaktoren im geschmierten Versuch,  
 Stauchtemperatur = 990 °C

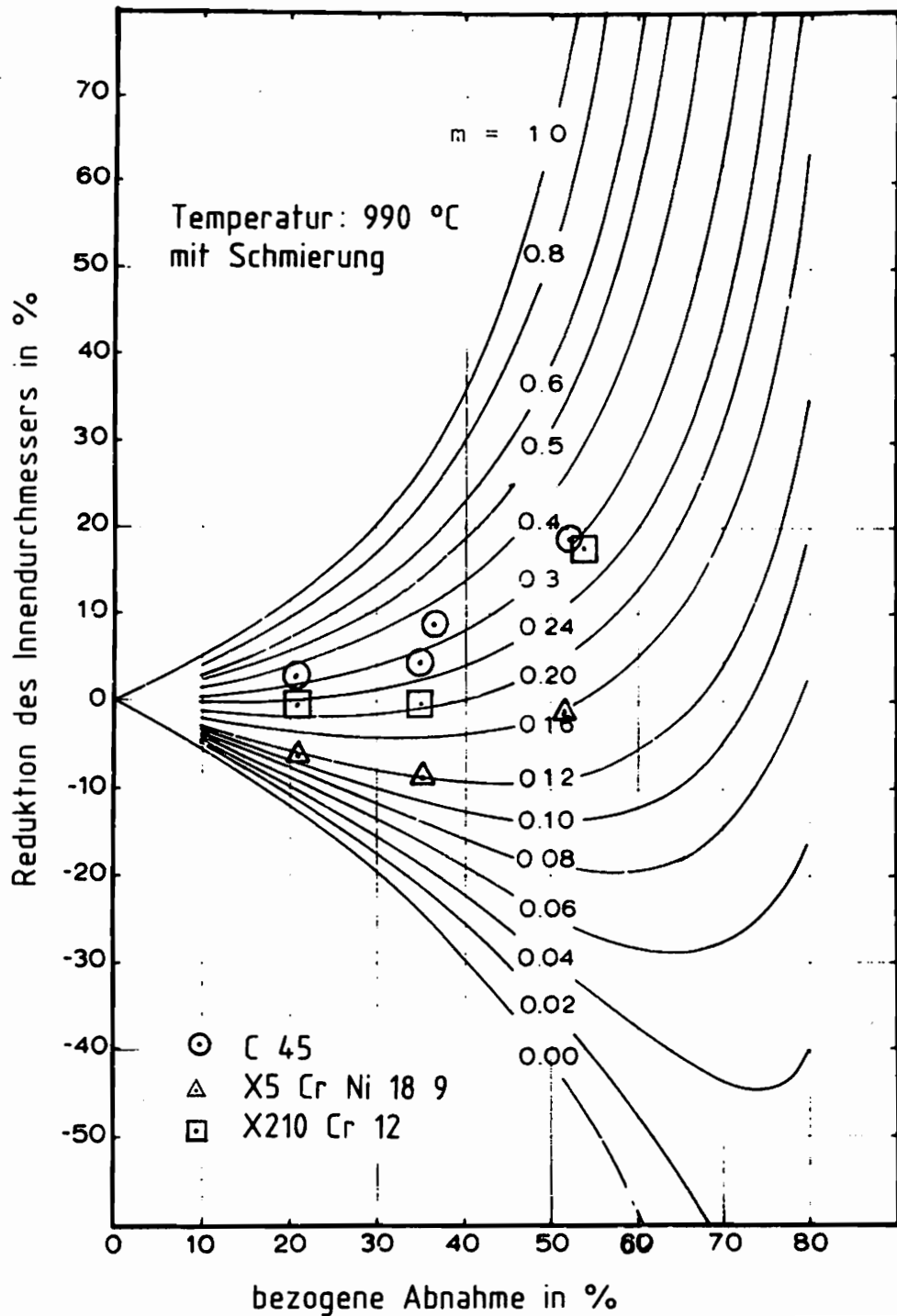


Bild 2:  
Breitung mit und ohne Schmierung

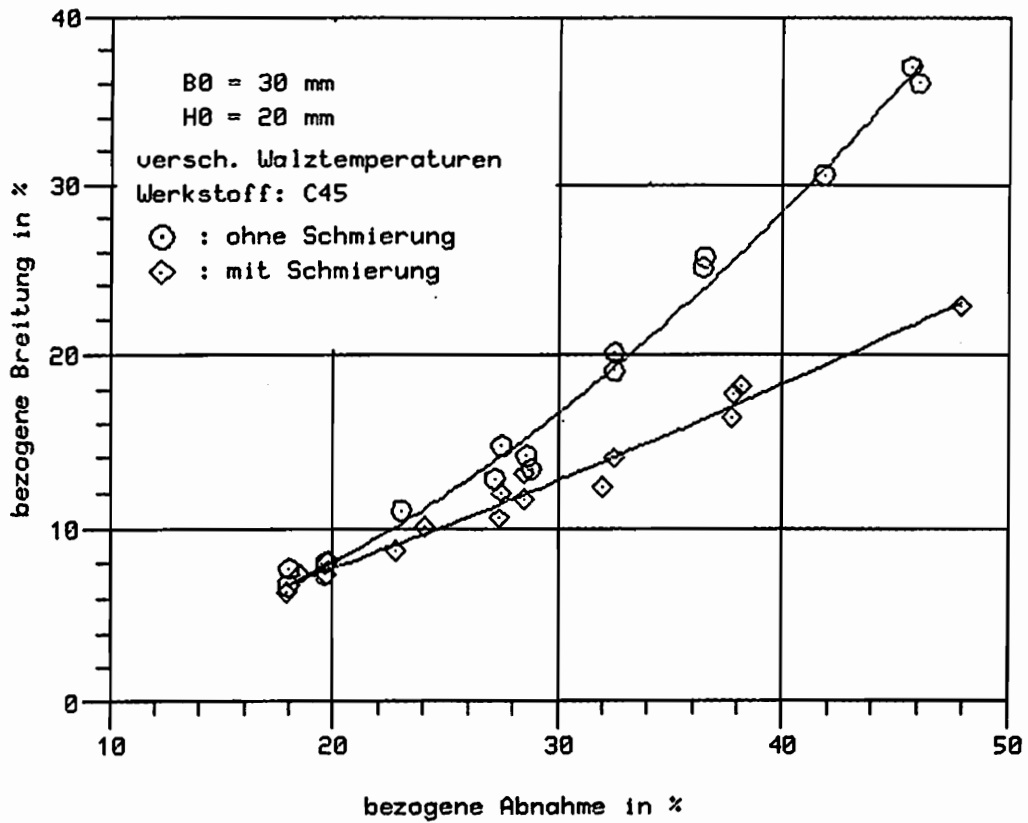
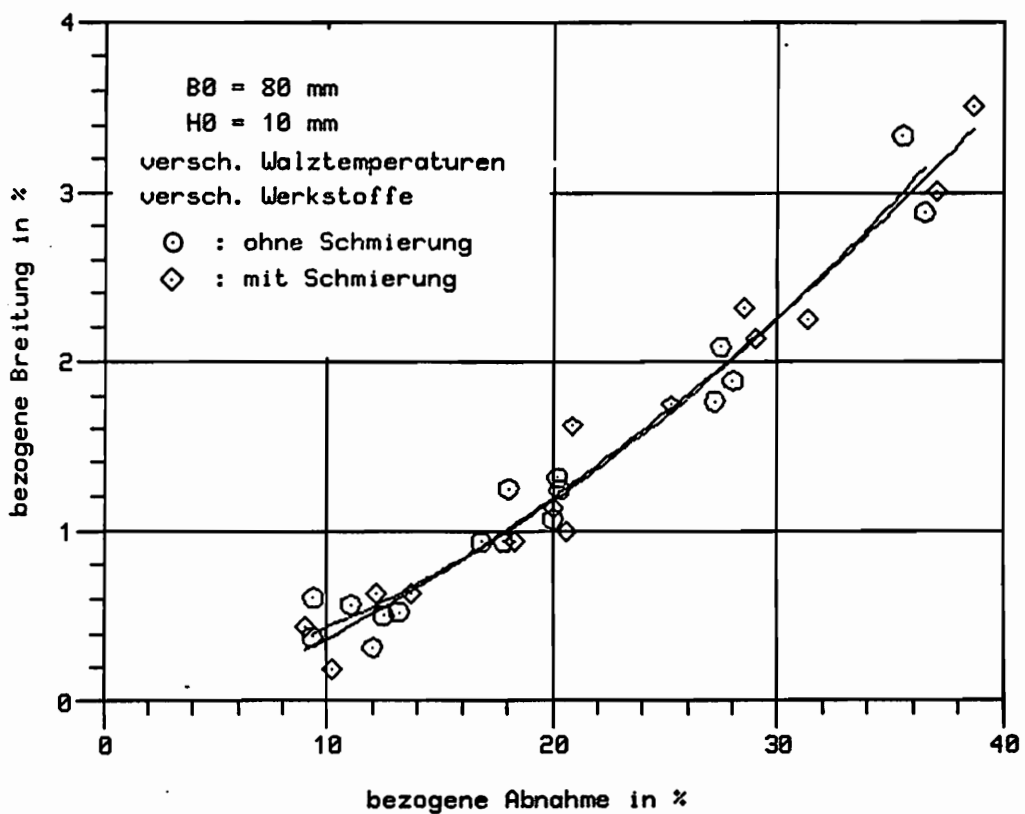


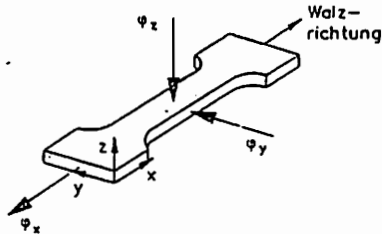
Bild 3:  
Breitung mit und ohne Schmierung



BLECHUMFORMUNG MIT ANISOTROPEM MATERIAL

M. Seydel, Institut für Umformtechnik und Umformmaschinen  
(Prof. Dr.-Ing. E. Doege), Universität Hannover

Karosserieblech ist durch den Walzvorgang grundsätzlich anisotrop. Man unterscheidet senkrechte Anisotropie, die durch den r-Wert definiert wird, und ebene Anisotropie, die die unterschiedlichen Eigenschaften in verschiedenen Richtungen der Blechebene beschreibt (Bild 1). Z. B. ist die Fließspannung diagonal zur Walzrichtung höher als in der Walzrichtung. Bei der FEM-Simulation von Tiefziehvorgängen kann diese Anisotropie mit dem Hillschen Stoffgesetz berücksichtigt werden. Zur Bestimmung der Parameter genügen Zugversuche mit Proben, die mit 0°, 45° und 90° zur Walzrichtung aus der Platine herausgeschnitten sind.



$$r_0 = \frac{\ln\left(\frac{b}{b_0}\right)}{\ln\left(\frac{a}{s_0}\right)} = \frac{\varphi_y}{\varphi_z} = \frac{d\epsilon_y}{d\epsilon_z}$$

mittlerer r-Wert bei senkrechter Anisotropie

$$r = \frac{r_0 + r_{90} + 2r_{45}}{4}$$

Zur Berechnung der Zipfelbildung genügt es aus Symmetriegründen, einen 45°-Sektor der Blechrunde zu idealisieren. Das Ergebnis (Bilder 2 und 3) zeigt eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

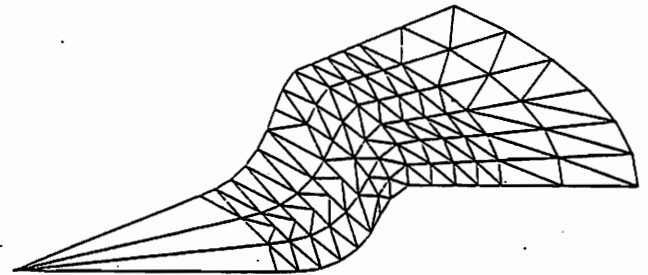


Bild 1 Definition des r-Wertes

Bild 2 Verformte Struktur

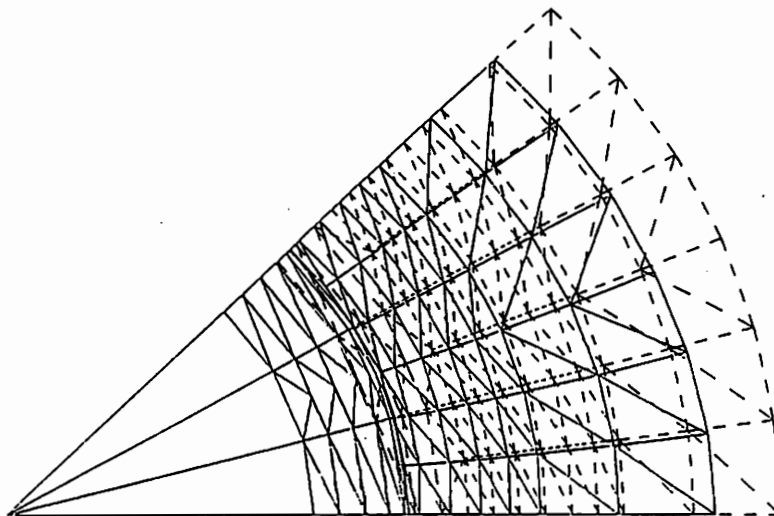
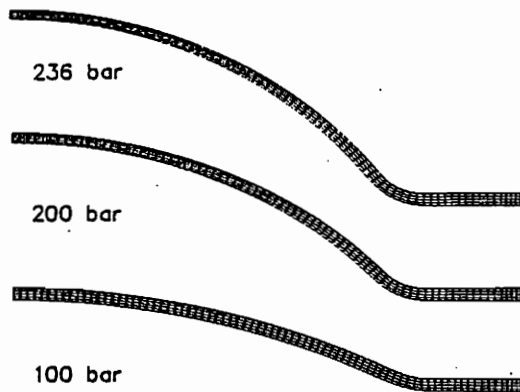


Bild 3 Aufsicht, zeigt Zipfelbildung in der Walzrichtung

Beim Tiefziehvorgang wird das Blech in der ersten Phase nur durch Zug belastet, später baut sich im Flansch eine tangentielle Druckspannung auf. Die Fließkurven für diese unterschiedlichen Spannungszustände weichen jedoch voneinander ab; so liegt die Fließkurve aus der hydraulischen Tiefung 10-20 % über der vom Zugversuch.

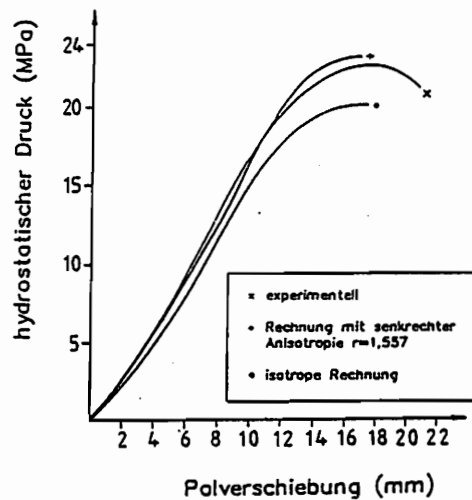
Die Messungen und Berechnungen des Tiefungsversuchs (Bild 4) zeigen, daß diese Diskrepanz nicht nur auf die Anfangsanisotropie zurückgeführt werden kann, sondern ein zusätzlicher Einfluß des Belastungszustandes besteht. Diesen Einfluß gilt es nun auch in der Rechnung zu berücksichtigen. Hierzu wurde eine belastungspfadabhängige Korrektur der Fließspannung zur Diskussion gestellt.



Hydraulischer  
Beulversuch

Seydel

Bild 4



Druck-Verschiebungs-  
Kurven,  
Hydraul. Beulversuch

Seydel

Bild 5

## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalem Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:  
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity

- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr.18 Uwe Kolberg:  
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells



- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38. Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorie unter Berücksichtigung großer Rotationen

- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowsky/H. Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotations-symmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 J. Makowski/H. Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 63**