

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Peter Becker

Zur Berechnung von
Schallfeldern mit Elementmethoden

Heft Nr. 41



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Peter Becker

Zur Berechnung von Schallfeldern
mit Elementmethoden

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 41

Februar 1984

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit in der Arbeitsgruppe "Numerisches Rechnen in der Mechanik und Simulationstechnik" am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller, der diese Arbeit angeregt und in vielen fachlichen und persönlichen Diskussionen durch wertvolle Denkanstöße immer gefördert hat.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann bin ich für das große Interesse an der Arbeit und für die Übernahme des Korreferates zu Dank verpflichtet.

Ein herzliches Dankeschön gilt auch meinen Kollegen, insbesondere Herrn Rolf-Helge Frania für die Unterstützung bei den vielfältigen Programmierarbeiten, sowie Frau Karin Piltner und Herrn Hans-Jürgen Michel für die sorgfältige Reinschrift des Manuskriptes.

Februar 1984

Peter Becker

Referenten:

Prof.-Dr.-Ing. Heinz Waller

Prof.-Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Tag der Einreichung: 14.12.1983

Tag der mündlichen Prüfung: 16.02.1984

© 1984 Peter Becker
Paulinenstraße 7 a
4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Finite-Elemente-Methode und die Boundary-Elemente-Methode zur Berechnung von Schallfeldern aufbereitet. Da Schallentstehung sowie Schallabsorption meist an räumlichen Begrenzungen von Schallfeldern stattfinden, werden unterschiedliche Randbedingungen berücksichtigt. Dies sind a) die Kopplung strukturmechanischer Schwingungen mit einem Schallfeld, b) die Schallabsorption durch poröse Stoffe mit einem Vergleich zwischen dem lokalen und dem, die seitliche Kopplung mitberücksichtigenden Absorptionsmodell, c) die Schallabstrahlung durch eine Raumöffnung ins Freie. Die Eigenschaften der Verfahren werden in Vergleichsrechnungen beispielhaft aufgezeigt.

Summary

This paper shows the application of the finite element method and the boundary element method for the numerical calculation of sound fields. As sound generation and absorption mostly take place at the boundaries of sound fields, different boundary conditions are taken into consideration. These are i) the coupling of structural vibrations with a sound field ii) the absorption by porous media, together with a comparison between the local and the bulk reacting absorption model iii) the radiation of sound through the opening of a room. The qualifications of the methods are exemplified by comparative calculations.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Grundlagen und Rechenmethoden	6
3. Die Berechnung geschlossener, dämpfungsfreier Gebiete mit finiten Elementen	12
3.1 Die gekoppelten Systemgleichungen, Variationsformulierungen und Herleitung von finiten Platte-Luftschall-Koppelementen	13
3.2 Eigenwertberechnungen	23
3.2.1 Eigenwerte eines Luftschallsystems	23
3.2.2 Eigenwerte eines gekoppelten Platte-Luftschallsystems	25
3.3 Die Berechnung der Zeitlösung	29
3.3.1 Bemerkungen zum Nulleigenwert im Fall akustisch harter Randbedingungen	29
3.3.2 Die Zeitintegration mit dem Verfahren der Modalen Analyse	33
4. Die Berechnung geschlossener, dämpfungsbehafteter Gebiete mit finiten Elementen	42
4.1 Problemgleichungen und Variationsformulierungen für Gebiete mit lokaler Randabsorption	44
4.1.1 Eindimensionale Finite-Elemente-Lösung und Vergleich mit analytischer Lösung	50
4.1.2 Finite Elemente für zweidimensionale Probleme	55
4.1.3 Beispielrechnungen	65
4.2 Problemgleichungen und Variationsformulierungen für Gebiete mit porösen Stoffen	68
4.2.1 Eindimensionale Finite-Elemente-Lösung und Vergleich mit analytischer Lösung	74
4.2.2 Finite Elemente für zweidimensionale Probleme	76

	Seite
4.3 Die Kopplung von Schallfeldern in Luft an Schallfelder in porösem Stoff	77
4.3.1 Eindimensionale Finite-Elemente-Lösung und Vergleich mit analytischer Lösung	77
4.3.2 Die Beschreibung im Zweidimensionalen	81
4.3.3 Beispielrechnungen	84
5. Die Berechnung geschlossener und offener Gebiete	89
5.1 Eine Darstellung der Abstrahlung ins Freie mit finiten Elementen	90
5.2 Die Methode der Boundary-Elemente	93
5.2.1 Die Herleitung der Randintegralgleichungen zur Lösung der Helmholtz-Gleichung für Gebiete mit Randabsorption	93
5.2.2 Die numerische Aufbereitung der Randintegral- gleichungen	98
5.2.2.1 Konstante Boundary-Elemente	99
5.2.2.2 Lineare Boundary-Elemente	104
5.2.3 Vergleichs- und Beispielrechnungen	109
5.2.4 Die Übertragung des Verfahrens auf offene Gebiete	113
5.2.5 Beispielrechnungen	115
5.3 Die Berechnung der Freifeldabstrahlung für Sonder- fälle mit Hilfe der Punktstrahlersynthese	122
6. Zusammenfassung	126
Anhang A1, A2, A3	129
Literaturverzeichnis	138

1. Einleitung

Die Motive, die einen Ingenieur veranlassen, sich mit der Berechnung von Schallfeldern zu beschäftigen, sind sicher seit je her zweierlei Art: zum einen unerwünschten Schall zu verringern oder ganz zu vermeiden, zum anderen erwünschten Schall zu erzeugen und zu kultivieren. Im ersten Falle wird dabei subjektiv von Lärm gesprochen, im zweiten Falle von Musik im weitesten Sinne, und nicht selten werden beide Begriffe gleichzeitig ein und demselben akustischen Vorgang zugeordnet. So verständlich das Anliegen des Musikliebhabers nach Authentizität ist, so verständlich muß das seines Nachbarn nach Ruhe sein. Zeugnis hiervon geben Hifi-Normen einerseits und eine Fülle von Vorschriften und Gesetzen für Schallemissionen andererseits.

Die Akustik als naturwissenschaftliche Disziplin kennt diese Differenzierung nicht. Ingenieursmäßige Anwendungen akustischer Gesetze haben gerade in den letzten Jahren zu rapiden Fortschritten sowohl auf schallerzeugender wie auch auf der schallverhindernden Seite geführt. So ist beispielsweise die Entwicklung von Lautsprecherboxen auf den heutigen Stand nur möglich gewesen durch gleichzeitiges Optimieren von akustisch aktiven Bauteilen, wie Membranen und Kalotten, deren Materialbeschaffenheit und Geometrie, und akustisch passiven Bauteilen, wie porösen Dämmstoffen, deren Eigenschaften und Verteilung im Gehäuse. Vor allem auch im Bereich des Maschinenbaus haben akustische Forschungen dazu beigetragen, die Schallabstrahlung von Bauteilen, ganzen Maschinen und Anlagen trotz zum Teil höherer Leistungen zu verringern.

Solche Entwicklungen sind allerdings verknüpft mit der Qualität der physikalischen und mathematischen Modellbildung akustischer Systeme. Hier zeigt sich, daß empirische Formeln mit integralen Aussagen den heutigen Anforderungen oft nicht mehr genügen. Stattdessen tritt seit einigen Jahren die Berechnung von Schallfeldern stärker in den Vordergrund. Die Anwendung numerisch diskreter Verfahren ist dabei zwar zu hohen Frequenzen bzw. großen geschlossenen Schallfeldern hin begrenzt; für viele praktische Problemstellungen der linearen Akustik sind jedoch Schallfeldberechnungen einwirkungsvolle Alternative zu bisherigen eher empirisch gestützten Rechenverfahren. Aus der Fülle der Anwendungsfälle sei hier

noch genannt: die Schallfeldberechnung in Fahrgastzellen von Automobilen, in Wohn- und Büroräumen, die Berechnung der Eingangsimpedanzen von Schalldämpfern oder ganzen Auspuffsystemen, von Helmholtzresonatoren sowie die Berechnung der Wirkung von Schallschirmen.

Die zwei wesentlichen Schwierigkeiten bei der Berechnung von Schallfeldern ergeben sich dabei aus Bedingungen der Praxis: erstens sollen verschiedene Gebietsgeometrien erfaßbar sein; zweitens sollen unterschiedliche Arten von Randbedingungen, wie Körperschallankopplung, Schalldämpfung durch Dämmmaterialien oder eine Schallabstrahlung ins Freie berücksichtigt werden können.

Als geeignetes numerisches Verfahren hat sich hier vor allem die Methode der finiten Elemente erwiesen. Ihre Verbreitung in der Akustik ist aber im Vergleich mit anderen ingenieurwissenschaftlichen Bereichen, wie Bauingenieurwesen und Maschinenbau noch sehr gering, obwohl entsprechende Veröffentlichungen die Leistungsfähigkeit der Methode bei akustischen Problemen deutlich aufzeigen [12,13,31,37].

Als alternatives Verfahren kann die in den letzten Jahren entwickelte Boundary-Element-Methode angesehen werden. Inzwischen liegt einige Standardliteratur hierzu vor, in der auch auf Vor- und Nachteile zu anderen Verfahren hingewiesen wird [8,9]. Die Anwendung der Boundary-Element-Methode im Ingenieurwesen geschieht jedoch erst vereinzelt, so daß sie die Popularität der Finite-Elemente-Methode noch längst nicht erreicht hat. Im Bereich der Akustik ist sie noch weniger bekannt, was um so bedauerlicher ist, als sich mit ihr einige Probleme, besonders bei der Schallabstrahlung ins Freie, besser und mit geringerem numerischen Aufwand lösen lassen, als dies mit finiten Elementen möglich ist.

In der vorliegenden Arbeit werden nach einer kurzen Darstellung der Grundlagen und der Rechenmethoden verschiedene akustische Aufgabenstellungen nach einer an die unterschiedlichen Randbedingungen angelehnten übergeordneten Klassifizierung für die Behandlung mit Elementmethoden aufbereitet und an Rechenbeispielen erläutert. Beginnend in Kapitel 3 werden für ungedämpfte akustische und akustisch-mechanische Systeme Finite-Elemente-Formulierungen im Dreidimensionalen am Beispiel des Platte-Luftschall-Koppel-

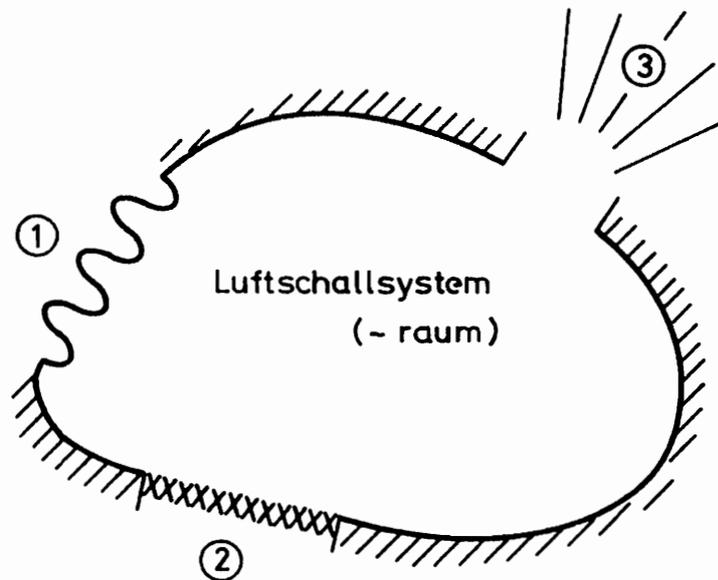


Abb. 1 - 1 Klassifizierung nach Randbedingungen
1) akustisch-mechanische Kopplung
2) Randabsorption durch Dämmstoffe
3) Schallabstrahlung ins Freie

systems aufgezeigt. Mit dieser Darstellung ist es möglich, die Interaktion einer Platte mit einem angrenzenden Luftschallraum sowohl im Sinne einer Anregung, wie auch einer Abstrahlung zu berechnen. Dabei auftauchende Probleme, wie die Behandlung von Nulleigenwerten im Falle akustisch harter Randbedingungen oder numerische Schwierigkeiten werden diskutiert. Eine Beispielrechnung für die Orts- und Zeitlösung eines gekoppelten Plattenluftschallsystems beschließt das Kapitel.

In Kapitel 4 werden die Formulierungen auf die Darstellung gedämpfter akustischer Systeme erweitert. Wegen der komplizierten Frequenzabhängigkeit der Dämpfungsparameter und des damit zu erwartenden numerischen Aufwandes bei einer Zeitlösung beschränken sich die weiteren Betrachtungen auf stationäre Lösungen, d.h. Ortslösungen, zu denen ein vorher separiertes harmonisches Zeitgesetz gehört. Aus einer geeigneten Variationsformulierung werden finite Elemente abgeleitet, mit denen sich Randabsorptionseffekte durch die in der Akustik gebräuchliche Vorgabe von komplexen Wandadmittanzen berechnen lassen.

Da sich mit dieser Modellbildung nur die sogenannte lokale Absorption unter Vernachlässigung seitlicher Kopplungseffekte im Absorptionsmaterial darstellen läßt, werden im zweiten Abschnitt von Kapitel 4 finite Elemente zur Beschreibung der Schallausbreitung in porösen Stoffen hergeleitet. Im dritten Abschnitt des Kapitels wird die Ankopplung dieser Elemente an diejenigen für die Luftschallausbreitung gezeigt. Die Abbildungsleistungen der Verfahren werden für den Sonderfall eindimensionaler Schallausbreitung an analytischen Lösungen getestet. In weiteren Vergleichsrechnungen werden Kriterien zur Entscheidung für das lokale Absorptionsmodell oder das der zusätzlichen Diskretisierung des Absorptionsstoffes genannt, sowie die Auswirkungen unterschiedlicher Verteilung von Wandabsorptionsstoffen auf das Schallfeld eines Gebietes aufgezeigt.

In Kapitel 5 werden die bisherigen raumakustischen Betrachtungen erweitert auf solche Probleme, bei denen die Schallabstrahlung ins Freie eine Rolle spielt. Anwendungsfälle hierfür sind Freifeldabstrahlungen der Oberflächen schwingender Maschinenbauteile, aber auch die Auswirkungen auf das Schallfeld innerhalb eines Raumes, wenn dieser eine Öffnung ins Freie besitzt. So ist z.B. aus Messungen an Rohrschalldämpfern bekannt, daß deren Eingangsimpedanz sich ändert, wenn verschieden große Flansche angebracht sind.

Im ersten Abschnitt von Kapitel 5 wird eine Modellbildung für die Freifeldabstrahlung mit finiten Elementen gezeigt und an Beispielen diskutiert. Die geringe Effizienz sowie der hohe numerische Aufwand bei den Finite-Elemente-Rechnungen für Abstrahlprobleme legen es nahe, hier die Boundary-Elemente-Methode anzuwenden. Im Zweiten Abschnitt werden daher zunächst die Randintegralgleichungen für geschlossene, dämpfungsbehaftete Gebiete aus dem von Kapitel 4.1 bekannten Variationsprinzip hergeleitet. Daran angeschlossen wird die numerische Aufbereitung zu Randintegralgleichungssystemen mit konstanten und linearen Randelementen. Die Darstellung ist hier etwas ausführlicher gehalten, da bei der Boundary-Elemente-Methode schon zur Aufstellung der Systemgleichungen eine Reihe von numerischen Rechnungen im Zusammenhang mit der Fundamentallösung und deren Integration über Singularitäten erforderlich sind und sich der Ablauf damit nicht so gut standardisieren läßt wie bei finiten Elementen. Rechenbeispiele zum Vergleich mit einer eindimensionalen analytischen Lösung sowie mit einer zweidimensionalen Finite-Elemente-Lösung zeigen dann die Möglichkeiten der Methode.

Die Übertragung des Verfahrens auf offene Gebiete ergibt sich beim Grenzübergang auf Gebietsränder, die im Unendlichen liegen. Die Sommerfeld'sche Abstrahlbedingung wird dabei durch Eigenschaften der Fundamentallösung erfüllt. So ist es möglich, Abstrahlprobleme ohne wesentliche Änderung des bisher vorgestellten Konzeptes zu lösen. Im vorletzten Abschnitt von Kapitel 5 werden dann vergleichende Berechnungen zur Freifeldabstrahlung durchgeführt und diskutiert. Für den Sonderfall der Freifeldabstrahlung von ebenen und geradlinienhaften schwingenden Bauteilen wird in einem kurzen Abschnitt nach den Beispielrechnungen mit der Boundary-Elemente-Methode als Referenzmodell die Punktstrahlersynthese hergeleitet, die auf der numerischen Berechnung des sogenannten Rayleigh-Integrals beruht.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen Beitrag zur Verbreitung der Anwendung numerisch diskreter Methoden bei akustischen Problemen zu leisten. Durch die Aufbereitung der Finite-Elemente- und der Boundary-Elemente-Methode zur Behandlung vielfältiger akustischer Aufgabenstellungen, sowie durch die Berechnung und Diskussion ausgewählter Beispiele sollen die Arbeitsweise und die numerische Effizienz der Methoden, aber auch die Problematik ihrer Anwendung und Grenzen ihrer Anwendbarkeit aufgezeigt werden.

2. Grundlagen und Rechenmethoden

Ein Schallfeld in Luft läßt sich durch zwei Feldgrößen beschreiben: den skalaren Schalldruck und die vektorielle Schallschnelle. Beide Feldgrößen sind orts- und zeitabhängig und werden in der linearen Akustik über zwei Schallfeldgleichungen miteinander verknüpft. Die erste entsteht aus der Anwendung des Newton'schen Grundgesetzes und stellt eine Beziehung zwischen der Zeitableitung der Schallschnelle und den Ortsableitungen des Schalldrucks her,

$$\rho_L \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } \bar{p} \quad , \quad (2-1)$$

während die zweite, als Kontinuitätsgleichung bekannt, die Ortsableitungen der Schallschnelle mit der Zeitableitung des Schalldrucks verbindet.

$$\text{div } \vec{v} = - \frac{1}{\rho_L c_L^2} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} \quad . \quad (2-2)$$

Die Herleitung dieser Gleichungen ist in den akustischen Lehrbüchern ausführlich beschrieben. Die dabei vorgenommenen Idealisierungen und Voraussetzungen sollen hier nur noch einmal zur Bestimmung des Begriffes "lineare Akustik" aufgezählt werden:

- die thermischen Zustandsänderungen im Gas erfolgen adiabatisch,
- der Schallwechseldruck sei klein gegen den atmosphärischen Druck,
- die Wechseldichte sei klein gegen die Ruhedichte,
- die Schallgeschwindigkeit sei allein temperaturabhängig. Sie wird im folgenden immer zu $c_L = 330 \text{ m/s}$ angenommen,
- die Schallschnelle sei klein gegen die Schallgeschwindigkeit,
- das schallführende Medium sei als ruhend vorausgesetzt, sodaß - wie in Gl.(2-1) geschehen - die substantielle Ableitung der partiellen gleichgesetzt, d.h. der konvektive Beschleunigungsterm vernachlässigt wird.

Trotz der Vielzahl der Restriktionen ist die lineare Akustik nach wie vor das Standardgebiet der Akustik, da sich die weitaus meisten vorkommenden akustischen Phänomene durch sie beschreiben lassen.

Durch Differentiation von Gl.(2-1) nach dem Ort und Gl.(2-2) nach der Zeit läßt sich die Schallschnelle \tilde{v} aus den Feldgleichungen eliminieren, und man erhält für den Schalldruck \tilde{p} die Wellengleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \tilde{p} = \Delta \tilde{p} = \frac{1}{c_L^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} \quad . \quad (2-3)$$

Durch Einsetzen eines Lösungsansatzes mit separiertem Zeitgesetz

$$\tilde{p}(x, y, z, t) = p(x, y, z) f(t) \quad (2-4)$$

in die Wellengleichung folgt

$$c_L^2 \frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dt^2} = \text{const.} = -\omega^2 \quad (2-5)$$

und hieraus die das Ortsgesetz beschreibende Helmholtz-Gleichung

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad ; \quad k = \frac{\omega}{c_L} \quad (2-6)$$

sowie die das Zeitgesetz beschreibende Schwingungsgleichung

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0 \quad . \quad (2-7)$$

Mit der Annahme eines harmonischen Zeitgesetzes der Form

$$f(t) = e^{i\omega t} \quad (2-8)$$

ergibt sich zusammen mit der durch die Elementverfahren gewonnenen Ortslösung dann

$$\tilde{p} = p e^{i\omega t} \quad (2-9)$$

als stationäre Lösung der Wellengleichung.

Die Methode der finiten Elemente, wie auch die der Boundary-Elemente haben zum Ziel, eine Differentialgleichung bzw. ein System von Differentialgleichungen durch ein System von algebraischen Gleichungen zu ersetzen, die dann auf dem Digitalrechner nach bekannten Algorithmen aufge löst werden.

Bei der Methode der finiten Elemente wird zunächst ein Variationsproblem formuliert, das der vorgegebenen Differentialgleichung mit Randbedingungen gleichwertig ist. Nach dem Ritz'schen Verfahren werden dann für Teilbereiche des zu untersuchenden Gebietes mit Hilfe von Polynomansätzen für den Verlauf der unbekannt en Funktion die Gleichungssysteme für verschiedene finite Elemente abgeleitet. Dem Zusammenbau der finiten Elemente zum Gesamtsystem, in dem die gesuchte Lösungsfunktion durch diskrete Funktionswerte an Knotenpunkten des Elementnetzes ersetzt wird (vgl. Abb. 2-1a), entspricht dann der Zusammenbau der Elementmatrizen zu den, das zu untersuchende Gebiet repräsentierenden Gesamtmatrizen.

Ausgangspunkt für die Methode der Boundary-Elemente ist eine gewichtete Residuenbeziehung für das betrachtete Differentialgleichungsproblem. Es hat sich gezeigt, daß aus dem Prinzip der gewichteten Residuen aber auch die Methode der finiten Elemente und andere Verfahren, wie die hier nicht betrachteten finiten Differenzen oder die Fehlerquadratmethode, hergeleitet werden können [35]. Entscheidende Unterschiede ergeben sich dabei aus der Wahl der Gewichtsfunktionen, was an einem einfachen Beispiel kurz skizziert werden soll.

Zur Helmholtz'Gleichung

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad \text{im Gebiet } \Omega \quad (2-10)$$

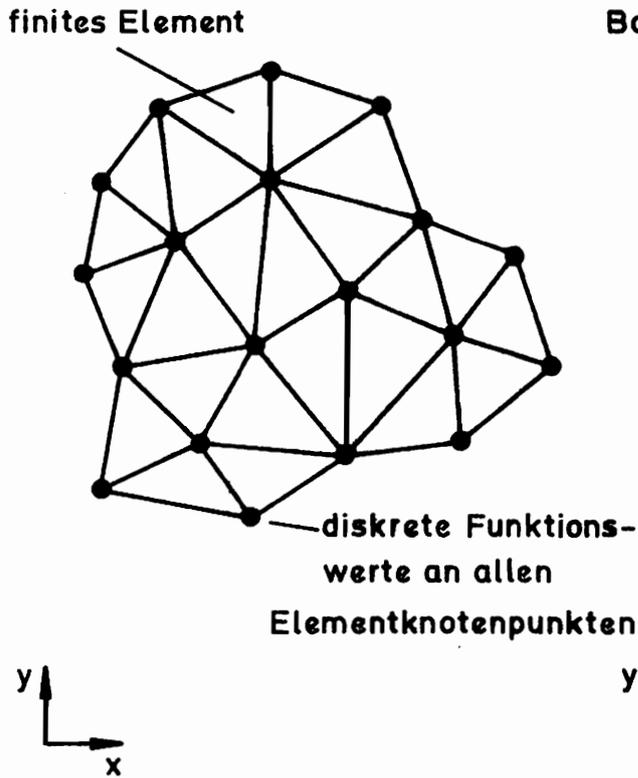


Abb. 2-1a
Gebietsdiskretisierung mit finiten Elementen

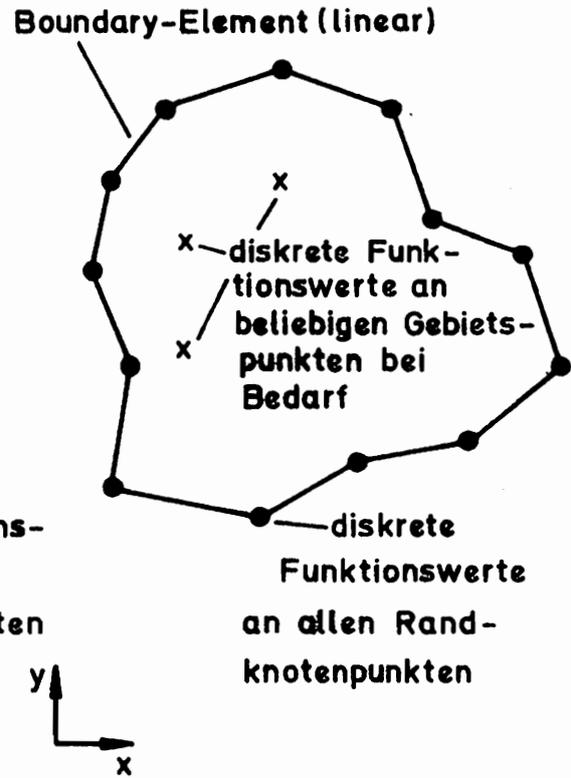


Abb. 2-1b
Randdiskretisierung, hier mit linearen Boundary-Elementen

und den homogenen, akustisch harten Randbedingungen

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{auf dem Rand } \Gamma \quad (2-11)$$

gehört die gewichtete Residuenbeziehung

$$-\int_{\Omega} (\Delta p + k^2 p) w \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} w \, d\Gamma = 0 \quad (2-12)$$

a) Die Wahl der Gewichtsfunktion w als

$$w = \delta p \quad (2-13)$$

führt auf

$$-\int_{\Omega} (\Delta p + k^2 p) \delta p \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial p}{\partial n} \delta p \, d\Gamma = 0 \quad , \quad (2-14)$$

also formal den gleichen Ausdruck, wie durch die erste Variation des Funktionals

$$I = \int_{\Omega} \{ (\text{grad } p)^2 - k^2 p^2 \} \, d\Omega \longrightarrow \min. \quad (2-15)$$

erhalten wird. Durch Einsetzen der Ansatzfunktionen für p in Gl.(2-14) lassen sich hieraus die Finite-Elemente-Beziehungen herleiten.

b) Für die Ausgangsgleichung zur Herleitung der Boundary-Elemente-Beziehungen wird dagegen die gewichtete Residuenbeziehung Gl.(2-12) zunächst zweimal partiell integriert. Hiermit wird erreicht, daß der Differentialoperator nicht mehr auf p , sondern auf die Gewichtsfunktion w angewendet wird.

$$-\int_{\Omega} (\Delta w + k^2 w) p \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial w}{\partial n} p \, d\Gamma = 0 \quad . \quad (2-16)$$

Für die Gewichtsfunktion wird nun eine von p verschiedene Funktion, meist die Fundamentallösung p^* des Problems

$$\Delta p^* + k^2 p^* = -\Delta_{(i)} \quad (2-17)$$

gewählt. Das Gebietsintegral in Gl.(2-16) reduziert sich dadurch auf eine Dirac-Delta-Funktion

$$-\int_{\Omega} (\Delta p^* + k^2 p^*) p \, d\Omega = p_{(i)} \quad (2-18)$$

so daß bleibt

$$p_{(i)} + \int_{\Gamma} \frac{\partial p^*}{\partial n} p \, d\Gamma = 0 \quad . \quad (2-19)$$

Einsetzen von Ansatzfunktionen für den Verlauf von p auf Teilrandbereichen (Randelementen) führt auf die Boundary-Elemente-Beziehungen.

Durch den Fortfall des Gebietsintegrals in Gl.(2-19) wird bei der Boundary-Elemente-Methode das Problem um eine Dimension verringert (siehe Abb. 2-1a/b) und führt so auf insgesamt kleinere Gleichungssysteme. Mit Kenntnis der Funktionsverläufe auf dem Rand lassen sich dann durch wiederholte Integration auch die Funktionswerte an diskreten Gebietspunkten ermitteln. So sind beide Methoden in ihrer Anwendbarkeit prinzipiell gleichwertig; auf spezifische Vor- und Nachteile bei bestimmten Aufgabestellungen wird in Kap. 5 noch näher eingegangen.

3. Die Berechnung geschlossener, dämpfungsfreier Gebiete mit finiten Elementen

In vielen praktischen Fällen steht die Erzeugung von Luftschall in ursächlichem Zusammenhang mit schwingenden, flächenhaften mechanischen Strukturen. Entsprechend häufig findet man in akustischen Lehrbüchern die Schallabstrahlung biegeschwingender Platten behandelt [14,20]. Analytische Lösungen beschränken sich dabei auf den Sonderfall unendlicher ausgedehnter Platten, bzw. halbumendlicher Plattenstreifen, sowie auf eine sogenannte Freifeldabstrahlung in ein unendlich großes, also reflexionsfreies Luftschallgebiet über der Platte.

Zur Berechnung der Schallabstrahlung endlicher Platten in ein ebenfalls endliches Luftschallgebiet werden meist numerische Näherungsverfahren eingesetzt. Der physikalische Vorgang läßt sich nun nicht mehr allein durch eine Schallabstrahlung beschreiben, sondern es findet zwischen Platte und angrenzendem Luftschallraum eine Interaktion sowohl im Sinne einer Schallabstrahlung als auch einer Schwingungsanregung der Platte durch den Luftschalldruck statt. Diese Kopplungseffekte sind abhängig von den Materialeigenschaften, der Geometrie und den Randbedingungen der Platte, aber auch von der Geometrie des Luftschallraumes und dessen Randbedingungen. Erste numerische Rechnungen zu dem Kopplungsproblem stammen von Pretlove [32,33], der die Lösungen der Plattengleichung und der Wellengleichung in Eigenformen entwickelte und dann beide Systeme durch Gleichgewichtsbedingungen an der Grenzfläche koppelte. Die bisher einzige bekannte Anwendung finiter Elemente zu diesem Problem stammt von Craggs [12], der die Kopplung beider Systeme auf der Basis eines von Gladwell [18] angegebenen Variationsprinzips formulierte.

In diesem Kapitel soll nun die Herleitung und Anwendung von dreidimensionalen quaderförmigen Luftschallelementen gezeigt werden, deren eine Außenfläche bei Bedarf an ein finites Plattenelement angekoppelt wird, um an Grenzflächen des abzubildenden Raumes die Interaktion Platte-Luftschall zu beschreiben. Der Einfluß der Kopplung auf die Eigenwerte der Teilsysteme wird gezeigt im Vergleich mit einer eindimensionalen Lösung. Mit Hilfe der Modalen Analyse wird dann an einem Beispiel die instationäre Wellenausbreitung

in einem Fenster-Raum-System berechnet und für zwei in der Abbildungsleistung unterschiedliche finite Luftschallelemente verglichen.

3.1 Die gekoppelten Systemgleichungen, Variationsformulierungen und Herleitung von finiten Platte-Luftschall Koppel-elementen

Für die beiden Teilsysteme Platte und Luftschall wird je ein Variationsproblem formuliert, das neben der zugehörigen Differentialgleichung auch die Kopplungsbedingung an das jeweils andere Teilsystem beinhaltet.

Die Bewegungsgleichung einer Platte unter einer äußeren Flächenbelastung \bar{p} infolge eines Schalldrucks lautet

$$\Delta\Delta\tilde{w} = \frac{1}{k_P} (\bar{p} - \rho_P h \ddot{\tilde{w}}) \quad , \quad (3-1)$$

mit

$$\Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad ; \quad \dot{\quad} \triangleq \frac{\partial}{\partial t} \quad . \quad (3-2)$$

Dabei ist

$\tilde{w}(x, y, t)$	-	die Auslenkung der Platte
$\bar{p}(x, y, z=0, t)$	-	der Schalldruck auf der Plattenoberfläche
$k_P = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$	-	die Plattensteifigkeit

ρ_P	-	die Dichte des Plattenmaterials
----------	---	---------------------------------

E	-	der Elastizitätsmodul
-----	---	-----------------------

h - die Plattendicke

ν - die Querkontraktionszahl .

Mit den Separationsansätzen

$$\tilde{w}(x, y, t) = w(x, y) f(t) \quad (3-3)$$

$$\tilde{p}(x, y, z, t) = p(x, y, z) f(t) \quad (3-4)$$

wird aus der Bewegungsgleichung

$$\Delta \Delta w f = \frac{1}{k_P} (p f - g_P h w \ddot{f}) \quad (3-5)$$

und das zugehörige Variationsproblem lautet [21]

$$I = \iint_{a \ b} \left\{ \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} f + \frac{g_P h}{k_P} w^2 \ddot{f} - \frac{2}{k_P} w p f \right\} dx dy \longrightarrow \min. \quad (3-6)$$

Für die Annäherung der unbekanntenen Funktionen w und p werden nun in bekannter Weise Ansatzfunktionen in dimensionslosen cartesischen Koordinaten eingeführt, und zwar für die Auslenkung der Platte

$$w(\xi, \eta) = \underline{\varphi}_P(\xi, \eta) \underline{G}_P \underline{w} = \underline{\phi}_P(\xi, \eta) \underline{w} \quad (3-7)$$

und für die dreidimensionale Schalldruckverteilung in Luft

$$p(\xi, \eta, \zeta) = \underline{\varphi}_L(\xi, \eta, \zeta) \underline{G}_L \underline{p} = \underline{\phi}_L(\xi, \eta, \zeta) \underline{p} \quad (3-8)$$

mit

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b} \quad \text{und} \quad \zeta = \frac{z}{c}, \quad (3-9)$$

wenn a , b die Dimensionen eines rechteckigen Plattenelementes und a , b , c die Dimensionen eines angekoppelten quaderförmigen Luftschallelementes sind (siehe Abb. 3.1-1).

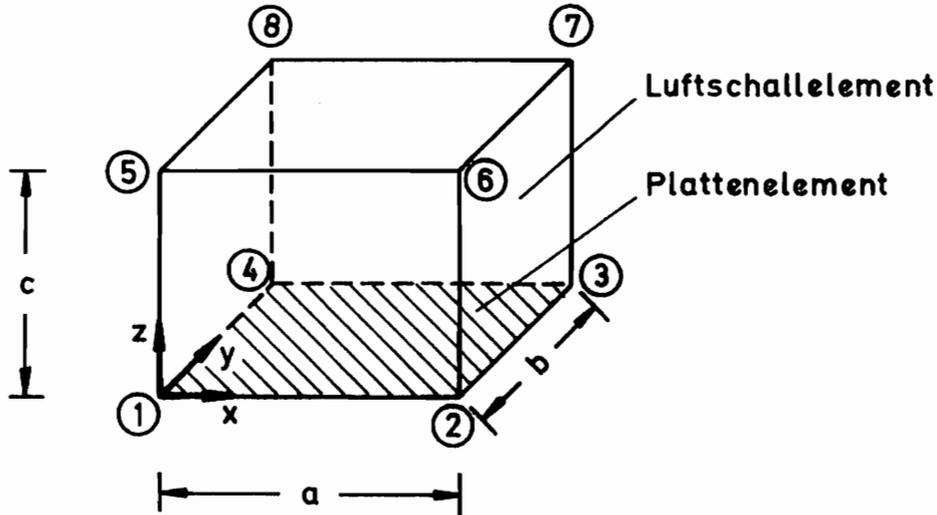


Abb. 3.1-1 Ein Platte-Luftschall-Koppelement

Für die hier abzuleitenden finiten Elemente werden als Ansatzfunktionen sogenannte Hermite'sche Polynome mit Einheitsverschiebungs- und -druckzuständen verwendet, die in den Matrizen $\underline{\phi}_p$ und $\underline{\phi}_L$ aufgelistet sind. Eine rechen-technisch sinnvolle Abspaltung der Potenzen $\xi^i \eta^j \zeta^k$ von den Koeffizienten führt auf die Schreibweise mit den Zeilenvektoren $\underline{\psi}_p$ und $\underline{\psi}_L$, sowie den Koeffizientenmatrizen \underline{G}_p und \underline{G}_L . Auf die Ansatzfunktionen und die zugehörigen Spaltenvektoren der Knotenfreiwerte \underline{w} und \underline{p} wird noch eingegangen.

Die erste Variation des Funktional (3-6) lautet

$$\delta I = \iint_{ab} \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\delta w) - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\delta w) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) \right] \right] \right\}$$

$$+ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta w) \Big] \Big\} f + \frac{g_P h}{k_P} w \delta w \ddot{f} - \frac{1}{k_P} \delta w p f \Big\} dx dy = 0. \quad (3-10)$$

Mit der Definition eines Spaltenvektors aus den Differentialoperatoren

$$\underline{D}_P = \left[\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad \frac{1}{ab} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right]^T \quad (3-11)$$

womit verkürzt geschrieben werden kann

$$\underline{H}_P(\xi, \eta) = \underline{D}_P \underline{\psi}_P(\xi, \eta) \quad , \quad (3-12)$$

sowie einer Elastizitätsmatrix

$$\underline{E} = k_P \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \quad (3-13)$$

folgt durch Einsetzen in Gl.(3-10) das Matrizendifferentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} & ab \underline{G}_P^T \int_0^1 \int_0^1 \underline{H}_P^T \underline{E} \underline{H}_P d\xi d\eta \underline{G}_P \underline{w} f \\ & + g_P h ab \underline{G}_P^T \int_0^1 \int_0^1 \underline{\psi}_P^T \underline{\psi}_P d\xi d\eta \underline{G}_P \underline{w} \ddot{f} \\ & - ab \underline{G}_P^T \int_0^1 \int_0^1 \underline{\psi}_P^T \underline{\psi}_L(\zeta=0) d\xi d\eta \underline{G}_L \underline{p} f = \underline{0} \end{aligned} \quad (3-14)$$

bzw., wenn das separierte Zeitgesetz wieder hereingemultipliziert wird

$$\underline{M}_P \ddot{\underline{w}} + \underline{K}_P \underline{w} - \underline{L} \underline{\bar{p}} = \underline{0} \quad . \quad (3-15)$$

Die einzelnen Matrizen dabei sind

$$\underline{K}_P = a b \underline{G}_P^T \int_0^1 \int_0^1 \underline{H}_P^T \underline{E} \underline{H}_P d\xi d\eta \underline{G}_P \quad \text{Steifigkeitsmatrix} \quad (3-16)$$

$$\underline{M}_P = \rho_P h a b \underline{G}_P^T \int_0^1 \int_0^1 \underline{\psi}_P^T \underline{\psi}_P d\xi d\eta \underline{G}_P \quad \text{Massenmatrix} \quad (3-17)$$

$$\underline{L} = a b \underline{G}_P^T \int_0^1 \int_0^1 \underline{\psi}_P^T \underline{\psi}_L (\zeta = 0) d\xi d\eta \underline{G}_L \quad \text{Koppelmatrix} \quad (3-18)$$

Ausgangspunkt für die luftschallseitige Formulierung des Koppelproblems ist die Wellengleichung

$$\Delta \bar{p} - \frac{1}{c_L^2} \ddot{\bar{p}} = 0 \quad , \quad (3-19)$$

mit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad ; \quad \dot{\cdot} \hat{=} \frac{\partial}{\partial t} \quad . \quad (3-20)$$

Die Separation des Zeitgesetzes entsprechend Gl.(3-4) führt dann auf

$$\Delta p f - \frac{1}{c_L^2} p \ddot{f} = 0 \quad . \quad (3-21)$$

Als Kopplungsbedingung wird nun gefordert, daß auf der Plattenoberfläche die Schallschnelle in Plattennormalenrichtung \tilde{v}_n gleich der negativen zeitlichen Ableitung der Plattenauslenkung \tilde{w} ist

$$\tilde{v}_n = -\dot{\tilde{w}} \quad , \quad (3-22)$$

und wegen

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = -g_L \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial t} \quad (3-23)$$

kann die Kopplungsbedingung als Randbedingung für den Schalldruck p formuliert werden

$$\left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} \right|_{z=0} = g_L \ddot{w} = g_L w \ddot{f} . \quad (3-24)$$

Das zu Gl.(3-21) und der obigen Randbedingung gehörende Variationsproblem lautet dann

$$I = \iiint_{abc} \left\{ \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] f + \frac{1}{c_L^2} p^2 \ddot{f} \right\} dx dy dz$$

$$+ 2 \iint_{ab} p g_L w \ddot{f} dx dy \longrightarrow \min. \quad (3-25)$$

und die erste Variation dieses Funktionals ist

$$\delta I = \iiint_{abc} \left\{ \left[\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta p) + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta p) + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta p) \right] f + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c_L^2} p \delta p \ddot{f} \right\} dx dy dz + \iint_{ab} \delta p g_L w \ddot{f} dx dy = 0 . \quad (3-26)$$

Mit den Ansatzfunktionen (3-7) und (3-8) und der Definition eines entsprechenden Spaltenvektors

$$\underline{D}_L = \left[\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right]^T \quad (3-27)$$

womit

$$\underline{H}_L(\xi, \eta, \zeta) = \underline{D}_L \varphi_L(\xi, \eta, \zeta) \quad (3-28)$$

geschrieben werden kann, folgt dann durch Einsetzen in Gl.(3-26) das

Matrizendifferentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
 & abc \underline{G}_L^T \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \underline{H}_L^T \underline{H}_L d\xi d\eta d\zeta \underline{G}_L \underline{p} \underline{f} \\
 & + \frac{1}{c_L^2} abc \underline{G}_L^T \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \underline{\varphi}_L^T \underline{\varphi}_L d\xi d\eta d\zeta \underline{G}_L \underline{p} \ddot{\underline{f}} \\
 & + g_L ab \underline{G}_L^T \int_0^1 \int_0^1 \underline{\varphi}_L^T (\zeta=0) \underline{\varphi}_P d\xi d\eta \underline{G}_P \underline{w} \ddot{\underline{f}} = \underline{0} \quad (3-29)
 \end{aligned}$$

bzw.

$$\underline{M}_L \ddot{\underline{p}} + \underline{K}_L \underline{p} + \underline{N} \ddot{\underline{w}} = \underline{0} . \quad (3-30)$$

Die einzelnen Matrizen sind hier

$$\underline{K}_L = abc \underline{G}_L^T \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \underline{H}_L^T \underline{H}_L d\xi d\eta d\zeta \underline{G}_L \quad \text{Steifigkeitsmatrix} \quad (3-31)$$

$$\underline{M}_L = \frac{1}{c_L^2} abc \underline{G}_L^T \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \underline{\varphi}_L^T \underline{\varphi}_L d\xi d\eta d\zeta \underline{G}_L \quad \text{Massenmatrix} \quad (3-32)$$

$$\underline{N} = g_L ab \underline{G}_L^T \int_0^1 \int_0^1 \underline{\varphi}_L^T (\zeta=0) \underline{\varphi}_P d\xi d\eta \underline{G}_P \quad \text{Koppelmatrix} . \quad (3-33)$$

Faßt man die Gleichungen (3-15) und (3-30) zusammen, so entsteht

$$\begin{vmatrix} \underline{M}_P & \underline{0} \\ \underline{N} & \underline{M}_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\underline{w}} \\ \ddot{\underline{p}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{K}_P & -\underline{L} \\ \underline{0} & \underline{K}_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{w} \\ \underline{p} \end{vmatrix} = \underline{0} \quad (3-34)$$

oder kürzer

$$\underline{M}_{kop} \ddot{\underline{x}} + \underline{K}_{kop} \underline{x} = \underline{0} \quad (3-35)$$

mit der Elementmassenmatrix \underline{M}_{kop} und der Elementssteifigkeitsmatrix \underline{K}_{kop} für ein gekoppeltes Platte-Luftschallelement, wie in Abb. 3.1-1 gezeigt.

Die explizite Berechnung der Elementmatrizen erfolgt nun nach Wahl der Ansatzfunktionen in den Gleichungen (3-7, 3-8). Da in den Rechenbeispielen im weiteren Verlauf dieses Kapitels immer zwei Luftschallelemente unterschiedlicher Abbildungsleistung parallel verwendet werden, sollen die Ansatzfunktionen kurz beschrieben werden.

Für das erste Koppellement (Typ 1) sind sowohl für die Durchbiegung der Platte, wie auch für die räumliche Schalldruckverteilung Hermite'sche Ansatzfunktionen verwendet worden, die solchen aus einem vollständigen Polynomschema - einem Kriterium für gute numerische Resultate - entsprechen. Letztere lauten

$$w(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \xi^i \eta^j c_{ij} \quad (3-36)$$

$$p(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 \xi^i \eta^j \zeta^k c_{ijk} . \quad (3-37)$$

Die aktuellen Knotenfreiwerte $w, \partial w / \partial x, \partial w / \partial y$ und $\partial^2 w / \partial x \partial y$ an jedem der vier Knotenpunkte des Plattenelementes, wie auch die Knotenfreiwerte p an jedem der acht Knotenpunkte des Luftschallelementes lassen sich nun mit Hilfe der 16 Konstanten c_{ij} , bzw. der 8 Konstanten c_{ijk} berechnen. Die so erhaltenen Ansatzfunktionen sind identisch mit den entsprechenden Hermite'schen Ansatzfunktionen erster und dritter Ordnung für die entsprechenden Einheitsfunktionszustände an den Knotenpunkten, siehe Abb. 3.1-2.

Im zweiten Koppellement (Typ 2) wird nun an das gleiche Plattenelement ein Luftschallelement mit einer höherwertigen Ansatzfunktion zur Verbesserung der Abbildungsleistung angekoppelt. Die Elementform als Quader mit acht Knotenpunkten bleibt erhalten; die Knotenfreiwerte sind jedoch außer dem Schalldruck p noch jeweils dessen partielle Ortsableitungen $\partial p / \partial x, \partial p / \partial y$ und

$\partial p / \partial z$, die nach Gl.(2-1) proportional zu den jeweiligen zeitlichen Ableitungen der Schallschnellekomponenten sind. Zu diesem Luftschallelement mit nunmehr 32 Freiheitsgraden läßt sich jedoch keine Ansatzfunktion anschreiben, die, wie Gl.(3-37), ein vollständiges Polynomschema repräsentiert. Eine Ansatzfunktion mit Hermite-Polynomen ist jedoch möglich; diese lautet mit Hermite-Polynomen dritter Ordnung

$$\begin{aligned}
 p(\xi, \eta, \zeta) = & h_1(\xi) \quad h_1(\eta) \quad h_1(\zeta) \quad p_1 \\
 & + h_2(\xi) \quad h_1(\eta) \quad h_1(\zeta) \quad \partial p_1 / \partial \xi \\
 & + h_1(\xi) \quad h_2(\eta) \quad h_1(\zeta) \quad \partial p_1 / \partial \eta \\
 & + h_1(\xi) \quad h_1(\eta) \quad h_2(\zeta) \quad \partial p_1 / \partial \zeta \\
 & + h_3(\xi) \quad h_1(\eta) \quad h_1(\zeta) \quad p_2 \\
 & + h_4(\xi) \quad h_1(\eta) \quad h_1(\zeta) \quad \partial p_2 / \partial \xi \\
 & + h_3(\xi) \quad h_2(\eta) \quad h_1(\zeta) \quad \partial p_2 / \partial \eta \\
 & + h_3(\xi) \quad h_1(\eta) \quad h_2(\zeta) \quad \partial p_2 / \partial \zeta \\
 & + h_3(\xi) \quad h_3(\eta) \quad h_1(\zeta) \quad p_3 \\
 & + h_4(\xi) \quad h_3(\eta) \quad h_1(\zeta) \quad \partial p_3 / \partial \xi \\
 & + h_3(\xi) \quad h_4(\eta) \quad h_1(\zeta) \quad \partial p_3 / \partial \eta \\
 & + h_3(\xi) \quad h_3(\eta) \quad h_2(\zeta) \quad \partial p_3 / \partial \zeta \\
 & + h_1(\xi) \quad h_3(\eta) \quad h_1(\zeta) \quad p_4 \\
 & + h_2(\xi) \quad h_3(\eta) \quad h_1(\zeta) \quad \partial p_4 / \partial \xi \\
 & + h_1(\xi) \quad h_4(\eta) \quad h_1(\zeta) \quad \partial p_4 / \partial \eta \\
 & + h_1(\xi) \quad h_3(\eta) \quad h_2(\zeta) \quad \partial p_4 / \partial \zeta \\
 & + h_1(\xi) \quad h_1(\eta) \quad h_3(\zeta) \quad p_5 \\
 & + h_2(\xi) \quad h_1(\eta) \quad h_3(\zeta) \quad \partial p_5 / \partial \xi \\
 & + h_1(\xi) \quad h_2(\eta) \quad h_3(\zeta) \quad \partial p_5 / \partial \eta \\
 & + h_1(\xi) \quad h_1(\eta) \quad h_4(\zeta) \quad \partial p_5 / \partial \zeta \\
 & + h_3(\xi) \quad h_1(\eta) \quad h_3(\zeta) \quad p_6 \\
 & + h_4(\xi) \quad h_1(\eta) \quad h_3(\zeta) \quad \partial p_6 / \partial \xi \\
 & + h_3(\xi) \quad h_2(\eta) \quad h_3(\zeta) \quad \partial p_6 / \partial \eta \\
 & + h_3(\xi) \quad h_1(\eta) \quad h_4(\zeta) \quad \partial p_6 / \partial \zeta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ h_3(\xi) \quad h_3(\eta) \quad h_3(\zeta) \quad p_7 \\
 &+ h_4(\xi) \quad h_3(\eta) \quad h_3(\zeta) \quad \partial p_7 / \partial \xi \\
 &+ h_3(\xi) \quad h_4(\eta) \quad h_3(\zeta) \quad \partial p_7 / \partial \eta \\
 &+ h_3(\xi) \quad h_3(\eta) \quad h_4(\zeta) \quad \partial p_7 / \partial \zeta \\
 \\
 &+ h_1(\xi) \quad h_3(\eta) \quad h_3(\zeta) \quad p_8 \\
 &+ h_2(\xi) \quad h_3(\eta) \quad h_3(\zeta) \quad \partial p_8 / \partial \xi \\
 &+ h_1(\xi) \quad h_4(\eta) \quad h_3(\zeta) \quad \partial p_8 / \partial \eta \\
 &+ h_1(\xi) \quad h_3(\eta) \quad h_4(\zeta) \quad \partial p_8 / \partial \zeta
 \end{aligned}$$

$$= \Phi_L(\xi, \eta, \zeta) p \quad (3-38)$$

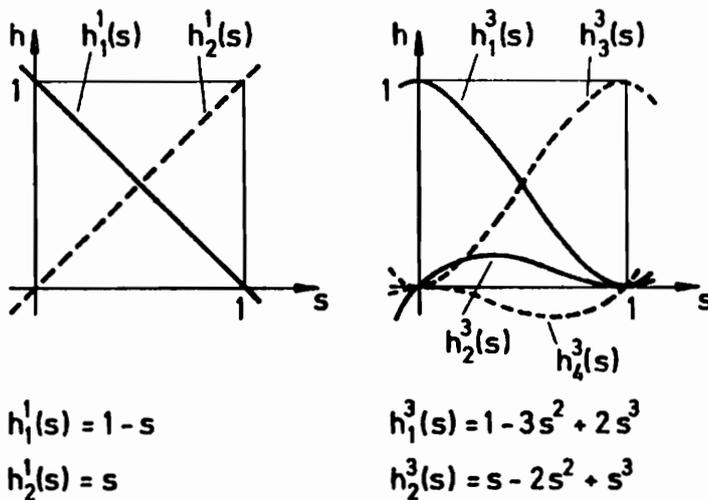


Abb. 3.1-2 Hermite'Polynome erster und dritter Ordnung

Durch Ausmultiplizieren läßt sich diese Ansatzfunktion dann in Matrizenform darstellen, wie in Gl.(3-8). Dabei treten insgesamt 54 verschiedene Potenzentripel $\xi^i \eta^j \zeta^k$ auf, die hintereinandergeordnet den Zeilenvektor $\Phi_L(\xi, \eta, \zeta)$ bilden. Die zugehörige Koeffizientenmatrix G_L besitzt 54 Zeilen und 32 Spalten. Für die Prozedur zur Erzeugung der Elementmatrizen ist ein Digitalrechnerprogramm entwickelt worden, das nach Auflisten der Hermite-Polynome in den Ansatzfunktionen den fertigen Fortran-IV-Quelltext für alle Platte-

Luftschall- und Koppelmatrizen liefert. Da die Berechnung der Integrale in Gl.(3-16) bis Gl.(3-18) und Gl.(3-31) bis Gl.(3-33) auf Operationen mit Integerzahlen zurückgeführt werden können, sind die Ergebnisse frei von numerischen Fehlern.

3.2 Eigenwertberechnungen

3.2.1 Eigenwerte eines Luftschallsystems

Zum Vergleich der Abbildungsleistung der beiden Luftschallelemente mit 8, bzw. 32 Freiheitsgraden sind die Eigenfrequenzen und -formen eines akustisch hart berandeten Raumes mit den Kantenlängen $a = b = c = \pi$ berechnet und mit den exakten Werten aus

$$\omega_{i,j,k} = c_L \sqrt{i^2 + j^2 + k^2} \quad ; \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-39)$$

verglichen worden. Die nachfolgende Tabelle stellt den exakten Werten die numerisch aus der Matrixgleichung

$$(\underline{K}_L - \omega^2 \underline{M}_L) \underline{\hat{x}} = \underline{0} \quad (3-40)$$

ermittelten Werte für drei verschiedene Modelle gegenüber.

Modell 1: Der Raum ist in $2 \times 2 \times 2 = 8$ würfelförmige Elemente mit je 8 Freiheitsgraden unterteilt. Insgesamt verbleiben nach dem Zusammenbau der Elemente 27 Freiheitsgrade.

Modell 2: Der Raum wird durch ein einziges Luftschallelement des Typs mit 32 Freiheitsgraden dargestellt. Werden in Gl.(3-40) noch alle Zeilen und Spalten gestrichen, die zu den akustisch harten Randbedingungen $\partial p / \partial n = 0$ gehören, so verbleiben 8 Freiheitsgrade.

Modell 3: Der Raum wird, wie bei Modell 1, in 8 würfelförmige Elemente unterteilt, jetzt aber mit dem Elementtyp mit 32 Freiheitsgraden.

Nach Einstreichen der Randbedingungen verbleiben 54 Freiheitsgrade.

Noch ein Wort zu den Randbedingungen: Das Einstreichen der akustisch harten Randbedingungen beim zweiten Elementtyp geschieht hier, um die Freiheitsgrade des Systems so gering wie möglich zu halten. Nötig wäre dies nicht - und beim ersten Elementtyp auch gar nicht möglich - da das Variationsfunktional Gl.(3-25) für den homogenen Fall von Gl.(3-24) die akustisch harten Randbedingungen schon enthält.

Tab. 3.2.1-1 Eigenfrequenzen $\omega_{i,j,k}$ [s^{-1}] eines akustisch hart berandeten Raumes mit den Kantenlängen $a = b = c = 3,14$ m

Nr.	i j k	exakt	Modell 1	Modell 2	Modell 3
1	0 0 0	0	0	0	0
2	0 0 1	330	363,9	330	330
3	0 1 0	330	363,9	330	330
4	1 0 0	330	363,9	330	330
5	0 1 1	466,7	514,6	466,8	469,2
6	1 0 1	466,7	514,6	466,8	469,2
7	1 1 0	466,7	514,6	466,8	469,2
8	1 1 1	571,6	630,3	571,7	577,2
9	0 0 2	660	727,8	/	660
10	0 2 0	660	727,8	/	660
11	2 0 0	660	727,8	/	660
12	0 1 2	737,9	813,7	/	738,3
13	0 2 1	737,9	813,7	/	738,3
14	1 0 2	737,9	813,7	/	738,3

Wie die Tabelle zeigt, liegt bei Modell 1 der relative Fehler im Durchschnitt bei ca. 10%, während bei Modell 2 der größte Fehler bei nur 0,03% liegt.

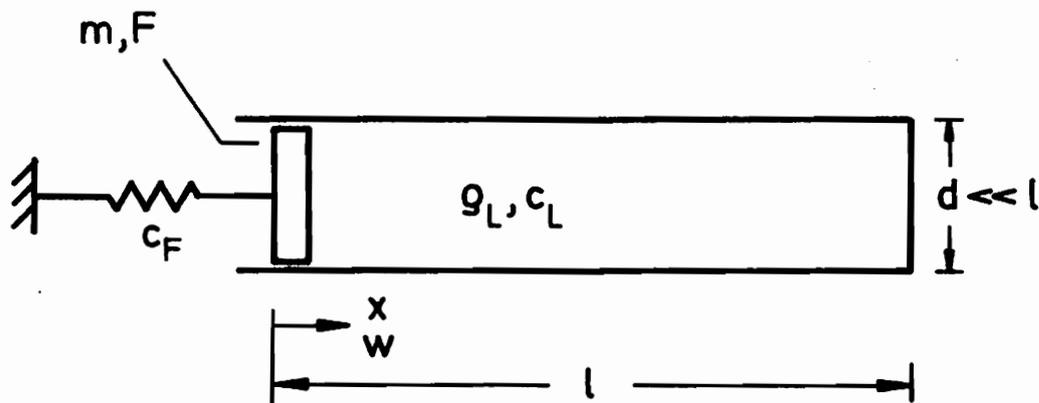
Wider Erwarten tritt bei Modell 3 gegenüber Modell 2 eine leichte Verschlechterung der Ergebnisse auf. Die größte Abweichung zeigt sich bei der achten Eigenfrequenz; der relative Fehler bleibt aber auch hier unter 1%. Vermutlich liegt der Grund hierfür in der Ansatzfunktion (3-37) für das 32-ger Schallelement, die nicht die Eigenschaften eines vollständigen Polynomansatzes hat. Dennoch sind die Ergebnisse von Modell 3 als sehr gut anzusehen,

wenn man bedenkt, daß der größte relative Fehler aller 54 Eigenfrequenzen bei nur 5,6% liegt.

3.2.2 Eigenwerte eines gekoppelten Platte-Luftschallsystems

Während es bei der vorangegangenen Eigenwertberechnung um die Beurteilung der Abbildungsleistung zweier finiter Luftschallelemente ging, sollen jetzt bei einem Platte-Luftschallsystem die Kopplungsphänomene beschrieben werden. Dabei läßt sich Grundsätzliches schon an einem einfachen eindimensionalen Analogiemodell aufzeigen.

Dieses eindimensionale Modell sei ein Rohr der Länge l . Bei $x = 0$ ist das Rohr durch einen Kolben an einer Feder, bei $x = l$ durch einen Deckel akustisch hart abgeschlossen, siehe Abb. 3.2.2-1.



c_F - Federsteifigkeit F - Fläche des Kolbens
 m - Masse des Kolbens

Abb. 3.2.2-1 Eindimensionales Koppelmodell

Aus der Bewegungsgleichung des Kolbens

$$m \ddot{w} + c_F \dot{w} = -F \bar{p}(x=0, t) \quad , \quad (3-41)$$

der eindimensionalen Wellengleichung

$$\ddot{p} = \frac{1}{c_L^2} \ddot{p} \quad ; \quad ' \hat{=} \frac{\partial}{\partial x} \quad (3-42)$$

und den Randbedingungen

$$\dot{p}'(x=0, t) = -g_L \ddot{w} \quad ; \quad \dot{p}'(x=l, t) = 0 \quad (3-43)$$

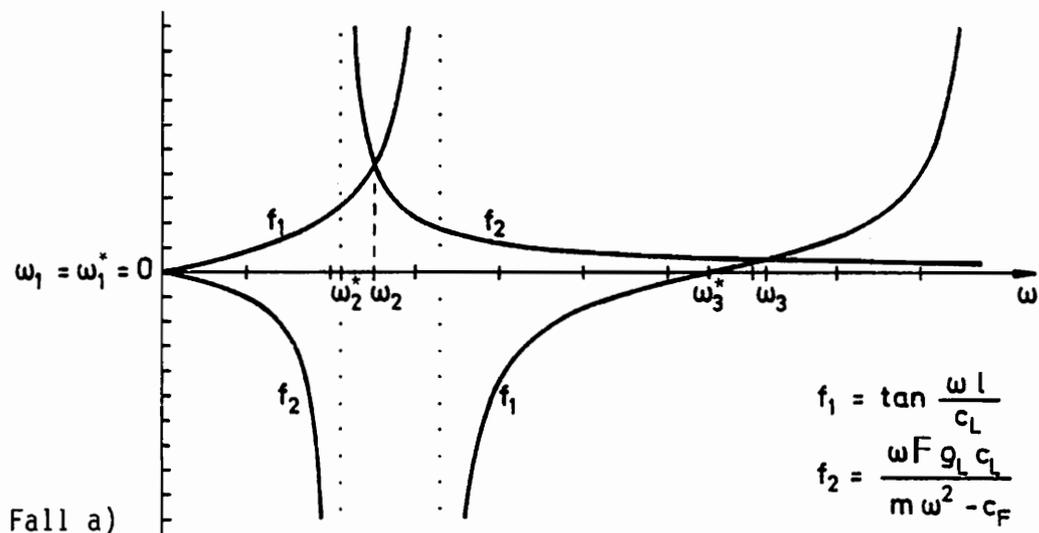
folgt nach Separation des Zeitgesetzes aus der Wellengleichung und der Bewegungsgleichung die transzendente Gleichung zur Bestimmung der Eigenfrequenzen

$$\tan\left(\frac{\omega l}{c_L}\right) - \frac{\omega F g_L c_L}{m \omega^2 - c_F} = 0 \quad (3-44)$$

Die numerische Lösung dieser Gleichung erfolgt durch Nullstellenbestimmung, womit sich dann auch die zugehörigen Eigenfunktionen für die Ortslösung des Schalldruckverlaufes ausrechnen lassen

$$p_i(x) = \text{const.} \left\{ \tan\left(\frac{\omega_i}{c_L} l\right) \sin\left(\frac{\omega_i}{c_L} x\right) + \cos\left(\frac{\omega_i}{c_L} x\right) \right\} \quad (3-45)$$

Die graphische Lösung von Gl.(3-44) zeigt sehr anschaulich die Änderung der Eigenfrequenzen der Teilsysteme infolge der Kopplung, wie auch den Einfluß der Rohrlänge l ; siehe Abb. 3.2.2-2



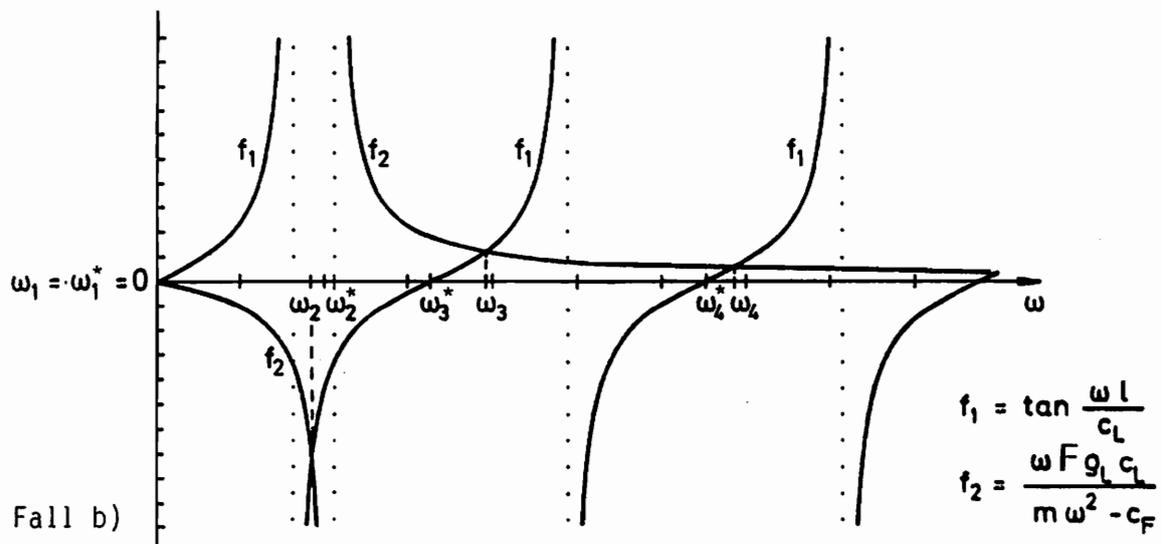


Abb. 3.2.2-2 Graphische Lösung des Eigenwertproblems Gl. (3-44)

ω_i - Eigenfrequenzen des gekoppelten Systems

ω_i^* - Eigenfrequenzen der ungekoppelten Teilsysteme

Feder-Masse-System: $\omega^* = \sqrt{c_F / m}$

Eindim. Helmholtz-Gleichung: $\omega^* = c_L \pi n / l$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Fall a) Alle Eigenfrequenzen $\omega_i > 0$ des gekoppelten Systems liegen auf der Frequenzachse jeweils rechts von den Eigenfrequenzen $\omega_i^* > 0$ der ungekoppelten Teilsysteme. Zu hohen Frequenzen hin wird die Differenz $\omega_i - \omega_i^*$ immer kleiner. Die nach Gleichung (3-44) zu ω_2 gehörende Eigenform zeigt hier einen nahezu konstanten positiven Druckverlauf über die Rohrlänge l , wenn sich der Kolben in positive x -Richtung bewegt.

Fall b) Hier wird nun ω_2 kleiner als ω_2^* , während für alle anderen Eigenfrequenzen das oben Gesagte gilt. Interessant ist hierbei, daß die zu ω_2 gehörende Eigenform des Schalldruckverlaufes, bei ebenfalls positiver Richtung der Kolbenbewegung, jetzt in Kolbennähe einen negativen Druckverlauf zeigt, der erst bei Fortschreiten in x -Richtung wieder positiv wird.

Mit den in Kapitel 3.1 abgeleiteten Platte-Luftschall-Koppelementen ist nun ein entsprechendes System mit den Kantenlängen a , b , c abgebildet worden, das bei $z = 0$ durch eine an den Rändern frei drehbar gelagerte Platte begrenzt und an allen anderen Außenflächen akustisch hart abgeschlossen ist; siehe Abb. 3.2.2-3

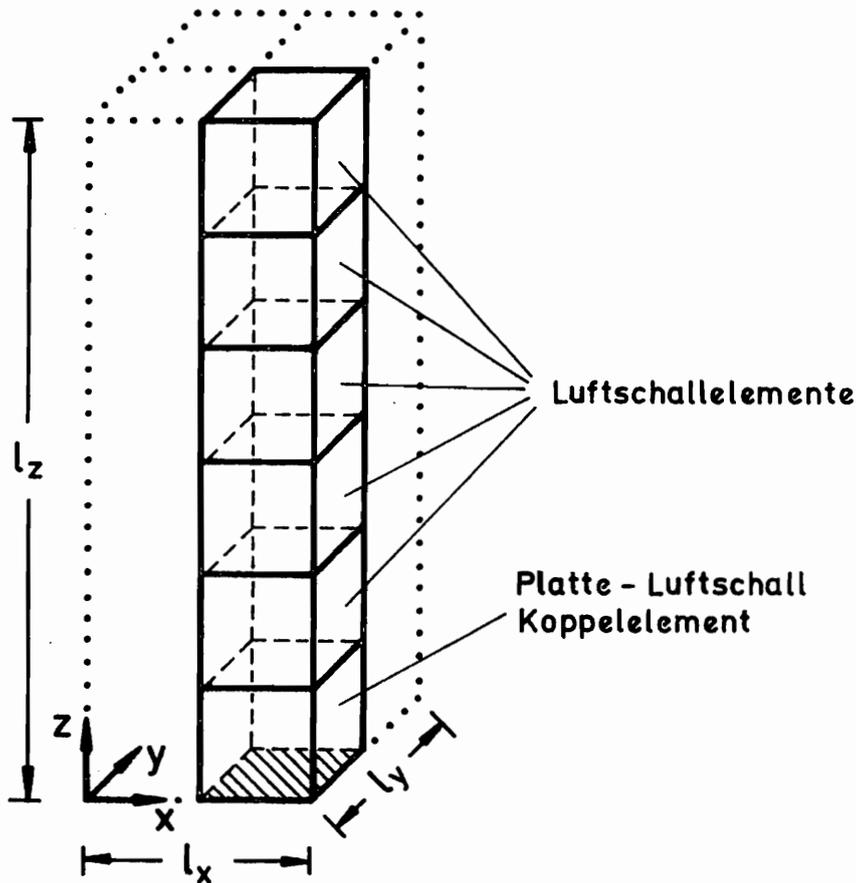


Abb. 3.2.2-3 Diskretisierungsbeispiel für Eigenwertberechnungen eines Platte-Luftschall-Koppelementsystems

Zur Verringerung des numerischen Rechenaufwandes sind für den Schalldruck in x - und y -Richtung, sowie für die Plattenauslenkung durch Vorgabe von Randbedingungen nur symmetrische Eigenformen zugelassen worden, die es erlauben nur ein Viertelsystem zu berechnen. Für einen qualitativen Vergleich mit den Ergebnissen des eindimensionalen Modells an den ersten Eigenwerten ist dies ausreichend, da bei den gewählten Abmessungen a , $b \ll c$ die ersten Luftschalleigenwerte allein abhängig von c sind.

Die Abweichung der ersten Eigenfrequenzen des Finite-Elemente-Modells zeigt bei Variieren von c qualitativ das gleiche Verhalten, wie in Abb. 3.2.2-2 für das eindimensionale Analogiemodell beschrieben. Auch hier hat ein kleiner Luftschallraum hinter der Platte den Effekt einer zusätzlichen Versteifung, während ein großer Luftschallraum wie eine zusätzlich angekoppelte Masse wirkt. Übereinstimmung zeigt sich auch beim Vergleich der Eigenvektoren, deren diskrete Schalldruckwerte auf der Mittennormalen über der Platte betrachtet worden sind. Auch hier ist, bei nach innen gerichteter Auslenkung des Plattenmittelpunktes, für kleine Gesamtlängen c der Schalldruckverlauf in z -Richtung positiv, wogegen für große c der Schalldruck in Plattennähe negativ ist und erst mit Fortschreiten in Raumtiefe wieder positiv wird.

3.3 Die Berechnung der Zeitlösung

Bei den vorangegangenen Eigenwertberechnungen trat im Zusammenhang mit akustisch harten Randbedingungen immer ein Eigenwert $\omega_1^2 = 0$ auf, dessen zugehörige Eigenform - in der Strukturmechanik als Starrkörperverschiebung bezeichnet - hier einen konstanten Schalldruck im gesamten Gebiet liefert. In einer Zeitverlaufsberechnung hat das bei gewissen Anfangswerten zur Folge, daß sich die Systemantwort aus einem Schwingungsanteil plus einem linear mit der Zeit anwachsenden Anteil zusammensetzt, was hier zumindest einer anschaulichen Erwartungshaltung widerspricht. Daher soll zunächst hierauf näher eingegangen werden.

3.3.1 Bemerkungen zum Nulleigenwert im Fall akustisch harter Randbedingungen

Der Übersichtlichkeit halber behandeln die folgenden Überlegungen den eindimensionalen Fall; die inhaltlichen Aussagen gelten aber gleichermaßen im Zwei- und Dreidimensionalen.

In Kapitel 2 ist gezeigt worden, daß die Wellengleichung

$$\bar{p}'' = \frac{1}{c_L^2} \ddot{\bar{p}} \quad ; \quad ' \hat{=} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{und} \quad \cdot \hat{=} \frac{\partial}{\partial t} \quad (3-46)$$

durch Elimination der Schallschnelle \tilde{v} aus den beiden Schallfeldgleichungen

$$\bar{p}' = -g_L \dot{\tilde{v}} \quad (3-47)$$

$$\tilde{v}' = -\frac{1}{g_L c_L^2} \dot{\bar{p}} \quad (3-48)$$

erhalten wird. Die physikalische Bedingung für akustisch harte Ränder bei $x = 0$ und $x = l$ verlangt das Verschwinden der Schallschnellen an diesen Punkten, also gelten die Randbedingungen

$$\tilde{v}(x=0, t) = \tilde{v}(x=l, t) \equiv 0 \quad (3-49)$$

Die Anfangsbedingungen zur Lösung der beiden Schallfeldgleichungen sind

für Gl.(3-47): $\tilde{v}(x, t=0) \quad (3-50)$

für Gl.(3-48): $\bar{p}(x, t=0) \quad (3-51)$

oder, wenn die Wellengleichung (3-48) gelöst werden soll

und $\bar{p}(x, t=0) \quad (3-52)$

$$\dot{\bar{p}}(x, t=0) \quad (3-53)$$

Letzteres ist hier der Fall; Kriterien für Rand- und Anfangswerte sind Gl. (3-49), Gl.(3-50) und Gl.(3-51)

Zu den Randbedingungen:

Aus Gl.(3-49) folgt, daß auch

$$\dot{\tilde{v}}(x=0, t) = \dot{\tilde{v}}(x=l, t) \equiv 0 \quad (3-54)$$

ist, was über die erste Schallfeldgleichung (3-47) auf die schon bekannten Randbedingungen

$$\tilde{p}'(x=0,t) = \tilde{p}'(x=l,t) \equiv 0 \quad (3-55)$$

für die Wellengleichung führt.

Zu den Anfangswerten:

Die Vorgabe von $\tilde{p}(x, t=0)$ entspricht Gl. (3-51).

Aus einer Vorgabe von $\dot{\tilde{p}}(x, t=0)$ folgt wegen der zweiten Schallfeldgleichung (3-48)

$$\dot{\tilde{p}}(x, t=0) = -g_L c_L^2 \tilde{v}'(x, t=0) \quad (3-56)$$

und ist gleichbedeutend mit einer Vorgabe von $\tilde{v}'(x, t=0)$. Die Integration dieser Gleichung über die Gebietslänge l liefert dann

$$\begin{aligned} \int_0^l \dot{\tilde{p}}(x, t=0) dx &= -g_L c_L^2 \int_0^l \tilde{v}'(x, t=0) dx \\ &= -g_L c_L^2 \{ \tilde{v}(x=l, t=0) - \tilde{v}(x=0, t=0) \} . \end{aligned} \quad (3-57)$$

Die Terme in der Klammer der rechten Seite dieser Gleichung sind aber als Sonderfall in Kriterium Gl.(3-54) enthalten und müssen infolgedessen verschwinden. Also kann $\dot{\tilde{p}}(x, t=0)$ nur vorgegeben werden, wenn gleichzeitig

$$\int_0^l \dot{\tilde{p}}(x, t=0) dx = 0 \quad (3-58)$$

gilt. Diese Bedingung ist analog zu derjenigen aus der Strukturmechanik, wo für kinematisch unbestimmte Systeme die Summe der Anfangsgeschwindigkeiten verschwinden muß, wenn keine Starrkörperbewegungen auftreten sollen.

Die entsprechenden Überlegungen führen bei dem in Kapitel 3.2.2 beschriebenen eindimensionalen Koppelmodell wegen

$$\dot{\tilde{w}}(t) \equiv \tilde{v}(x=0, t) \quad (3-59)$$

auf die Bedingung für die Anfangswerte

$$\dot{\tilde{w}}(t=0) = \frac{1}{\rho_L c_L^2} \int_0^l \dot{\tilde{p}}(x, t=0) dx \quad . \quad (3-60)$$

Im Dreidimensionalen gilt analog für den akustisch hart berandeten Raum

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^c \dot{\tilde{p}}(x, y, z, t=0) dx dy dz = 0 \quad , \quad (3-61)$$

und für das Platte-Luftschall-Koppelsystem

$$\int_0^a \int_0^b \dot{\tilde{w}}(x, y, t=0) dx dy = \frac{1}{\rho_L c_L^2} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \dot{\tilde{p}}(x, y, z, t=0) dx dy dz \quad . \quad (3-62)$$

Im Hinblick auf die numerischen Beispielrechnungen im folgenden Kapitel sei noch angemerkt, daß die vier letztgenannten Bedingungen wegen Gl.(3-49) für alle Zeiten t gelten, wenn sie bei $t = 0$ eingehalten worden sind. Wenn also die Schwingungsantwort eines Systems während und nach einer zeitlich begrenzten äußeren Belastung berechnet werden soll, so stellt das Einhalten der Bedingungen bei $t = 0$ sicher, daß die Zustandsgrößen des Systems zum Zeitpunkt $t = T_f$, wenn die äußere Belastung wegfällt, die genannten Bedingungen wieder erfüllen und die nachfolgenden freien Schwingungen mit diesen Zustandsgrößen als neuen Anfangsbedingungen berechnet werden können.

3.3.2 Die Zeitintegration mit dem Verfahren der Modalen Analyse

Aus der Vielfalt der bekannten Verfahren zur numerischen Integration von Matrixdifferentialgleichungssystemen ist das wegen seiner numerischen Stabilität recht unproblematische Verfahren der Modalen Analyse ausgewählt worden.

Ausgangspunkt ist die Schwingungsgleichung für lineare, ungedämpfte Systeme

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{f} \quad , \quad (3-63)$$

wobei für die Anwendung der Modalen Analyse die Massen- und Steifigkeitsmatrix als symmetrisch vorausgesetzt werden.

Die Elementmatrizen für das gekoppelte Platte-Luftschallelement (vgl. Gl. 3-34) sind jedoch in der hier abgeleiteten Form wegen der Koppelterme \underline{N} und \underline{L} unsymmetrisch, wodurch nach Zusammenbau eines Systems aus mehreren Elementen auch die Systemmatrizen unsymmetrisch werden.

Die Matrizen lassen sich aber symmetrisieren, wenn man, was immer möglich ist, die Reihenfolge der Knotenparameter im System so wählt, daß in den Vektoren \underline{x} bzw. $\ddot{\underline{x}}$ zunächst alle Plattenfreiwerte und danach alle Luftschallfreiwerte auftreten. Mit dieser Voraussetzung bleibt auch bei den Systemmatrizen der Aufbau entsprechend Gl.(3-34) erhalten, und das Schwingungssystem Gl.(3-63) lautet, wenn eine äußere Anregung des Koppelsystems nur auf der Platte erfolgen soll

$$\begin{vmatrix} \underline{M}_P & \underline{0} \\ \underline{N} & \underline{M}_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\underline{w}} \\ \ddot{\underline{p}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{K}_P & -\underline{L} \\ \underline{0} & \underline{K}_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{\tilde{w}} \\ \underline{\tilde{p}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{f} \\ \underline{0} \end{vmatrix} \quad . \quad (3-64)$$

Wird dieses Gleichungssystem mit einer Matrix \underline{I} der Gestalt

$$\underline{I} = \left| \begin{array}{c|c} \underline{0}_L \underline{K}_P \underline{M}_P^{-1} & \underline{0} \\ \hline -\underline{N} \underline{M}_P^{-1} & \underline{1} \end{array} \right| \quad (3-65)$$

von links vormultipliziert, so erhält man

$$\begin{bmatrix} \underline{g}_L \underline{K}_P & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{w}} \\ \ddot{\underline{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{g}_L \underline{K}_P \underline{M}_P^{-1} \underline{K}_P & -\underline{g}_L \underline{K}_P \underline{M}_P^{-1} \underline{L} \\ -\underline{N} \underline{M}_P^{-1} \underline{K}_P & \underline{K}_L + \underline{N} \underline{M}_P^{-1} \underline{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{g}_L \underline{K}_P \underline{M}_P^{-1} \underline{f} \\ -\underline{N} \underline{M}_P^{-1} \underline{f} \end{bmatrix}$$

$$\underline{M}_s \ddot{\underline{x}} + \underline{K}_s \underline{x} = \underline{f}_s \quad (3-66)$$

Hierbei ist die Symmetrie der neuen Massenmatrix \underline{M}_s sofort ersichtlich; die der Steifigkeitsmatrix \underline{K}_s folgt aus der Beziehung (vgl. Gl. 3-18 und 3-33):

$$\underline{g}_L \underline{L} = \underline{N}^T \quad (3-67)$$

Die Eigenwerte des Systems werden durch die Symmetrisierung nicht beeinflusst. Nach Lösen des Eigenwertproblems kann mit der Modalmatrix $\underline{\phi}$, die die auf "1" normierten Eigenvektoren enthält, sowie mit den Diagonalmatrizen

$$\underline{\omega} = \text{diag} [\omega_i] \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3-68)$$

$$\underline{\text{COS}}_t = \text{diag} [\cos \omega_i t] \quad ; \quad \underline{\text{SIN}}_t = \text{diag} [\sin \omega_i t] \quad ,$$

als homogene Lösung von Gl.(3-66) sofort

$$\underline{x}_h(t) = \underline{\phi} \underline{\text{COS}}_t \underline{\phi}^T \underline{M}_s \underline{x}_0 + \underline{\phi} \underline{\text{SIN}}_t \underline{\omega}^{-1} \underline{\phi}^T \underline{M}_s \dot{\underline{x}}_0 \quad (3-69)$$

angegeben werden. Die Anfangswerte sind \underline{x}_0 und $\dot{\underline{x}}_0$. Wenn als äußere Belastung eine harmonische Erregung der Form

$$\underline{f}(t) = \underline{\hat{f}} \cos(\Omega t + \varphi) \quad ; \quad \Omega \neq \omega_i \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3-70)$$

angenommen wird, folgt die spezielle Lösung

$$\underline{x}_{sp}(t) = \underline{\phi} (\underline{\omega}^2 - \Omega^2 \underline{1})^{-1} \underline{\phi}^T \underline{\hat{f}} \cos(\Omega t + \varphi) \quad (3-71)$$

und die vollständige Lösung lautet für verschwindende Anfangswerte

$$\begin{aligned}
 \underline{x}(t) = & - \underline{\Phi} \underline{\text{COS}}_t (\underline{\omega}^2 - \Omega^2 \underline{1})^{-1} \underline{\Phi}^T \hat{\underline{f}} \cos \varphi \\
 & + \underline{\Phi} \underline{\text{SIN}}_t \underline{\omega}^{-1} (\underline{\omega}^2 - \Omega^2 \underline{1})^{-1} \underline{\Phi}^T \hat{\underline{f}} \Omega \sin \varphi \\
 & + \underline{\Phi} (\underline{\omega}^2 - \Omega^2 \underline{1})^{-1} \underline{\Phi}^T \hat{\underline{f}} \cos(\Omega t + \varphi) \quad .
 \end{aligned} \tag{3-72}$$

Mit dieser Gleichung kann der Einschwingvorgang unter der äußeren Belastung $\underline{f}(t)$ berechnet werden. Nach Fortfall der äußeren Belastung werden die nachfolgenden freien Schwingungen mit der homogenen Lösung Gl.(3-69) berechnet, wobei dort für die Anfangswerte nun die Zustandsgrößen des Systems im Zeitpunkt der Wegnahme der äußeren Belastung einzusetzen sind.

Bei der Berechnung der Produktmatrix $\underline{\text{SIN}}_t \underline{\omega}^{-1}$ tritt für $\omega_1 = 0$ der Grenzwert

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} = t \tag{3-73}$$

auf, der das Zeitgesetz der in Kapitel 3.3.1 diskutierten Starrkörperbewegung beschreibt. Das Einhalten der dort angegebenen Restriktionen für die Anfangswerte stellt hier sicher, daß die zu ω_1 gehörende Eigenform gerade nicht angeregt wird.

Mit dem soweit skizzierten Verfahren ist nun die Schwingungsantwort des in Abb. 3.3.2-1 dargestellten Fenster-Raum-Systems auf eine impulsartige Erregung auf der Platte berechnet worden. Die Diskretisierung in insgesamt 15 finite Elemente ist durch gepunktete Linien gekennzeichnet. Das System ist bis auf die durch eine an den Rändern frei drehbar gelagerte Platte dargestellte Fensterseite an allen Außenflächen akustisch hart berandet und hat in der in z-Richtung gesehenen zweiten und dritten Schicht je eine Aussparung unterschiedlicher Größe. Der Problematik von spitzen, in das betrachtete Gebiet hineinragenden Ecken und Kanten und den damit verbundenen Sprüngen in den Ortsableitungen des Schalldrucks bewußt, sind die entsprechenden Ortsableitungen bei Anwendung von Elementtyp 2 zu Null gesetzt worden. Insgesamt verbleiben 71 Freiheitsgrade bei Verwendung von Elementtyp 1 und 107 Frei-

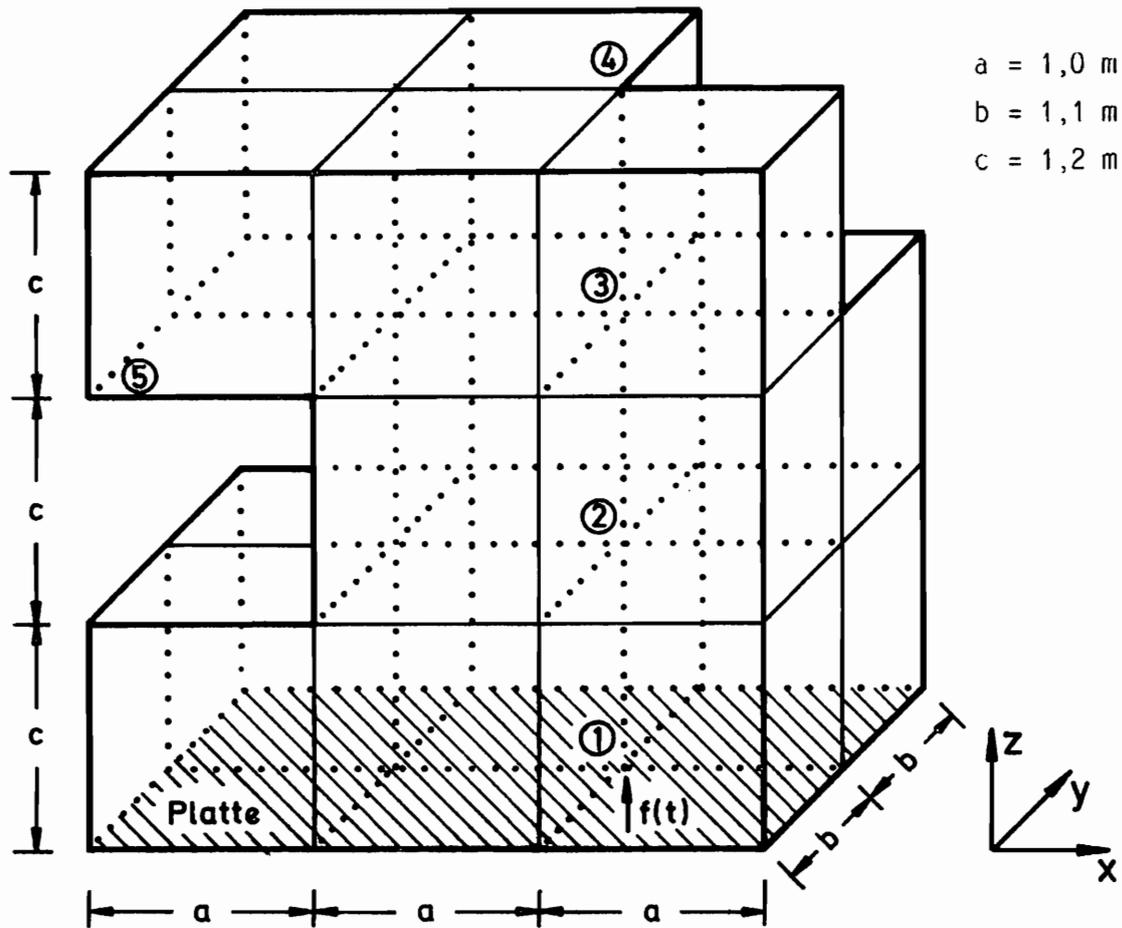


Abb. 3.3.2-1 Aufbau und Diskretisierung eines Platte-Luftschall-Koppelsystems

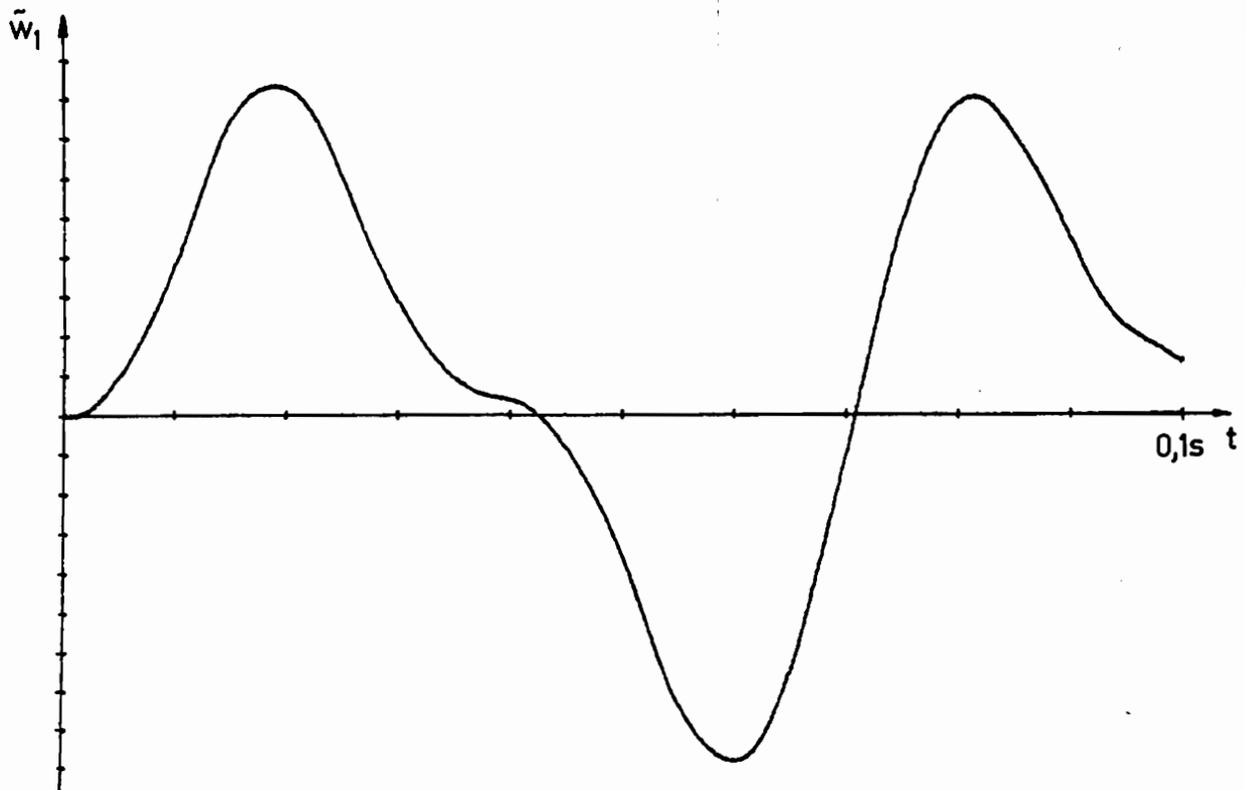
heitsgrade bei Elementtyp 2 für die Modellbildung des Systems.

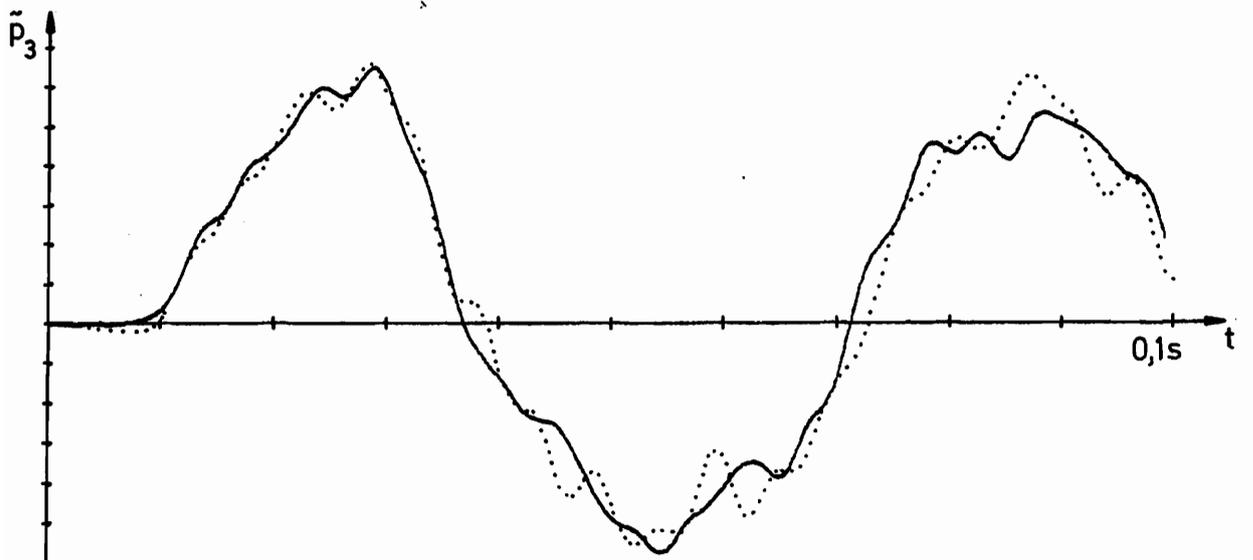
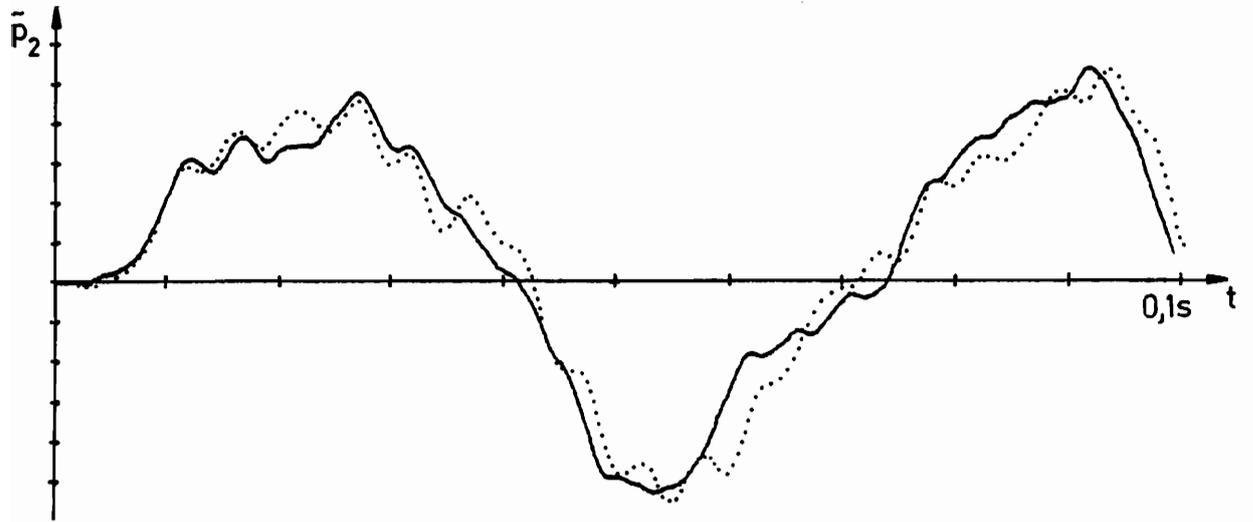
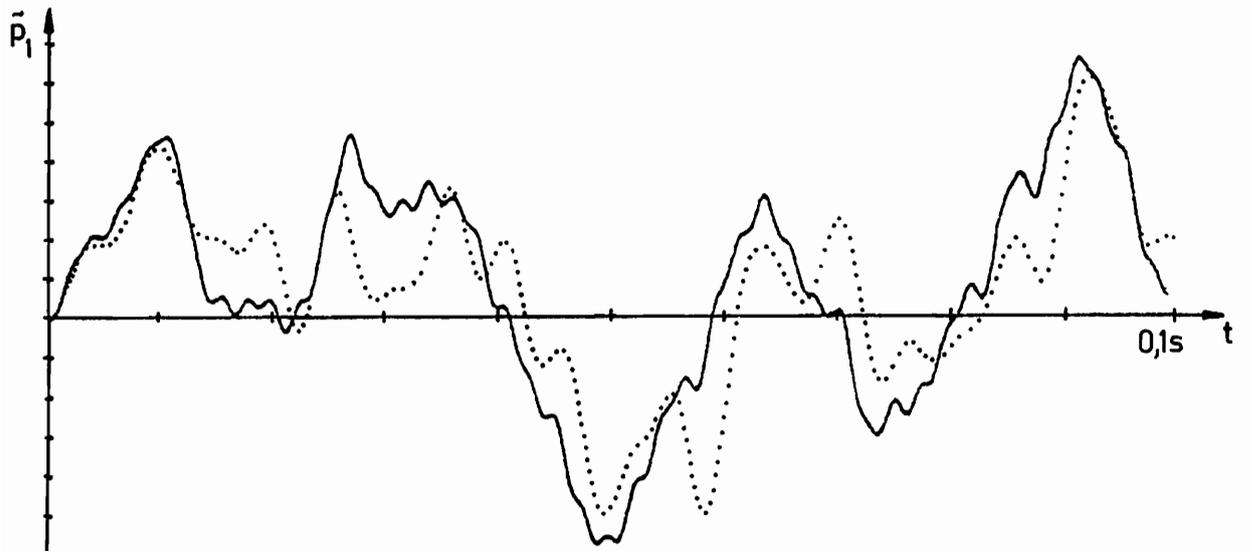
Die Simulation einer impulshaften Erregung ist zunächst durch die Vorgabe von Anfangsgeschwindigkeiten in der homogenen Lösung Gl.(3-69) versucht worden, wobei zur Kontrolle die Schallgeschwindigkeit c_L aus der Zeitdifferenz des Schwingungsbeginns an zwei hintereinander liegenden Knotenpunkten berechnet worden ist. Rechnungen mit in den Abbildungseigenschaften vergleichbaren eindimensionalen Schallelementen zeigten, daß für die korrekte Wiedergabe der Schallgeschwindigkeit allein in z-Richtung eine Diskretisierung in ca. 30

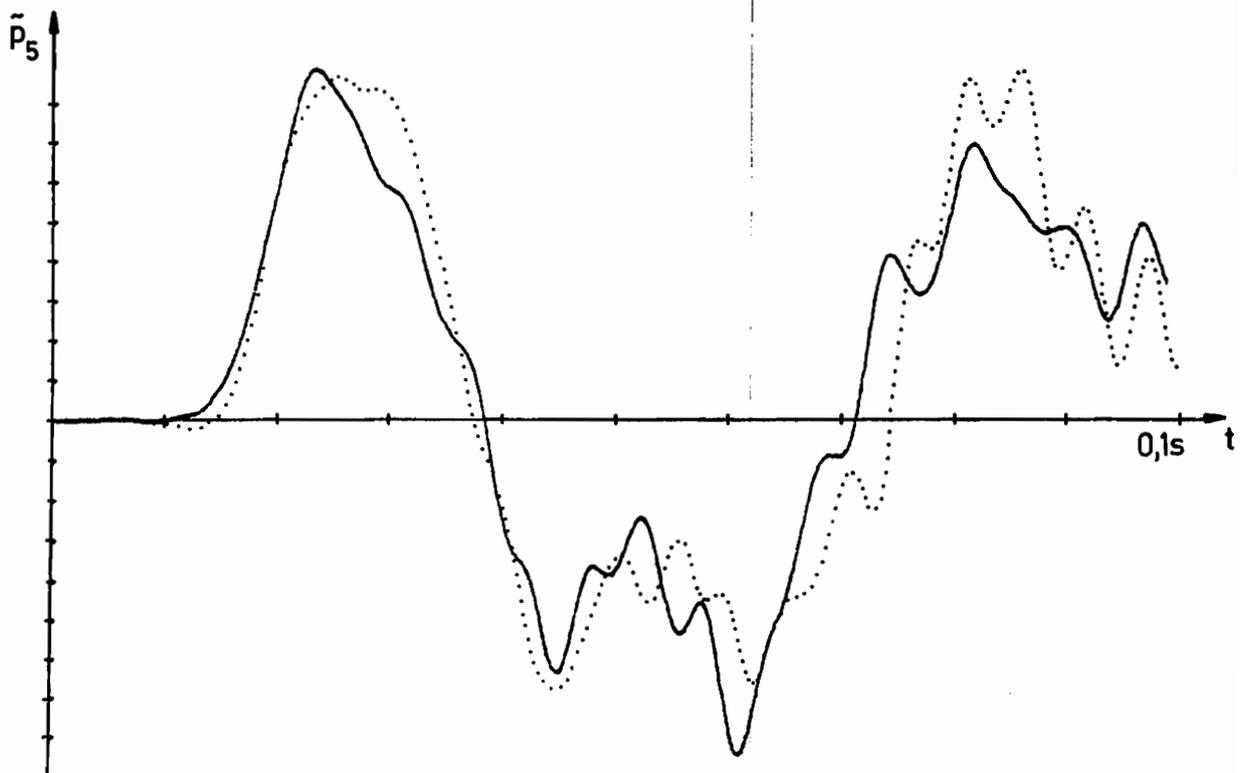
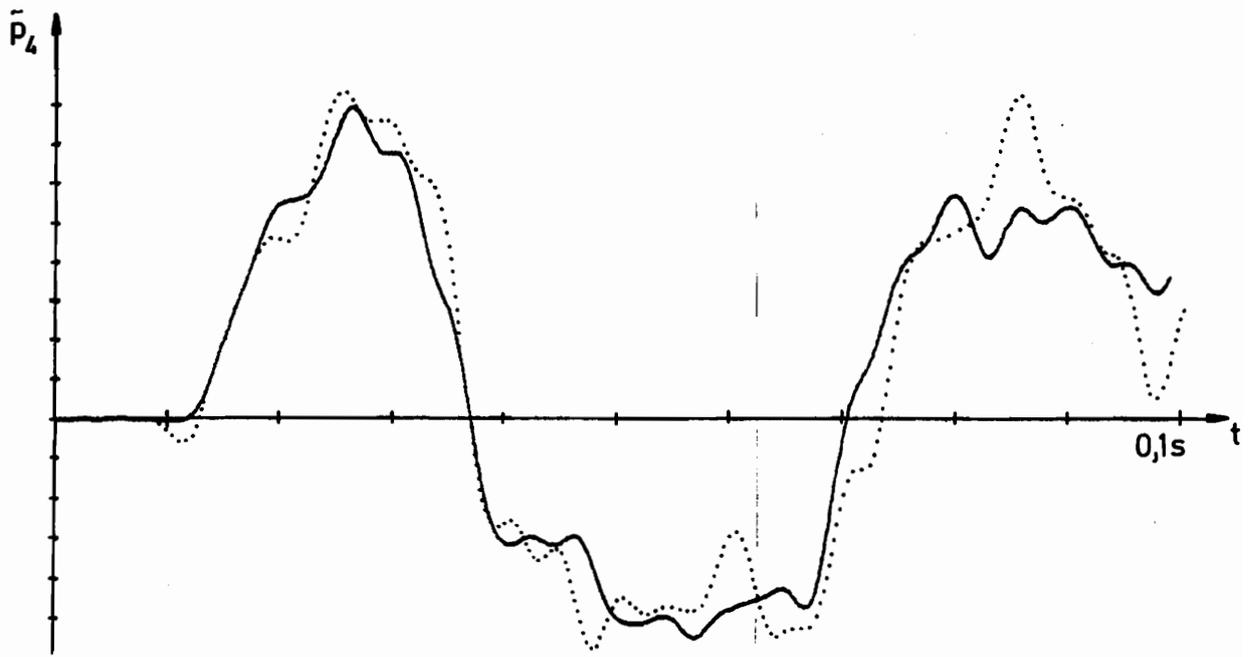
finite Elemente erforderlich ist. Im Dreidimensionalen würde dies zu mehr als 1000 Freiheitsgraden, das heißt zu Speicherplatzproblemen, bzw. alternativ zu extrem langen Rechenzeiten führen.

Die Anregung des Systems ist deshalb hier durch eine in Punkt 1 auf der Platte angreifende äußere Kraft $f(t)$ dargestellt worden. Dem impulsartigen Charakter entspricht ein Kraft-Zeitverlauf in Form einer halben Sinuswelle. Damit läßt sich in Abhängigkeit von der Frequenz der Anregung steuern, ob das System 'hart', d.h. viele Oberwellen anstoßend, oder eher 'weich' angeregt wird.

Die nachfolgenden Bilder zeigen die Schwingungsverläufe einzelner Variablen des Systems im Zeitintervall $0 \leq t \leq T$ mit $T = 0.1$ s. Die Indizes der Variablen geben die Zugehörigkeit zu den in Abb. 3.3.2-1 nummerierten Knotenpunkten an. Die Dauer der Krafterregung beträgt $T_f = 0.02$ s, entsprechend einer Anregungsfrequenz von $\Omega = 196 \text{ s}^{-1}$. Der Rechnung mit dem einfachen Elementtyp entstammt die gepunktete Linie, der mit Elementtyp 2 die durchgezogene Linie.







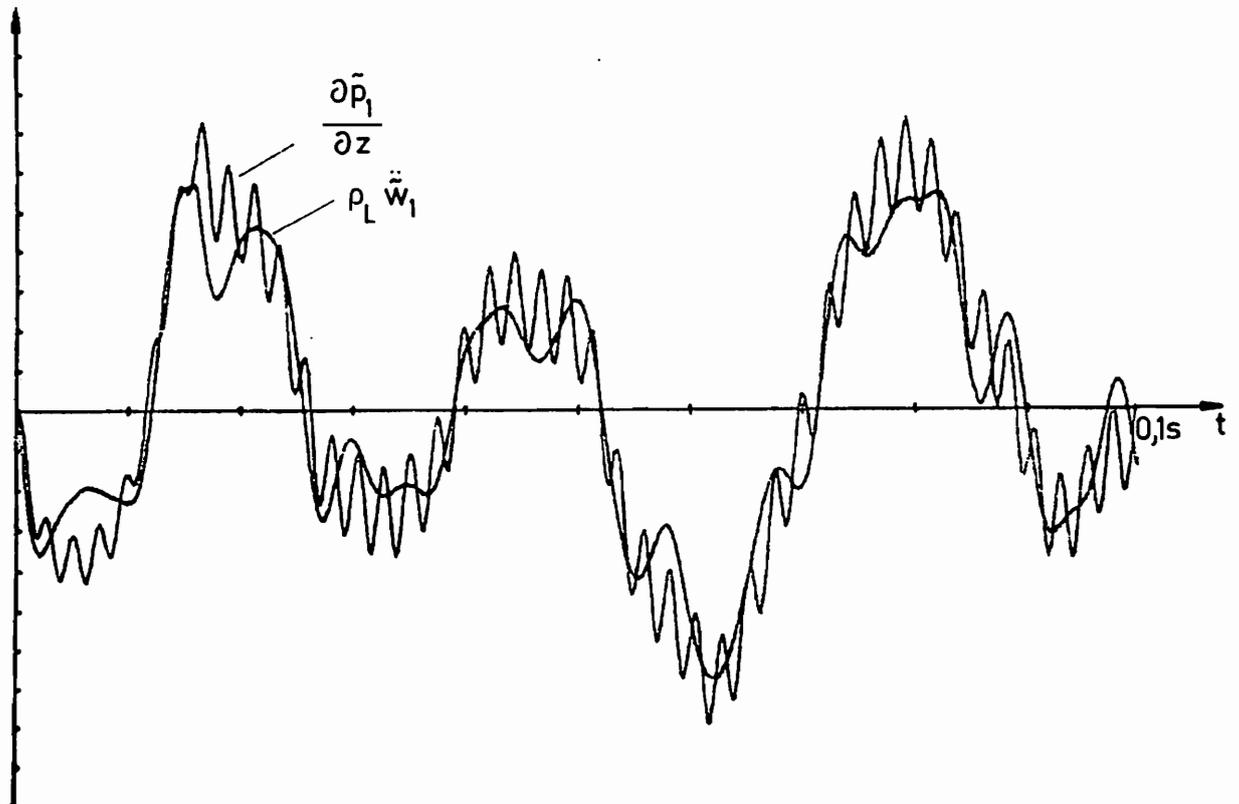


Abb. 3.3.2-2 Zeitverlaufsrechnungen von Plattendurchbiegung, Schalldruck und Koppelgrößen

Das erste Bild von Abb. 3.3.2-2 zeigt die Auslenkung $\tilde{w}_1(t)$ des Kraftangriffpunktes der Platte. Die Schwingungsverläufe aus den Rechnungen mit den beiden Elementtypen sind deckungsgleich und zeigen eine deutliche Dominanz der tiefsten Eigenfrequenz des Systems.

Bei den Schalldruckverläufen $\bar{p}_1(t)$ bis $\bar{p}_4(t)$ fällt im Vergleich mit $\tilde{w}_1(t)$ auf, daß mit zunehmender Entfernung von der Platte diese immer deutlicher der Plattenbewegung - bei entsprechender zeitlicher Verzögerung - folgen. Der Schalldruckverlauf $\bar{p}_1(t)$ auf der Plattenoberfläche folgt dabei der Auslenkung des Punktes 1 am wenigsten, da hier höherfrequente Schwingungsanteile am

stärksten ausgeprägt sind. Auffällig ist weiterhin, daß die Maximalwerte der Schalldruckverläufe mit der Entfernung von der Platte zunehmen. Der Maximalwert von $\tilde{p}_5(t)$, des Punktes, der im Schatten der großen Aussparung liegt, beträgt etwa das 1.8-fache des Maximalwertes von $\tilde{p}_1(t)$ oder $\tilde{p}_2(t)$.

Das Einhalten der Schallgeschwindigkeit läßt sich leicht an den Anfangstotzeiten der Schalldruckverläufe überprüfen und gibt sehr genau den in der Massenmatrix Gl.(3-32) des Koppel-elementes vorgegebenen Wert $c_L = 330$ m/s wieder. Die längste Totzeit hat $\tilde{p}_5(t)$, was darauf hindeutet, daß dieser Punkt von der primären Schallwelle erst nach Reflexion an der rückwärtigen Wand erreicht wird.

Der Vergleich der gepunkteten mit den durchgezogenen Kurvenverläufen zeigt keine so großen Unterschiede zwischen den Elementtypen, wie sie vielleicht aufgrund der Eigenwertberechnungen in Tabelle 3.2.1-1 zu erwarten wären. Die Maximalwerte sind sogar in beiden Fällen nahezu gleich, was unter diesem Gesichtspunkt für die Verwendung des einfachen Elementtyps 1 spricht.

Im letzten Bild sind mit Elementtyp 2 zur Kontrolle der Kopplungsbedingung Gl.(3-24) die Schwingungsverläufe von $\partial\tilde{p}_1(t) / \partial z$ und $\rho_L \ddot{w}_1(t)$ für Punkt 1 aufgezeichnet. Dabei ist $\ddot{w}_1(t)$ diskret mit Hilfe von Differenzenquotienten berechnet worden. Auffällig ist der hochfrequente Anteil im Zeitverlauf von $\partial\tilde{p}_1 / \partial z$. Die Übereinstimmung beider Kurven ist abhängig von der Frequenz, mit der das System angeregt wird. So wachsen z.B. bei Anregung des selben Systems mit doppelt so hoher Frequenz die Amplitudenausschläge von $\partial\tilde{p}_1(t) / \partial z$ so stark an, daß nur noch der Mittelwert eine Verwandtschaft mit $\rho_L \ddot{w}_1(t)$ aufweist. Es liegt also nahe, die Kopplungsbedingungen als ein wesentliches Kriterium für die Zuverlässigkeit der numerischen Rechnungen stets zu überprüfen, was jedoch unmittelbar nur bei Elementtyp 2 möglich ist, da Elementtyp 1 die Ortsableitungen des Schalldruckes als Knotenfreiwerte nicht enthält.

Rückwirkungen des angekoppelten Luftschallraumes auf die Schwingungsformen der Platte treten im vorliegenden Beispiel bei Annahme einer Glasplatte erst bei weniger als 1 mm Plattendicke auf. Die Frage, unter welchen Umständen mit einer Rückwirkung zu rechnen ist, kann im konkreten Fall durch Abschätzung und Vergleich der Eingangsimpedanzen für die Platte und das Luftschallsystem erfolgen.

4. Die Berechnung geschlossener dämpfungsbehafteter Gebiete mit finiten Elementen

Während in den vorangehenden Rechnungen nur dämpfungsfreie Systeme betrachtet worden sind, soll nun die Finite-Elemente-Formulierung auf die Behandlung solcher akustischer Systeme erweitert werden, bei denen die Schalldämpfung eine wesentliche Rolle spielt.

In der Akustik sind die physikalischen Ursachen für verschiedene Dämpfungsmechanismen größtenteils bekannt und durch entsprechende Dämpfungsmodelle beschrieben. Der Effekt der sogenannten klassischen Absorption durch innere Reibung im schallführenden Medium Luft ist im allgemeinen gering, verglichen mit der Absorption, die durch alle Arten von porösen Stoffen, wie Textilien, Schaumstoffen oder Mineralfasern, hervorgerufen wird. Solche Stoffe sind häufig an räumlichen Begrenzungsflächen angebracht, und hier finden dann hauptsächlich die für die Schalldämpfung entscheidenden Umwandlungen von Schallenergie in Wärme statt.

Das Absorptionsverhalten dieser Stoffe wird in der Praxis meist durch die komplexe Wandimpedanz, d.h. durch den Quotienten aus Schalldruck auf der Wandoberfläche und wandnormaler Schallschnelle, bzw. durch deren Kehrwert, die sogenannte Wandadmittanz, beschrieben. Wenngleich diese Kenngröße mehrere physikalisch unterschiedliche Phänomene zusammenfaßt, deren Beschreibung im Einzelfall sehr schwierig sein kann [27,42], so ist sie doch in der angewandten Akustik eine recht praktische Größe, auch weil sie Messungen gut zugänglich ist [16].

Ihr Nachteil ist, daß durch sie nur sogenannte lokale Absorptionseffekte unter Vernachlässigung der seitlichen Kopplung im Absorptionsmaterial dargestellt werden können. In manchen Fällen, etwa bei schwach dämpfenden Materialien, die mit geringer Schichtdicke vor starren Wänden angebracht sind, reicht die Beschreibung als lokaler Absorber nicht mehr aus, so daß die Schallwellenausbreitung im porösen Stoff mit in die Betrachtungen einbezogen werden muß.

Eine Finite-Elemente-Formulierung zur Lösung der Wellengleichung für poröse Stoffe gelang erstmals Craggs [13]. Hiermit wird es nun möglich, durch

Einarbeiten der Kopplungsbedingungen auf der Grenzfläche Luft - poröser Stoff, gekoppelte Luftschall-Absorptions-Systeme mit finiten Elementen zu berechnen. Somit können die Auswirkungen von Art und Verteilung der Absorptionsstoffe auf ein Luftschallfeld rechnerisch auch dann vorausbestimmt werden, wenn das lokale Absorptionsmodell den Anforderungen nicht mehr genügt.

Im folgenden soll zunächst die Finite-Elemente-Formulierung für Luftschallgebiete mit lokaler Randabsorption hergeleitet werden. Danach folgen finite Elemente für poröse Stoffe, und im dritten Abschnitt dieses Kapitels wird die Kopplung von Luftschallelementen an solche für poröse Absorber formuliert. In Beispielrechnungen wird die Anwendung der Modelle gezeigt.

Zwei Einschränkungen im Unterschied zum vorangegangenen Kapitel seien für alle nachfolgenden Rechnungen noch angemerkt:

- die Formulierung der Probleme geschieht der Übersichtlichkeit halber im Zweidimensionalen. Der eindimensionale Fall ist hieraus leicht abzuleiten, wie für den Vergleich mit analytischen Lösungen noch gezeigt wird. Der dreidimensionale Fall bringt gegenüber dem zweidimensionalen prinzipiell keine Schwierigkeiten, außer daß der Formelapparat umfangreicher wird und bei numerischen Rechnungen die zu bearbeitenden Datenmengen in Größenordnungen wachsen, die auf mittleren Rechenanlagen heutzutage noch nicht angemessen bewältigt werden können. So beschränken sich alle weiteren Untersuchungen auf maximal zwei Dimensionen, d.h. ebene Schallfelder.
- Auf Zeitverlaufsberechnungen für instationäre Vorgänge wird wegen der komplizierten Frequenzabhängigkeit der Dämpfungsparameter und des damit verbundenen rechnerischen Aufwandes verzichtet. So werden nur stationäre Vorgänge unter der Annahme eines harmonischen Zeitgesetzes betrachtet.

4.1 Problemgleichungen und Variationsformulierungen für Gebiete mit lokaler Randabsorption

Ausgangspunkt der Überlegungen ist wieder die Wellengleichung, bzw. die durch Separation des Zeitgesetzes

$$\bar{p}(x, y, t) = p(x, y) e^{i\omega t} \quad (4-1)$$

erhaltene Helmholtz-Gleichung

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad ; \quad k = \frac{\omega}{c_L} \quad (4-2)$$

mit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4-3)$$

Gesucht wird die Lösung der Helmholtz-Gleichung für ein Gebiet Ω in der x-y-Ebene mit der Randkurve $\Gamma(s)$, bestehend aus den Teilrandbereichen $\Gamma_1(s)$, $\Gamma_2(s)$ und $\Gamma_3(s)$ mit den nachfolgenden Randbedingungen.

Γ_1 : Auf dem Teilrandbereich $\Gamma_1(s)$ werde das System durch eine vorgegebene Schallschnelle $v(s, t) = v(s) e^{i\omega t}$ angeregt.

Γ_2 : Der Teilrandbereich $\Gamma_2(s)$ sei der schallabsorbierende Bereich, gekennzeichnet durch die komplexe Wandadmittanz A .

Γ_3 : Auf dem Teilrandbereich $\Gamma_3(s)$ sei die Berandung akustisch hart.

Die Formulierung der Randbedingungen auf Γ_1 , Γ_2 und Γ_3 folgt aus der Anwendung der Newton'schen Bewegungsgleichung (2-1), und es gelten die folgenden Beziehungen, wenn n die nach außen gerichtete Normale ist.

$$\text{auf } \Gamma_1 : \frac{\partial p}{\partial n} = -i\omega g_L v \quad (4-4)$$

auf $\Gamma_2 : \frac{\partial p}{\partial n} = -i\omega g_L A p$ (4-5)

auf $\Gamma_3 : \frac{\partial p}{\partial n} = 0$. (4-6)

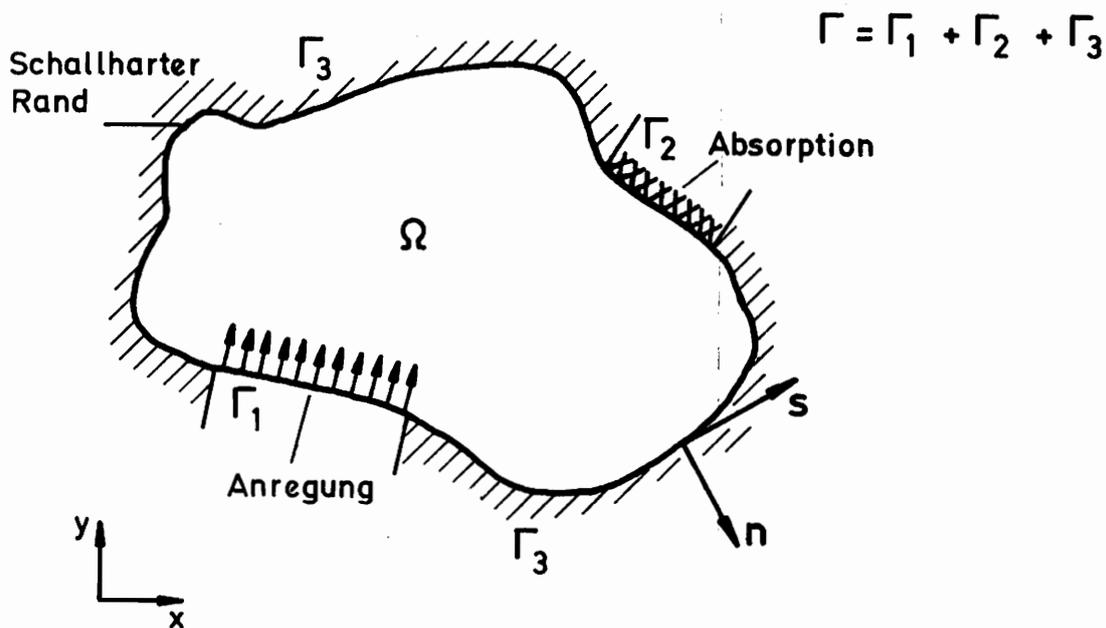


Abb. 4.1-1 Luftschallgebiet Ω mit Randkurve $\Gamma(s)$

Der Schalldruck p , die Schallschnelle v und die Admittanz A sind hier komplexe Größen, und mit der Trennung in Real- und Imaginärteil - Index r und i - folgt für die Helmholtz'Gleichung

$$\Delta p = \Delta(p_r + i p_i) = (\Delta p_r + i \Delta p_i) = -k^2 (p_r + i p_i) \quad (4-7)$$

also

$$\Delta p_r + k^2 p_r = 0 \quad ; \quad \Delta p_i + k^2 p_i = 0 \quad . \quad (4-8)$$

Entsprechend lauten die Randbedingungen

$$\text{auf } \Gamma_1 : \frac{\partial p_r}{\partial n} = \omega g_L v_i \quad ; \quad \frac{\partial p_i}{\partial n} = -\omega g_L v_r \quad (4-9)$$

$$\text{auf } \Gamma_2 : \frac{\partial p_r}{\partial n} = \omega g_L (A_i p_r + A_r p_i) \quad ; \quad \frac{\partial p_i}{\partial n} = \omega g_L (-A_r p_r + A_i p_i) \quad (4-10)$$

$$\text{auf } \Gamma_3 : \frac{\partial p_r}{\partial n} = \frac{\partial p_i}{\partial n} = 0 \quad . \quad (4-11)$$

In [18] hat Gladwell eine Variationsformulierung aufgezeigt, die auf dem Hamilton'schen Prinzip für konservative akustische Systeme basiert und ein sogenanntes adjungiertes System mit in die Betrachtungen einbezieht.

Für die hier vorliegende Problemstellung bedeutet das, es wird neben dem p-System mit den genannten Eigenschaften für dasselbe Gebiet ein fiktives q-System definiert, das aber auf dem Teilrandbereich Γ_2 negative Dämpfung aufweist und genau diejenige Energie aufnimmt, die das p-System dort dissipiert. Beide Systeme zusammen bilden dann wieder ein konservatives Gesamtsystem.

Für das adjungierte System gelten die Helmholtz-Gleichungen

$$\Delta q_r + k^2 q_r = 0 \quad ; \quad \Delta q_i + k^2 q_i = 0 \quad (4-12)$$

wie gehabt beim p-System, weiterhin die Randbedingungen auf Γ_1

$$\frac{\partial q_r}{\partial n} = \omega g_L u_i \quad ; \quad \frac{\partial q_i}{\partial n} = -\omega g_L u_r \quad , \quad (4-13)$$

wobei analog zur Schnelle v im p-System jetzt u die Schnelle im q-System sei, sowie die Randbedingungen auf Γ_3

$$\frac{\partial q_r}{\partial n} = \frac{\partial q_i}{\partial n} = 0 \quad . \quad (4-14)$$

In akustischen Lehrbüchern [15] werden Energieverluste an einer absorbierenden Wand durch den Absorptionskoeffizienten

$$\alpha = 1 - |r|^2 \quad \text{mit} \quad r = \frac{A^{-1} - g_L c_L}{A^{-1} + g_L c_L} \quad (4-15)$$

beschrieben. Dabei ist r der sogenannte komplexe Reflexionsfaktor, A die komplexe Wandadmittanz, deren die Dämpfung charakterisierender Realteil A_r stets größer oder gleich Null ist. Im q -System wird nun auf Γ_2 das Vorzeichen von A_r umgekehrt, so daß α zahlenmäßig gleich bleibt und dem q -System genau die vom p -System abgegebene Energie zugeführt wird. Also ist auf Γ_2

$$\frac{\partial q_r}{\partial n} = \omega g_L (A_i q_r - A_r q_i) \quad ; \quad \frac{\partial q_i}{\partial n} = \omega g_L (A_r q_r + A_i q_i) \quad . \quad (4-16)$$

Das zu den Helmholtz-Gleichungen für p_r , p_i , q_r und q_i und den genannten Randbedingungen auf Γ_1 , Γ_2 und Γ_3 gehörende Variationsfunktional lautet dann

$$\begin{aligned} I = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial p_r}{\partial x} \frac{\partial q_r}{\partial x} + \frac{\partial p_r}{\partial y} \frac{\partial q_r}{\partial y} + \frac{\partial p_i}{\partial x} \frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial p_i}{\partial y} \frac{\partial q_i}{\partial y} + \right. \\ \left. - k^2 (p_r q_r + p_i q_i) \right\} d\Omega + \omega g_L \int_{\Gamma_1} \left\{ -p_r u_i + p_i u_r - q_r v_i + q_i v_r \right\} ds + \\ + \omega g_L \int_{\Gamma_2} \left\{ -A_i (p_r q_r + p_i q_i) + A_r (p_r q_i - p_i q_r) \right\} ds \longrightarrow \min. \quad . \quad (4-17) \end{aligned}$$

Die formale Überführung dieses Variationsausdruckes in die Differentialgleichungen mit Randbedingungen ist im Anhang A1 kurz gezeigt.

Um zur Finite-Elemente-Formulierung zu gelangen, wird im obigen Variationsfunktional zunächst q_r variiert. Damit ergibt sich für $\delta I = 0$ der Ausdruck

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial p_r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_r) + \frac{\partial p_r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta q_r) - k^2 p_r \delta q_r \right\} d\Omega$$

$$+ \omega g_L \int_{\Gamma_1} -v_i \delta q_r ds + \omega g_L \int_{\Gamma_2} -(A_i p_r + A_r p_i) \delta q_r ds = 0 \quad , \quad (4-18)$$

und entsprechend folgt bei Variieren von q_i

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_i) + \frac{\partial p_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta q_i) - k^2 p_i \delta q_i \right\} d\Omega$$

$$+ \omega g_L \int_{\Gamma_1} v_r \delta q_i ds + \omega g_L \int_{\Gamma_2} -(A_i p_i - A_r p_r) \delta q_i ds = 0 \quad . \quad (4-19)$$

Mit der Einführung von Ansatzfunktionen für die unbekanntenen Funktionsverläufe von p_r und p_i in einem Elementbereich Ω_e entsprechend

$$\underline{p}_r(\Omega_e) = \underline{\psi}(\Omega_e) \underline{G} \underline{p}_r \quad ; \quad \underline{p}_i(\Omega_e) = \underline{\psi}(\Omega_e) \underline{G} \underline{p}_i \quad (4-20)$$

und der Definition eines Differentialoperatorenvektors \underline{D} - wie in Kapitel 3.1 - womit

$$\underline{H}(\Omega_e) = \underline{D} \underline{\psi}(\Omega_e) \quad (4-21)$$

geschrieben werden kann, folgt durch Einsetzen in Gl.(4-18) und Gl.(4-19) in Matrixschreibweise

$$\int_{\Omega_e} \left\{ \underline{\delta q}_r^T \underline{G}^T \underline{H}^T \underline{H} \underline{G} \underline{p}_r - k^2 \underline{\delta q}_r^T \underline{G}^T \underline{\psi}^T \underline{\psi} \underline{G} \underline{p}_r \right\} d\Omega_e +$$

$$+ \omega g_L \int_{\Gamma_{e1}} -\underline{\delta q}_r^T \underline{G}^T \underline{\psi}^T v_i ds_e + \omega g_L \int_{\Gamma_{e2}} -\underline{\delta q}_r^T \underline{G}^T \underline{\psi}^T \underline{\psi} \underline{G} (A_i \underline{p}_r + A_r \underline{p}_i) ds_e = 0$$

(4-22)

und

$$\int_{\Omega_e} \{ \underline{\delta q}_i^T \underline{G}^T \underline{H}^T \underline{H} \underline{G} \underline{p}_i - k^2 \underline{\delta q}_i^T \underline{G}^T \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} \underline{G} \underline{p}_i \} d\Omega_e +$$

$$+ \omega g_L \int_{\Gamma_{e1}} \underline{\delta q}_i^T \underline{G}^T \underline{\varphi}^T \underline{v}_r ds_e + \omega g_L \int_{\Gamma_{e2}} -\underline{\delta q}_i^T \underline{G}^T \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} \underline{G} (\underline{A}_i \underline{p}_i - \underline{A}_r \underline{p}_r) ds_e = 0. \quad (4-23)$$

Da $\underline{\delta q}_r^T$ und $\underline{\delta q}_i^T$ in allen Termen je einer Gleichung auftauchen, unbestimmt und ungleich Null sind, kann ausgeklammert werden, und es bleibt

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M} - \omega \underline{C}_i) \underline{p}_r - \omega \underline{C}_r \underline{p}_i = \underline{r}_r \quad (4-24)$$

und

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M} - \omega \underline{C}_i) \underline{p}_i + \omega \underline{C}_r \underline{p}_r = \underline{r}_i \quad (4-25)$$

oder zusammengefaßt

$$\left| \begin{array}{c|c} \underline{K} - \omega^2 \underline{M} - \omega \underline{C}_i & -\omega \underline{C}_r \\ \hline \omega \underline{C}_r & \underline{K} - \omega^2 \underline{M} - \omega \underline{C}_i \end{array} \right| \left\| \begin{array}{c} \underline{p}_r \\ \underline{p}_i \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \underline{r}_r \\ \underline{r}_i \end{array} \right\| \quad (4-26)$$

mit der Steifigkeits- und Massenmatrix für ein Element

$$\underline{K} = \underline{G}^T \int_{\Omega_e} \underline{H}^T \underline{H} d\Omega_e \underline{G} ; \quad \underline{M} = \frac{1}{c_L^2} \underline{G}^T \int_{\Omega_e} \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} d\Omega_e \underline{G} , \quad (4-27)$$

den Elementdämpfungsmatrizen

$$\underline{C}_r = g_L \underline{A}_r \underline{G}^T \int_{\Gamma_{e2}} \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} ds_e \underline{G} ; \quad \underline{C}_i = g_L \underline{A}_i \underline{G}^T \int_{\Gamma_{e2}} \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} ds_e \underline{G} , \quad (4-28)$$

sowie den Elementvektoren für die äußere Anregung

$$\underline{r}_r = \omega g_L v_i \underline{G}^T \int_{\Gamma_{e1}} \underline{\psi}^T ds_e \quad ; \quad \underline{r}_i = -\omega g_L v_r \underline{G}^T \int_{\Gamma_{e1}} \underline{\psi}^T ds_e \quad . \quad (4-29)$$

Kehrt man schließlich zur komplexen Schreibweise entsprechend

$$\underline{C} = \underline{C}_r + i \underline{C}_i \quad ; \quad \underline{r} = \underline{r}_r + i \underline{r}_i \quad ; \quad \underline{p} = \underline{p}_r + i \underline{p}_i \quad (4-30)$$

zurück, wodurch in numerischen Rechnungen bei der Abspeicherung der Matrizen sich der Speicherplatzbedarf auf die Hälfte reduziert, so lautet das Gleichungssystem (4-26) jetzt

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M} + i \omega \underline{C}) \underline{p} = \underline{L} \underline{p} = \underline{r} \quad . \quad (4-31)$$

Wie schon in Gl.(4-26) zu sehen, besteht erwartungsgemäß keine Kopplung zwischen dem p-System und dem adjungierten q-System. Vielmehr gelangt man durch Variieren von p_r und p_i in Gl.(4-17) mit derselben Prozedur zu einem nur das q-System beschreibenden Gleichungssystem, das im Unterschied zu (4-26) bei der Matrix \underline{C}_r eine Vorzeichenänderung aufweist und im weiteren nicht benötigt wird.

Mit dem Gleichungssystem (4-31) kann nun nach Ableiten konkreter finiter Elemente die Schalldruckverteilung in einem beliebigen ebenen Schallfeld unter Berücksichtigung von lokaler Randabsorption und Schallanregung berechnet werden.

4.1.1 Eindimensionale Finite-Elemente-Lösung und Vergleich mit analytischer Lösung

Zur Überprüfung und Beurteilung der Abbildungsleistung bei einer numerischen Rechnung mit finiten Elementen bietet sich ein eindimensionales Beispiel an,

da hierfür eine einfache analytische Vergleichslösung existiert.

Als anschauliches Beispiel sei ein Rohr betrachtet, dessen Durchmesser klein gegen die Wellenlänge ist, so daß sich Schallwellen nur in achsialer Richtung ausbreiten können.

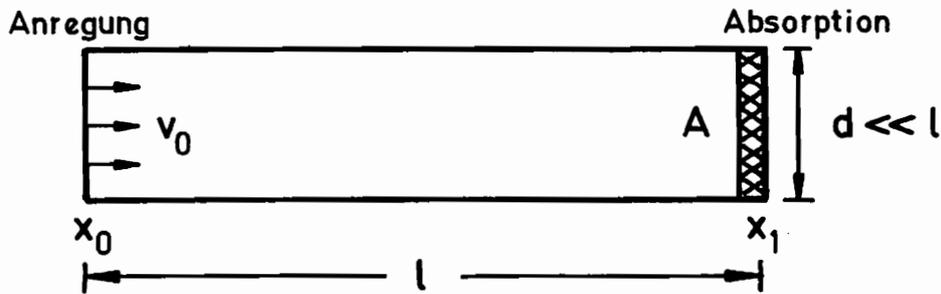


Abb. 4.1.1-1 Eindimensionales Rohrmodell

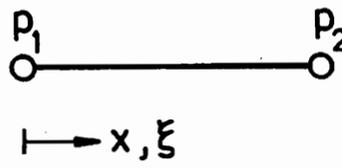
Die Schallanregung im Rohr geschehe bei x_0 durch Vorgabe einer Randschnelle v_0 , die Absorption bei x_1 , gekennzeichnet durch die Admittanz A .

Die Reduktion des Variationsfunktional (4-17) auf den eindimensionalen Fall mit den Randbedingungen aus diesem Beispiel lautet dann

$$\begin{aligned}
 I = & \int_{x_0}^{x_1} \{ p_r' q_r' + p_i' q_i' - k^2 (p_r q_r + p_i q_i) \} dx \\
 & + \omega g_L (p_{r0} u_{i0} - p_{i0} u_{r0} + q_{r0} v_{i0} - q_{i0} v_{r0}) \quad (4-32) \\
 & + \omega g_L \{ -A_i (p_{r1} q_{r1} + p_{i1} q_{i1}) + A_r (p_{r1} q_{i1} - p_{i1} q_{r1}) \} \rightarrow \min.,
 \end{aligned}$$

wobei der Strich die Ableitung nach dx kennzeichnet und die Indizes 0 und 1 sich auf die Randpunkte bei x_0 bzw. x_1 beziehen. Variieren von q_r und q_i führt auf dem schon beschriebenen Weg auch hier zu dem Gleichungssystem (4-31).

Für ein eindimensionales finites Schallelement mit linearer Ansatzfunktion



$$\begin{aligned}
 p(\xi) &= (1-\xi) p_1 + \xi p_2 \\
 &= [1 \quad \xi] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \\
 &= \underline{\varphi}(\xi) \underline{G} \underline{p}
 \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{x}{l}$$

Abb. 4.1.1-2 Eindimensionales Schallelement

entsprechend einem Hermite-Polynom erster Ordnung - vgl. Abb. 3.1-2 - ergeben sich die Elementmatrizen zu

$$\underline{K} = l \underline{G}^T \int_0^1 \underline{H}^T \underline{H} d\xi \underline{G} = \frac{1}{l} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{M} = \frac{1}{c_L^2} l \underline{G}^T \int_0^1 \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} d\xi \underline{G} = \frac{l}{6 c_L^2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(4-33)

$$\underline{C} = g_L A \underline{G}^T \underline{\varphi}(1)^T \underline{\varphi}(1) \underline{G} = g_L A \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{r} = -i\omega g_L v_0 \underline{G}^T \underline{\varphi}(0)^T = -i\omega g_L v_0 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Für die numerische Vergleichsrechnung ist das System aus Abb. 4.1.1-1 in 10 finite Elemente mit insgesamt 11 Knotenpunkten diskretisiert worden. Die Randbedingungen sind durch Berücksichtigung von \underline{r} am ersten und \underline{C} am

letzten Element in die Rechnung eingearbeitet worden.

Die zum Vergleich programmierte analytische Lösung für das Problem

$$p'' + k^2 p = 0 \quad ; \quad k = \frac{\omega}{c_L} \quad (4-34)$$

mit den Randbedingungen

$$p'(0) = -i\omega g_L v_0 \quad ; \quad p'(l) = -i\omega g_L A p(l) \quad (4-35)$$

folgt aus einem Lösungsansatz mit einer hin- und einer rücklaufenden Welle

$$p(x) = p_+ e^{-ikx} + p_- e^{ikx} \quad (4-36)$$

und lautet

$$p(x) = \frac{g_L c_L v_0}{1 - \frac{1 - g_L c_L A}{1 + g_L c_L A} e^{-i2kl}} \left\{ e^{-ikx} + \frac{1 - g_L c_L A}{1 + g_L c_L A} e^{-i2kl} e^{ikx} \right\} \quad (4-37)$$

In den nachfolgenden Bildern der Abb 4.1.1-3 ist die Ortsabhängigkeit des Absolutbetrages des komplexen Schalldruckverlaufes im Rohr gezeigt. Die durchgezogene Linie entstammt der analytischen Lösung Gl.(4-37). Die durch Kreuze markierten Werte sind unter Verwendung des hier abgeleiteten finiten Elementes berechnet worden; den durch Kreise markierten Werten liegt ein eindimensionales finites Schallelement mit kubischer Ansatzfunktion zugrunde, das außer dem Schalldruck p auch dessen Ortsableitung als Freiwert auf jedem Knotenpunkt besitzt. Die Elementmatrizen hierfür sind im Anhang A2 angegeben.

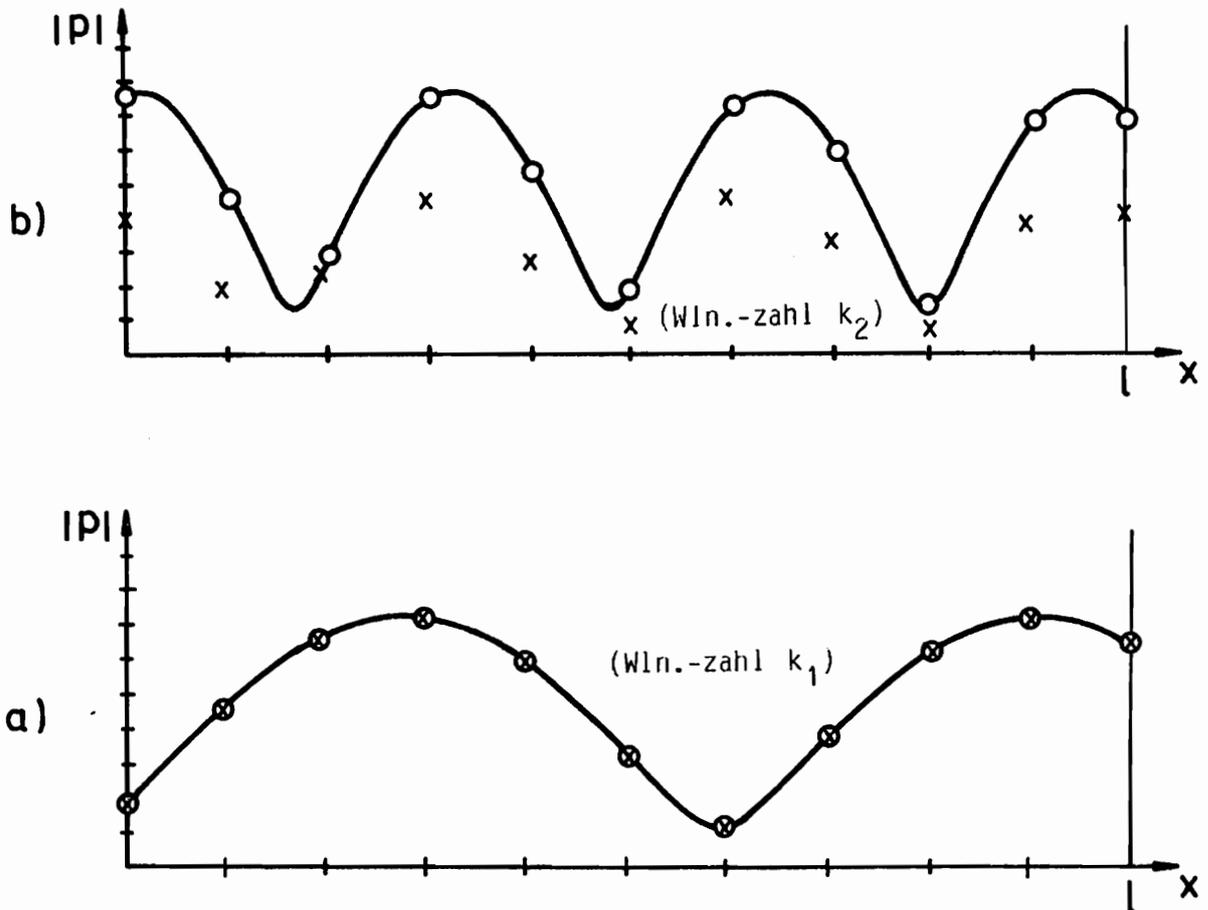


Abb. 4.1.1-3 Schalldruckverlauf im Rohr
Analytische Lösung und Finite-Elemente-Lösungen
 $k_2 = 2 k_1$

Wie die Bilder zeigen, liefert das Finite-Elemente-Modell bei fester Wellenzahl k in Abhängigkeit von der Rohrlänge l , bzw. - was gleichbedeutend ist - in Abhängigkeit von der Anzahl der Elemente, in die das Rohr diskretisiert ist, beliebig genaue Ergebnisse. Das höherwertige Element hat hier einen augenscheinlichen Vorteil gegenüber dem einfachen Element mit linearer Ansatzfunktion, was aber durch ein doppelt so großes Gleichungssystem mit einer etwa viermal so langen Rechenzeit erkaufte ist. Bei gleichem Verhältnis von Aufwand zu Nutzen sind die Unterschiede in den Ergebnissen der beiden Elementtypen sehr gering, und es ergibt sich sogar von der Anwenderseite her betrachtet wegen der höheren Stützstellenzahl ein gewisser Vorteil für das einfache Element.

4.1.2 Finite Elemente für zweidimensionale Probleme

Mit den in Kapitel 4.1 hergeleiteten Gleichungen (4-27) bis (4-29) sollen im folgenden kurz die Elementmatrizen für ein finites Rechteck- und ein Dreieckelement aufgestellt werden. Letzteres erlaubt dann auch die Berechnung nicht-rechtwinkliger Gebiete mit beliebigen Randkurven, die durch einen Polygonzug angenähert werden können.

Für das Rechteckelement wird eine bilineare Ansatzfunktion, entsprechend Hermite-Polynomen erster Ordnung gewählt, mit der sich der Funktionsverlauf im Element in Abhängigkeit der vier Funktionswerte in den Eckknoten darstellt, siehe Abb. 4.1.2-1.

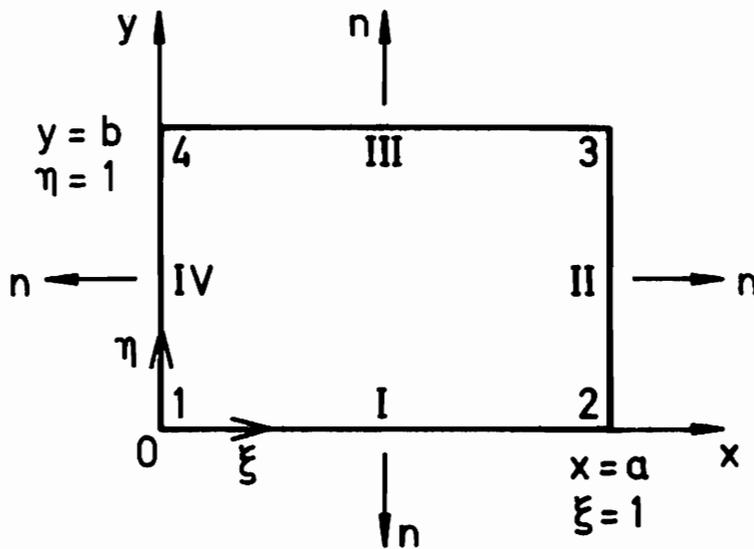


Abb. 4.1.2-1 Rechteckelement mit Koordinatensystemen
 n ist Richtung der Randnormalen
Knotenpunkte: 1,2,3,4
Randbereiche: I,II,III,IV

$$\begin{aligned}
 p(\xi, \eta) &= (1-\xi)(1-\eta)p_1 + \xi(1-\eta)p_2 + \xi\eta p_3 + \eta(1-\xi)p_4 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi\eta & \eta \end{bmatrix} \underline{G} \underline{p} \\
 &= \underline{\varphi}(\xi, \eta) \underline{G} \underline{p}
 \end{aligned} \tag{4-38}$$

mit

$$\underline{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{4-39}$$

Mit Hilfe des Vektors

$$\underline{D} = \left[\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad , \quad \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \right]^T \tag{4-40}$$

der auf den Vektor $\underline{\varphi}(\xi, \eta)$ angewendet, die Matrix

$$\underline{H}(\xi, \eta) = \underline{D} \underline{\varphi}(\xi, \eta) \tag{4-41}$$

ergibt, lauten Steifigkeits- und Massenmatrix nach Gl.(4-27) für das Rechteckelement

$$\underline{K} = a b \underline{G}^T \int_0^1 \int_0^1 \underline{H}^T \underline{H} d\xi d\eta \underline{G}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & -\frac{b}{a} + \frac{a}{2b} & -\frac{b}{a} - \frac{a}{2b} & \frac{b}{2a} - \frac{a}{b} \\ & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & \frac{b}{2a} - \frac{a}{b} & -\frac{b}{2a} - \frac{a}{2b} \\ & & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} & -\frac{b}{a} + \frac{a}{2b} \\ & \text{symm.} & & \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \end{vmatrix} \quad (4-42)$$

$$\underline{M} = \frac{ab}{c_L^2} \underline{G}^T \int_0^1 \int_0^1 \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} d\xi d\eta \underline{G}$$

$$= \frac{ab}{36c_L^2} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ & 4 & 2 & 1 \\ & & 4 & 2 \\ \text{symm.} & & & 4 \end{vmatrix} \quad (4-43)$$

Die Matrizen \underline{C}_r und \underline{C}_i Gl.(4-28) setzen sich beim Rechteckelement zusammen aus je vier Einzelmatrizen bezüglich der Elementränder I, II III und IV. Mit der Vorzeichendefinition aus Abb. 4.1.2-2 für positive Randadmittanzen A und Randschnellen v lautet die Matrix \underline{C} in komplexer Schreibweise

$$\underline{C} = \underline{C}_I + \underline{C}_{II} + \underline{C}_{III} + \underline{C}_{IV}$$

$$= -\frac{1}{6} g_L^a A_I \begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & \underline{0} & \\ & & & \underline{0} \end{vmatrix} + \frac{1}{6} g_L^b A_{II} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{1}{6} g_L^a A_{III} \begin{vmatrix} & & & \\ & \underline{0} & & \\ & & \underline{0} & \\ & & & \\ \underline{0} & & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{vmatrix} - \frac{1}{6} g_L^b A_{IV} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(4-44)

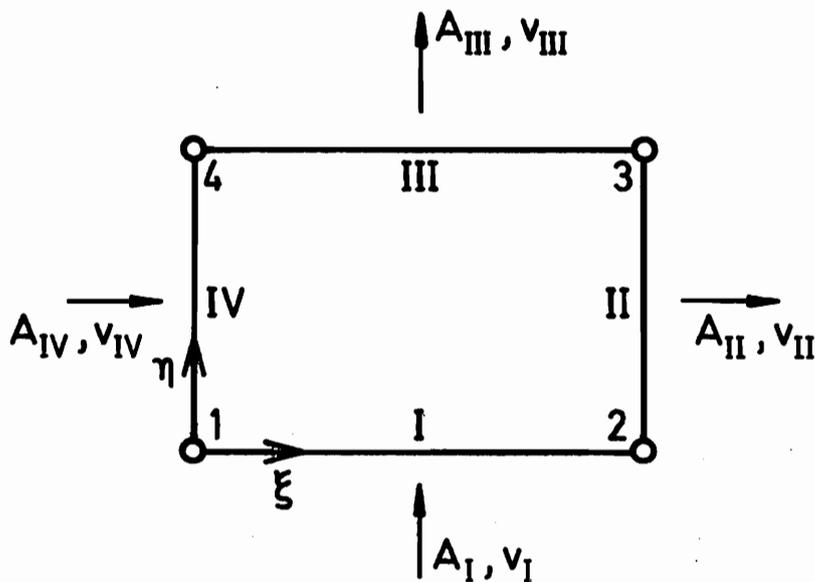


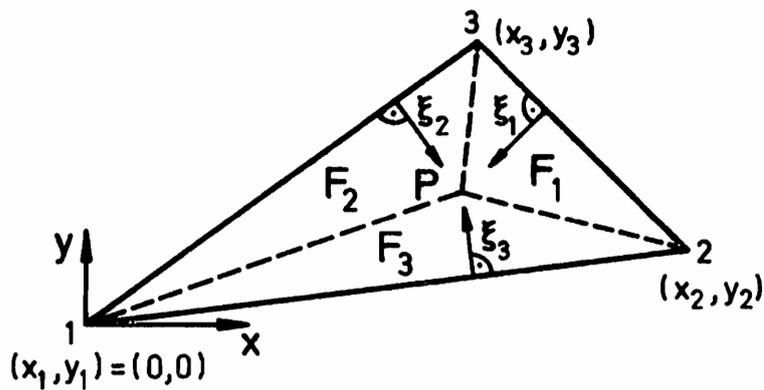
Abb. 4.1.2-2 Rechteckelement mit Definition der positiven Randgrößen A und v

Ganz entsprechend setzen sich die Vektoren \underline{r}_r und \underline{r}_i aus Gl.(4-29) für die Berücksichtigung von vorgegebenen Randschnellen v_r und v_i aus je vier einzelnen Vektoren zusammen. In komplexer Schreibweise ist

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{r}_I + \underline{r}_{II} + \underline{r}_{III} + \underline{r}_{IV} \\ &= \frac{1}{2} i \omega g_L a v_I \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} i \omega g_L b v_{II} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} i \omega g_L a v_{III} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} i \omega g_L b v_{IV} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (4-45) \end{aligned}$$

Für ein Dreieckelement wird eine ebenfalls lineare Ansatzfunktion gewählt, jetzt aber in sogenannten natürlichen Koordinaten, wodurch sich die Berechnung der Elementmatrizen wesentlich vereinfacht.

Betrachtet werde ein Dreieckelementbereich wie in Abb. 4.1.2-3 mit den natürlichen Koordinaten ξ_1, ξ_2 und ξ_3 . Der Ursprung des cartesischen Koordinatensystems liege im Eckpunkt 1 des Dreiecks.



P = beliebiger Punkt
im Dreieck

$$\xi_i = \frac{F_i}{F}; \quad i=1,2,3$$

$$F = \sum_{i=1}^3 F_i \quad \text{Fläche des Dreiecks}$$

Abb. 4.1.2-3 Dreieckelement mit natürlichen und cartesischen Koordinaten und Knotennummerierung

Mit den Transformationsgleichungen

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \tag{4-46}$$

$$y = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3$$

und der Bedingung

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{4-47}$$

folgt unter Beachtung von

$$x_1 = y_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 y_3 - x_3 y_2 = 2F \tag{4-48}$$

für die natürlichen Koordinaten

$$\xi_1(x, y) = \frac{1}{2F} (2F + a_1 x + b_1 y) \tag{4-49}$$

$$\xi_2(x, y) = \frac{1}{2F} (a_2 x + b_2 y) \quad (4-49)$$

$$\xi_3(x, y) = \frac{1}{2F} (a_3 x + b_3 y)$$

mit

$$\begin{aligned} a_1 &= y_2 - y_3 & ; & & b_1 &= x_3 - x_2 \\ a_2 &= y_3 & ; & & b_2 &= -x_3 \\ a_3 &= -y_2 & ; & & b_3 &= x_2 \end{aligned} \quad (4-50)$$

Die Ansatzfunktion für die Schalldruckverteilung im Elementbereich läßt sich nun schreiben als

$$\begin{aligned} p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{vmatrix} \\ &= \underline{\xi} \underline{p} \end{aligned} \quad (4-51)$$

Mit der Einführung eines Vektors

$$\begin{aligned} \underline{\kappa} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \underline{D} \underline{\xi} \underline{p} \\ &= \frac{1}{2F} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \underline{p} = \frac{1}{2F} \underline{N} \underline{p} \end{aligned} \quad (4-52)$$

läßt sich in den Variationsintegralen Gl.(4-18, 4-19) schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_r) + \frac{\partial p_r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta q_r) &= \delta \underline{x}^T \delta \underline{x} \\ &= \left(\frac{1}{2F}\right)^2 \underline{\delta q}_r^T \underline{N}^T \underline{N} \underline{p}_r \end{aligned} \quad (4-53)$$

und desgleichen mit Index i für den Imaginärteil. Damit entsteht für einen Dreiecksbereich aus Gl.(4-18)

$$\begin{aligned} \int_F \left\{ \left(\frac{1}{2F}\right)^2 \underline{\delta q}_r^T \underline{N}^T \underline{N} \underline{p}_r - k^2 \underline{\delta q}_r^T \underline{\xi}^T \underline{\xi} \underline{p}_r \right\} dF + \\ + \omega g_L \int_{\Gamma_{1e}} -\underline{\delta q}_r^T \underline{\xi}^T \underline{v}_i ds_e + \omega g_L \int_{\Gamma_{2e}} -\underline{\delta q}_r^T \underline{\xi}^T \underline{\xi} (A_i \underline{p}_r + A_r \underline{p}_i) ds_e = 0 \end{aligned} \quad (4-54)$$

und aus Gl.(4-19)

$$\begin{aligned} \int_F \left\{ \left(\frac{1}{2F}\right)^2 \underline{\delta q}_i^T \underline{N}^T \underline{N} \underline{p}_i - k^2 \underline{\delta q}_i^T \underline{\xi}^T \underline{\xi} \underline{p}_i \right\} dF + \\ + \omega g_L \int_{\Gamma_{1e}} \underline{\delta q}_i^T \underline{\xi}^T \underline{v}_r ds_e + \omega g_L \int_{\Gamma_{2e}} -\underline{\delta q}_i^T \underline{\xi}^T \underline{\xi} (A_i \underline{p}_i - A_r \underline{p}_r) ds_e = 0. \end{aligned} \quad (4-55)$$

Durch Ausklammern von $\underline{\delta q}_r^T$ und $\underline{\delta q}_i^T$ folgt mit $k = \omega/c$ und Rückkehr zur komplexen Schreibweise das schon bekannte Gleichungssystem (4-31). Die Elementmatrizen und -vektoren sind im einzelnen hierbei

$$\underline{K} = \left(\frac{1}{2F}\right)^2 \int_F \underline{N}^T \underline{N} dF \quad ; \quad \underline{M} = \frac{1}{c_L^2} \int_F \underline{\xi}^T \underline{\xi} dF \quad (4-56)$$

$$\underline{C} = g_L A \int_{\Gamma_{2e}} \underline{\xi}^T \underline{\xi} ds_e \quad ; \quad \underline{r} = i\omega g_L \underline{v} \int_{\Gamma_{1e}} \underline{\xi}^T ds_e \quad (4-57)$$

Der Vorteil der Wahl von natürlichen Koordinaten zeigt sich jetzt bei der Berechnung der obigen Integrale über die Fläche F des Dreiecksbereiches,

bzw. über dessen Ränder, die sich nach den Formeln

$$\int_F \xi_1^l \xi_2^m \xi_3^n dF = 2F \frac{l! m! n!}{(l+m+n+2)!} \quad (4-58)$$

$$\int_{\Gamma} \xi_1^l \xi_2^m d\Gamma = L_{\Gamma} \frac{l! m!}{(l+m+1)!} ; L = \text{Länge einer Dreiecksseite} \quad (4-59)$$

berechnen lassen [19]. Die Matrizen \underline{K} und \underline{M} ergeben sich dann explizit zu

$$\underline{K} = \frac{1}{4F} \begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 & a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_1 a_3 + b_1 b_3 \\ \text{symm.} & a_2^2 + b_2^2 & a_2 a_3 + b_2 b_3 \\ & & a_3^2 + b_3^2 \end{vmatrix} \quad (4-60)$$

$$\underline{M} = \frac{F}{12 c_L^2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ \text{symm.} & & 2 \end{vmatrix} , \quad (4-61)$$

während sich die Matrix \underline{C} und der Vektor \underline{r} wieder additiv aus den einzelnen Integrationen über die drei Elementränder zusammensetzen. Mit der Vorzeichendefinition laut Abb. 4.1.2-4 für positive Randgrößen A und v folgt

$$\begin{aligned} \underline{C} &= \underline{C}_I + \underline{C}_{II} + \underline{C}_{III} \\ &= \frac{1}{6} g_L L_I A_I \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{6} g_L L_{II} A_{II} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{6} g_L L_{III} A_{III} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (4-62)$$

$$\underline{r} = \underline{r}_I + \underline{r}_{II} + \underline{r}_{III}$$

$$= -\frac{1}{2} i \omega g_L L_I v_I \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} i \omega g_L L_{II} v_{II} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} +$$

$$- \frac{1}{2} i \omega g_L L_{III} v_{III} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (4-63)$$

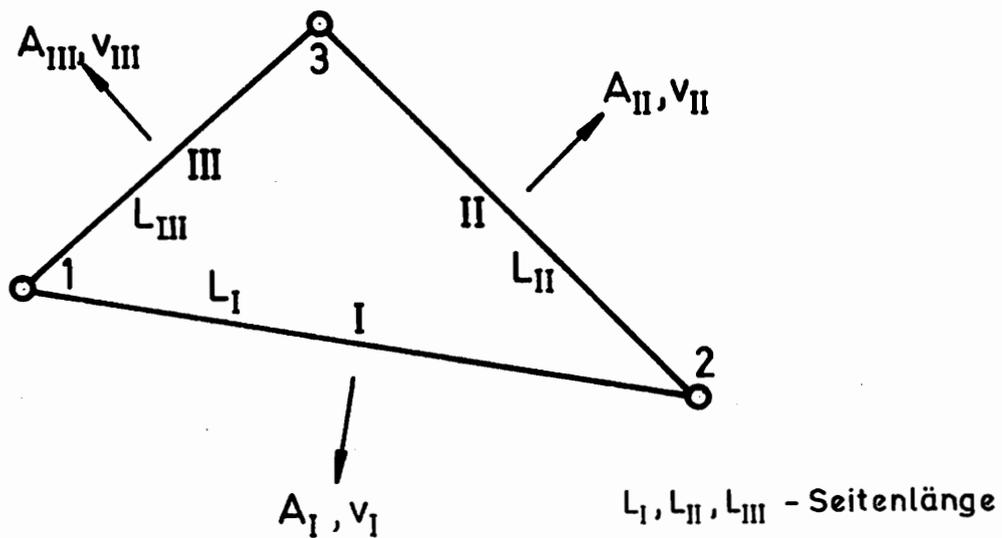


Abb. 4.1.2-4 Dreieckelement mit Definition der positiven Randgrößen A. und v

4.1.3 Beispielrechnungen

Aus der Vielzahl der akustisch interessanten Anwendungsfälle für die im vorangehenden beschriebene Methode sei hier die Berechnung des Schallfeldes eines Raumes in einem Schnitt, wie in Abb. 4.1.3-1 gezeigt. Die Schallanregung geschieht über die untere Schmalseite des Raumes. Gesucht ist die durch die Raumgeometrie und die Anregung bestimmte stationäre Schalldruckverteilung im Raum bei sonst allseitig akustisch harter Berandung, sowie die Änderungen des Schallfeldes, wenn einzelne Wände mit schallabsorbierenden Stoffen verkleidet sind.

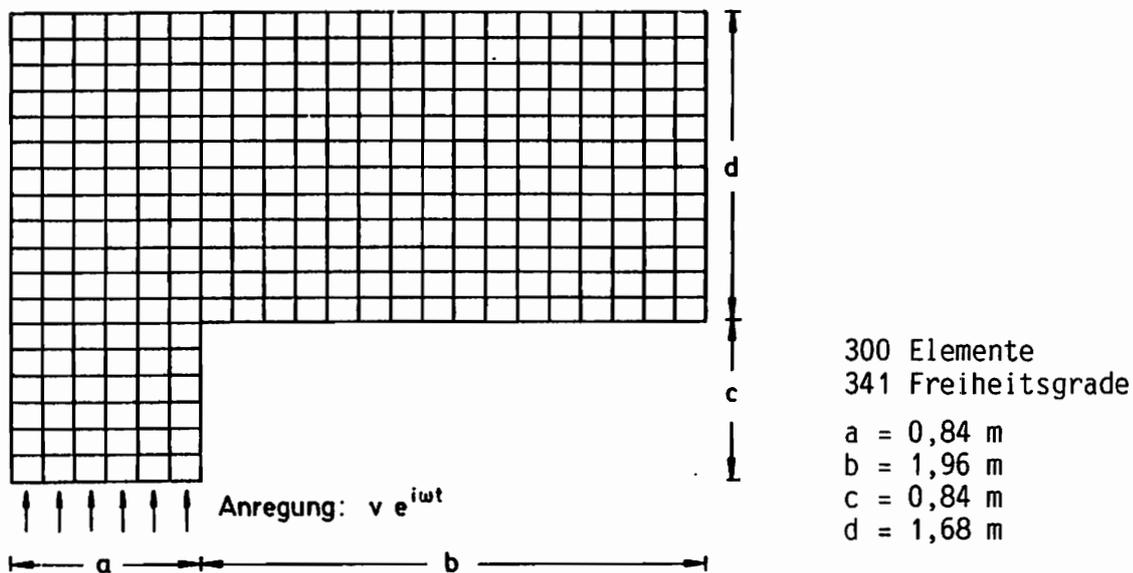


Abb. 4.1.3-1 Raumgeometrie und Netzeinteilung des Finite-Elemente-Modells (L-System)

Der Verlauf der Isobaren im Gebiet ist in Abb. 4.1.3-2 gezeigt. Die Absolutbeträge des Schalldrucks in allen Bildern sind auf den betragsmaximalen Schalldruck des ungedämpften Systems normiert. Dieser ist im ersten Bild mit "10" angegeben, was einem Schalldruckpegel von 79 dB entspricht. Eine Halbierung des Schalldrucks ist gleichbedeutend mit einer Pegelabnahme von 6 dB.

Die komplexe Wandadmittanz A zur Beschreibung des lokalen Absorptionsverhaltens ist in den Bildern 4.1.3-2b/c/d längs der durch einen Strich gekennzeichneten Ränder stets gleich groß. Zu ihrer Berechnung im Falle, daß

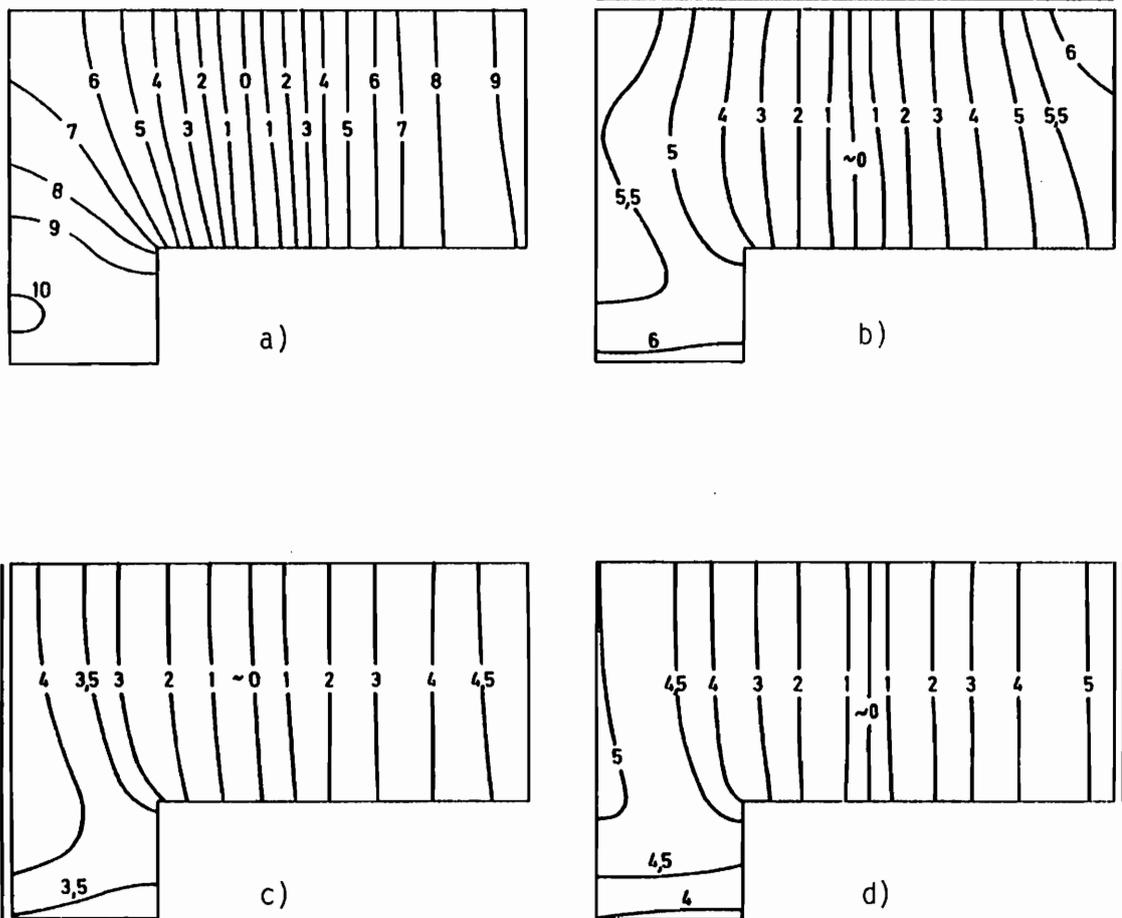


Abb. 4.1.3-2 Verläufe der Isobaren im Gebiet bei
a) akustisch harter Berandung
b,c,d) Vorgabe einer komplexen Wandadmittanz
auf verschiedenen Rändern

sie eine Schicht porösen Stoffes repräsentiert, sei auf Gl.(4-100) in Kapitel 4.3.1 verwiesen. Sie ist gleich dem Kehrwert der dort angegebenen Eingangs-impedanz Z_G .

Der Vergleich der Bilder zeigt, daß die Dämpfung auf dem linken Rand im Mittel die geringsten Schalldrücke im System liefert. Das in diesem Sinne nächste beste Ergebnis wird erstaunlicherweise durch die Dämpfung auf dem rechten schmalen Rand erzielt, noch vor der Dämpfung auf dem oberen Rand, obwohl im letzten Fall der mit Dämmmaterial verkleidete Wandbereich etwa doppelt so groß ist.

Über die integralen Aussagen hinaus ermöglichen die Isobarenbilder vor allem auch das rasche Auffinden lauter und leiser Bereiche im Gebiet, so daß durch Änderungen der Randbedingungen oder sogar der Geometrie des Gebietes eine gezielte Einflußnahme auf die Lautstärke an bestimmten Punkten möglich wird. Dies ist besonders dann von Interesse, wenn - wie im Innenraum eines Kraftfahrzeugs - das menschliche Ohr als Schallempfänger an eine feste lokale Position gebunden ist.

In der vorliegenden Beispielrechnung für das L-förmige Gebiet liegt die Anregungsfrequenz $\omega = 314 \text{ 1/s} = 50 \text{ Hz}$ zwischen der zweiten und dritten Eigenfrequenz des Systems; siehe Tab. 4.1.3-1 .

Nr.	$\omega [\text{s}^{-1}]$	Nr.	$\omega [\text{s}^{-1}]$
1	0	4	652.7
2	294.6	5	690.6
3	460.2	6	822.1

Tab. 4.1.3-1 Numerisch ermittelte Eigenfrequenzen ω_i eines L-förmigen Gebietes mit den Abmessungen aus Abb. 4.1.3.1-1

Die rechnerisch erzielbaren Verminderungen des Schalldruckpegels durch Randdämpfung gegenüber der akustisch harten Berandung sind hier geringer als in unmittelbarer Nähe einer Eigenfrequenz. In Resonanznähe entartet jedoch die akustisch harte Berandung zu einem praxisfernen Idealfall, und die Änderungen des Schalldruckpegels durch Dämpfung an verschiedenen Rändern lassen sich nur noch untereinander vergleichen.

Weitere Rechnungen mit höherer Anregungsfrequenz bis $\omega = 600 \text{ 1/s}$ zeigten insgesamt, trotz anders verlaufender Isobarenfelder, daß auch hier noch die Dämpfung auf dem linken Systemrand die Effektivste ist. Rechnungen mit noch höheren Frequenzen machen dann eine feinere Netzeinteilung erforderlich und sind mit einem erheblichen Anstieg der Rechenzeiten verbunden.

4.2 Problemgleichungen und Variationsformulierungen für Gebiete mit porösen Stoffen

Die Modellvorstellung poröser Stoffe bezieht sich auf Materialien mit einer zufälligen aber isotropen Verteilung von einzelnen Hohlräumen und untereinander verbundenen Kanälen innerhalb eines als starr anzusehenden Skelettes.

Die lineare Theorie poröser Absorber, die auf einer Verallgemeinerung des sogenannten Rayleigh-Modells beruht, ist in der Literatur ausführlich beschrieben [15,27,29,42] .

Die gegenüber der Schallausbreitung in Luft modifizierten Feldgleichungen für die Verknüpfung von Schalldruck und Schallschnelle ergeben sich mit der Voraussetzung eines harmonischen Zeitgesetzes der Form $e^{i\omega t}$ wieder aus der Anwendung des Newton'schen Grundgesetzes

$$-\text{grad } p = (i\omega g_p + R) \underline{v} \quad (4-64)$$

und der Kontinuitätsbedingung

$$-\text{div } \underline{v} = i\omega \frac{\sigma}{\rho_L c_p^2} p \quad (4-65)$$

Hierin ist

p - der Schalldruck

\underline{v} - die mittlere Schallschnelle

R - der Strömungswiderstand

c_p - die Schallgeschwindigkeit im porösen Stoff

ρ_p - die effektive Dichte im porösen Stoff, die mit der Dichte in Luft über den Strukturfaktor χ entsprechend

$$g_p = \chi g_L \quad \text{mit} \quad 1.5 \leq \chi \leq 5 \quad (4-66)$$

nach [42] gekoppelt ist.

$\sigma = \text{Vol}_{\text{Luft}} / \text{Vol}_{\text{gesamt}}$ - die Porösität.

Durch Elimination der Schallschnelle aus den beiden Feldgleichungen folgt dann als komplexe Helmholtz'Gleichung für poröse Stoffe

$$\Delta p + k_p^2 p = 0 \quad (4-67)$$

mit der komplexen Wellenzahl

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} \sqrt{\sigma} \sqrt{\chi - i \frac{R}{\omega g_L}} \quad (4-67.1)$$

Gesucht wird in Analogie zu Kapitel 4.1 jetzt die Lösung von Gl.(4-67) für ein ebenes Gebiet Ω mit der Randkurve $\Gamma(s)$, bestehend aus den Teilrandbereichen Γ_1 und Γ_2 .

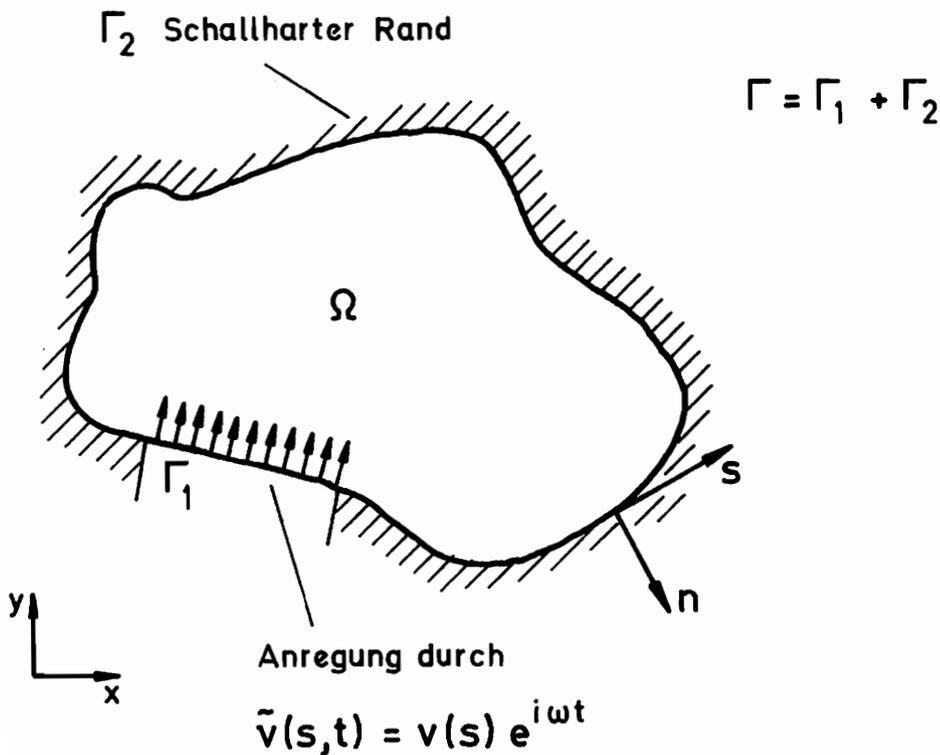


Abb. 4.2-1 Gebiet Ω (poröser Stoff) mit Randkurve $\Gamma(s)$

Die Formulierung der Randbedingungen erfolgt nach Gl.(4-64), und es gilt

$$\text{auf } \Gamma_1 : \frac{\partial p}{\partial n} = -(i\omega g_P + R) v \quad (4-68)$$

$$\text{auf } \Gamma_2 : \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad . \quad (4-69)$$

Ein auf denselben Überlegungen wie in Kapitel 4.1 beruhendes Variationsprinzip erfordert auch hier die Trennung in Real- und Imaginärteil. So wird mit der Vereinbarung von

$$\begin{aligned} k_P^2 &= \frac{\omega^2}{c_P^2} \sigma \chi - i \frac{\omega^2}{c_P^2} \frac{R \sigma}{\omega g_L} \\ &= \frac{\omega^2}{c_L^2} \sigma \chi \left(\frac{c_L}{c_P} \right)^2 - i \frac{\omega}{c_L} \frac{R \sigma}{g_L c_L} \left(\frac{c_L}{c_P} \right)^2 \\ &= k^2 \sigma \chi \lambda_c^2 - i k \frac{R \sigma}{g_L c_L} \lambda_c^2 \\ &= -\psi_r + i(-\psi_i) = -\psi \end{aligned} \quad (4-70)$$

aus der Helmholtz-Gleichung (4-67)

$$\Delta p_r - \psi_r p_r + \psi_i p_i = 0 ; \quad \Delta p_i - \psi_i p_r - \psi_r p_i = 0 \quad , \quad (4-71)$$

sowie den Randbedingungen

$$\text{auf } \Gamma_1 : \frac{\partial p_r}{\partial n} = -R v_r + \omega g_P v_i ; \quad \frac{\partial p_i}{\partial n} = -\omega g_P v_r - R v_i \quad (4-72)$$

$$\text{auf } \Gamma_2 : \frac{\partial p_r}{\partial n} = \frac{\partial p_i}{\partial n} = 0 \quad . \quad (4-73)$$

Für das hinzuzunehmende adjungierte System mit negativer Dämpfung gilt, wenn dort wieder q der Schalldruck und u die Schallschnelle ist

$$\Delta q_r - \psi_r q_r - \psi_i q_i = 0 ; \quad \Delta q_i + \psi_i q_r - \psi_r q_i = 0 \quad (4-74)$$

sowie

$$\text{auf } \Gamma_1 : \frac{\partial q_r}{\partial n} = R u_r + \omega g_p u_i ; \quad \frac{\partial q_i}{\partial n} = -\omega g_p u_r + R u_i \quad (4-75)$$

$$\text{auf } \Gamma_2 : \frac{\partial q_r}{\partial n} = \frac{\partial q_i}{\partial n} = 0 \quad (4-76)$$

Das zugehörige Variationsproblem lautet dann

$$\begin{aligned} I = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial p_r}{\partial x} \frac{\partial q_r}{\partial x} + \frac{\partial p_r}{\partial y} \frac{\partial q_r}{\partial y} + \frac{\partial p_i}{\partial x} \frac{\partial q_i}{\partial x} + \frac{\partial p_i}{\partial y} \frac{\partial q_i}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \psi_r (p_r q_r + p_i q_i) + \psi_i (p_r q_i - p_i q_r) \right\} d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_1} \left\{ (-R u_r - \omega g_p u_i) p_r + (\omega g_p u_r - R u_i) p_i + \right. \\ & \left. + (R v_r - \omega g_p v_i) q_r + (\omega g_p v_r + R v_i) q_i \right\} ds = \min. \quad (4-77) \end{aligned}$$

Zur formalen Überführung dieser Variationsaufgabe in die Differentialgleichungen mit Randbedingungen siehe Anhang A1 .

Bilden der ersten Variation von Gl.(4-77) ergibt bei Variieren von q_r

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial p_r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_r) + \frac{\partial p_r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta q_r) + (\psi_r p_r - \psi_i p_i) \delta q_r \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_1} (R v_r - \omega g_p v_i) \delta q_r ds = 0 \quad (4-78)$$

und bei Variieren von q_i

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial p_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_i) + \frac{\partial p_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta q_i) + (\psi_r p_i + \psi_i p_r) \delta q_i \right\} d\Omega + \int_{\Gamma_1} (\omega g_p v_r + R v_i) \delta q_i ds = 0 \quad (4-79)$$

Mit Einsetzen der Ansatzfunktionen (4-20) unter Berücksichtigung von Gl. (4-21) wird hieraus für einen Elementbereich

$$\int_{\Omega_e} \left\{ \underline{\delta q}_r^T \underline{G}^T \underline{H}^T \underline{H} \underline{G} \underline{p}_r + \underline{\delta q}_r^T (\underline{\psi}_r \underline{G}^T \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} \underline{G} \underline{p}_r - \underline{\psi}_i \underline{G}^T \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} \underline{G} \underline{p}_i) \right\} d\Omega_e + \int_{\Gamma_{e1}} \underline{\delta q}_r^T \underline{G}^T \underline{\varphi}^T (R v_r - \omega g_p v_i) ds_e = 0 \quad (4-80)$$

sowie

$$\int_{\Omega_e} \left\{ \underline{\delta q}_i^T \underline{G}^T \underline{H}^T \underline{H} \underline{G} \underline{p}_i + \underline{\delta q}_i^T (\underline{\psi}_r \underline{G}^T \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} \underline{G} \underline{p}_i + \underline{\psi}_i \underline{G}^T \underline{\varphi}^T \underline{\varphi} \underline{G} \underline{p}_r) \right\} d\Omega_e + \int_{\Gamma_{e1}} \underline{\delta q}_i^T \underline{G}^T \underline{\varphi}^T (\omega g_p v_r + R v_i) ds_e = 0 \quad (4-81)$$

und ergibt nach Ausklammern von $\underline{\delta q}_r^T$ bzw. $\underline{\delta q}_i^T$ zusammengefaßt das

Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} \underline{K} - \omega^2 \chi \sigma \lambda_c^2 \underline{M} & -\omega \frac{R\sigma}{g_L} \lambda_c^2 \underline{M} \\ \omega \frac{R\sigma}{g_L} \lambda_c^2 \underline{M} & \underline{K} - \omega^2 \chi \sigma \lambda_c^2 \underline{M} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{p}_r \\ \underline{p}_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{r}_r^* \\ \underline{r}_i^* \end{vmatrix} \quad (4-82)$$

oder in komplexer Schreibweise

$$(\underline{K} - \omega^2 \chi \sigma \lambda_c^2 \underline{M} + i\omega \frac{R\sigma}{g_L} \lambda_c^2 \underline{M}) \underline{p} = \underline{P} \underline{p} = \underline{r}^* \quad (4-83)$$

Der Vergleich mit Gl.(4-31) zeigt die formale Verwandtschaft der beiden Gleichungssysteme. Die Steifigkeitsmatrix \underline{K} und Massenmatrix \underline{M} sind hier dieselben wie beim Luftschall und berechnen sich nach Gl.(4-27); der Elementvektor auf der rechten Seite ist hier

$$\begin{aligned} \underline{r}_i^* &= \underline{r}_r^* + i \underline{r}_i^* \\ &= (-R v_r + \omega g_p v_i) \underline{G}^T \int_{\Gamma_{1e}} \underline{\varphi}^T ds_e + i(-\omega g_p v_r - R v_i) \underline{G}^T \int_{\Gamma_{1e}} \underline{\varphi}^T ds_e \\ &= -(i\omega g_p + R) v \underline{G}^T \int_{\Gamma_{1e}} \underline{\varphi}^T ds_e \quad (4-84) \end{aligned}$$

Nach Ableiten von konkreten finiten Elementen kann nun mit dem Gleichungssystem (4-83) die Schalldruckverteilung in einem Gebiet mit porösem Stoff berechnet werden.

4.2.1 Eindimensionale Finite-Elemente-Lösung und Vergleich mit analytischer Lösung

Als Vergleichsmodell sei in Anlehnung an Kapitel 4.1.1 wieder ein Rohr der Länge l betrachtet, das jetzt mit porösem Stoff ausgefüllt ist. Die Schallanregung für die eindimensionale Schallwellenausbreitung geschehe bei x_0 durch Vorgabe einer Randschnelle v_0 ; bei x_1 sei das Rohr schallhart abgeschlossen.

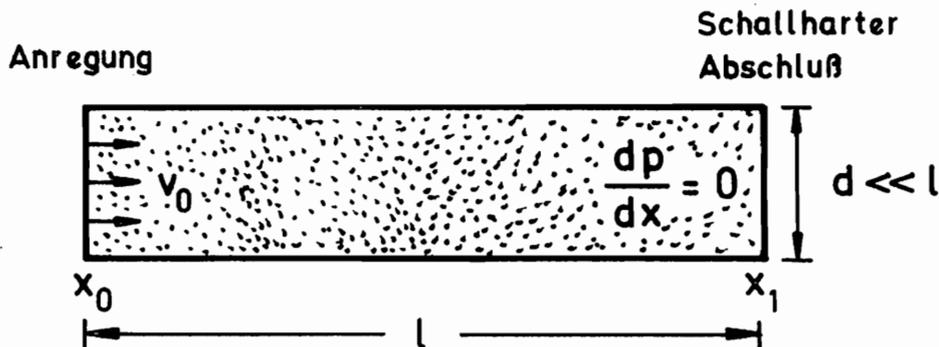


Abb. 4.2.1-1 Eindimensionales Rohrmodell (poröser Stoff)

Das hierzu gehörende eindimensionale Variationsfunktional

$$\begin{aligned}
 I = \int_{x_0}^{x_1} \{ & p_r' q_r' + p_i' q_i' + \psi_r (p_r q_r + p_i q_i) + \psi_i (p_r q_i - p_i q_r) \} dx \\
 & + (R u_{r0} + \omega g_p u_{i0}) p_{r0} + (-\omega g_p u_{r0} + R u_{i0}) p_{i0} \\
 & + (-R v_{r0} + \omega g_p v_{i0}) q_{r0} + (-\omega g_p v_{r0} - R v_{i0}) q_{i0} \longrightarrow \min.
 \end{aligned} \tag{4-85}$$

führt dann nach Variieren von q_r und q_i zu dem Gleichungssystem (4-83). Die Elementmatrizen für ein eindimensionales Schallelement mit linearer Ansatzfunktion - wie in Abb. 4.1.1-2 dargestellt - sind \underline{K} und \underline{M} aus Gl.(4-33) und

$$\underline{r}^* = -(i\omega g_P + R) v_0 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (4-86)$$

Für die analytische Lösung

$$p'' + k_P^2 p = 0 \quad (4-87)$$

mit den Randbedingungen

$$p'(0) = -(i\omega g_P + R) v_0 ; \quad p'(l) = 0 \quad (4-88)$$

führt ein Ansatz gemäß Gl.(4-36) auf den komplexen Schalldruckverlauf

$$p(x) = - \frac{(i\omega g_P + R) v_0}{ik_P(e^{-i2k_P l} - 1)} \left\{ e^{-ik_P x} + e^{-i2k_P l} e^{ik_P x} \right\}. \quad (4-89)$$

Bei der Vergleichsrechnung mit finiten Elementen ist das System aus Abb. 4.2.1-1 in insgesamt 20 gleichlange Elemente des hier vorgestellten Typs mit linearer Ansatzfunktion diskretisiert worden. Das nachfolgende Bild zeigt im Vergleich von analytischer und Finite-Elemente-Lösung die Ortsabhängigkeit des Absolutbetrages des komplexen Schalldruckverlaufes.

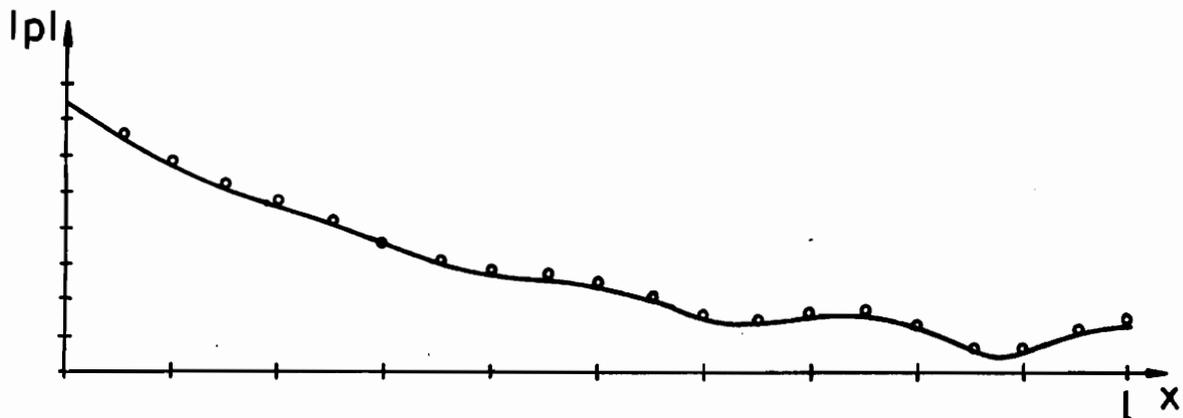


Abb. 4.2.1-2 Schalldruckverlauf im Rohr (poröser Stoff)
 — analytische Lösung
 o o o Finite-Elemente-Lösung

4.2.2 Finite Elemente für zweidimensionale Probleme

Die Herleitung der konkreten Elementmatrizen für einen Rechteck- und einen Dreiecksbereich ist für ein Luftschallgebiet in Kapitel 4.1.2 gezeigt worden. Dieselben dort aufgeführten Steifigkeits- und Massenmatrizen \underline{K} und \underline{M} sind nun auch im Gleichungssystem (4-83) für poröse Stoffe gültig; die Admittanzmatrix \underline{C} entfällt hier, und es verbleibt noch den Vektor \underline{r}^* nachzutragen.

Für den Rechteckbereich - vgl. Abb. 4.1.2-2 - setzt sich auch \underline{r}^* zusammen aus vier Einzelvektoren, die sich jeweils aus der Integration über eine Randseite ergeben

$$\begin{aligned} \underline{r}^* &= \underline{r}_I^* + \underline{r}_{II}^* + \underline{r}_{III}^* + \underline{r}_{IV}^* \\ &= \frac{1}{2} a(i\omega g_P + R) v_I \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} b(i\omega g_P + R) v_{II} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} a(i\omega g_P + R) v_{III} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} b(i\omega g_P + R) v_{IV} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (4-90) \end{aligned}$$

Dementsprechend gilt für den Dreiecksbereich wie in Abb. 4.1.2-4

$$\begin{aligned} \underline{r}^* &= \underline{r}_I^* + \underline{r}_{II}^* + \underline{r}_{III}^* \\ &= -\frac{1}{2} L_I(i\omega g_P + R) v_I \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} L_{II}(i\omega g_P + R) v_{II} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} L_{III}(i\omega g_P + R) v_{III} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (4-91) \end{aligned}$$

4.3 Die Kopplung von Schallfeldern in Luft an Schallfelder in porösem Stoff

Nach der Herleitung der Elementbeziehungen für die Schallwellenausbreitung in porösen Stoffen soll nun die Kopplung von finiten Luftschallelementen an solche für porösen Stoff formuliert werden. Die Überlegungen hierzu sind die gleichen, wie bei der akustisch-mechanischen Kopplung aus Kap. 3, d.h. es ist auf den Grenzflächen der beiden Teilsysteme die Gleichheit sowohl des Schalldruckes p als auch der normalen Schallschnellekomponente v_n zu fordern. Die Formulierung der Kopplung geschieht hier auf Elementebene mit den in den vorangegangenen Abschnitten dieses Kapitels abgeleiteten ein- und zweidimensionalen finiten Elementen.

4.3.1 Eindimensionale Finite-Elemente-Lösung und Vergleich mit analytischer Lösung

Zunächst seien einmal die Gleichungssysteme für einen eindimensionalen Finite-Element-Bereich wie Gl.(4-31, 4-83) aufgeführt. Für das Luftschallelement mit linearer Ansatzfunktion - vgl. Abb. 4.1.1-2 - ergibt sich mit der Berücksichtigung von Randschnellen v auf beiden Randpunkten aus

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{p} = \underline{L} \underline{p} = \underline{r} \quad (4-92)$$

hier

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} = -i\omega g_L \begin{vmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} \quad (4-93)$$

und entsprechend für den porösen Stoff aus

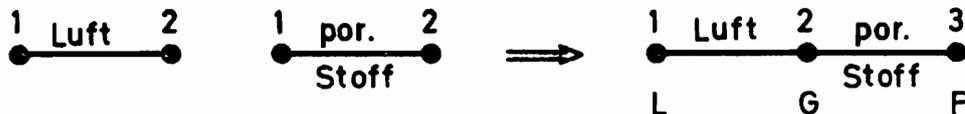
$$(\underline{K} - \omega^2 \chi \sigma \lambda_c^2 \underline{M} + i\omega \frac{R\sigma}{g_L} \lambda_c^2 \underline{M}) \underline{p} = \underline{P} \underline{p} = \underline{r}^* \quad (4-94)$$

hier

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} = -(i\omega g_p + R) \begin{vmatrix} -v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} \quad (4-95)$$

für jeweils ein Element. Randadmittanzen beim Luftschallelement werden jetzt nicht mehr berücksichtigt.

Der Zusammenbau der beiden Elemente zu einem Koppellement gemäß Abb. 4.3.1-1



Neue Indizes: L - Luft
 G - Grenze
 P - poröser Stoff

Abb. 4.3.1-1 Kopplung eines eindimensionalen finiten Luftschallelementes an ein solches für porösen Stoff

erfolgt nun in der gewohnten Weise durch Überlagerung der an der Kopplung beteiligten Bereiche der Matrizen \underline{L} und \underline{P} , wodurch die Gleichheit des Schalldruckes auf der Grenze gewährleistet wird. Die Gleichheit der Randschnellen auf der Grenze erfordert jedoch eine zusätzliche Manipulation an einem der beiden Gleichungssysteme vor dem Zusammenbau. So wird durch Vormultiplikation der zweiten Zeile von Gl.(4-93) mit dem komplexen Faktor

$$\alpha = \frac{i\omega g_p + R}{i\omega g_L} \quad (4-96)$$

erreicht, daß sich beim Zusammenbau der beiden finiten Elemente die Rand-schnellen v_G auf den rechten Seiten der Gleichungssysteme gerade heraus-heben, womit für ein Koppellement wie in Abb. 4.3.1-1 folgt

$$\begin{vmatrix} L_L & L_{LG} & 0 \\ \alpha L_{GL} & \alpha L_G + P_G & P_{GP} \\ 0 & P_{PG} & P_P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_L \\ p_G \\ p_P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i\omega g_L v_L \\ 0 \\ -(i\omega g_P + R) v_P \end{vmatrix} \quad (4-97)$$

Durch den Anbau weiterer Luftschallelemente links an das Koppellement, sowie weiterer Elemente für porösen Stoff an der rechten Seite ist dann für eine Vergleichsrechnung mit einer analytischen Lösung ein aus 20 finiten Elementen bestehendes System erstellt worden, durch das ein zur Hälfte mit porösem Stoff gefülltes Rohr wie in Abb. 4.3.1-2 dargestellt wird.

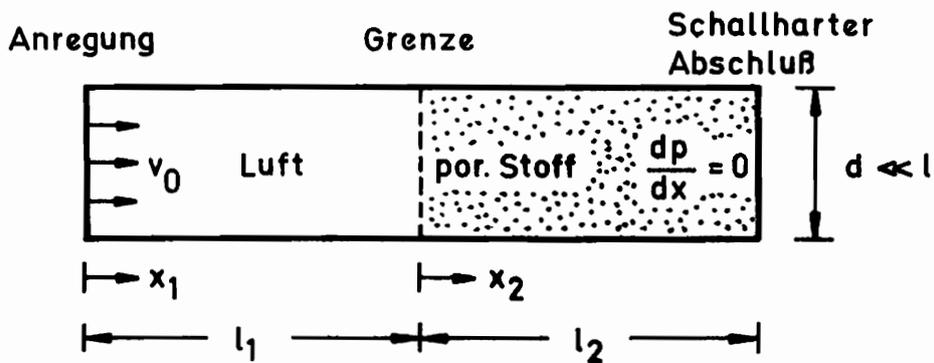


Abb. 4.3.1-2 Rohrmodell, teilweise mit porösem Stoff gefüllt

Die analytische Lösung dieses Problems läßt sich leicht aus der Kombination der schon gezeigten analytischen Lösung für den eindimensionalen Luftschallbereich Gl.(4-37) und der für porösen Stoff Gl.(4-89) unter Beachtung der genannten Koppelbedingungen auf der Grenze der Gebiete erzeugen, und es folgt dann

$$p(x_1) = \frac{g_L c_L v_0}{1 - \frac{Z_G - g_L c_L}{Z_G + g_L c_L} e^{-i2kl_1}} \left\{ e^{-ikx_1} + \frac{Z_G - g_L c_L}{Z_G + g_L c_L} e^{-i2kl_1} e^{ikx_1} \right\} \quad (4-98)$$

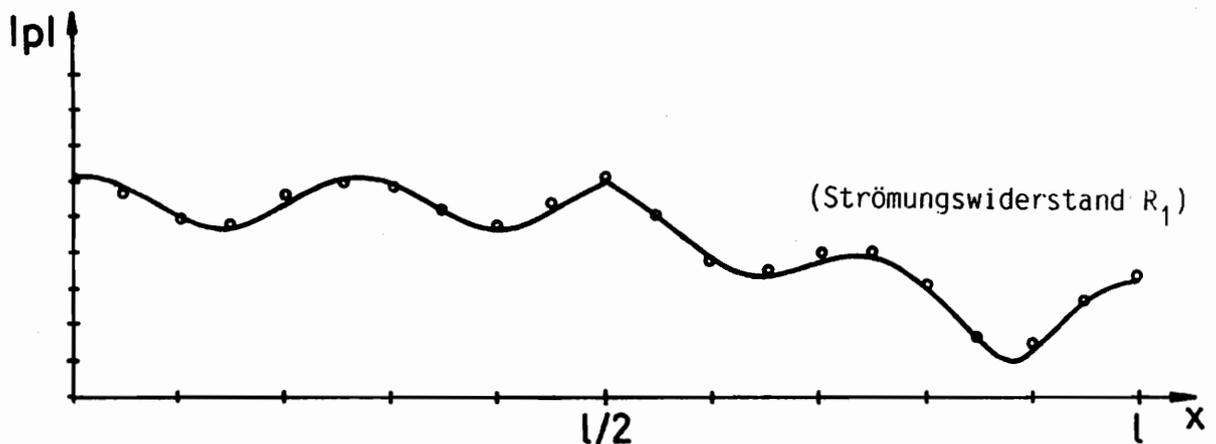
und

$$p(x_2) = \frac{p(x_1 = l_1) e^{ik_P l_2}}{e^{ik_P l_2} + e^{-ik_P l_2}} \left\{ e^{-ik_P x_2} + e^{-i2k_P l_2} e^{ik_P x_2} \right\} \quad (4-99)$$

mit der Eingangsimpedanz für den Bereich des porösen Stoffes

$$Z_G = \frac{\omega g_P - iR}{k_P} \coth(ik_P l_2). \quad (4-100)$$

Die nachfolgenden Bilder zeigen wieder den Vergleich der analytischen mit der Finite-Elemente-Lösung; aufgezeichnet ist der Absolutbetrag des komplexen Schalldruckverlaufes über die Rohrlänge.



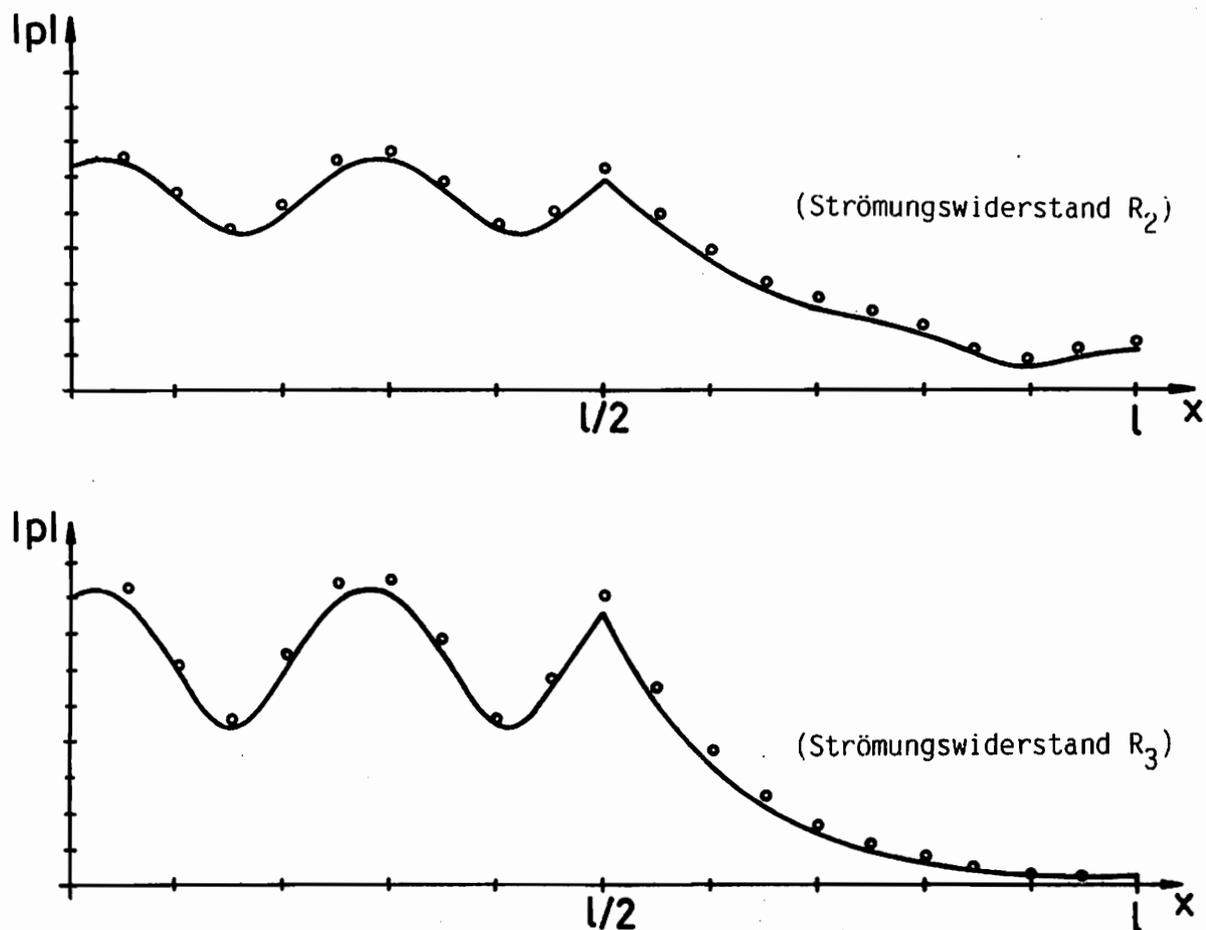


Abb. 4.3.1-3 Schalldruckverlauf im zur Hälfte mit porösem Stoff gefüllten Rohrmodell bei verschiedenen Strömungswiderständen R_i ($R_1 \leq R_2 \leq R_3$)

— analytische Lösung
o o o Finite-Elemente-Lösung

4.3.2 Die Beschreibung im Zweidimensionalen

Bei der Ankopplung zweidimensionaler Schallelemente für Luft und porösen Stoff ergeben sich allein für die aus den vorangegangenen Abschnitten bekannten Rechteckelemente vier verschiedene Verknüpfungsarten.

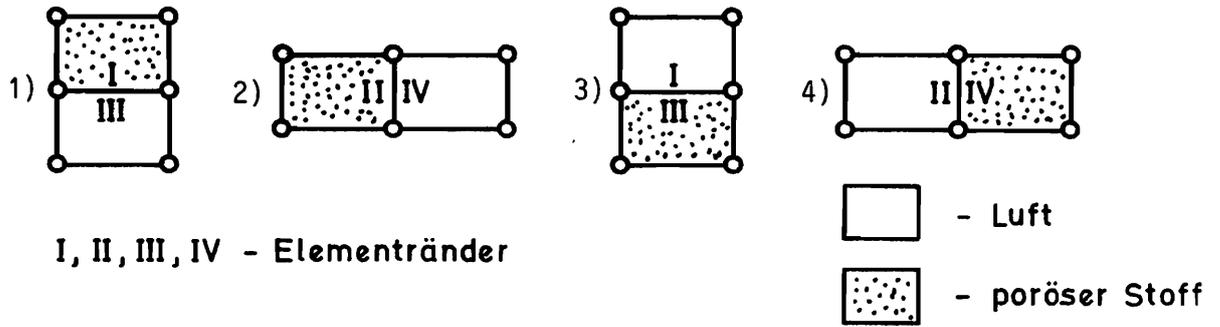


Abb. 4.3.2-1 Verknüpfungsarten von rechteckigen Luftschallelementen mit solchen für porösen Stoff

Am Beispiel der Verknüpfungsart 1) soll nun kurz gezeigt werden, wie sich auch im Zweidimensionalen die Kopplung beim Aufbau der Gesamtmatrizen möglichst einfach realisieren läßt.

Die Elementbeziehungen für das Rechteckelement mit linearer Ansatzfunktion lauten unter Berücksichtigung der Randschnelle auf dem anzukoppelnden Rand gemäß Abb. 4.3.2-2 für den Luftschall

$$\begin{vmatrix} \underline{L}_L & \underline{L}_{LG} \\ \underline{L}_{GL} & \underline{L}_G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{p}_L \\ \underline{p}_G \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} i\omega g_L a v_{III} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (4-101)$$

und für den porösen Stoff

$$\begin{vmatrix} \underline{P}_G & \underline{P}_{GP} \\ \underline{P}_{PG} & \underline{P}_P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{p}_G \\ \underline{p}_P \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (i\omega g_P + R) a v_I \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (4-102)$$

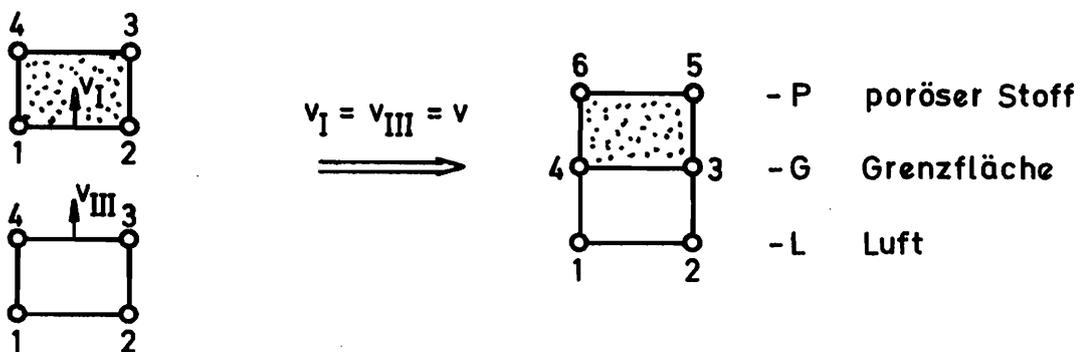


Abb. 4.3.2-2 Beispiel für eine Ankopplung von finiten Luftschallelementen an solche für porösen Stoff

\underline{L} und \underline{P} sind hier partitionierte Untermatrizen der Größe 2×2 ; außerdem sei wegen der Knotennummerierung in Abb. 4.3.2-2 vorausgesetzt, daß in Gl.(4-102) die erste und zweite Zeile und Spalte schon vertauscht sind. Nach Vormultiplizieren der dritten und vierten Zeile von Gl.(4-101) mit dem komplexen Faktor α aus Gl.(4-96) entsteht beim Zusammenbau der beiden Elemente

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} \underline{L}_L & \underline{L}_{LG} & \underline{0} & \underline{p}_L & \underline{0} & \underline{0} \\ \alpha \underline{L}_{GL} & \alpha \underline{L}_G + \underline{P}_G & \underline{P}_{GP} & \underline{p}_G & 1 & 1 \\ \underline{0} & \underline{P}_{PG} & \underline{P}_P & \underline{p}_P & 0 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|ccc} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{p}_L & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{p}_G & 1 & 1 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{p}_P & 0 & 0 \end{array} \right| \underbrace{\left(-\frac{i\omega g_P + R}{i\omega g_L} i\omega g_L + i\omega g_P + R \right)}_{\alpha} \frac{1}{2} \alpha v$$

$$= \underline{0} . \quad (4-103)$$

Beim Zusammenbau eines kompletten Koppelsystems mit einer Schallanregung auf dem Rand des Luftschallbereiches - siehe Abb. 4.3.3 - 1 - bleibt natürlich der Vektor auf der rechten Seite an den Anregungspunkten mit den entsprechenden Schnelletermen ungleich Null besetzt. An Koppelpunkten sorgt jedoch die Vormultiplikation der Luftschalluntermatrizen wie in Gl.(4-103) für Nullen im Vektor der rechten Seite, d.h. für die gegenseitige Kompensation der Randschnellen auf der Grenzlinie.

Beim Betrachten der Elementvektoren \underline{r} und \underline{r}^* , sowohl für das Rechteckelement Gl.(4-45 u. 4-90), wie auch für das Dreieckelement Gl.(4-63 u. 4-91) fällt auf, daß wegen des gleichartigen Aufbaus der Vektoren jede mögliche Verknüpfungsart nach dem oben gezeigten Schema abläuft. Dies gilt auch für die Verknüpfung von Rechteck- und Dreieckelementen des hier vorgestellten Typs untereinander, wenn die spezifischen Vorzeichenregelungen für die Randschnellen beachtet werden.

Für die rechentechnische Realisierung im Finite-Elemente-Programm erweist es sich als günstig, noch einen Schritt weiter zu gehen und schon die Elementmatrizen- und vektoren des Luftschalls mit dem komplexen Faktor α vorzumultiplizieren. Dies läuft darauf hinaus, daß zwar einige Zeilen des Gleichungssystems überflüssigerweise mit α multipliziert sind, hat aber den entscheidenden Vorteil, daß die Kopplung auf den Grenzen Luft - poröser Stoff automatisch gesichert ist.

4.3.3 Beispielrechnungen

In einem ersten Rechenbeispiel soll wieder das L-förmige System aus Kapitel 4.1.3 betrachtet werden, auf das auch in späteren Rechnungen noch einmal Bezug genommen wird. Die geometrischen Abmessungen und die Art der Anregung bleiben unverändert und entsprechen den Angaben in Abb. 4.1.3-1 .

Zur Beurteilung des Effektes der seitlichen Kopplung im Absorptionsstoff werden nun bei der Bedämpfung des oberen, linken und rechten Randes des Systems jeweils zwei Modelle gegenübergestellt: Die Darstellung des porösen Stoffes durch drei Schichten entsprechender finiter Elemente längs des betreffenden Randes, und die Darstellung als lokaler Absorber mit der nach Gl.(4-104) aus den Daten des porösen Stoffes berechneten komplexen Wandadmittanz A . Dabei ist $R = 0,1 \text{ g}/(\text{mm}^3 \text{ s})$; $\rho_p = 6 \cdot 10^{-6} \text{ g}/\text{mm}^3$; $c_p = 2,8 \cdot 10^5 \text{ mm}/\text{s}$; $\chi = 5$; $d = 120 \text{ mm}$; $\sigma = 1$ und $\omega = 314 \text{ s}^{-1}$, womit sich eine Admittanz von

$$A = \frac{k_p}{\omega g_p - iR} \tanh(i k_p d) = (0,121 + i \cdot 0,119) \text{ mm s}^2/\text{g} \quad (4-104)$$

ergibt.

In Abb. 4.3.3-1 sind die Rechenergebnisse für die verschiedenen Dämpfungsmodelle gegenübergestellt. Als Bezugsdruck ist wieder der betragsmaximale Schalldruck des akustisch harten Systems gewählt - siehe Abb. 4.1.3-2a .

Der Vergleich der nebeneinander stehenden Bilder zeigt insgesamt nur geringe Unterschiede zwischen dem lokalen Absorptionsmodell und dem, die seitliche Kopplung im porösen Stoff mitberücksichtigenden Modell. Die maximale relative Abweichung zwischen den Modellen ist in allen drei Vergleichsrechnungen kleiner als 6% . Dabei liefert das lokale Absorptionsmodell stets den höheren Schalldruck im Gebiet und liegt also, wenn es um die Beurteilung von Lärm-minderungsmaßnahmen geht, auf der sicheren Seite.

Im porösen Stoff selbst fällt der Schalldruck bis zur rückwärtigen harten

Wand exponentiell auf etwa die Hälfte des Wertes an der Grenzfläche Luft - poröser Stoff ab. Testrechnungen mit einer feineren Elemententeilung der Absorptionsschicht in Wandnormalenrichtung brachten weder im porösen Stoff noch im Luftschallgebiet verbesserte Ergebnisse.

Unter Berücksichtigung des zusätzlichen numerischen Mehraufwandes für die Berechnung des Schallfeldes im porösen Stoff - im Falle der Dämpfung an der oberen Wand 410 statt 341 Freiheitsgrade - lassen sich im vorliegenden Beispiel die Abweichungen des lokalen Absorptionsmodells in Kauf nehmen. Die Frage, unter welchen Umständen das lokale Absorptionsmodell versagt, hat D. B. Bliss in einer Untersuchung [6] zu klären versucht, in der er unter anderem eine Reihe von Messungen in einem langen schmalen Kasten durchführte, der an einer Längsseite mit porösem Stoff verkleidet ist; siehe Abb. 4.3.3-2.

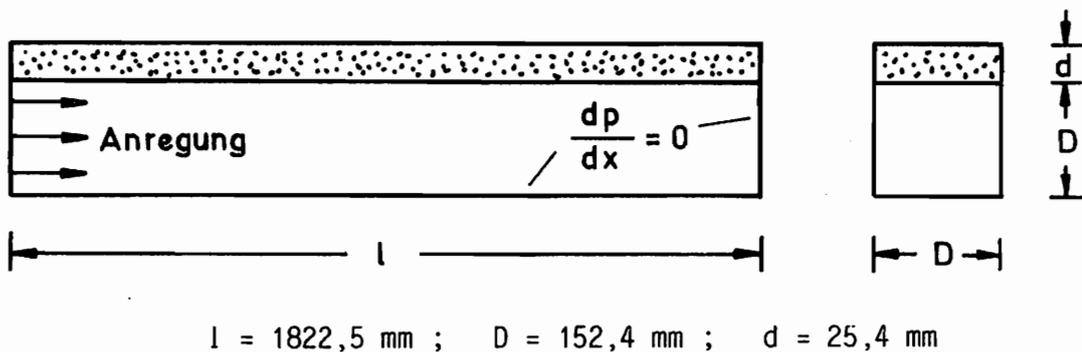


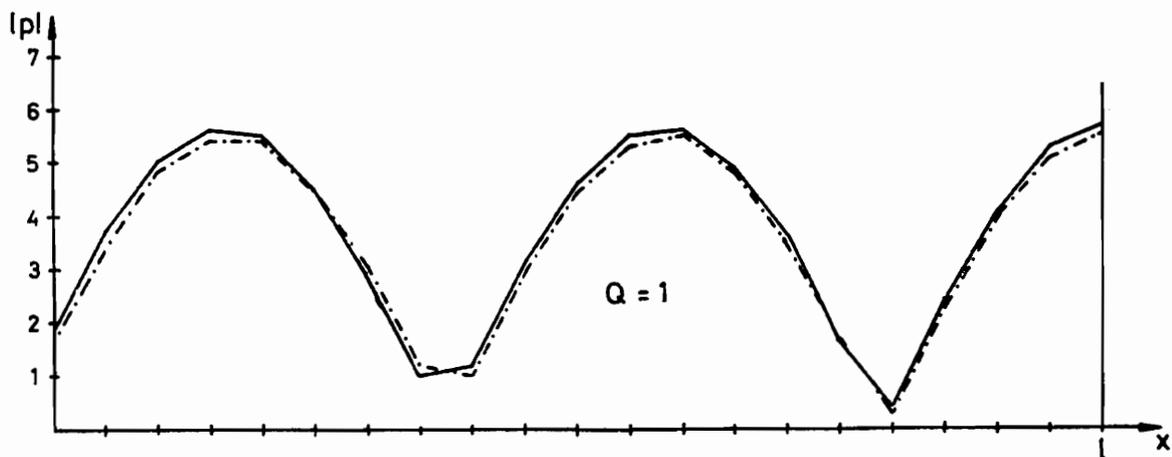
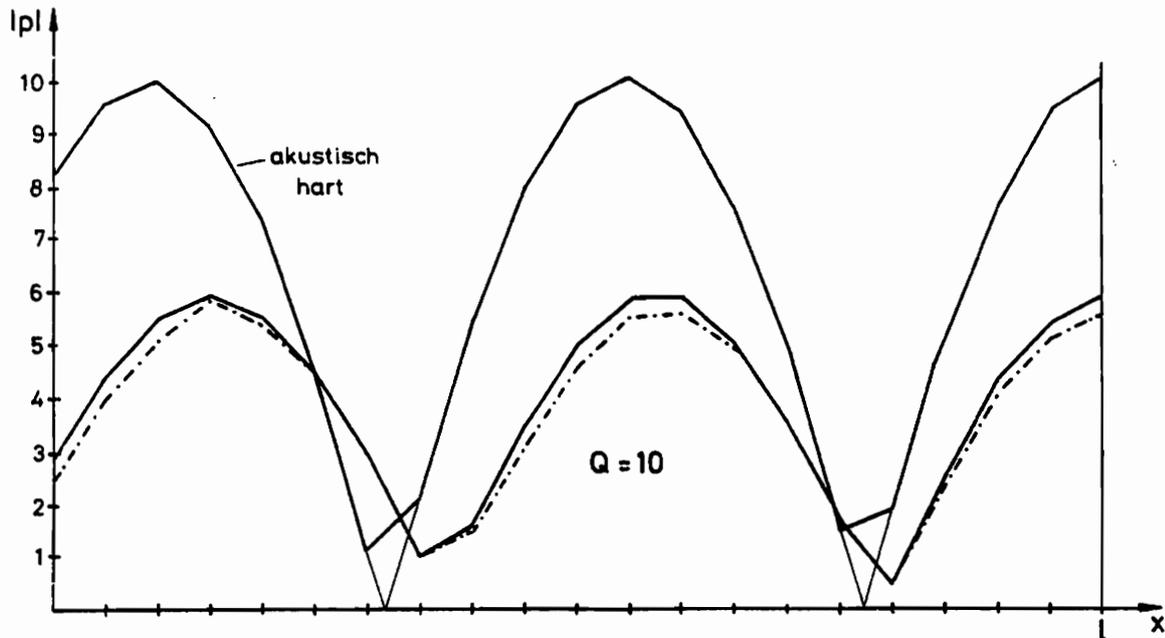
Abb. 4.3.3-2 Schematische Darstellung von Bliss' Meßraum zur Untersuchung des Effektes der seitlichen Kopplung in porösem Stoff

Nach Aussage von Bliss ist das lokale Absorptionsmodell zur Beschreibung der Wanddämpfung dann ungeeignet, wenn der dimensionslose Quotient

$$Q = \frac{R d}{\rho_p c_p} < 1 \quad (4-105)$$

ist. Dies exemplarisch zu überprüfen bietet sich hier an, wobei die Abweichung der Modelle voneinander auch quantitativ beurteilt werden kann. Für die Finite-Elemente-Rechnungen ist der Meßraum als ebenes System betrachtet worden, mit einer Diskretisierung von 20 Elementen in Längsrichtung und 3 Elementen (5 bei porösem Stoff) in Querrichtung. Die Frequenz der Anregung liegt mit $f = 200$ Hz weit unterhalb derjenigen Eigenfrequenz des ungedämpften Systems, bei der die ersten Eigenformen in Querrichtung auftreten. Der Wert von $\rho_p c_p = 0,428$ g/(mm³s) ist aus Bliss' Versuchen übernommen, so daß bei fester Schichtdicke d der Quotient Q allein durch Variieren des Strömungswiderstandes R verändert wurde.

Die nachfolgenden Bilder zeigen den Verlauf der Stehwellen in Längsrichtung des Systems für $Q = 10$, 1, 0.1 und 0.05, sowie zum Vergleich das



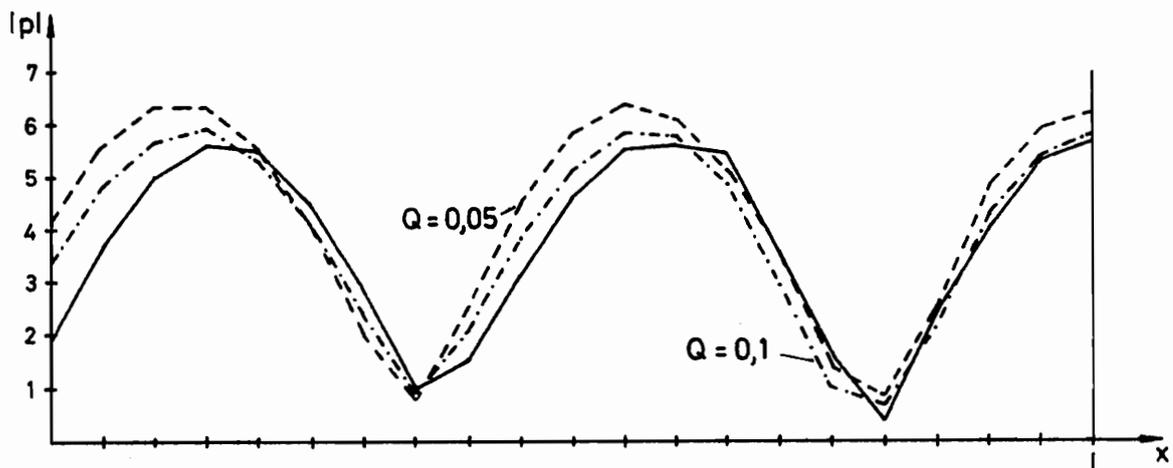


Abb. 4.3.3-3 Stehwellen im System bei verschiedenen Quotienten Q .
Vergleich der Absorptionsmodelle

Ergebnis für den akustisch harten Fall. Die durchgezogenen Linien entstammen der Rechnung mit dem lokalen Absorptionsmodell; die unterbrochenen Linien der des Modells mit porösem Stoff.

Der Vergleich der Finite-Elemente-Rechnungen zeigt für das vorliegende Beispiel eine Bestätigung des Kriteriums von Bliss. Die Abweichungen der Schalldruckwerte betragen für $Q \geq 1$ maximal 5%, wachsen dann aber besonders für $Q \leq 0,1$ stark an. Auffällig ist, daß für $Q < 1$ das lokale Absorptionsmodell auf eine weitere Verringerung des Strömungswiderstandes R praktisch nicht mehr reagiert und dadurch auch zu geringe maximale Schalldruckwerte liefert, während sich die Vergleichsrechnung mit porösem Stoff wieder auf das Ergebnis der akustisch harten Berandung zubewegt. Letzteres ist auch gut erkennbar an der örtlichen Verschiebung der maximalen Schalldruckwerte zur Anregungsseite hin.

Weitere Testrechnungen mit einer Variation der Schichtdicke d bei festgehaltenem R im Rahmen $0,05 \leq Q \leq 10$ brachten in der Tendenz die gleichen Ergebnisse und bestätigen somit die Schwäche des lokalen Absorptionsmodells bei dünnen Schichten porösen Stoffes und / oder solchen mit sehr kleinem Strömungswiderstand. Es sei hier noch angemerkt, daß sich bei der vorangehenden vergleichenden Berechnung des L-Systems ein Quotient von $Q = 7,14$ ergibt, der auf die dort bestätigte Verwendbarkeit des lokalen Absorptionsmodells hinweist.

5. Die Berechnung geschlossener und offener Gebiete

Während sich die bisherigen Berechnungen auf rein raumakustische Aufgabenstellungen beschränkten, sollen jetzt Probleme der Freifeldabstrahlung mit in die Betrachtungen einbezogen werden. Die Problemstellungen aus der Praxis sind vielfältiger Art; man denke an Räume, die eine Öffnung ins Freie besitzen, an die Schallabstrahlung von der Oberfläche schwingender Maschinenbauteile, an Lautsprecher oder an Schallschutzwände entlang Verkehrsstraßen etc.

Die zu betrachtenden Schallfelder sind nun im Unterschied zu den Annahmen in den vorangegangenen Kapiteln unendlich groß und können daher ohne Abbruch der Diskretisierung mit finiten Gebietsverfahren nicht berechnet werden. Hier entsteht das Problem, den mit dem Diskretisierungsabbruch auftretenden Fehler in Relation zu dem numerischen Aufwand möglichst gering zu halten.

Im folgenden wird zunächst eine Möglichkeit zur Berechnung der Freifeldabstrahlung mit finiten Elementen gezeigt. Der mit der Freifelddiskretisierung verbundene hohe numerische Aufwand hat in der chronologischen Entstehung dieser Arbeit zur Beschäftigung mit der Methode der Boundary-Elemente als alternatives Rechenverfahren zu den finiten Elementen geführt.

In Kap. 5.2 wird daher die Boundary-Elemente-Methode aufbereitet zur Lösung der Helmholtz-Gleichung in geschlossenen Gebieten unter der Berücksichtigung von Schallanregung und Schallabsorption auf den Rändern. Nach numerischen Beispielrechnungen zu dieser Problemklasse wird der Einsatz der Methode bei der Freifeldabstrahlung gezeigt. Für den Sonderfall der Freifeldabstrahlung von ebenen oder geradlinigen schwingenden Strukturen wird in einem letzten Abschnitt noch die Punktstrahlersynthese als einfaches, aber effizientes Rechenverfahren vorgestellt.

5.1 Eine Darstellung der Abstrahlung ins Freie mit finiten Elementen

Im Zusammenhang mit der akustischen Berechnung von Räumen, die eine Öffnung ins Freie besitzen, kann sowohl die Auswirkung der Öffnung auf die Akustik des Innenraumes, wie auch die Schallabstrahlung des Raumes nach außen von Interesse sein.

Wird ein System wie in Abb. 5.1-1a in finite Elemente diskretisiert, taucht sofort die Frage auf, welche Randbedingungen in der Öffnung vorzugeben sind, um den Effekt der Freifeldabstrahlung zu simulieren.

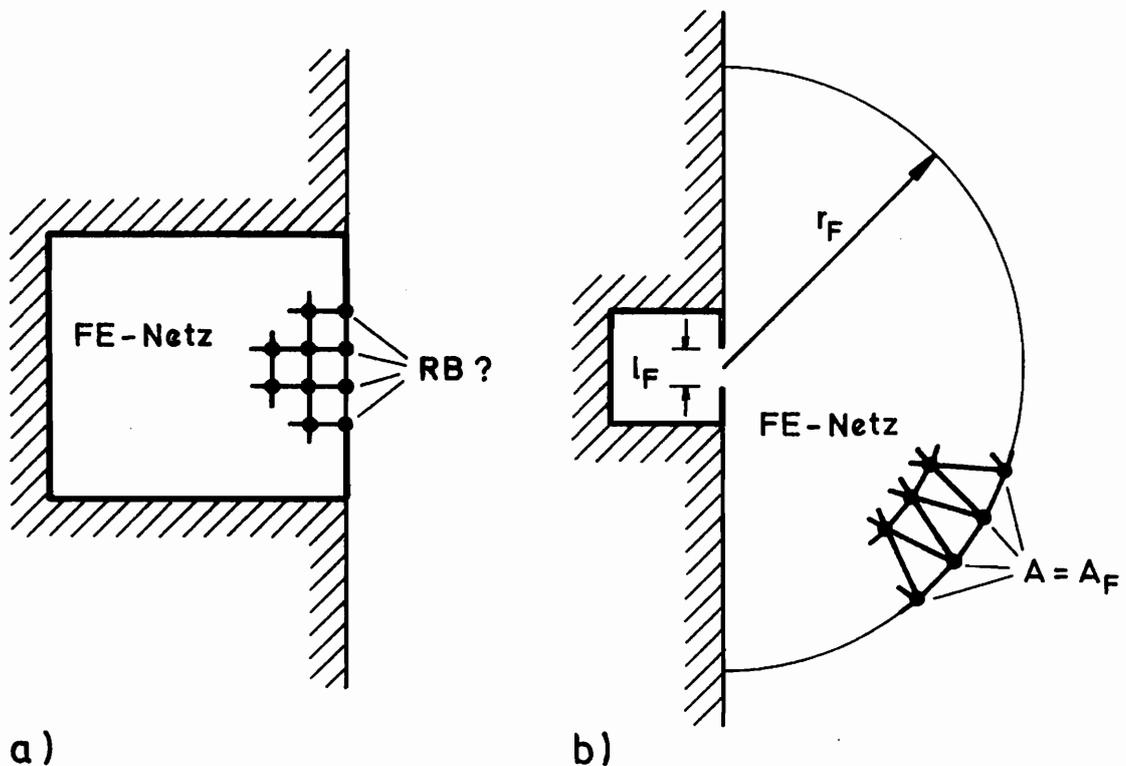


Abb. 5.1-1 a) Raum mit Öffnung ins Freie
b) mögliche Modellbildung mit finiten Elementen

Ungeachtet einiger Sonderfälle bezüglich der Raumgeometrie und der Wellenlänge, in denen vereinfachte Annahmen, wie $p = 0$ (schallweicher Abschluß) oder die Vorgabe von $A = v/p = 1/(\rho_L c_L)$ in der Öffnung eine brauchbare Näherung

darstellen, ist es immer denkbar, einen Teil des Freifeldes mit in die Finite-Elemente-Berechnungen einzubeziehen.

In Abb. 5.1-1b ist eine solche Modellbildung gezeigt. Unter der Voraussetzung, daß der Radius r_F des mit in die Rechnung aufgenommenen Freifeldteils groß gegen die Öffnung l_F des Raumes ist, kann auf dem Halbkreis näherungsweise die Admittanz für sphärische Wellen

$$A_F = \frac{v_F}{p_F} = \left(\frac{1}{\rho_L c_L} - i \frac{1}{\omega \rho_L r_F} \right) \quad (5-1)$$

als Randbedingung angegeben werden.

Zur praktischen Beurteilung dieser Vorgehensweise ist die Schallabstrahlung eines Kolbenstrahlers in einer Wand mit finiten Elementen berechnet worden. Abb. 5.1-2 zeigt das System mit dem Finite-Elemente-Netz im Zweidimensionalen.

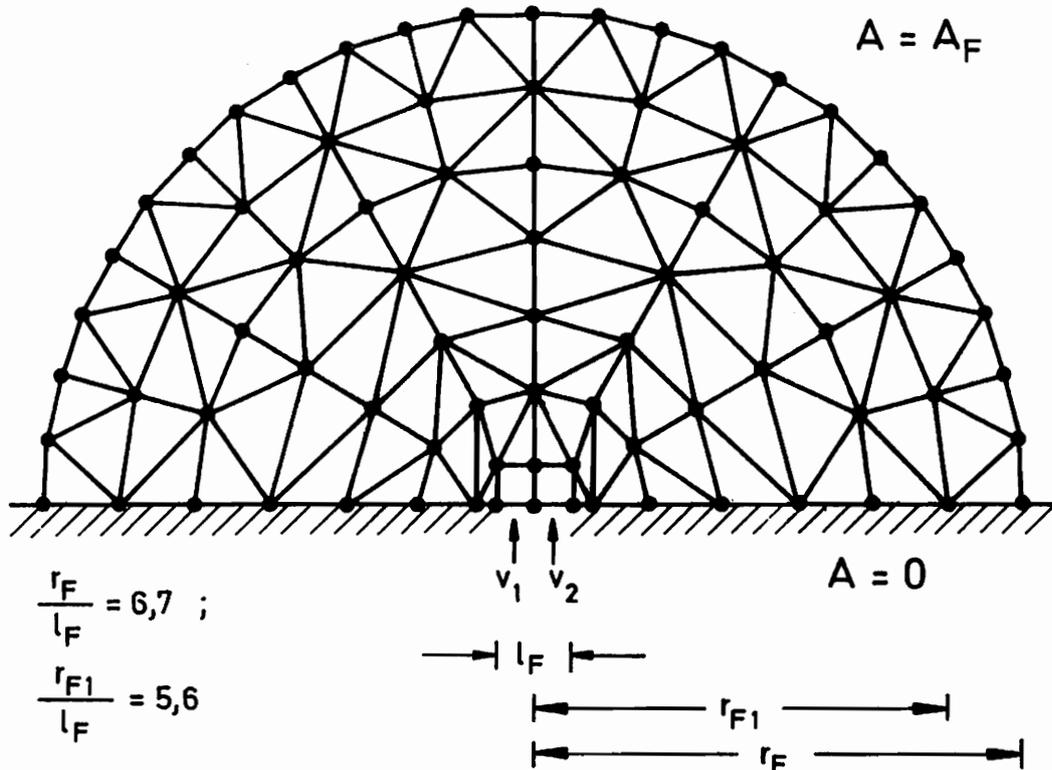


Abb. 5.1-2 Netzeinteilung für die Berechnung der Schallabstrahlung ins Freie

Als Matrizen Gleichungssystem ergibt sich dann nach Kapitel 4.1

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M} + i \omega \underline{C}) \underline{p} = \underline{r}, \quad (5-2)$$

wobei die komplexe Dämpfungsmatrix \underline{C} an denjenigen Plätzen besetzt ist, die zu den Knotenpunkten auf dem Halbkreis gehören. Der Vektor \underline{r} enthält die Schallschnellen in der Wandöffnung. In Abb. 5.1-3 sind nun die Richtcharakteristiken der Schallabstrahlung aufgezeichnet. Der linke Teil des Bildes gehört zu einem Kolbenstrahler ($v_1 = v_2$), der rechte zu einem Dipolstrahler ($v_1 = -v_2$). Die durchgezogene Linie kann als Referenzgröße gelten; sie wurde mit Hilfe der sehr genau arbeitenden Punktstrahlersynthese berechnet, auf die in Kapitel 5.3 noch kurz eingegangen wird.

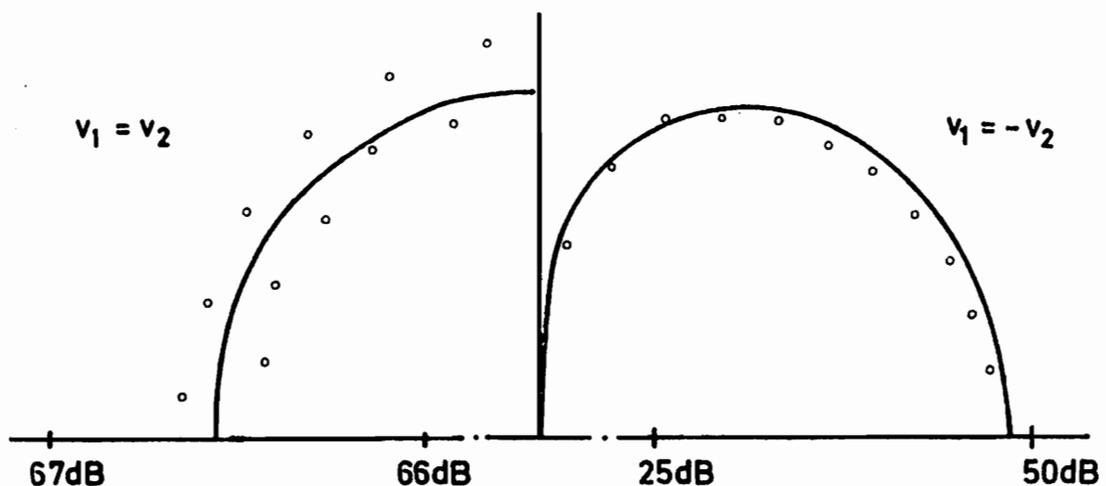


Abb. 5.1-3 Richtcharakteristika der Schallabstrahlung

Die eingezeichneten Kreise entstammen der Finite-Elemente-Rechnung und zeigen befriedigende Genauigkeit, die allerdings mit einem unverhältnismäßig hohem Rechenaufwand erkaufte wurde. Eine Verringerung der Anzahl der Unbekannten von 80 auf 53 durch Fortlassen der äußeren Elementschicht führt zu rapider Verschlechterung der Ergebnisse.

Wenn man bedenkt, daß die Freifelddiskretisierung mit finiten Elementen erst zusammen mit einer Diskretisierung des angrenzenden Raumes - siehe Abb. 5.1-1 - die Frage nach der raumakustischen Auswirkung einer Öffnung ins Freie beantwortet, so scheint die Suche nach einem weniger aufwendigen geeigneten Verfahren angebracht zu sein.

5.2 Die Methode der Boundary-Elemente

Einige grundsätzliche Gedanken zur Arbeitsweise der Boundary-Elemente-Methode und zum Vergleich mit der Methode der finiten Elemente sind bereits in Kapitel 2 aufgezeigt. Im folgenden soll die Boundary-Elemente-Methode für die Problemklasse der Schallfelder mit lokaler Randabsorption - vgl. Kapitel 4.1 - als alternatives Rechenverfahren zu den finiten Elementen aufbereitet werden.

5.2.1 Die Herleitung der Randintegralgleichungen zur Lösung der Helmholtz-Gleichung für Gebiete mit Randabsorption

Ausgangspunkt der Betrachtungen sind die zu Abb. 4.1-1 gehörenden Differentialgleichungen (4-8,4-12) mit den Randbedingungen (4-9/10/11, 4-13/14/16), sowie das von Gladwell angegebene zugehörige Variationsfunktional (4-17). Dessen erste Variation läßt sich bei Variieren von q_r - siehe auch Anhang A1 - schreiben als

$$\begin{aligned} \delta I_{q_r} = & - \int_{\Omega} (\Delta p_r + k^2 p_r) \delta q_r d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial p_r}{\partial n} - \omega g_L v_i \right) \delta q_r ds + \\ & + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial p_r}{\partial n} - \omega g_L A_i p_r - \omega g_L A_r p_i \right) \delta q_r ds = 0 \end{aligned} \quad (5-3)$$

und entsprechend bei Variieren von q_i

$$\begin{aligned} \delta I_{q_i} = & - \int_{\Omega} (\Delta p_i + k^2 p_i) \delta q_i \, d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial p_i}{\partial n} + \omega g_L v_r \right) \delta q_i \, ds + \\ & + \int_{\Gamma_2} \left(\frac{\partial p_i}{\partial n} + \omega g_L A_r p_r - \omega g_L A_i p_i \right) \delta q_i \, ds = 0 . \end{aligned} \quad (5-4)$$

Schreibt man nun, wie in Kapitel 2 angedeutet, in der ersten Gleichung für δq_r die Fundamentallösung p_r^* an, so erhält man mit der Vereinbarung, daß auf dem Rand vorgegebene Größen mit einem Querstrich gekennzeichnet sind

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta p_r + k^2 p_r) p_r^* \, d\Omega = & \omega g_L \int_{\Gamma_1} (v_i - \bar{v}_i) p_r^* \, ds + \\ & + \omega g_L \int_{\Gamma_2} \{ (A_i - \bar{A}_i) p_r + (A_r - \bar{A}_r) p_i \} p_r^* \, ds . \end{aligned} \quad (5-5)$$

Das obige Gebietsintegral läßt sich mit Hilfe der Green'schen Formel

$$\int_{\Omega} (p_r^* \Delta p_r - p_r \Delta p_r^*) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(p_r^* \frac{\partial p_r}{\partial n} - p_r \frac{\partial p_r^*}{\partial n} \right) \, d\Gamma \quad (5-6)$$

umformen, und man erhält, wenn $\int_{\Omega} k^2 p_r p_r^* \, d\Omega$ auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens addiert wird

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta p_r + k^2 p_r) p_r^* \, d\Omega = & \int_{\Omega} (\Delta p_r^* + k^2 p_r^*) p_r \, d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma} \left(p_r^* \frac{\partial p_r}{\partial n} - p_r \frac{\partial p_r^*}{\partial n} \right) \, d\Gamma . \end{aligned} \quad (5-7)$$

Nach Aufspaltung des letzten Randintegrals bezüglich der Ränder Γ_1 und Γ_2 und Einsetzen der aktuellen Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} \left(p_r^* \frac{\partial p_r}{\partial n} - p_r \frac{\partial p_r^*}{\partial n} \right) d\Gamma = \\
 & = \int_{\Gamma_1} p_r^* \frac{\partial p_r}{\partial n} ds + \int_{\Gamma_2} p_r^* \frac{\partial p_r}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_1} p_r \frac{\partial p_r^*}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2} p_r \frac{\partial p_r^*}{\partial n} ds = \\
 & = \omega g_L \int_{\Gamma_1} p_r^* v_i ds + \omega g_L \int_{\Gamma_2} p_r^* (A_i p_r + A_r p_i) ds + \\
 & \quad - \omega g_L \int_{\Gamma_1} p_r v_i^* ds - \omega g_L \int_{\Gamma_2} p_r v_i^* ds \tag{5-8}
 \end{aligned}$$

führt Gleichsetzen der rechten Seite aus Gl.(5-5) und Gl.(5-7) auf die Form

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\Delta p_r^* + k^2 p_r^*) p_r d\Omega = \\
 & = -\omega g_L \int_{\Gamma_1} p_r^* \bar{v}_i ds - \omega g_L \int_{\Gamma_2} (\bar{A}_i p_r^* - v_i^*) p_r ds + \\
 & \quad + \omega g_L \int_{\Gamma_1} p_r v_i^* ds + \omega g_L \int_{\Gamma_2} \bar{A}_r p_r^* p_i ds . \tag{5-9}
 \end{aligned}$$

Auf demselben Wege folgt aus Gl.(5-4) durch Schreiben von p_i^* anstelle dann

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\Delta p_i^* + k^2 p_i^*) p_i d\Omega = \\
 & = \omega g_L \int_{\Gamma_1} p_i^* \bar{v}_r ds + \omega g_L \int_{\Gamma_2} (\bar{A}_i p_i^* + v_r^*) p_i ds + \\
 & \quad + \omega g_L \int_{\Gamma_1} p_i v_r^* ds - \omega g_L \int_{\Gamma_2} \bar{A}_r p_i^* p_r ds . \tag{5-10}
 \end{aligned}$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen ist gleich dem Realteil der komplexen Gleichung

$$\int_{\Omega} (\Delta p^* + k^2 p^*) p \, d\Omega = i\omega g_L \int_{\Gamma_1} p^* \bar{v} \, ds - i\omega g_L \int_{\Gamma_1} p v^* \, ds + \\ + i\omega g_L \int_{\Gamma_2} \bar{A} p^* p \, ds - i\omega g_L \int_{\Gamma_2} p v^* \, ds ; \quad (5-11)$$

die entsprechende Vorgehensweise führt auf die Identität der Imaginärteile. Somit ist Gl.(5-11) Ausgangsgleichung für die Boundary-Elemente-Formulierung in komplexer Schreibweise.

Die Fundamentallösung im Zweidimensionalen ist nun

$$p^*(kr) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (5-12)$$

mit der Hankelfunktion 2. Art, 0. Ordnung $H_0^{(2)}(kr)$. Mit ihr ergibt sich die Helmholtz-Gleichung zu einer Dirac-Delta-Funktion im Punkt i für $r = 0$

$$\Delta p^* + k^2 p^* = -\Delta_{(i)} \quad , \quad (5-13)$$

dabei ist der Laplace-Operator in Polarkoordinantion unter Beachtung von Radialsymmetrie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad . \quad (5-14)$$

Das Gebietsintegral in Gl.(5-11) wird dann zu

$$\int_{\Omega} (\Delta p^* + k^2 p^*) p \, d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta_{(i)} p \, d\Omega = -p_{(i)} \quad , \quad (5-15)$$

wenn der Punkt i im Gebiet Ω liegt - siehe Abb. 5.2.1-1 . Mit Hilfe dieser Beziehung werden später die Funktionswerte in Gebietspunkten berechnet.

Vorher müssen jedoch die Funktionswerte und deren Normalenableitung auf dem Gebietsrand bekannt sein. Hierzu wird der Punkt i als Punkt auf dem Rand betrachtet [8], und man erhält Gl.(5-11) in der Form

$$c_{(i)} p_{(i)} + i\omega g_L \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} v^* p \, ds =$$

$$= i\omega g_L \left\{ \int_{\Gamma_1} p^* \bar{v} \, ds + \int_{\Gamma_2} \bar{A} p^* p \, ds \right\} \quad (5-16)$$

Der Faktor $c_{(i)}$ ist abhängig vom Verlauf des Randes im Punkt i ; es ist [36]

für den glatten Randverlauf: $c_{(i)} = -\frac{1}{2}$ (5-17)

für Randeckpunkte: $c_{(i)} = -\frac{\varphi}{2\pi}$ (5-18)

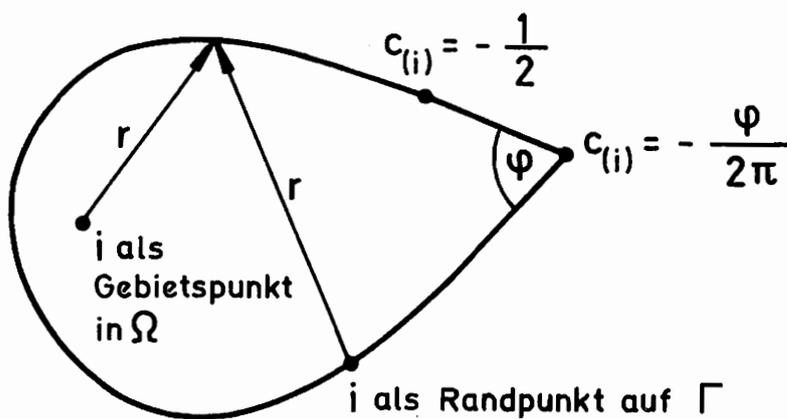


Abb. 5.2.1-1 Bildliche Erläuterungen zu den vorangehenden Gleichungen

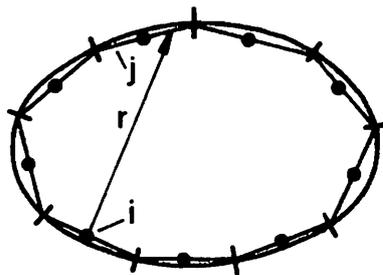
Im nachfolgenden Abschnitt werden nun die Elementformulierungen zur Lösung von Gl.(5-16) bei Verwendung von Randelementen mit konstanter und linearer Ansatzfunktion gezeigt.

5.2.2 Die numerische Aufbereitung der Randintegralgleichungen

Wird die Randkurve Γ in eine endliche Anzahl von n Elementen (Abb.5.2.2-1) diskretisiert, so lautet Gl.(5-16) für einen Punkt i auf Γ

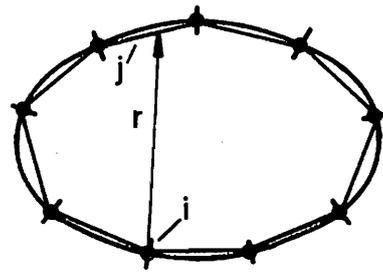
$$c_i p_i + i\omega g_L \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} v^* p \, ds_j = i\omega g_L \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} p^* \left\{ \begin{matrix} \bar{v} \\ \bar{A} p \end{matrix} \right\} ds_j \quad (5-19)$$

Die Klammern um den Index i seien im folgenden weggelassen, da er für die Kennzeichnung des Imaginärteils zunächst nicht mehr benötigt wird. Mit j ist das Randsegment (\sim element) gekennzeichnet, über das integriert wird. Die geschweifte Klammer meint, daß hier \bar{v} oder $\bar{A}p$ steht, je nachdem, ob es sich um ein Element auf Γ_1 (Vorgabe: \bar{v}) oder auf Γ_2 (Vorgabe: \bar{A}) handelt.



Mittenknoten
eines Elementes

a)



Randknoten
eines Elementes

b)

Abb. 5.2.2-1 Boundary-Elemente-Typen
a) konstante Elemente b) lineare Elemente

5.2.2.1 Konstante Boundary-Elemente

Vom denkbareinfachsten Elementtyp sind die sogenannten konstanten Elemente. Mit der Annahme, daß p und v über einen Elementbereich konstant und gleich dem Wert im Mittenknoten des Elementes sind, vereinfacht sich Gl.(5-19) zu

$$c_i p_i + i\omega g_L \sum_{j=1}^n p_j \int_{\Gamma_j} v^* ds_j = i\omega g_L \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\bar{v}}{\bar{A}_p} \right\}_j \int_{\Gamma_j} p^* ds_j \quad (5-20)$$

Nennt man die Integrale vom Bezugspunkt i über das Element j

$$i\omega g_L \int_{\Gamma_j} v^* ds_j = \hat{H}_{ij} \quad ; \quad (5-21)$$

$$i\omega g_L \int_{\Gamma_j} p^* ds_j = G_{ij} \quad (5-22)$$

und vereinfacht

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} \quad \text{für } i \neq j \quad (5-23)$$

$$H_{ij} = \hat{H}_{ij} + c_i \quad \text{für } i = j$$

so lautet Gl.(5-20)

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} p_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} \left\{ \frac{\bar{v}}{\bar{A}_p} \right\}_j \quad (5-24)$$

Wird nun für jeden Punkt i eine entsprechende Gleichung formuliert, so läßt sich das Gleichungssystem in Matrizenform darstellen und man erhält

$$\underline{H} \underline{p} = \underline{G} \left\{ \frac{\bar{v}}{\bar{A}_p} \right\} \quad (5-25)$$

Durch Hineinziehen der Admittanzen \bar{A} in die Matrix \underline{G} und anschließendem Umsortieren läßt sich das Gleichungssystem auf die Standardform zur Lösung auf einem Digitalrechner bringen. Es sei

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{A} p_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} G_{11} & \bar{A} G_{12} \\ G_{21} & \bar{A} G_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{v}_1 \\ p_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5-26)$$

Umsortieren, so daß die unbekanntenen Größen p im Vektor links des Gleichheitszeichens stehen, führt auf

$$\begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} - \bar{A} G_{12} \\ H_{21} & H_{22} - \bar{A} G_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{11} \\ G_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{v}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{11} & \bar{v}_1 \\ G_{12} & \bar{v}_1 \end{vmatrix} \quad (5-27)$$

also

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{y} \quad (5-28)$$

Die Systemmatrix A ist hier - im Gegensatz zur Finite-Elemente-Formulierung, Gl.(4-31) - vollbesetzt, nicht symmetrisch und erscheint auch nicht in einer nach Steifigkeits-, Massen- und Dämpfungsmatrix getrennten Form. Für die numerische Rechnung ist dies bei der Abspeicherung, der Kontrolle, aber vor allem bei einer eventuellen Fehlersuche ein entscheidender Nachteil. Umso sorgfältiger und übersichtlicher sollten die Integrationsroutinen zur Ermittlung der Terme H_{ij} und G_{ij} programmiert werden.

Die Integration für die Terme H_{ij} und G_{ij} , $i \neq j$ geschieht numerisch mit Hilfe der Gauß-Quadraturformel

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \cong \sum_{v=1}^m f(\xi_v) w_v ; \quad \xi_v, w_v \text{ gegeben für } v=1, \dots, m, \quad (5-29)$$

wobei $m = 8$ in allen Rechnungen hinreichend genaue Ergebnisse lieferte.

Die Fundamentallösung Gl.(5-12) eingesetzt in Gl.(5-22) gibt

$$G_{ij} = - \frac{\omega g_L}{4} \int_{\Gamma_j} H_0^{(2)}(kr) ds_j \quad (5-30)$$

und mit Bezug zu Abb.5.2.2.1-1 folgt

$$\begin{aligned} G_{ij} &= - \frac{\omega g_L}{4} \frac{l}{2} \int_{-1}^{+1} H_0^{(2)}(kr) d\xi \\ &\cong - \frac{\omega g_L l}{8} \sum_{v=1}^m H_0^{(2)}(kr_v) w_v \end{aligned} \quad (5-31)$$

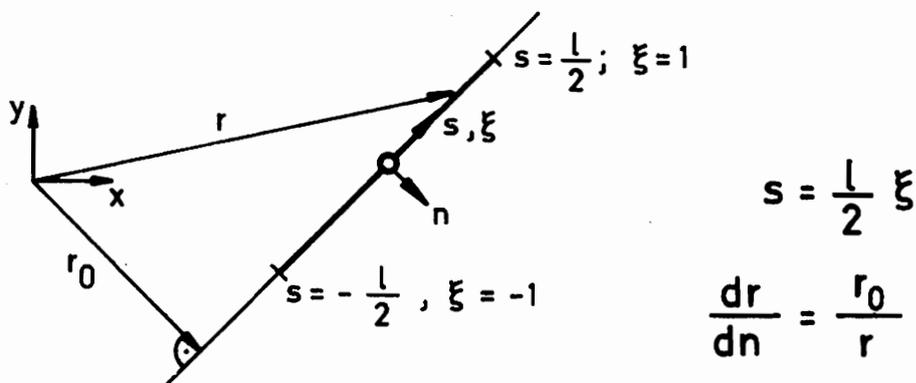


Abb. 5.2.2.1-1 Zur Integration über einen Elementbereich, wenn $i \neq j$

Die erste Ableitung der Fundamentallösung ist

$$\frac{dp^*}{dr} = - \frac{ik}{4} H_1^{(2)}(kr) \quad (5-32)$$

mit der Hankelfunktion 2. Art, 1. Ordnung $H_1^{(2)}(kr)$. Damit wird aus Gl.(5-21)

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= i\omega g_L \int_{\Gamma_j} v^* ds_j = - \int_{\Gamma_j} \frac{dp^*}{dn} ds_j = - \int_{\Gamma_j} \frac{dp^*}{dr} \frac{dr}{dn} ds_j \\ &= \frac{ik}{4} \int_{\Gamma_j} H_1^{(2)}(kr) \frac{dr}{dn} ds_j = \frac{ik}{4} \frac{l}{2} \int_{-1}^{+1} H_1^{(2)}(kr) \frac{r_0}{r} d\xi \end{aligned} \quad (5-33)$$

$$\hat{H}_{ij} \cong \frac{ikl}{8} r_0 \sum_{v=1}^m H_1^{(2)}(kr_v) \frac{w_v}{r_v} . \quad (5-33.1)$$

Die Hankelfunktionen $H_0^{(2)}$ und $H_1^{(2)}$ setzen sich zusammen aus je einer Besselfunktion erster und zweiter Art, und zwar

$$H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - iY_0(x) \quad (5-34)$$

$$H_1^{(2)}(x) = J_1(x) - iY_1(x) . \quad (5-35)$$

Letztere werden im Rechenprogramm durch Polynomreihen nach den Formeln 9.4.1 bis 9.4.6 aus [1] berechnet.

Die Integration für die Hauptdiagonalelemente muß wegen der Singularität $Y_0(0) = Y_1(0) = -\infty$ auf anderem Wege erfolgen.

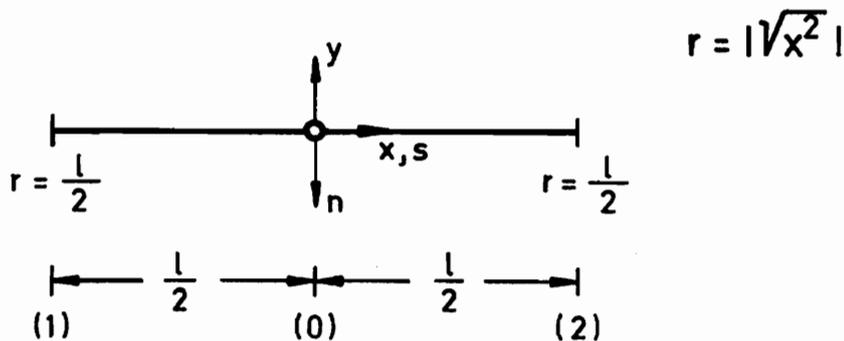


Abb. 5.2.2.1-2 Zur Integration über einen Elementbereich, wenn $i = j$

Es ist jetzt

$$\begin{aligned}
 G_{ii} &= - \frac{\omega g_L}{4} \int_{\Gamma_i} H_0^{(2)}(kr) ds_i = - \frac{\omega g_L}{4} \int_{(1)}^{(2)} H_0^{(2)}(kr) ds_i \\
 &= - \frac{\omega g_L}{4} 2 \int_{(0)}^{(2)} H_0^{(2)}(kr) dr = - \frac{\omega g_L}{8} \int_0^{l/2} H_0^{(2)}(kr) dr \\
 &= - \frac{g_L c_L}{8} \int_0^{kl/2} H_0^{(2)}(kr) d(kr) \quad (5-36)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\int_0^x C_0(t) dt = x C_0(x) + \frac{\pi}{2} x \{ S_0(x) C_1(x) - S_1(x) C_0(x) \}, \quad (5-37)$$

wobei

$$C_v(x) = a J_v(x) + b Y_v(x); \quad v = 0, 1; \quad a, b \text{ beliebig} \quad (5-38)$$

ist, und $S_0(x)$ und $S_1(x)$ die sogenannten Struve-Funktionen sind, kann das verbleibende Integral in Gl. (5-36) gelöst werden. Die Struve-Funktionen werden dabei im Rechenprogramm durch Reihenentwicklung gemäß

$$S_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{x^3}{1^2 3^2} + \frac{x^5}{1^2 3^2 5^2} - \frac{x^7}{1^2 3^2 5^2 7^2} + \dots \right) \quad (5-39)$$

$$S_1(x) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{1^2 3} - \frac{x^4}{1^2 3^2 5} + \frac{x^6}{1^2 3^2 5^2 7} + \dots \right) \quad (5-40)$$

berechnet.

Die Terme \hat{H}_{ii} sind im vorliegenden Falle für alle i gleich Null

$$\hat{H}_{ij} = - \int_{\Gamma_j} \frac{dp^*}{dr} \frac{dr}{dn} ds_j = 0 \quad \text{wegen } r \perp n, \quad (5-41)$$

wodurch alle Hauptdiagonalelemente zu

$$H_{ii} = c_i = - \frac{1}{2} \quad (5-42)$$

werden, da die Punkte i jeweils in Elementmitte, also auf einem geraden Randstück liegen.

Nach Lösung des komplexen Gleichungssystems (5-28) sind dann alle Knotenwerte auf dem Rand bekannt, und es können dann bei Bedarf mit Gln.(5-11/15) durch wiederholte Integration die Funktionswerte an beliebigen Gebietspunkten ermittelt werden.

5.2.2.2 Lineare Boundary-Elemente

Boundary-Elemente, die einen linearen Verlauf von p und v über den Elementbereich zulassen, sind der nächsthöhere Elementtyp. Sie besitzen zwei Randknotenpunkte, wobei jedoch beim Aneinanderlegen mehrere Elemente jeweils zwei Randknotenpunkte zu einem 'verschmelzen' - siehe Abb. 5.2.2-1. Ihr Hauptvorteil gegenüber den konstanten Elementen ist, daß bei gleich feiner Diskretisierung des Randes die Anzahl der Knotenwerte und damit die Größe des Gleichungssystems nicht ansteigt, sie aber wesentlich genauere Ergebnisse liefern.

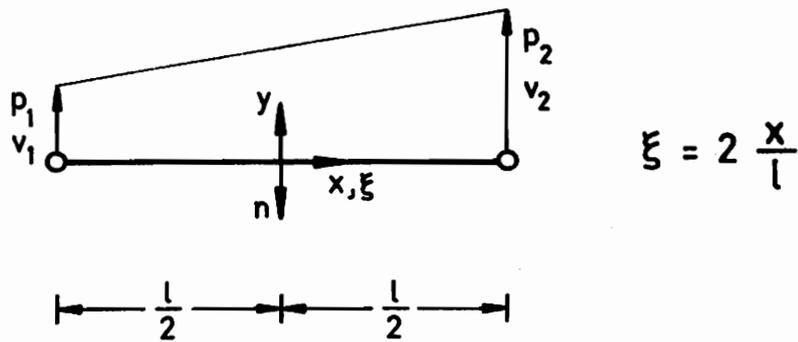


Abb. 5.2.2.2-1 Lineares Boundary-Element

Der lineare Verlauf von p und v über das Element lautet in Abhängigkeit von ξ und den Knotenwerten

$$p(\xi) = \varphi_1 p_1 + \varphi_2 p_2 = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} \quad (5-43)$$

$$v(\xi) = \varphi_1 v_1 + \varphi_2 v_2 = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \end{vmatrix} \quad (5-44)$$

mit

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{2} (1 - \xi) ; \quad \varphi_2(\xi) = \frac{1}{2} (1 + \xi) \quad (5-45)$$

In Gl.(5-19) wird damit die Integration über ein Element j auf der linken Seite des Gleichheitszeichens zu

$$\begin{aligned} i\omega g_L \int_{\Gamma_j} v^* p \, ds_j &= i\omega g_L \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \end{bmatrix} v^* \, ds_j \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_{i1} & h_{i2} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5-46)$$

mit den zwei Komponenten

$$h_{i1} = i\omega g_L \int_{\Gamma_j} \varphi_1 v^* ds_j \quad ; \quad h_{i2} = i\omega g_L \int_{\Gamma_j} \varphi_2 v^* ds_j \quad (5-47)$$

und rechts des Gleichheitszeichens ist

$$\begin{aligned} i\omega g_L \int_{\Gamma_j} p^* \left\{ \begin{array}{c} \bar{v} \\ \bar{A}_p \end{array} \right\} ds_j &= i\omega g_L \int_{\Gamma_j} [\varphi_1 \quad \varphi_2] p^* ds_j \left| \left\{ \begin{array}{c} \bar{v} \\ \bar{A}_p \end{array} \right\} \right| \\ &= [g_{i1} \quad g_{i2}] \left| \left\{ \begin{array}{c} \bar{v} \\ \bar{A}_p \end{array} \right\} \right| \end{aligned} \quad (5-48)$$

mit

$$g_{i1} = i\omega g_L \int_{\Gamma_j} \varphi_1 p^* ds_j \quad ; \quad g_{i2} = i\omega g_L \int_{\Gamma_j} \varphi_2 p^* ds_j \quad . \quad (5-49)$$

Wird jetzt für einen Punkt i die Summe der Integrale über alle n Elemente gebildet, läßt sich Gl.(5-19) schreiben als

$$c_i p_i + \left[\hat{H}_{i1} \quad \hat{H}_{i2} \quad \dots \quad \hat{H}_{in} \right] \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array} = \left[G_{i1} \quad G_{i2} \quad \dots \quad G_{in} \right] \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \bar{v} \\ \bar{A}_p \end{array} \right\}_1 \\ \left\{ \begin{array}{c} \bar{v} \\ \bar{A}_p \end{array} \right\}_2 \\ \vdots \\ \left\{ \begin{array}{c} \bar{v} \\ \bar{A}_p \end{array} \right\}_n \end{array} \quad (5-50)$$

Hierbei ist \hat{H}_{ij} gleich dem h_{i1} -Term für Element j plus dem h_{i2} -Term für Element $(j-1)$, usw. Desgleichen gilt für G_{ij} .

Mit der Vereinbarung Gl.(5-23) läßt sich die letzte Gleichung wieder schreiben als

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} p_j = \sum_{j=1}^n G_{ij} \left\{ \bar{A}_p \bar{v} \right\}_j, \quad (5-51)$$

wenn mit j der Knoten zwischen den Elementen $(j-1)$ und j bezeichnet wird.

Füßt man die Gleichungen für alle Punkte i nun wieder in Matrizenform zusammen, so gelangt man auf dem im vorangehenden Abschnitt beschriebenen Weg wieder auf die Form $\underline{A} \underline{x} = \underline{y}$.

Die Integration für die Terme H_{ij} und G_{ij} , $i \neq j$ wird wieder mit Hilfe der Gauß-Quadraturformel (5-29) durchgeführt. Unter Beachtung, daß in Abb. 5.2.2.1-1 die Knotenpunkte des jetzt linearen Elements bei $\xi = -1$ und $\xi = 1$ liegen, wird

$$\begin{aligned} h_{i1} &= - \int_{\Gamma_j} \varphi_1 \frac{dp^*}{dr} \frac{dr}{dn} ds_j = \frac{ik}{4} \int_{\Gamma_j} \varphi_1 H_1^{(2)}(kr) \frac{dr}{dn} ds_j \\ &\cong \frac{ikl}{16} r_0 \sum_{v=1}^m (1 - \xi_v) H_1^{(2)}(kr_v) \frac{w_v}{r_v} \end{aligned} \quad (5-52)$$

$$h_{i2} \cong \frac{ikl}{16} r_0 \sum_{v=1}^m (1 + \xi_v) H_1^{(2)}(kr_v) \frac{w_v}{r_v} \quad (5-53)$$

und

$$g_{i1} \cong - \frac{\omega g_L l}{16} \sum_{v=1}^m (1 - \xi_v) H_0^{(2)}(kr_v) w_v \quad (5-54)$$

$$g_{i2} \cong - \frac{\omega g_L l}{16} \sum_{v=1}^m (1 + \xi_v) H_0^{(2)}(kr_v) w_v. \quad (5-55)$$

Die Integration für Hauptdiagonalelemente erfolgt wieder separat. Wie bei den konstanten Elementen ist auch hier $\hat{H}_{ii} = 0$ wegen $r \perp n$, und es verbleibt die Berechnung von g_{i1} und g_{i2} .

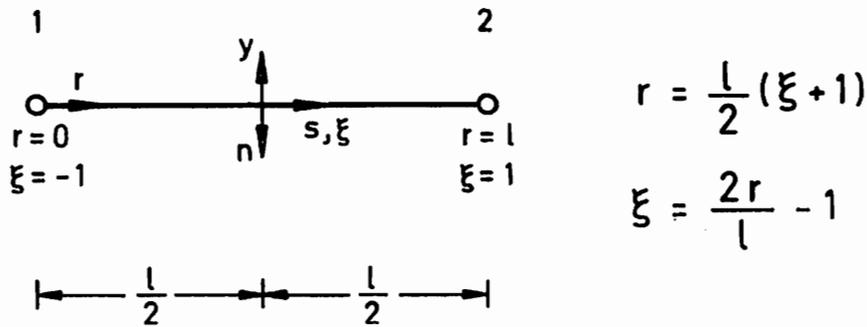


Abb. 5.2.2.2-2 Zur Integration über einen Elementbereich

Es ist

$$\begin{aligned}
 g_{i1} &= -\frac{\omega g_L}{4} \int_{\Gamma_i} \varphi_1 p^* ds_i = -\frac{\omega g_L}{8} \left\{ \int_{\Gamma_i} H_0^{(2)}(kr) ds_i - \int_{\Gamma_i} \xi H_0^{(2)}(kr) ds_i \right\} \\
 &= -\frac{\omega g_L}{8} \left\{ 2 \int_0^l H_0^{(2)}(kr) dr - \frac{2}{l} \int_0^l r H_0^{(2)}(kr) dr \right\} \quad (5-56)
 \end{aligned}$$

Während sich das erste Integral in der geschweiften Klammer nach Gl.(5-37) mit Hilfe der Struve-Funktion berechnen läßt, kann das zweite Integral nach Aufspalten der Hankelfunktion $H_0^{(2)} = J_0 - iY_0$ mit den Beziehungen

$$\int_0^x t J_0(t) dt = x J_1(x) \quad (5-57)$$

$$\int_0^x t Y_0(t) dt = x Y_1(x) + \frac{2}{\pi} \quad (5-58)$$

berechnet werden, und man erhält schließlich

$$g_{i1} = - \frac{\omega g_L}{4k} \left\{ kl J_0(kl) - J_1(kl) + \frac{1}{2} \pi kl (S_0(kl) J_1(kl) + \right. \\ \left. - S_1(kl) J_0(kl)) + i \left[Y_1(kl) - kl Y_0(kl) + \frac{2}{\pi kl} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \pi kl (S_0(kl) Y_1(kl) - S_1(kl) Y_0(kl)) \right] \right\} . \quad (5-59)$$

Mit denselben Überlegungen wird

$$g_{i2} = - \frac{\omega g_L}{4k} \left\{ J_1(kl) - i \left[Y_1(kl) + \frac{2}{\pi kl} \right] \right\} . \quad (5-60)$$

Die eventuelle Berechnung von Funktionswerten in Gebietspunkten kann nach Kenntnis der Randknotenwerte wieder mit Gln.(5-11/15) erfolgen. Dabei sind die entsprechenden Integrationsalgorithmen für die linearen Elemente durchzuführen.

5.2.3 Vergleichs- und Beispielrechnungen

Eine einfache Vergleichsrechnung zwischen konstanten und linearen Boundary-Elementen mit der schon aus Gl.(4-57) bekannten analytischen Lösung für das eindimensionale Rohrbeispiel - siehe Abb. 4.1.1-1 - zeigt sofort die Überlegenheit der linearen gegenüber den konstanten Elementen auf und favorisiert erstere damit für weitere Rechnungen.

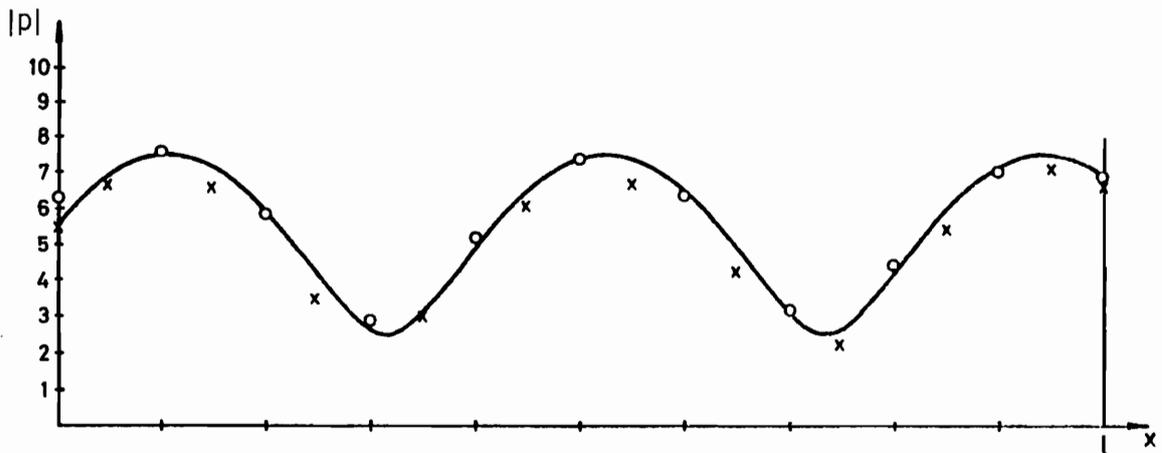


Abb. 5.2.3-1 Boundary-Elemente-Lösungen im Vergleich mit analytischer Lösung. — analytische Lösung; x x x konstante Elemente; o o o lineare Elemente

Bei der Diskretisierung wurde das Rohr als zweidimensionales Gebiet mit $l \gg d$ abgebildet; die Knotenpunkte der konstanten und linearen Boundary-Elemente liegen bei der hier vorgenommenen Einteilung in Längsrichtung des Systems gegeneinander verschoben.

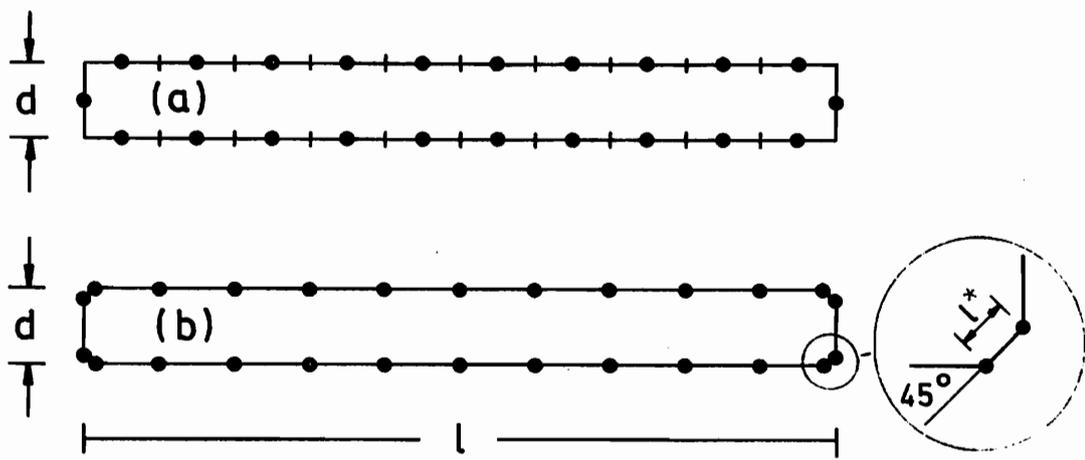


Abb. 5.2.3-2 Diskretisierung des Rohrmodells; konstante (a) und lineare (b) Boundary-Elemente; $l = 5 \text{ m}$; $d = 0,2 \text{ m}$; $l^* = 0,01 \text{ m}$

Die dicht beieinanderliegenden Doppelknoten beim Diskretisierungsmodell für die linearen Elemente sind erforderlich, um die Randbedingungen des Systems - Anregung auf der linken, Admittanz auf der rechten Schmalseite - möglichst genau einzuhalten. Die besten numerischen Ergebnisse wurden mit der angegebenen Eckelementlänge l^* erzielt; dennoch bleibt die Anregungsseite kritisch, wie die ersten Schalldruckwerte für die linearen Elemente in Abb. 5.2.3-1 zeigen. Mit nur einfachen Eckknoten erhält man im vorliegenden Fall sogar ein insgesamt schlechteres Ergebnis als mit konstanten Elementen.

Mit den linearen Boundary-Elementen ist nun für eine Vergleichsrechnung mit den ebenfalls linearen finiten Elementen das schon bekannte L-förmige System modelliert worden, wobei die Diskretisierung des Gebietsrandes derjenigen aus dem Finite-Elemente-Modell mit Ausnahme der Doppelpunkte in den Ecken entspricht; vgl. Abb. 4.1.3-1 .

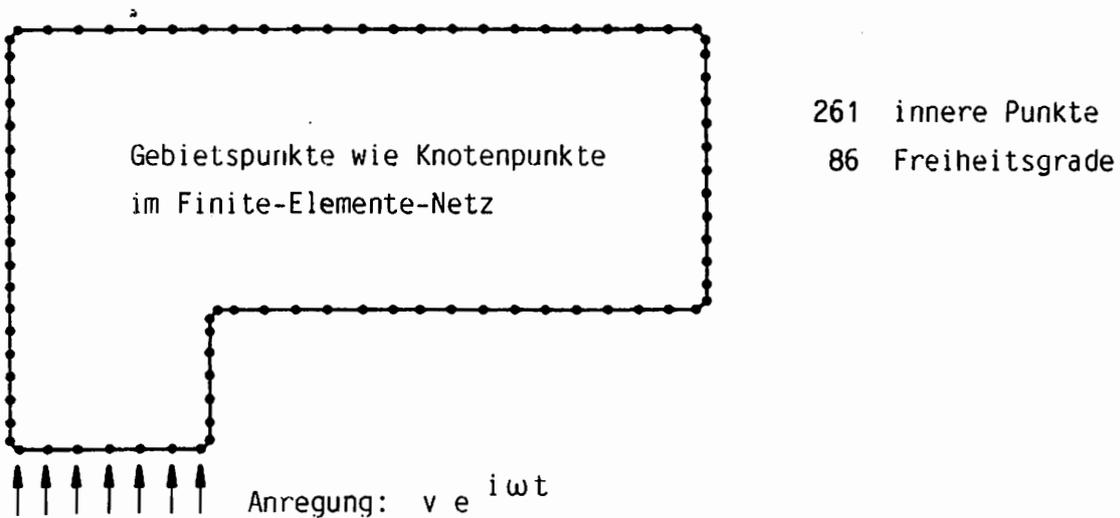


Abb. 5.2.3-3 Diskretisierung des L-Systems aus Kap. 4.1.3 mit linearen Boundary-Elementen (Abmessungen wie dort)

Die Punkte im Inneren des Gebietes, in denen die Funktionswerte zusätzlich berechnet werden, stimmen in ihrer Lage mit den Knotenpunkten der Finite-Elemente-Rechnung überein. Die Ergebnisse beider Rechenverfahren können somit direkt und vollständig miteinander verglichen werden.

Die Verläufe der Isobarenfelder in der nachfolgenden Abb. 5.2.3-4 zeigen im Vergleich mit denjenigen aus Abb. 4.1.3-2 eine sehr gute Übereinstimmung sowohl für den akustisch harten Fall wie auch für die Dämpfung längs einzelner Ränder.

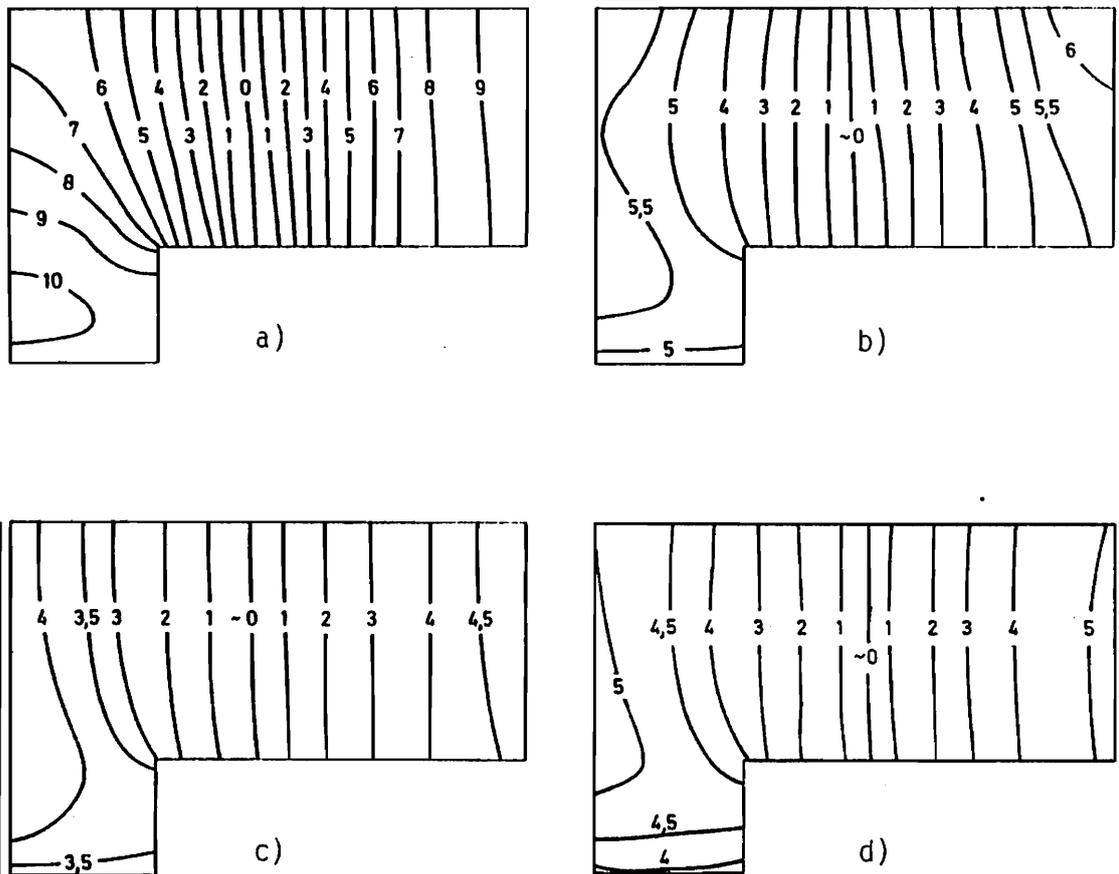


Abb. 5.2.3-4 Isobaren im Gebiet bei
a) akustisch harter Berandung
b,c,d) Vorgabe einer komplexen Wandadmittanz
auf verschiedenen Rändern

Wenngleich die Isobaren bei der akustisch harten Berandung in Nähe der Anregung des Systems geringfügig voneinander abweichen, so beträgt die Differenz der Schalldruckwerte selbst hier noch weniger als 2% ; im Mittel liegen die Abweichungen unter 1% .

Angesichts der gleichwertigen numerischen Ergebnisse empfiehlt sich für die Berechnung geschlossener Gebiete hiermit die Methode der Boundary-Elemente als alternatives Rechenverfahren zu den finiten Elementen. Ihr deutlichster Vorteil liegt in der wesentlich geringeren Anzahl von Freiheitsgraden für das System und damit kleineren Systemmatrizen. Der Aufwand für die Datenhaltung und der Speicherplatzbedarf im Digitalrechner werden dadurch erheblich reduziert. Da als Faustformel die Rechenzeiten etwa dem Quadrat der Freiheitsgrade des Systems proportional sind, ergibt sich im vorliegenden Beispiel ein theoretisches Verhältnis der Rechenzeiten von 1:15 zugunsten der Boundary-Elemente-Methode. Der tatsächliche Rechenzeitvorteil lag hier bei immerhin noch 1:9, bedingt durch den zusätzlichen Aufwand zur Ermittlung der Funktionswerte an den inneren Punkten. Bei konsequenter Ausnutzung der Symmetrie der Systemmatrizen in der Finite-Elemente-Rechnung durch spezielle Speichertechniken, wie Bandbreitenoptimierung oder Skyline-Speicherung, die bei der Boundary-Elemente-Rechnung nicht möglich sind, ließe sich der Rechenzeit- und Speicherplatznachteil der finiten Elemente noch verringern. Auf Schwierigkeiten mit numerischen Unstabilitäten der Boundary-Elemente-Methode bei geometrisch komplizierten Gebieten und deren Behebung wird in Kapitel 5.2.5 noch näher eingegangen.

5.2.4 Die Übertragung des Verfahrens auf offene Gebiete

An die Gedanken aus Kapitel 5.1 anknüpfend soll jetzt die Problematik der Freifeldabstrahlung wieder aufgegriffen werden. In [9] wird von Brebbia und Walker gezeigt, wie sich die dreidimensionale Lösung im Unendlichen verhält; an dieser Stelle soll kurz auf den zweidimensionalen Fall eingegangen werden.

Es werde angenommen, daß das betrachtete Gebiet von zwei Randkurven begrenzt sei, deren eine im Unendlichen liegt.

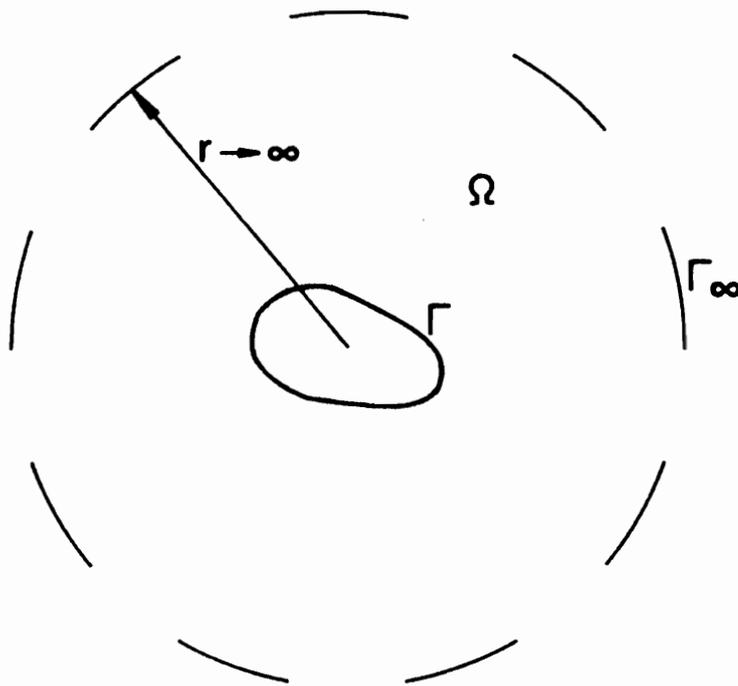


Abb. 5.2.4-1 Gebiet Ω mit Ausdehnung ins Unendliche

Durch die Hinzunahme des Randes Γ_∞ wird Gl.(5-16) auf der rechten Seite um den Term

$$i\omega g_L \int_{\Gamma_\infty} (p^* v - v^* p) ds = - \int_{\Gamma_\infty} (p^* \frac{dp}{dr} - \frac{dp^*}{dr} p) ds \quad (5-61)$$

erweitert. Nach Einsetzen der Fundamentallösung (5-12) und deren Ableitung (5-32) wird das Integral über Γ_∞ zu

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_\infty} \left\{ \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr) \frac{dp}{dr} + \frac{i}{4} k H_1^{(2)}(kr) p \right\} ds = \\ & = \frac{i}{4k} \int_{\Gamma_\infty} \left\{ kr H_0^{(2)}(kr) \frac{dp}{dr} + k^2 r H_1^{(2)}(kr) p \right\} d\varphi \end{aligned} \quad (5-62)$$

mit $ds = r d\varphi$.

Mit Hilfe der Beziehung

$$H_v^{(2)}(kr) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \frac{1}{2}v\pi - \frac{1}{4}\pi)} \quad (5-63)$$

für $v = 0, 1$; $kr \rightarrow \infty$

führt dann die Forderung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{\Gamma_\infty} \left\{ kr H_0^{(2)}(kr) \frac{dp}{dr} + k^2 r H_1^{(2)}(kr) p \right\} d\varphi \right) \equiv 0 \quad (5-64)$$

auf die Bedingung

$$\sqrt{r} \left(\frac{dp}{dr} + ikp \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (5-65)$$

Dies ist aber gerade die sogenannte Sommerfeld'sche Abstrahlbedingung [30], die durch die Fundamentallösung erfüllt ist.

Die Freifeldabstrahlung kann also mit der Methode der Boundary-Elemente nach Kapitel 5.2 berechnet werden, ohne daß für den im Unendlichen liegenden Rand Γ_∞ noch zusätzliche Terme in Gl.(5-16) berücksichtigt werden müssen.

5.2.5 Beispielrechnungen

Wenngleich die prinzipielle Eignung der Boundary-Elemente-Methode für die Berechnung der Abstrahlung ins Unendliche schnell gezeigt ist, taucht bei der Rückkehr zur eingangs in Kapitel 5.1 behandelten Aufgabe sofort die Frage auf, wie denn ein Gebietsrand zu diskretisieren ist, wenn dieser selbst ins Unendliche läuft. Das zweidimensionale Modell eines Strahlers in einer

(unendlich) großen Wand aus Abb. 5.1-2 verdeutlicht das Problem.

Mit der Überlegung, daß bei Abstrahlrechnungen der Einfluß der einzelnen Boundary-Elemente auf die Lösung umso geringer werden wird, je weiter sie von der Schallquelle entfernt liegen, ist in Testrechnungen der Abbruch der Randdiskretisierung in verschiedenen Entfernungen r_F von der Schallquelle untersucht worden.

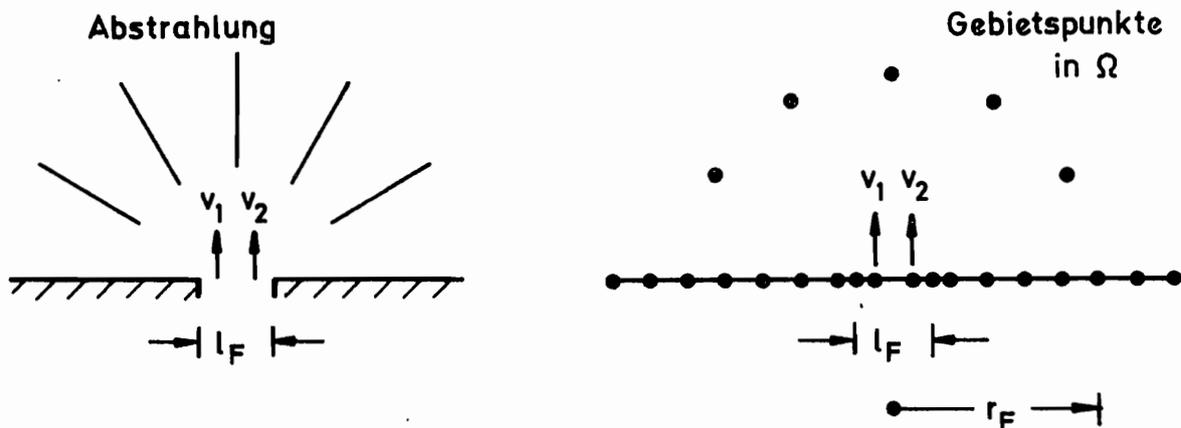


Abb. 5.2.5-1 Problemstellung und Boundary-Elemente-Modell zur Freifeldabstrahlung

Zum Vergleich der Ergebnisse mit denen des Finite-Elemente-Modells, sowie mit der Referenzlösung der Punktstrahlersynthese - siehe auch Abb. 5.1-3 - sind auch Funktionswerte auf einem Halbkreis um die Schallquelle berechnet worden. Dabei zeigt sich bei zunehmender Randdiskretisierung eine rasche Konvergenz gegen die Punktstrahlerlösung. Zur Vermeidung von numerischen Instabilitäten bei Berechnung der Funktionswerte in Gebietspunkten ist es jedoch erforderlich, daß diese in wesentlich geringerer Entfernung von der Schallquelle liegen als der Diskretisierungsabbruch auf dem Rand.

In Abb. 5.2.5-2 sind zum direkten Vergleich mit Abb. 5.1-3 die Ergebnisse der Boundary-Elemente-Rechnung für einen Kolben- und einen Dipolstrahler denjenigen der Punktstrahlersynthese gegenübergestellt. Die Lage der Gebietspunkte auf einem Halbkreis mit dem Radius r_F ($r_F/l_F = 6,7$) stimmt mit derjenigen der äußeren Knotenpunkte des Finite-Elemente-Netzes aus Abb. 5.1-2 überein. Bei gleichfeiner Elemententeilung längs der Wand erfolgt hier beim Boundary-Elemente-Modell der Abbruch der Diskretisierung erst bei $2r_F$.

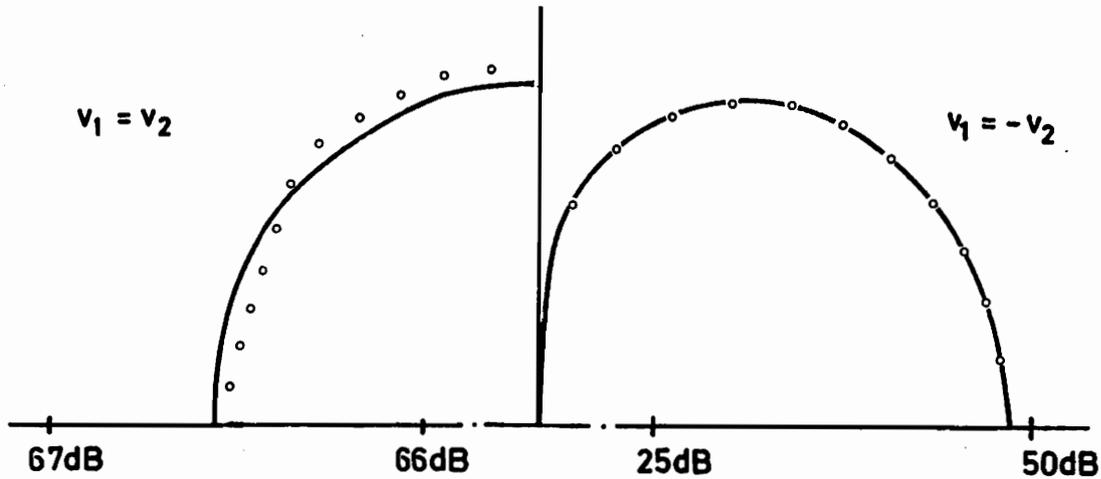


Abb. 5.2.5-2 Richtcharakteristika der Schallabstrahlung

Angesichts besserer numerischer Resultate bei wesentlich geringerem Rechenaufwand - im vorliegenden Fall weniger als die Hälfte der Freiheitsgrade der Finite-Elemente-Rechnung, einfache Aufbereitung des Datensatzes - erweist sich die Boundary-Elemente-Methode auch als geeignetes Verfahren für die Berechnung von Problemen der Freifeldabstrahlung.

So soll in einigen letzten Rechnungen die Frage nach der Auswirkung der Öffnung eines Raumes ins Freie auf die akustischen Verhältnisse innerhalb des Raumes wieder aufgegriffen und an einem Beispiel beantwortet werden. Dazu sei wieder das schon bekannte L-förmige System betrachtet, dessen obere rechte Schmalseite nun zwischen ganz offen und geschlossen variiert wird; siehe Abb. 5.2.5-3 .

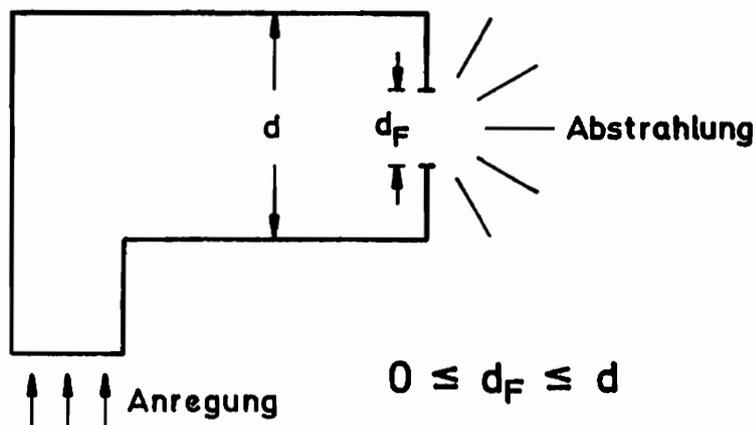


Abb. 5.2.5-3 Raum mit variabler Freifeldöffnung d_F .
Abmessungen und Anregung wie in Abb. 4.1.3-1

Die Randdiskretisierung des ganz offenen Systems ist problemlos und verläuft entlang des in Abb. 5.2.5-4a dargestellten Linienzuges. Bei der teilweise offenen rechten Wand (Abb. 5.2.5-4b) führte jedoch der komplizierte Randverlauf in der Öffnung des Systems zu numerischen Fehlern, die sich in der Lösung durch Schalldruckschwankungen entlang des oberen und unteren Freifeldrandes bemerkbar machen.

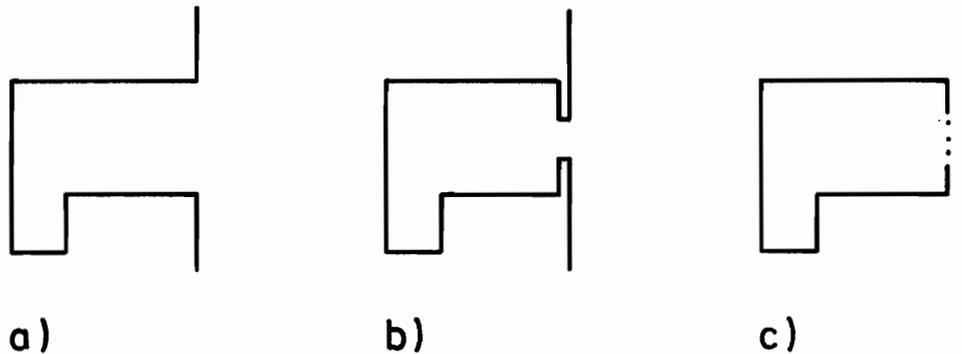
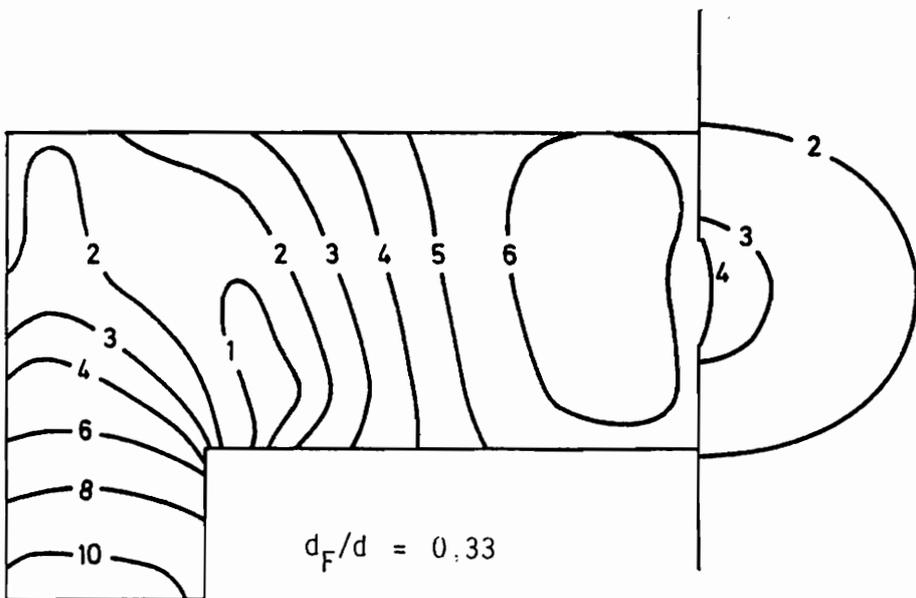
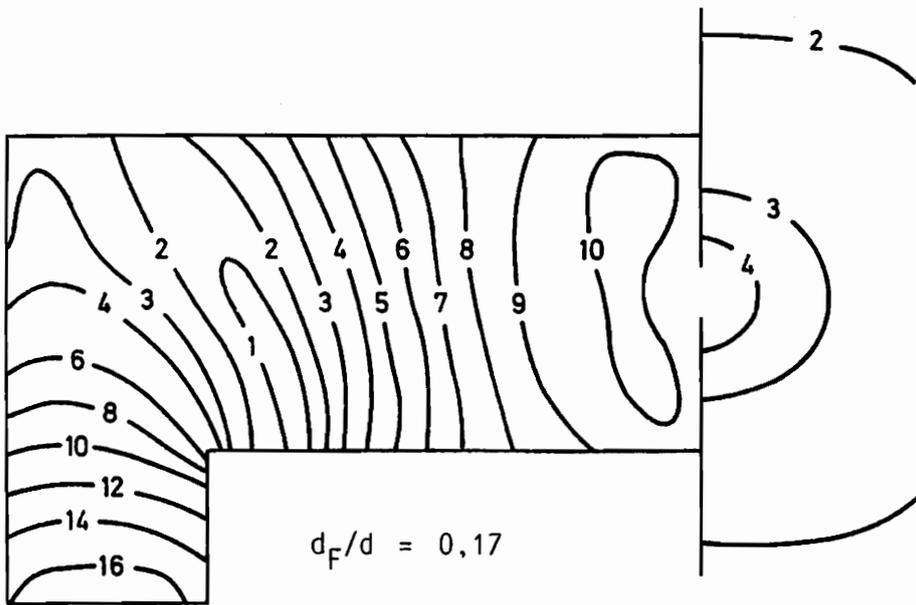
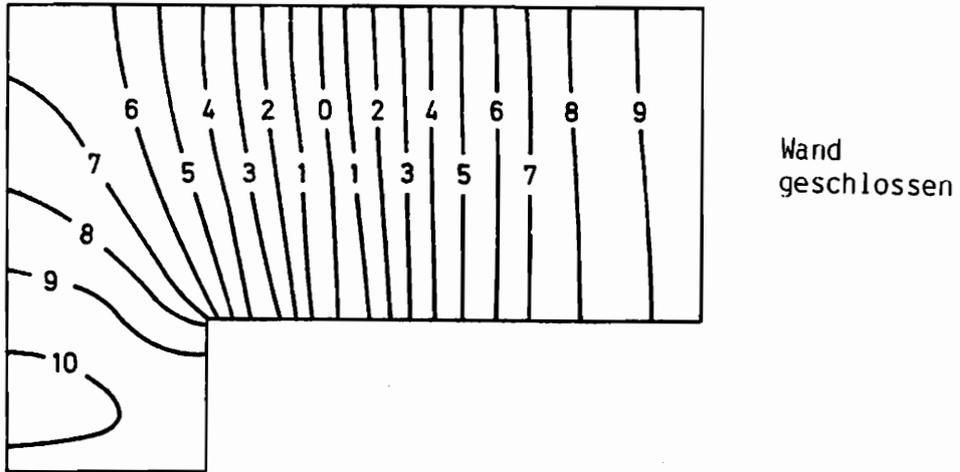
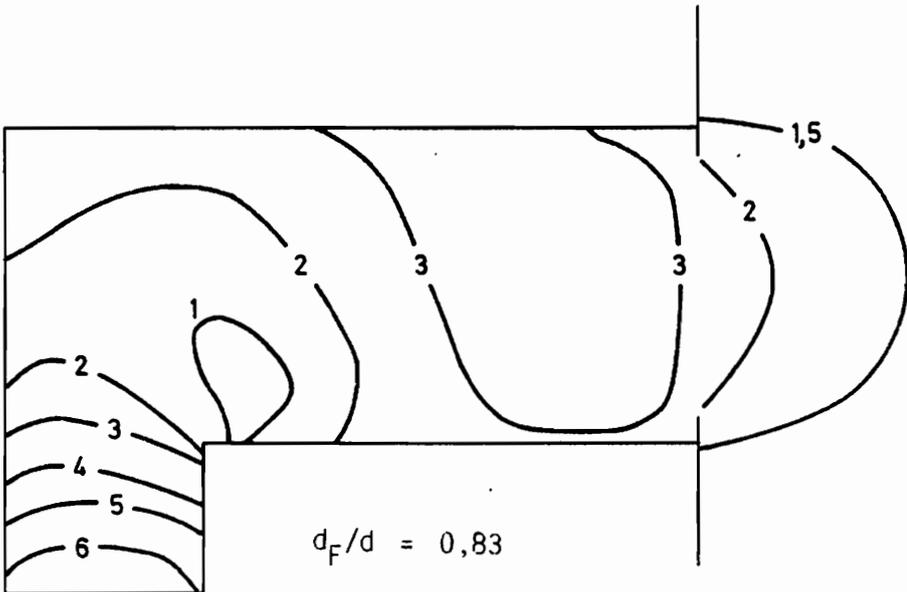
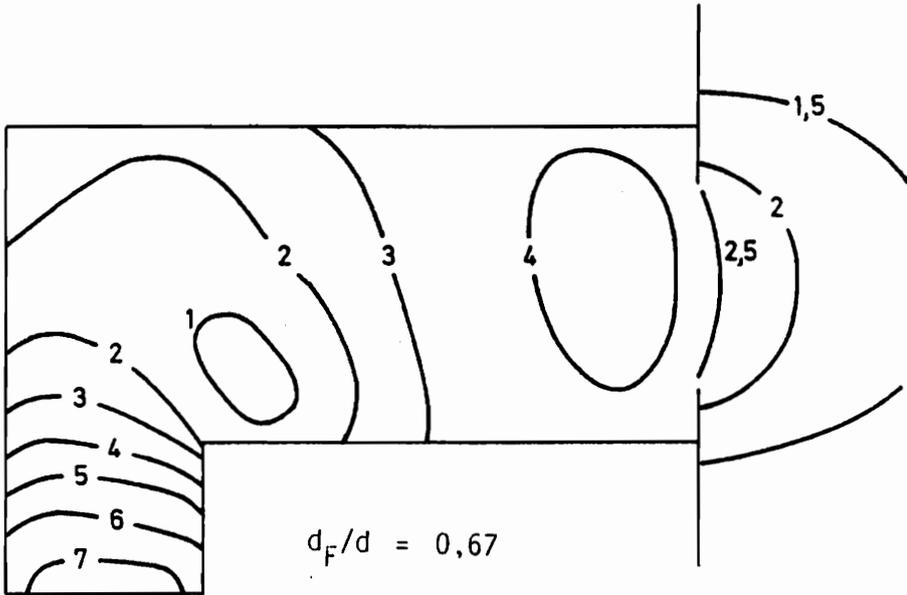
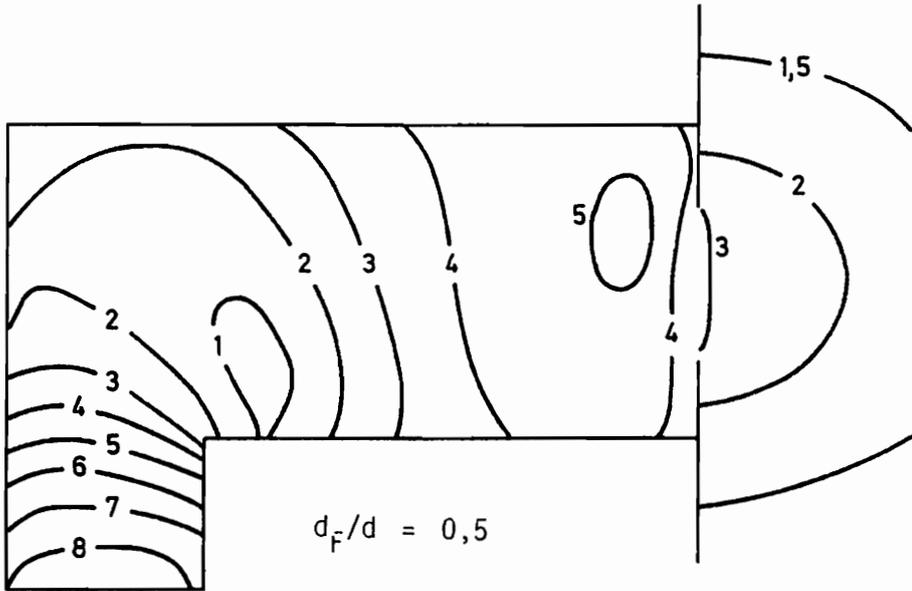


Abb. 5.2.5-4 Schematischer Randverlauf für die Diskretisierungsmodelle
a) offenes System
b) teiloffenes System in einem Linienzug (num. instabil)
c) teiloffenes System, aus zwei Systemen zusammgebaut

Das Versagen der Boundary-Elemente-Methode bei zunehmend komplizierter Gebietsgeometrie ist ein bekannter prinzipbedingter Nachteil [9] und tritt bei finiten Elementen nicht auf. Durch Unterteilung des betrachteten Gebietes in einzelne geometrisch einfache Untergebiete, die dann über gemeinsame Ränder aneinander gekoppelt werden, läßt sich dieser Nachteil zwar beheben. Die Anzahl der Freiheitsgrade des Gesamtsystems erhöht sich jedoch dabei jeweils um das Doppelte der Knotenpunktzahl auf den Koppelrändern der Untergebiete, da hier Gleichgewicht (Druck) und Kompatibilität (Schnellen) erfüllt sein muß. Dadurch werden wesentliche Vorteile der Boundary-Elemente-Methode gegenüber den finiten Elementen - kleinere Gleichungssysteme und einfache Aufbereitung und Verwaltung der Datensätze - zum Teil wieder aufgehoben. Darüber hinaus geht auch die ansonsten recht geradlinige Programmierbarkeit der Lösungsalgorithmen verloren.

Die Vorgehensweise zur Aufteilung eines Gebietes in Untergebiete ist in Anhang A3 beschrieben. Nach diesem Verfahren ist dann im vorliegenden Beispiel das teiloffene System entsprechend Abb. 5.2.5-4c unterteilt worden. Numerische Schwierigkeiten der genannten Art traten nicht mehr auf; Vergleichsrechnungen am ganz offenen System mit und ohne Gebietsunterteilung brachten dort keine Unterschiede in den Ergebnissen.





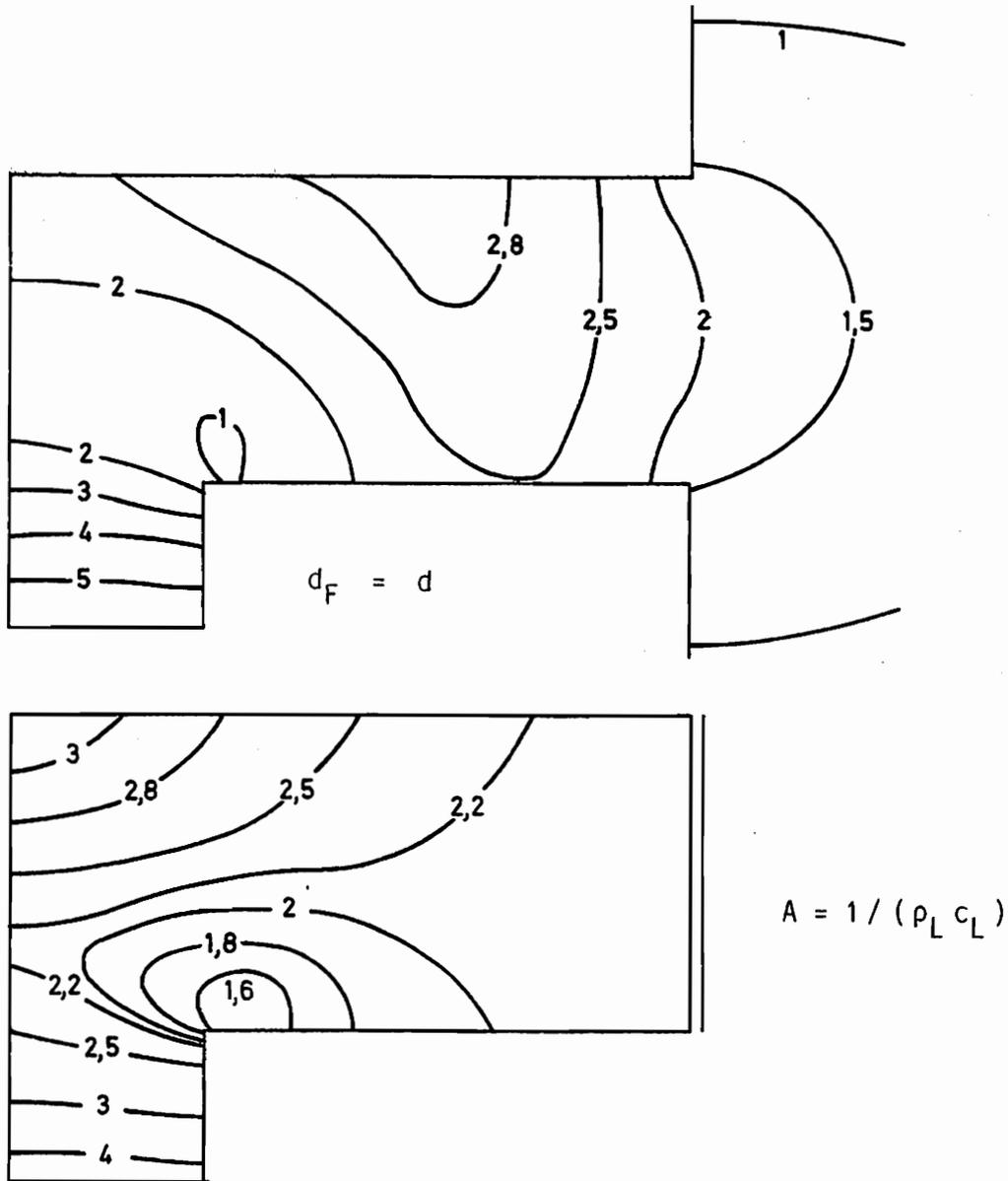


Abb. 5.2.5-5 Isobaren im Gebiet bei verschieden großen Wandöffnungen d_F ; ($0 \leq d_F/d \leq 1$)

In den vorstehenden Bildern sind nun die Isobarenfelder des L-Systems bei unterschiedlichen Wandöffnungen $0 \leq d_F/d \leq 1$ dargestellt. Die Schalldrücke sind auch hier wieder auf den mit 10 angegebenen Maximaldruck des im ersten Bild wiederholten geschlossenen Systems normiert.

Ein überraschendes Ergebnis ist sicher dasjenige des zweiten Bildes. Hier zeigt sich, daß eine relativ kleine Freifeldöffnung in der Wand nicht überall im Gebiet einen geringeren Schalldruck zur Folge hat, sondern daß in

einigen Bereichen, besonders in der Nähe der Anregung des Systems, der Schalldruck über die Werte des geschlossenen Systems ansteigt. Bei größer werdender Wandöffnung nimmt der Schalldruck im gesamten Gebiet kontinuierlich ab und erreicht im vorletzten Bild bei völlig offener rechter Seite die geringsten Werte.

Das letzte Bild zeigt im Vergleich mit dem vorletzten noch, wie wenig zutreffend hier die eingangs in Kapitel 5.1 erwähnte vereinfachende Annahme ist, in der Wandöffnung den Kehrwert des ebenen Wellenwiderstandes $A = 1/(\rho_L c_L)$ als Randbedingung vorzugeben. Der grundsätzlich andere Isobarenverlauf im größten Teil des Gebietes, verbunden mit Schalldruckabweichungen von bis zu 30% belegt die Notwendigkeit zur Berücksichtigung der Freifeldabstrahlung und rechtfertigt den zusätzlichen numerischen Mehraufwand.

5.3 Die Berechnung der Freifeldabstrahlung für Sonderfälle mit Hilfe der Punktstrahlersynthese

In Kapitel 5.1 und 5.2.5 sind Ergebnisse aus Finite-Elemente- und Boundary-Elemente-Rechnungen zusammen mit Lösungen der Punktstrahlersynthese beurteilt worden, die dort als Referenzmodell diente. Wenngleich die Punktstrahlersynthese auf die Berechnung der Freifeldabstrahlung von ebenen - im Zweidimensionalen: geradlinigen - Schwingungsgebilden beschränkt ist, so hat sie sich in allen Rechnungen als unkompliziertes, numerisch sehr sicheres Verfahren erwiesen.

Als Lösung der Helmholtz-Gleichung im Zweidimensionalen ergeben sich unter Beachtung von Radialsymmetrie Schalldruck und Schallschnelle zu

$$p(kr) = C H_0^{(2)}(kr) \quad (5-66)$$

$$v(kr) = C \frac{k}{i \omega g_L} H_1^{(2)}(kr) . \quad (5-67)$$

Zur Bestimmung der komplexen Konstanten C dient die Randbedingung, daß auf

dem Umfang eines pulsierenden Kreises dessen Radialgeschwindigkeit mit der Schallschnelle übereinstimmt

$$v(r=R) = v_R = C \frac{k}{i\omega g_L} H_1^{(2)}(kR) \quad (5-68)$$

Daraus folgt

$$C = \frac{i\omega g_L}{k} v_R [H_1^{(2)}(kR)]^{-1} \quad (5-69)$$

und liefert für den Schalldruck p

$$p(kr) = \frac{i\omega g_L}{k} v_R \frac{H_0^{(2)}(kr)}{H_1^{(2)}(kR)} \quad (5-70)$$

Mit der Beschränkung auf Kreise, deren Radius R sehr klein gegen die Schallwellenlänge λ_L ist

$$kR = \frac{2\pi}{\lambda_L} R \ll 1 \quad (5-71)$$

gilt

$$[H_1^{(2)}(kR)]^{-1} \approx -\frac{i\pi}{\Gamma(1)} \frac{1}{2} kR = -\frac{1}{2} i\pi kR \quad (5-72)$$

und vereinfacht Gl.(5-70) zu

$$p(kr) = \omega g_L v_R \frac{1}{2} \pi R H_0^{(2)}(kr) \quad (5-73)$$

Bezeichnet man mit

$$q_R = v_R S_R = v_R 2 \pi R \quad (5-74)$$

den Schallfluß eines pulsierenden Kreises, so folgt für die Abstrahlung eines Halbkreises in eine halb-unendliche Ebene

$$p(kr) = \frac{1}{2} \omega g_L q_R H_0^{(2)}(kr) \quad (5-75)$$

Liegen nun mehrere Punktstrahler in einer Zeile, dann addieren sich die Schalldrücke der Einzelstrahler zu

$$p(kr) = \frac{1}{2} \omega g_L \sum_{j=1}^n \{ q_R H_0^{(2)}(kr) \}_j \quad (5-76)$$

und beim Übergang zu einer Zeile mit kontinuierlicher Schnelleverteilung $v(x)$, in der jedes Linienelement dx als Punktstrahler mit dem Schallfluß

$$dq = v(x) dx \quad (5-77)$$

aufgefaßt wird, folgt

$$p(kr) = \frac{1}{2} \omega g_L \int v(x) H_0^{(2)}(kr) dx \quad (5-78)$$

Im Dreidimensionalen führt die analoge Betrachtungsweise auf die Beziehung

$$p(kr) = \frac{i \omega g_L}{2 \pi} \int_F v(F) \frac{1}{r} e^{i kr} dF \quad (5-79)$$

und ist als sogenanntes Rayleigh-Integral aus der Literatur bekannt [14].

In der numerischen Rechnung wird die schwingende Zeile (Fläche) durch eine endliche Anzahl von Strahlerelementen mit jeweils konstanter Schallschnelle ersetzt. Die Berechnung der Integrale für verschiedene Aufpunkte P erfolgt dann durch Summenbildung. Auf diese Weise sind die Richtcharakteristika in Referenzlösungen durch Berechnung der Schalldrücke auf einem Halbkreis über der Schallquelle in 1° -Abständen berechnet worden.

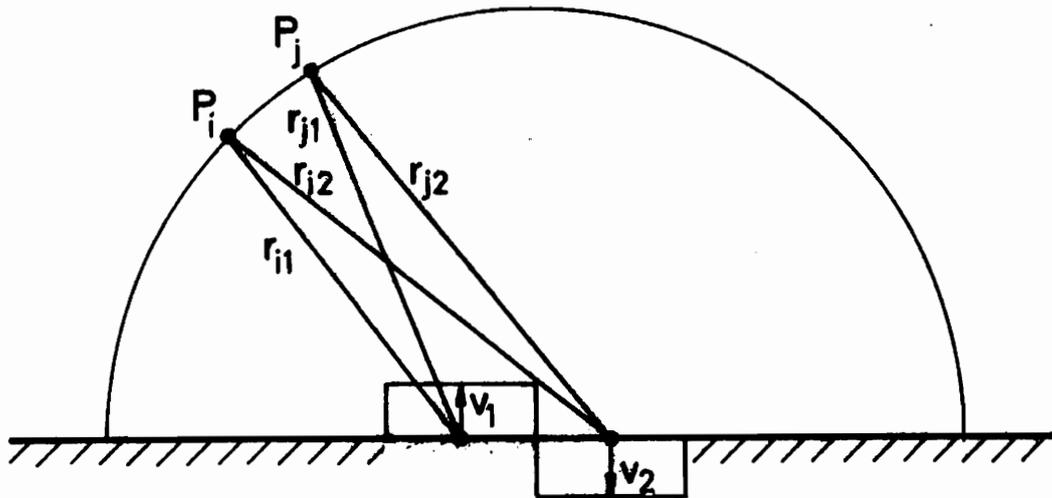


Abb. 5.3-1 Zur numerischen Berechnung der Schallabstrahlung mit der Punktstrahlersynthese

6. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit ist die Aufbereitung und der Einsatz der Methode der finiten Elemente und der Boundary-Elemente zur näherungsweisen Lösung der Wellengleichung für Schallfeldberechnungen gezeigt worden. Für unterschiedliche Anwendungsfälle sind finite Luftschallelemente im Ein-, Zwei- und Dreidimensionalen, solche zur Beschreibung eines Schallfeldes in porösem Stoff, sowie Boundary-Elemente entwickelt worden. Neben der akustisch harten Randbedingung, die den Sonderfall der Totalreflexion beschreibt, sind vor allem die in der Praxis hauptsächlich anzutreffenden Randbedingungen des Mitschwingens einer mechanischen Struktur, der Schallabsorption durch schalldämpfende Materialien und der Freifeldabstrahlung in den Rechenmodellen erfaßt worden.

In Kapitel 3 wird die Interaktion einer Platte mit einem angrenzenden Luftschallraum sowohl im Sinne einer Schallabstrahlung, wie auch einer Schwingungsanregung der mechanischen Struktur infolge der Schalldruckbelastung beschrieben. Hierzu sind in ihrer Abbildungsleistung verschiedenwertige finite Platte-Luftschall-Koppelemente hergeleitet und in Beispielrechnungen eingesetzt worden. Nach der Beschreibung der Kopplungsphänomene an einem einfachen Modell, sowie der Klärung der Anfangswertproblematik bei akustisch harten Systemen, ist mit dem Verfahren der Modalen Analyse die Schwingungsantwort eines Koppelsystems auf eine impulsartige Belastung der Platte berechnet worden.

Die instationären Schwingungsverläufe ermöglichen durch die Beurteilung der Amplituden- und Frequenzinhalte einzelner Systemvariablen einen ausgezeichneten Einblick in das physikalische Verhalten des Koppelsystems. An dieser Stelle sei jedoch auch auf den großen numerischen Rechenaufwand hingewiesen - allein die Elementmatrizen des Koppelementes Typ 2 sind von der Größe 48×48 -, durch den die sinnvolle Anwendung solcher Rechnungen auf mechanische Strukturen mit sehr geringer Steifigkeit beschränkt ist. In allen anderen Fällen bringt, wegen der geringen Rückwirkung des akustischen Systems auf das mechanische, erst die Entkopplung der Teilsysteme, verbunden eventuell mit der Reduktion auf eine Betrachtung im Zweidimensionalen, sowie mit der Beschränkung auf stationäre Vorgänge, die Möglichkeit zur Berechnung größerer Systeme bei höheren Frequenzen.

Mit diesen Voraussetzungen sind in Kapitel 4 die Betrachtungen auf gedämpfte akustische Systeme erweitert worden. Schallanregung und Schalldämpfung werden über Randbedingungen im Finite-Elemente-Modell berücksichtigt. Die Darstellungen in Kapitel 4.1 beschränken sich auf das sogenannte lokale Absorptionsmodell, in dem Energieverluste an einer schallabsorbierenden Wand durch die Angabe einer Wandadmittanz beschrieben werden. In Beispielrechnungen ist der Einfluß der Dämpfung an verschiedenen Rändern eines Systems auf die Schalldruckverteilung im System gezeigt worden. Lärminderungsmaßnahmen lassen sich so gezielt vorausberechnen und optimieren.

Die Erweiterung des Absorptionsmodells auf die Berechnung von Schallfeldern in porösen Stoffen mit finiten Elementen ist in Kapitel 4.2 gezeigt. Durch Ankopplung von finiten Elementen für Luftschall an solche für porösen Stoff ist in Kapitel 4.3 die Auswirkung der seitlichen Kopplung im Absorptionsstoff gegenüber dem lokalen Absorptionsmodell an Hand von Beispielrechnungen untersucht worden. Ein von Bliss aus Messungen abgeleitetes Kriterium bezüglich des Versagens des lokalen Absorptionsmodells konnte mit finiten Elementen durch vergleichende Rechnungen bestätigt werden und zeigt die Notwendigkeit zur Berücksichtigung des Schallfeldes im porösen Stoff insbesondere bei dünnen Absorptionsschichten mit kleinem Strömungswiderstand.

Zur Berechnung von Problemen der Freifeldabstrahlung ist in Kapitel 5, nach einem, sich als aufwendig erweisenden Berechnungsmodell mit finiten Elementen, die Methode der Boundary-Elemente für Schallfeldberechnungen aufbereitet worden. Daß sie sich als alternatives Rechenverfahren zu der Finite-Elemente-Methode auch für geschlossene, dämpfungsbehaftete Gebiete anbietet, ist zunächst durch Vergleichsrechnungen mit finiten Elementen gezeigt worden. Ihre besondere Eignung zur Berechnung von akustischen Systemen, die eine Öffnung ins Freie besitzen, zeigen Vergleichsrechnungen mit der Punktstrahlersynthese, sowie Schallfeldberechnungen für ein System mit variabler Wandöffnung, für das die Auswirkung der Freifeldabstrahlung auf die Akustik eines Innenraumes berechnet worden ist.

Die Methoden der finiten Elemente und die der Boundary-Elemente sind in der Arbeit an zahlreichen Beispielen auf ihre Effizienz bei Schallfeldberechnungen geprüft worden. Sie haben sich dabei als leistungsfähiges Werkzeug erwiesen. Einige ihrer spezifischen Vor- und Nachteile bei der Behandlung

unterschiedlicher Aufgabenstellungen sind in den Beispielrechnungen angesprochen worden. Da es nicht Ziel der Arbeit war, Rechenprogramme für den Praktiker zu entwickeln, ist in der Arbeit zu den vielfältigen programmtechnischen Details nicht Stellung genommen worden. Dennoch ist Wert darauf gelegt worden, Algorithmen und Näherungslösungen zu beschreiben, von denen die Nachvollziehbarkeit der numerischen Rechnungen in starkem Maße abhängen.

Anhang

A 1

Gegeben sei das der Gl.(4-17) bzw. Gl.(4-77) entsprechende Funktional

$$\begin{aligned}
 I = & \iint_{\Omega} \{ \dot{p}_r' q_r' + \dot{p}_r \dot{q}_r + p_i' q_i' + \dot{p}_i \dot{q}_i + \\
 & + a_1 p_r q_r + a_2 p_i q_i + a_3 p_r q_i + a_4 p_i q_r \} dx dy + \\
 & + \int_{\Gamma} \{ b_1 p_r q_r + b_2 p_i q_i + b_3 p_r q_i + b_4 p_i q_r + \\
 & + b_5 p_r + b_6 p_i + b_7 q_r + b_8 q_i \} ds \longrightarrow \min. \quad (A1-1)
 \end{aligned}$$

mit den Konstanten a_1, \dots, a_4 und den Funktionen auf dem Rand Γ $b_1(s), \dots, b_8(s)$. Der Schreibvereinfachung zuliebe sei vereinbart: $\dot{} \hat{=} \partial/\partial x$ und $\dot{} \hat{=} \partial/\partial y$.

Für die erste Variation wird

$$\begin{aligned}
 p_r & \text{ zu } p_r + \varepsilon_1 \eta_r \\
 p_i & \text{ zu } p_i + \varepsilon_2 \eta_i \\
 q_r & \text{ zu } q_r + \varepsilon_3 \mu_r \\
 q_i & \text{ zu } q_i + \varepsilon_4 \mu_i
 \end{aligned} \quad (A1-2)$$

mit den Störparametern ε und den Nachbarfunktionen η bzw. μ . Zunächst werde q_r variiert. Man bildet

$$\delta I_{q_r} = \left. \frac{\partial I}{\partial \varepsilon_3} \right|_{\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0} = 0 \quad (A1-3)$$

und erhält

$$\delta I_{q_r} = \iint_{\Omega} \{ p_r' \mu_r' + \dot{p}_r \dot{\mu}_r + a_1 p_r \mu_r + a_4 p_i \mu_r \} dx dy + \int_{\Gamma} \{ b_1 p_r \mu_r + b_4 p_i \mu_r + b_7 \mu_r \} ds = 0 \quad . \quad (A1-4)$$

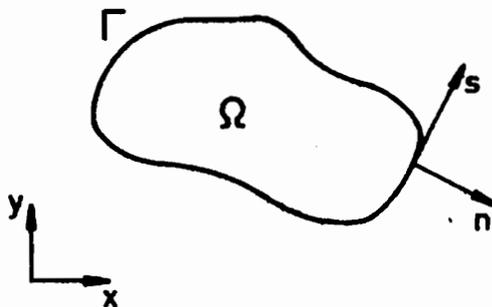
Die partielle Integration der ersten zwei Terme im Doppelintegral gibt

$$\iint_{\Omega} \{ p_r' \mu_r' + \dot{p}_r \dot{\mu}_r \} dx dy = \iint_{\Omega} \{ (\mu_r p_r')' + (\mu_r \dot{p}_r)' \} dx dy - \iint_{\Omega} \{ \mu_r p_r'' + \mu_r \ddot{p}_r \} dx dy \quad . \quad (A1-5)$$

Mit Hilfe der Green'schen Formel

$$\iint_{\Omega} \{ Q' - \dot{P} \} dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy \quad (A1-6)$$

läßt sich nun das erste Doppelintegral auf der rechten Seite von Gl.(A1-5) in ein Randintegral überführen. Unter Beachtung von



$$dx = \frac{dx}{ds} ds = - \frac{dy}{dn} ds \quad (A1-7)$$

$$dy = \frac{dy}{ds} ds = \frac{dx}{dn} ds$$

wird

$$\iint_{\Omega} \{ (\mu_r p_r')' + (\mu_r \dot{p}_r)' \} dx dy = \int_{\Gamma} \mu_r \frac{\partial p_r}{\partial n} ds \quad , \quad (A1-8)$$

und man erhält schließlich

$$\delta I_{q_r} = \mu_r \left[- \iint_{\Omega} \{ p_r'' + \ddot{p}_r - a_1 p_r - a_4 p_i \} dx dy + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial p_r}{\partial n} + b_1 p_r + b_4 p_i + b_7 \right\} ds \right] = 0 \quad . \quad (A1-9)$$

Dies ist erfüllt für die Differentialgleichung

$$\Delta p_r - a_1 p_r - a_4 p_i = 0 \quad (A1-10)$$

mit den allgemeinen Randbedingungen auf

$$\frac{\partial p_r}{\partial n} + b_1 p_r + b_4 p_i = - b_7 \quad . \quad (A1-11)$$

Entsprechend folgt aus der Variation von

$$q_i : \quad \Delta p_i - a_3 p_r - a_2 p_i = 0 \quad (A1-12)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial n} + b_3 p_r + b_2 p_i = - b_8 \quad (A1-13)$$

$$p_r : \quad \Delta q_r - a_1 q_r - a_3 q_i = 0 \quad (A1-14)$$

$$\frac{\partial q_r}{\partial n} + b_1 q_r + b_3 q_i = - b_5 \quad (A1-15)$$

$$p_i : \Delta q_i - a_4 q_r - a_2 q_i = 0 \quad (\text{A1-16})$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial n} + b_4 q_r + b_2 q_i = -b_6 . \quad (\text{A1-17})$$

1) Zur Problemformulierung in Kapitel 4.1 :

Der Vergleich mit den Helmholtz-Gleichungen (4-8/12) zeigt Übereinstimmung für

$$a_1 = a_2 = -k^2 \quad ; \quad a_3 = a_4 = 0 . \quad (\text{A1-18})$$

Der Vergleich der Randbedingungen zeigt, daß mit

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0 \quad (\text{A1-19})$$

und

$$\begin{aligned} b_7 = -\omega g_L v_i \quad ; \quad b_5 = -\omega g_L u_i \\ b_8 = \omega g_L v_r \quad ; \quad b_6 = \omega g_L u_r \end{aligned} \quad (\text{A1-20})$$

die Randbedingungen (4-9/13) auf Γ_1 , sowie mit

$$b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = 0 \quad (\text{A1-21})$$

und

$$b_1 = b_2 = -\omega g_L A_i \quad ; \quad b_3 = \omega g_L A_r \quad ; \quad b_4 = -\omega g_L A_r \quad (\text{A1-22})$$

die Randbedingungen (4-10/16) auf Γ_2 erfüllt sind.

2) Zur Problemformulierung in Kapitel 4.2 :

Der Vergleich mit den Helmholtz-Gleichungen (4-71/74) zeigt Übereinstimmung für

$$a_1 = a_2 = -\psi_r \quad ; \quad a_3 = -\psi_i \quad ; \quad a_4 = \psi_i \quad . \quad (A1-23)$$

Die Randbedingungen (4-72/75) auf Γ_1 sind mit

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0 \quad (A1-24)$$

und

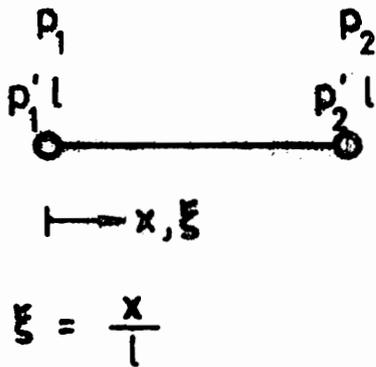
$$b_5 = -R u_r - \omega g_p u_i \quad ; \quad b_7 = R u_r - \omega g_p u_i \quad (A1-25)$$

$$b_6 = \omega g_p v_r - R v_i \quad ; \quad b_8 = \omega g_p v_r + R v_i$$

erfüllt.

A 2

Die Elementmatrizen für das in Kapitel 4.1.1 angesprochene eindimensionale finite Schallelement mit kubischer Ansatzfunktion; vgl. Abb. 3.1-2



$$\begin{aligned}
 p(\xi) = & (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) p_1 + \\
 & + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) dp_1/d\xi + \\
 & + (3\xi^2 - 2\xi^3) p_2 + \\
 & + (\xi^3 - \xi^2) dp_2/d\xi
 \end{aligned} \tag{A2-1}$$

lauten

$$\underline{K} = \frac{1}{30l} \begin{vmatrix} 36 & 3 & -36 & 3 \\ & 4 & -3 & -1 \\ & & 36 & -3 \\ \text{symm.} & & & 4 \end{vmatrix} ; \quad \underline{M} = \frac{l}{420c_L^2} \begin{vmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ & 4 & 13 & -3 \\ & & 156 & -22 \\ \text{symm.} & & & 4 \end{vmatrix}$$

(A2-2)

$$\underline{C} = \rho_L A \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} ; \quad \underline{r} = -i\omega \rho_L v_0 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

A 3

Bei geometrisch kompliziertem Randverlauf wie im Beispiel des teiloffenen Systems in Kapitel 5.2.5 ist es wegen numerischer Schwierigkeiten erforderlich geworden, das betrachtete Gebiet in zwei Untergebiete mit gemeinsamem Grenzrandbereich zu unterteilen.

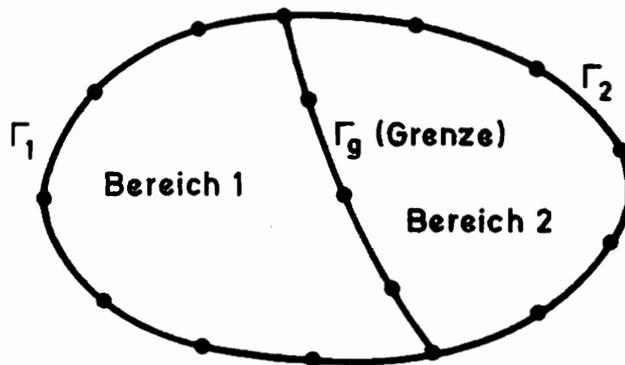


Abb. A3-1 Prinzipiskezze zur Gebietsunterteilung

Für jedes der beiden Untergebiete wird nun ein Gleichungssystem entsprechend Gl.(5-25) formuliert. Mit den jeweils bezüglich des äußeren Randes Γ_1 oder Γ_2 und des Grenzrandes Γ_g partitionierten Matrizen und Vektoren erhält man für Bereich 1 :

$$\begin{bmatrix} \underline{H}^1 & \underline{H}_g^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{p}^1 \\ \underline{p}_g^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}^1 & \underline{G}_g^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ \frac{\bar{v}}{\bar{A} p} \right\}^1 \\ \underline{v}_g^1 \end{bmatrix} \quad (\text{A3-1})$$

und für Bereich 2 :

$$\begin{bmatrix} \underline{H}^2 & \underline{H}_g^2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \underline{p}^2 \\ \underline{p}_g^2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}^2 & \underline{G}_g^2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \left\{ \frac{\bar{v}}{\bar{A} p} \right\}^2 \\ \underline{v}_g^2 \end{vmatrix} \quad (A3-2)$$

Die hochgestellten Indizes 1 und 2 geben die Zugehörigkeit zu Bereich 1 oder Bereich 2 an; das tiefgestellte g deutet auf den Grenzrand hin. Beim Aneinanderkoppeln der zunächst getrennt betrachteten Bereiche müssen Gleichgewicht und Kompatibilität erfüllt sein. Mit

$$\underline{p}_g^1 = \underline{p}_g^2 = \underline{p}_g \quad \text{und} \quad \underline{v}_g^1 = -\underline{v}_g^2 = \underline{v}_g \quad (A3-3)$$

führt Umschreiben von Gl.(A3-1) auf

$$\underline{H}^1 \underline{p}^1 = \begin{bmatrix} \underline{G}^1 & \underline{G}_g^1 & -\underline{H}_g^1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \left\{ \frac{\bar{v}}{\bar{A} p} \right\}^1 \\ \underline{v}_g \\ \underline{p}_g \end{vmatrix} \quad (A3-4)$$

und Umschreiben von Gl.(A3-2) auf

$$\underline{H}^2 \underline{p}^2 = \begin{bmatrix} -\underline{G}_g^2 & -\underline{H}_g^2 & \underline{G}^2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \underline{v}_g \\ \underline{p}_g \\ \left\{ \frac{\bar{v}}{\bar{A} p} \right\}^2 \end{vmatrix} \quad (A3-5)$$

Die letzten beiden Gleichungen lassen sich wieder zusammenfassen und so umsortieren, daß alle Unbekannten im Vektor links vom Gleichheitszeichen stehen.

Man erhält dann

$$\begin{vmatrix} \underline{H}^1 & \underline{0} & \underline{H}_g^1 & -\underline{G}_g^1 \\ \underline{0} & \underline{H}^2 & \underline{H}_g^2 & \underline{G}_g^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_2 \\ \underline{p}_g \\ \underline{v}_g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{G}^1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{G}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \{\underline{\bar{v}}\}^1 \\ \underline{\bar{A}}_p \\ \{\underline{\bar{v}}\}^2 \\ \underline{\bar{A}}_p \end{vmatrix}, \quad (\text{A3-6})$$

also wieder ein Gleichungssystem der Form

$$\underline{H} \underline{p} = \underline{G} \left\{ \underline{\bar{v}} \right\}. \quad (\text{A3-7})$$

Zu beachten ist, daß der Vektor \underline{p} als zusätzliche Unbekannte noch die Schnellen auf dem Grenzrand Γ_g enthält. Weiteres Umsortieren dieser Gleichung in Abhängigkeit von den Randbedingungen führt dann wieder auf die Standardform $\underline{A} \underline{x} = \underline{y}$.

Literaturverzeichnis

- 1 Abramowitz, M. / Stegun, I.
Handbook of mathematical functions
Dover Publications Inc., London, 1970
- 2 Bathe, K.-J. / Wilson, E.L.
Numerical methods in finite element analysis
Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1976
- 3 Becker, P.
Anwendung der Methode der finiten Elemente zur Lärminderung
in Räumen
BMFT-Bericht, 1982
- 4 Beranek, L.L.
Noise reduction
McGraw-Hill, New York, 1960
- 5 Bishop, R.E.D. / Gladwell, G.M.L. / Michaelson, S.
The matrix analysis of vibration
Cambridge University Press, 1979
- 6 Bliss, D.B.
A study of bulk reacting porous sound absorbers and a new
boundary condition for thin porous layers
Publikation des Department of Mechanical and Aerospace
Engineering, Princeton University,
- 7 Bokor, A.
Attenuation of sound in lined ducts
Journal of Sound and Vibration, 10, 1969
- 8 Brebbia, C.A.
The boundary element method for engineers
Pentech Press, London, 1980
- 9 Brebbia, C.A. / Walker, S.
Boundary element techniques in engineering
Butterworth Publ., London, 1980

- 10 Bronstein, I.N. / Semendjajew, K.A.
Taschenbuch der Mathematik
Verlag Harri Deutsch, Zürich, 1976
- 11 Collatz, L.
The numerical treatment of differential equations
Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1968
- 12 Craggs, A.
The transient response of a coupled plate-acoustic system
using plate and acoustic finite elements
Journal of Sound and Vibration, 15, 1971
- 13 Craggs, A.
A finite element model for rigid porous absorbing materials
Journal of Sound and Vibration, 61, 1978
- 14 Cremer, L. / Heckl, M.
Körperschall
Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1967
- 15 Cremer, L. / Müller, H.A.
Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik
Bd. II/4 Wellentheoretische Raumakustik
S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1976
- 16 Delany, M.E. / Bazley, E.N.
Acoustic properties of fibrous absorbent materials
Applied Acoustics, 3, 1970
- 17 Gladwell, G.M.L. / Zimmermann, G.
On energy and complementary energy formulations of acoustic
and structural vibration problems
Journal of Sound and Vibration, 3 1966
- 18 Gladwell, G.M.L.
A variational formulation of damped acoustostructural
vibration problems
Journal of Sound and Vibration, 4, 1966

- 19 Huebner, K.H.
The finite element method for engineers
J. Wiley & Sons, New York/London/Sydney/Toronto, 1975
- 20 Junger, M.C. / Feit, D.
Sound, structures and their interaction
MIT Press, London, 1972
- 21 Kantorowitsch, L.W. / Krylow, W.I.
Näherungen der höheren Analysis
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956
- 22 Kurtze, G.
Physik und Technik der Lärmbekämpfung
Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1964
- 23 Kuttruff, H.
Room acoustics
Applied Science Publishers Ltd., Berking (Engl.), 1975
- 24 Lehmann, Th.
Elemente der Mechanik IV
Schwingungen und Variationsprinzipie
Vieweg, Braunschweig, 1979
- 25 Levine H. / Schwinger, J.
On the theory of diffraction by an aperture in a
finite plane screen I (II)
Physical Review, 74 (75), 1948 (1949)
- 26 Marsal, D.
Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen
BI - Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1976
- 27 Mechel, F. / Royar, J.
Experimentelle Untersuchungen zur Theorie des porösen Absorbers
Acustica, 26, 1972

- 28 Meyer, E. / Neumann, E.-G.
Physikalische und Technische Akustik
Vieweg, Braunschweig, 1979
- 29 Morse, P.M. / Feshbach, H.
Methods of theoretical physics
McGraw-Hill, New York, 1953
- 30 Morse, P.M. / Ingard, K.U.
Theoretical acoustics
McGraw-Hill, New York, 1968
- 31 Piltner, R.
Die Finite-Elemente-Methode bei akustischen Problemen
VDI-Z, 120, 1978
- 32 Pretlove, A.J.
Free vibrations of a rectangular panel backed by a
closed rectangular cavity
Journal of Sound and Vibration, 2, 1965
- 33 Pretlove, A.J.
Forced vibrations of a rectangular panel backed by a
closed rectangular cavity
Journal of Sound and Vibration, 3, 1966
- 34 Schenk, H.A.
Improved integral formulation for acoustic radiation problems
Journal of the Acoustical Society of America, 44, 1968
- 35 Schmid, G.
Die Methode der finiten Elemente als Sonderfall der Methode
der gewichteten Residuen
ZAMM, 52, 1972
- 36 Sez nec, R.
Diffraction of sound around barriers: use of the boundary
elemente technique
Journal of Sound and Vibration, 73, 1980

- 37 Shuku, T. / Ishihara, K.
The analysis of the acoustic field in irregular shaped rooms
by the finite element method
Journal of Sound and Vibration, 29, 1973
- 38 Terai, T.
On calculation of sound fields around three dimensional objects
by integral equation methods
Journal of Sound and Vibration, 69, 1980
- 39 Waller, H. / Krings, W.
Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik
BI - Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1975
- 40 Wilkinson, J.H. / Reinsch, C.
Linear algebra
Springer, Berlin/Heidelberg, 1971
- 41 Zienkiewicz, O.C.
The finite element method in engineering science
McGraw-Hill, London, 1971
- 42 Zwikker, C / Kosten, C.W.
Sound absorbing materials
Elsevier, New York, 1949

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite
Elastic-Plastic Deformations.
Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,
viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen
elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen
Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungs-
zustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre
Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden
Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dick-
wandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells

- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Paweł Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinemographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Kármán Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czesław Woźniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods

- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear
Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der
Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei
Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch
stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value
Problems in the Theory of Plasticity and Application to
Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-
Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsions-
last
- Nr. 28 Paweł Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic
Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger
Kreiszyylinder und Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen
Kontaktproblem

- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und
Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and
Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre
Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische
Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hin-
blick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik
und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Spline-
funktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung
geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksich-
tigung großer Rotationen

Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter
Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der
Finite-Element-Methode

Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 41**