



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Ulrich Blix

Zur Berechnung der Einschnürung
von Zugstäben unter
Berücksichtigung thermischer
Einflüsse mit Hilfe der
Finite-Element-Methode

Heft Nr. 40



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Ulrich Blix

Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben
unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse
mit Hilfe der Finite - Element - Methode

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 40
Dezember 1983

Herrn Professor Lehmann mit vielem Dank
für die Anregung und Unterstützung zu
dieser Arbeit

Alfred Wiese

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann und Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich für die Anregung und Unterstützung dieser Arbeit sowie für die Übernahme der Referate.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Tag der Einreichung: 12.10.1983

Tag der mündlichen Prüfung: 19.12.1983

© 1983 Dr.-Ing. Ulrich Blix

Nordenstiftsweg 40, 4700 Hamm 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird anhand des Einschnürvorganges eines Zugstabes ein Verfahren vorgestellt, das es uns ermöglicht thermoplastische Formänderungen nachzurechnen. Dieses Verfahren ist leicht auf andere Umformvorgänge übertragbar. Die mathematische Lösung führt auf ein partielles Differentialgleichungssystem der Temperaturen und der Verzerrungsgeschwindigkeiten. Das Differentialgleichungssystem wird in ein mechanisches und in ein thermodynamisches System entkoppelt. Beide Teilsysteme werden mit Hilfe der Finite-Element Methode in lineare Gleichungssysteme umgewandelt und unabhängig voneinander gelöst. Die Kopplung schaffen interne Parameter, die nach jedem Teilschritt übergeben werden. Zwei nacheinander gerechnete Teilschritte ergeben dann zusammen ein Inkrement der Zeit dt . Den theoretisch ermittelten Ergebnissen werden die experimentell an Proben aus Al 99 gefundenen Werte gegenübergestellt.

Summary

In the present paper it is showed, on the necking problem of a tension specimen, how to calculate thermoplastic deformations. the procedure may be adapted to other deformation processes. The mathematical solution leads to a system of partial differential equations of the temperature and of the deformation rate. This system is separated in a mechanical and a thermodynamical one. Both of them are transformed in a system of linear equations by the Finite-Element-Method and are solved independently. The connection is given by internal parameter, that are transmitted in each step. Two of those, taken together, result to one time increment dt . The theoretical results are compared to those obtained experimentally on specimen Al 99.

| <u>Inhaltsverzeichnis</u> | Seite |
|--|-------|
| <u>Bezeichnungen</u> | 3 |
| <u>1. Einleitung</u> | 4 |
| <u>2. Stoffunabhängige Gleichungen</u> | 7 |
| 2.1 Allgemeines | 7 |
| 2.2 Geometrie | 8 |
| 2.3 Beschreibung der Deformation | 15 |
| 2.4 Spannungstensoren | 22 |
| <u>3. Stoffgesetz für den isothermen Belastungsschritt</u> | 26 |
| 3.1 Allgemeines | 26 |
| 3.2 Grundgleichungen | 26 |
| 3.3 Potentialansatz | 32 |
| 3.4 Steifigkeitsmatrix | 36 |
| 3.5 Spannungsintegration | 41 |
| 3.6 Verfestigungsgesetz | 45 |
| <u>4. Thermischer Prozeß</u> | 51 |
| 4.1 Dissipierte Arbeit | 51 |
| 4.2 Wärmeleitungsgleichung | 52 |
| 4.3 Temperaturansatzfunktion | 55 |
| 4.4 Gradient und Divergenz | 58 |
| 4.5 Variation des Funktionals | 67 |
| <u>5. Experimentelle Untersuchungen</u> | 73 |
| 5.1 Quasistatische Versuche | 73 |
| 5.2 Schnell ablaufende Versuche | 78 |
| 5.3 Darstellung und Diskussion der Ergebnisse | 82 |

| | |
|---|-----|
| <u>6. Numerische Lösung des Problems</u> | 88 |
| 6.1 Allgemeines | 88 |
| 6.2 Berechnung der Knotenpunktsgeschwindigkeiten | 90 |
| 6.3 Spannungsintegration und Zeitschrittsteuerung | 100 |
| 6.4 Berechnung der Knotenpunktstemperaturen | 101 |
| 6.5 Strategie des Rechnerprogramms | 104 |
| 6.6 Darstellung und Diskussion der Ergebnisse | 107 |
| | |
| <u>7. Zusammenfassung</u> | 119 |
| | |
| <u>Literaturverzeichnis</u> | 121 |

Bezeichnungen

| | |
|---|---|
| $(\underline{\quad})$ | Vektor im Euklidischen Raum |
| $(\underline{\quad})$ | Tensor 2. Stufe |
| $(\underline{\quad})^{-1}$ | Inverse eines Tensors |
| $(\underline{\quad})^T$ | Transponierte eines Tensors |
| $Sp(\underline{\quad})$ | Spur eines Tensors |
| $\underline{\underline{1}}$ | Einstensor |
| $(\underline{\quad}) \cdot (\underline{\quad})$ | Verjüngendes Produkt |
| $(\underline{\dot{\quad}})$ | Materielle Zeitableitung |
| $(\underline{\overset{\circ}{\quad}})$ | Objektive Zeitableitung |
| $(\underline{\quad})_e (\underline{\quad})_p$ | Elastischer bzw. plastischer Anteil einer tensoriellen Größe |

Alle weiteren, nicht einzeln aufgeführten Bezeichnungen und Abkürzungen werden im Text erläutert oder sind allgemein gebräuchlich.

Für das Rechnen mit Tensoren gelten die in [29] erläuterten Rechenregeln.

1. Einleitung

Die Durchführung quasistatischer Versuche und deren Berechnung geben das tatsächliche Materialverhalten nicht immer richtig wieder. Häufig finden die Belastungen von Bauteilen in Geschwindigkeitsbereichen statt, in denen die Erwärmung des Materials und der Wärmefluß nicht vernachlässigt werden dürfen. Diese thermischen Einflüsse sind vor allem dann zu berücksichtigen, wenn große plastische Formänderungen auftreten. Beispiele hierfür findet man in der Umformtechnik, etwa beim Gesenkschmieden oder Warmwalzen. Wie Versuche über das Materialverhalten (Siegel-Fritsch [1]) zeigen, wird der Werkstoff mit steigender Temperatur immer weicher. Dies führt dazu, daß die Traglast eines Bauteils eher erreicht wird, als bei einem quasistatischen Versuch. Bei den meisten derartig durchgeführten Versuchen hat man die Proben auf eine bestimmte Temperatur erwärmt und die Belastung mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchgeführt, ohne die Temperaturveränderungen während der Versuchsdurchführung zu messen. Die Dissipation eines Teils der plastischen Arbeit während des Versuchsablaufes führt jedoch zu einer Erhöhung der Temperatur.

Die für derartige Versuche gültige DIN Norm [2] läßt eine Abweichung von 3°C für Versuche von Raumtemperatur bis zu 600°C zu. Außerdem darf die Dehngeschwindigkeit 0,3% pro Minute nicht überschreiten. Bei Versuchen, deren Dehngeschwindigkeiten über dem in der DIN Norm angegebenen Wert liegen, wollen wir in dieser Arbeit die thermodynamischen Effekte berücksichtigen. Während der Versuchsdurchführung muß laufend der Temperaturverlauf über der gesamten Probe aufgezeichnet werden. Aufgrund der hohen Dehngeschwindigkeiten ist dies nur mit einer Thermovisionskamera durch Messung der infraroten Wärmestrahlung der Probe zu erfassen.

Versuche dieser Art sind in einer experimentellen Arbeit von Koropp [3] dargestellt. Sie zeigen die lokale Erhöhung der Temperatur an der Einschnürstelle des Zugstabes. Das Auftreten dieser lokalen Einschnürung in der Mitte des Zugstabes ergibt sich bei Koropp aufgrund einer mittig angebrachten Kerbe.

Die Wärmestrahlung und die Wärmeübertragung an die Luft sind in dem zu erwartendem Temperaturbereich sehr klein gegenüber dem Wärmefluß im Werkstoff, so daß wir näherungsweise die Mantelflächen als adiabat annehmen können. An den Stirnflächen hingegen soll die Temperatur konstant gehalten werden, also ein Wärmefluß in die Einspannungen erfolgen. Durch stetige Dissipation von mechanischer Arbeit in Wärme und gleichzeitigem Wärmefluß zu den Einspannungen hin, wird die Probe in der Mitte die höchste Temperatur erreichen. Dies führt dazu, daß dort der Werkstoff weicher wird als am Rand. Uns stellt sich nun die Frage, ob das sich ergebende Temperaturfeld allein zum Beginn einer Einschnürung ausreicht.

Die vorliegende Arbeit soll es uns ermöglichen derartige Versuche nachzurechnen. Als Ergebnis der Berechnungen erhalten wir den zeitlichen Verlauf der Spannungen und Temperaturen der Probe auch für die Einschnürung bis zum Versagen des Materials.

Als Rahmen für die Berechnung thermomechanischer Prozesse, die sich bei solchen Formänderungen abspielen, setzen wir voraus, daß

1. die Körper als klassische Kontinua betrachtet werden können, deren Kinematik durch die Angabe der Bewegung eines Körperpunktes in Raum und Zeit vollständig beschreibbar ist, und
2. die einzelnen Körperelemente als thermodynamische Systeme angesehen werden können, deren Zustand durch

die Angabe der Zahlenwerte eines endlichen Satzes von Zustandsgrößen eindeutig festlegbar ist.

Des Weiteren soll noch kurz auf die mathematische und numerische Bearbeitung eingegangen werden. Die mathematische Lösung führt auf ein partielles Differentialgleichungssystem für die Temperaturen und die Verzerrungsgeschwindigkeiten. Das System wird entkoppelt in ein rein mechanisches und in ein thermodynamisches System. Beide Differentialgleichungssysteme werden mit Hilfe der Finite-Element-Methode in lineare Gleichungssysteme umgewandelt und unabhängig voneinander gelöst. Es wird jeweils zuerst ein isothermer Belastungsschritt und anschließend ein thermischer Zeitschritt gerechnet. Die während des Belastungsschrittes durch plastische Formänderungen aufbrachte mechanische Arbeit wird im thermischen Zeitschritt als Wärmequelle berücksichtigt. Die während des thermischen Schrittes ermittelten Temperaturen dienen im Belastungsschritt als Parameter zur Bestimmung der Werkstoffkenngrößen. Abschließend soll noch darauf hingewiesen werden, daß die gesamte Herleitung der Gleichungen für ein rotationssymmetrisches System durchgeführt wurde. Falls nicht im Einzelnen vermerkt, sind sämtliche Gleichungen in dieser Form auch für ein ebenes System anwendbar.

2. Stoffunabhängige Gleichungen

2.1 Allgemeines

Da das erstellte Programmsystem sowohl für ebene als auch für axialsymmetrische Systeme anwendbar sein soll, wird die gesamte Herleitung in Zylinderkoordinaten durchgeführt. Die Vorgabe eines Parameters ermöglicht dann den Übergang von (r, φ, z) auf das kartesische System (X^1, X^2, X^3) . Das Gesamtproblem soll mit Hilfe einer Finite-Element-Methode gelöst werden. Die Gleichungen für die Verzerrungsgeschwindigkeiten und deren Ableitungen werden so hergeleitet, daß sie nur noch von der Geometrie und den Knotenpunktgeschwindigkeiten der Elemente abhängen.

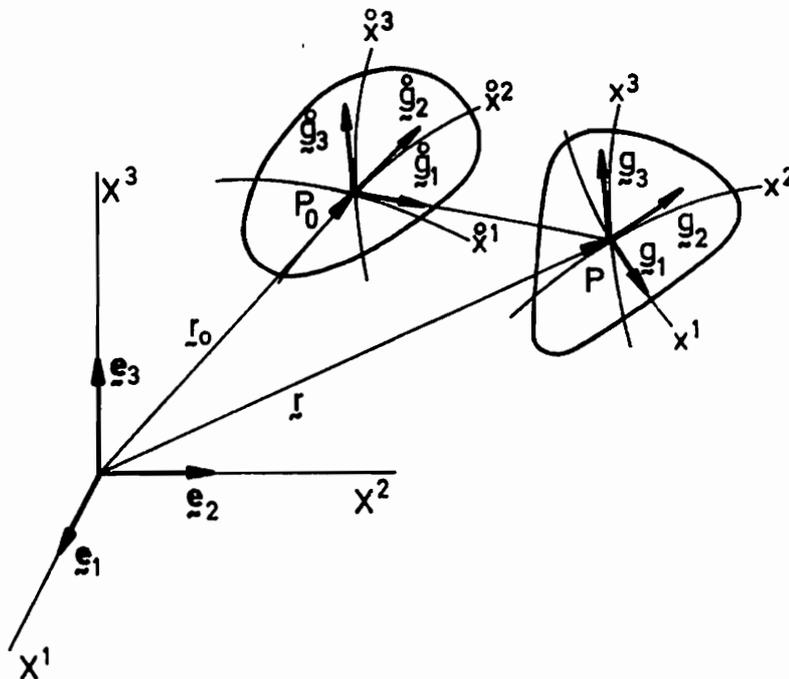


Abb. 1: Deformationszustand

2.2 Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem X^α mit den Basisvektoren \underline{e}_α definieren wir ein raumfestes krummliniges Koordinatensystem x^i mit den Basisvektoren \underline{g}_i .

$$x^i = x^i(X^\alpha) \quad (2.1)$$

Für jeden Punkt des Raumes mit dem dazugehörigem Ortsvektor \underline{r} ergeben sich im krummlinigen Koordinatensystem die kovarianten Basisvektoren nach [29] zu

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x^i} \quad (2.2)$$

Der Ortsvektor zum Punkt x^i lautet

$$\underline{r} = X^\alpha \underline{e}_\alpha \quad (2.3)$$

Durch Einsetzen in Gl.(2.2) erhalten wir für die Basisvektoren des krummlinigen Koordinatensystems

$$\underline{g}_i = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} \underline{e}_\alpha \quad (2.4)$$

Über die Beziehung

$$\underline{g}^k \underline{g}_i = \delta_i^k \quad (2.5)$$

werden die reziproken Basisvektoren \underline{g}^k definiert. Dabei ist δ_i^k das Kroneckersymbol, das für $i=k$ den Wert 1 und sonst den Wert 0 ergibt. Durch skalare Multiplikation der Basisvektoren erhalten wir die Metrik in kovarianter und kontravarianter Form.

$$\begin{aligned}\underline{g}_i \underline{g}_j &= g_{ij} \\ \underline{g}^k \underline{g}^l &= g^{kl}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Diese sind zum Herauf- bzw. Herunterziehen der Indizes erforderlich.

Die Lage eines Körperpunktes x^i im krummlinigen Koordinatensystem wird beschrieben durch

$$x^i = x^i(\overset{\circ}{x}^k, t), \tag{2.7}$$

wobei $\overset{\circ}{x}^k$ die anfängliche Position des betreffenden Körperpunktes festlegt.

Als Maß für die Verzerrung führen wir den Deformationsgradienten ein.

$$\underline{F} = \frac{\partial x^i}{\partial \overset{\circ}{x}^k} \underline{g}_i \overset{\circ}{\underline{g}}^k = F^i_{\cdot k} \underline{g}_i \overset{\circ}{\underline{g}}^k; \quad \overset{\circ}{g}^i = g^i(\overset{\circ}{x}^k) \tag{2.8}$$

Die Geschwindigkeit eines Körperpunktes x^i erhalten wir unter Beachtung von Gl. (2.3) zu

$$\underline{V} = \frac{D}{dt} \underline{r} = V^i \underline{g}_i, \tag{2.9}$$

mit der Ableitung

$$V^i = \frac{\partial x^i}{\partial t} . \quad (2.10)$$

Den Geschwindigkeitsgradienten erhalten wir aus der Beziehung

$$\text{Grad } \underline{V} = \underline{\underline{U}} = V^i|_k \underline{g}_i \underline{g}^k , \quad (2.11)$$

wobei $V^i|_k$ die kovariante Ableitung bezeichnet.

Aus dem Geschwindigkeitsgradienten läßt sich durch Aufspalten der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit $\underline{\underline{D}}$ als symmetrischer Teil und der die Starrkörperrotation beschreibende Tensor $\underline{\underline{W}}$ als antimetrischer Anteil herleiten.

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}^T) \quad (2.12)$$

$$\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{U}}^T) .$$

Die Maßzahlen von $\underline{\underline{D}}$ und $\underline{\underline{W}}$ ergeben sich zu

$$d_k^i = \frac{1}{2} (V^i|_k + V_k|'i) \quad (2.13)$$

$$\omega_{\cdot k}^i = \frac{1}{2} (V^i|_k - V_k|'i) ,$$

wobei sich die kontravariante Ableitung $V_k|{}^i$ aus

$$V_k|{}^i = g_{kr} V^r|{}_j g^{ji} \quad (2.14)$$

bestimmen läßt.

Die in Gl.(2.14) enthaltenen Metrikkoeffizienten können wir gemäß Gl.(2.6) für unser krummliniges Koordinatensystem

$$X^i = (r, \varphi, z) \quad (2.15)$$

bestimmen zu

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Wir führen ein beliebiges kovariantes, mit den Randbedingungen verträgliches Geschwindigkeitsfeld ein.

$$\underline{V} = V_i g^i = u g^1 + v g^2 + w g^3 . \quad (2.17)$$

Durch Überschieben mit der kontravarianten Metrik in Gl.(2.16) erhalten wir für den Geschwindigkeitsvektor eines Körperpunktes in kontravarianter Form

$$V^i = (u, \frac{v}{r^2}, w) \quad (2.18)$$

und daraus die partielle Ableitung der Geschwindigkeit

$$V^i_{,k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \varphi} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial \frac{v}{r^2}}{\partial r} & \frac{\partial \frac{v}{r^2}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \frac{v}{r^2}}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial \varphi} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{matrix} i=1 \\ \\ \end{matrix} \quad (2.19)$$

Da sich unsere Betrachtungen auf axialsymmetrische Probleme beschränken sollen und Torsion ausgeschlossen ist, gelten die Einschränkungen:

1. Die Spannungen und Verzerrungen sind unabhängig von dem Winkel φ .
2. Die Körperpunkte bewegen sich nur in axialer und radialer Richtung, d.h. die Tangentialkomponente der Körperpunktgeschwindigkeiten ist gleich Null zu setzen.

Damit folgt für V^i

$$V^i = (u, 0, w) \quad (2.20)$$

und für deren partielle Ableitung

$$V^i{}_{,k} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial r} & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right] \begin{array}{l} i=1 \\ \\ \\ k=1 \end{array} . \quad (2.21)$$

Die Maßzahlen des Geschwindigkeitsgradienten gemäß Gl.(2.11) ergeben sich als kovariante Ableitung

$$V^i{}_{|k} = V^i{}_{,k} + \Gamma^i{}_{km} V^m . \quad (2.22)$$

Hierin bezeichnen die $\Gamma^i{}_{km}$ die Christoffelsymbole

$$\Gamma^i{}_{km} = \frac{1}{2} g^{in} (g_{mn,k} + g_{nk,m} - g_{km,n}) , \quad (2.23)$$

die es uns ermöglichen, die Ableitungen der Basisvektoren durch die Basisvektoren selbst auszudrücken.

Die von Null verschiedenen Christoffelsymbole lauten:

$$\Gamma^1{}_{22} = -r ; \quad \Gamma^2{}_{12} = \frac{1}{r} ; \quad \Gamma^2{}_{21} = \frac{1}{r} . \quad (2.24)$$

Errechnen wir die kovariante Ableitung nach Gl.(2.22) unter Verwendung der Christoffelsymbole in Gl.(2.24) so erhalten wir für den Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit

$$d_k^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{matrix} i=1 \\ \\ k=1 \end{matrix} \quad (2.25)$$

und für den Tensor der Rotationsgeschwindigkeit

$$\omega_{\cdot k}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} i=1 \\ \\ k=1 \end{matrix} \quad (2.26)$$

2.3 Beschreibung der Deformation

Wie bereits in der Einleitung angesprochen, soll das zu lösende Gleichungssystem die Geschwindigkeiten der Knotenpunkte der Elemente ergeben. Es ist daher erforderlich, die in dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor enthaltenen Komponenten durch die Geschwindigkeiten der Knotenpunkte auszudrücken. Wir benötigen für die Komponenten der Verzerrungsgeschwindigkeiten einen Ausdruck in der Form

$$d_k^i = (\dots) \underline{v}_k, \quad (2.27)$$

wobei \underline{v}_k die Knotenpunktsgeschwindigkeiten der Knotenpunkte der Elemente sind. Da die Komponenten d_k^i die Ableitungen der Geschwindigkeiten enthalten, suchen wir die Transformation, die es uns ermöglicht, die Ableitungen der Geschwindigkeiten innerhalb eines Elementes durch die Knotenpunktsgeschwindigkeiten selbst auszudrücken.

Wir wählen für die Koordinaten einen isoparametrischen Ansatz der Form

$$r = [h_1, h_2, h_3, h_4] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$z = [h_1, h_2, h_3, h_4] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix},$$

mit den Ansatzfunktionen, wie sie in Abb. 2 dargestellt sind.

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ h_2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \\ h_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \\ h_4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \tag{2.29}$$

und r_i, z_i als Koordinaten der Eckpunkte des Elements im (r, φ, z) System.

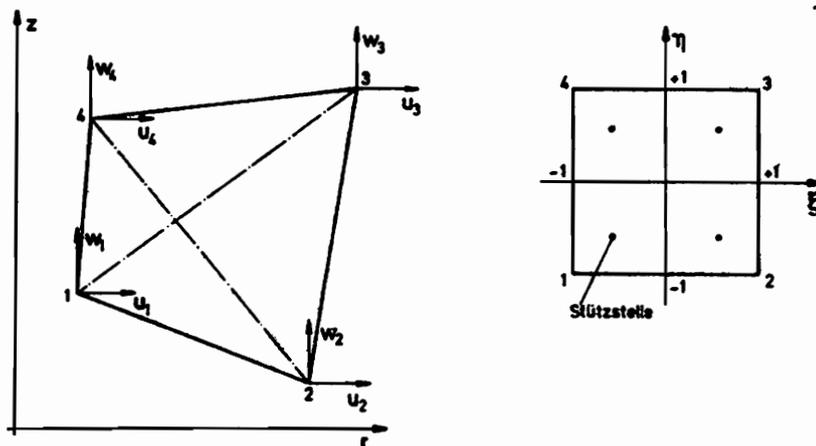


Abb. 2: Isoparametrischer Ansatz für ein Element

Genauso erhalten wir für die Geschwindigkeitskomponenten die Transformation

$$u = [h_1, h_2, h_3, h_4] \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$
$$w = [h_1, h_2, h_3, h_4] \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

mit u_i, w_i als Komponenten der Knotenpunktsgeschwindigkeiten.

Wir führen als Differentialoperatoren ein

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial r}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

oder in Matrizenform dargestellt

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Abgekürzt können wir schreiben

$$\underline{p} = \underline{J} \cdot \underline{q} \quad (2.33)$$

Damit erhalten wir für die Ableitungen der Geschwindigkeiten im transformierten System

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial h_1}{\partial \xi} u_1 + \frac{\partial h_2}{\partial \xi} u_2 + \frac{\partial h_3}{\partial \xi} u_3 + \frac{\partial h_4}{\partial \xi} u_4 \\
 \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial h_1}{\partial \eta} u_1 + \frac{\partial h_2}{\partial \eta} u_2 + \frac{\partial h_3}{\partial \eta} u_3 + \frac{\partial h_4}{\partial \eta} u_4 \\
 \frac{\partial w}{\partial \xi} &= \frac{\partial h_1}{\partial \xi} u_1 + \frac{\partial h_2}{\partial \xi} u_2 + \frac{\partial h_3}{\partial \xi} u_3 + \frac{\partial h_4}{\partial \xi} u_4 \\
 \frac{\partial w}{\partial \eta} &= \frac{\partial h_1}{\partial \eta} u_1 + \frac{\partial h_2}{\partial \eta} u_2 + \frac{\partial h_3}{\partial \eta} u_3 + \frac{\partial h_4}{\partial \eta} u_4
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

und als Matrizen geschrieben

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \xi} & \frac{\partial h_2}{\partial \xi} & \frac{\partial h_3}{\partial \xi} & \frac{\partial h_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_1}{\partial \eta} & \frac{\partial h_2}{\partial \eta} & \frac{\partial h_3}{\partial \eta} & \frac{\partial h_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \\ u_4 & w_4 \end{bmatrix} .
 \tag{2.35}$$

Hierin sind bereits die Ableitungen der Geschwindigkeiten durch die Knotenpunktsgeschwindigkeiten ausgedrückt.

Gemäß Gl. (2.33) ergibt sich mit Gl. (2.35) für \underline{q} und \underline{p}

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \underline{p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} .
 \tag{2.36}$$

Stellt man Gl. (2.33) nach \underline{q} um

$$\underline{q} = \underline{J}^{-1} \underline{P} \quad (2.37)$$

ergibt sich ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \varphi} & \frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

oder durch Einsetzen von Gl. (2.35)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \underline{P} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \\ u_3 & w_3 \\ u_4 & w_4 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Abgekürzt kann man auch schreiben

$$\underline{B} = \underline{J}^{-1} \underline{P} = \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Damit folgt für die partielle Ableitung der Geschwindigkeit

$$V_{ik}^i = \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \underline{V}_k \quad (2.41)$$

Um die numerische Verarbeitung zu erleichtern, werden wir die beiden Hilfsvektoren $\underline{a}, \underline{b}$ die bisher die Matrix \underline{B} bildeten, als Zeilenvektor schreiben, und die 8 Komponenten der 4 Knotenpunktsgeschwindigkeiten als einen Spaltenvektor darstellen. Um die Ableitungen in der jeweils benötigten Form zu erhalten, müssen die Hilfsvektoren \underline{a} und \underline{b} im neuen Zeilenvektor richtig angeordnet werden.

Für die partielle Ableitung in Gl. (2.21) erhalten wir

$$V_{ik}^i = \begin{bmatrix} (\underline{a}, \underline{0}) & (\underline{0}, \underline{0}) & (\underline{b}, \underline{0}) \\ (\underline{0}, \underline{0}) & (\underline{0}, \underline{0}) & (\underline{0}, \underline{0}) \\ (\underline{0}, \underline{a}) & (\underline{0}, \underline{0}) & (\underline{0}, \underline{b}) \end{bmatrix}_{k=1}^{i=1} \underline{V}_k \quad (2.42)$$

Um den Verzerrungsgeschwindigkeitsgradienten zu bestimmen, benötigen wir noch die kovariante Ableitung gemäß Gl. (2.22). Unter Verwendung der Christoffelsymbole in Gl. (2.24) lautet diese dann

$$V_{ik}^i = \begin{bmatrix} (\underline{a}, \underline{0}) & (\underline{0}, \underline{0}) & (\underline{b}, \underline{0}) \\ (\underline{0}, \underline{0}) & (\frac{\underline{b}, \underline{0}}{r}) & (\underline{0}, \underline{0}) \\ (\underline{0}, \underline{a}) & (\underline{0}, \underline{0}) & (\underline{0}, \underline{b}) \end{bmatrix}_{k=1}^{i=1} \underline{V}_k \quad (2.43)$$

worin \underline{h} die Ansatzfunktionen aus Gl.(2.29) darstellt.

Durch Einsetzen in Gl.(2.13) erhalten wir für die Verzerrungsgeschwindigkeit

$$d_k^i = \begin{bmatrix} (\underline{a}, \underline{0}) & (\underline{0}, \underline{0}) & \frac{\underline{b}, \underline{a}}{2} \\ (\underline{0}, \underline{0}) & \frac{\underline{b}, \underline{0}}{r} & (\underline{0}, \underline{0}) \\ \frac{\underline{b}, \underline{a}}{2} & (\underline{0}, \underline{0}) & (\underline{0}, \underline{b}) \end{bmatrix} \underline{V}_k \quad (2.44)$$

und für die Rotationsgeschwindigkeit

$$\omega_k^i = \begin{bmatrix} (\underline{0}, \underline{0}) & (\underline{0}, \underline{0}) & \frac{\underline{b}, -\underline{a}}{2} \\ (\underline{0}, \underline{0}) & (\underline{0}, \underline{0}) & (\underline{0}, \underline{0}) \\ -\frac{\underline{b}, -\underline{a}}{2} & (\underline{0}, \underline{0}) & (\underline{0}, \underline{0}) \end{bmatrix} \underline{V}_k \quad (2.45)$$

2.4 Spannungstensoren

In diesem Abschnitt wollen wir den Spannungstensor und dessen von Null verschiedene Komponenten während des Einschnürvorgangs betrachten.

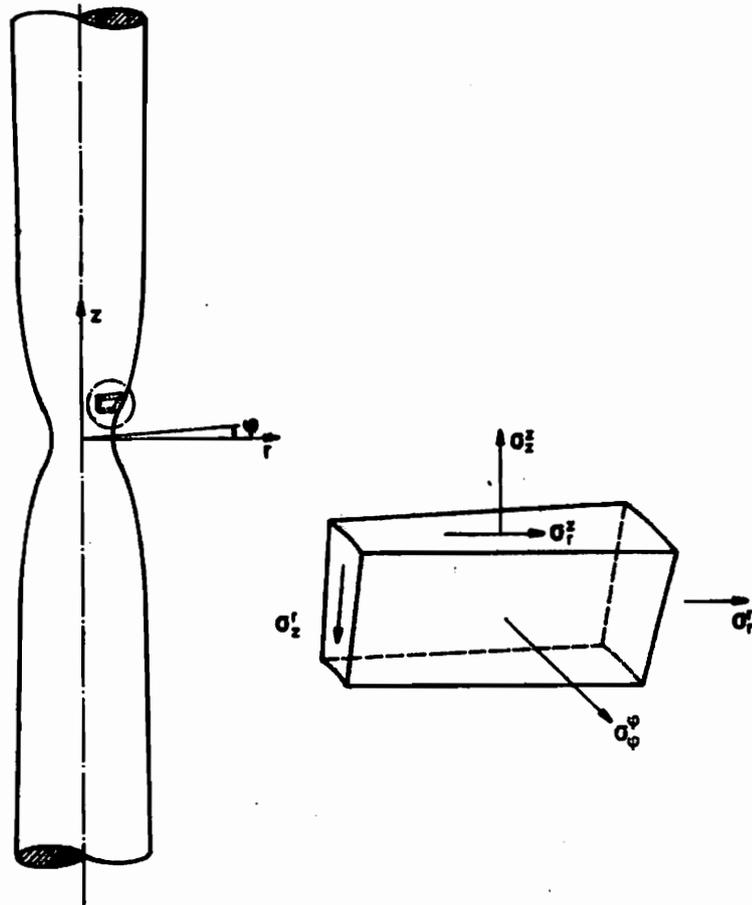


Abb.3: Spannungskomponenten

Die Komponenten $\sigma_{\varphi}^r, \sigma_r^{\varphi}, \sigma_{\varphi}^z, \sigma_z^{\varphi}$ sind gleich Null zu setzen, da wir die Torsion des Probekörpers ausschließen wollen.

Mit der Definition des Cauchy Spannungstensors

$$d\vec{f} = \underline{\underline{S}} \cdot d\vec{A} \quad ,$$

(2.46)

in der \underline{dA} einen Flächenvektor der Fläche dA und \underline{df} die darauf senkrecht stehende Kraft bezeichnen, kommen wir zu dessen Komponenten

$$\underline{S} = \sigma_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k, \quad (2.47)$$

die eingesetzt dann ergeben

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} \sigma_r^r & 0 & \sigma_z^r \\ 0 & \sigma_\varphi^\varphi & 0 \\ \sigma_r^z & 0 & \sigma_z^z \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

Zwischen dem gewichteten Cauchy Spannungstensor

$$\underline{S}_K = S_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k \quad (2.49)$$

und dem Cauchy Spannungstensor besteht der Zusammenhang

$$\underline{S}_K = J \cdot \underline{S}, \quad (2.50)$$

wobei die Jacobi Determinante

$$J = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (2.51)$$

allgemein die Volumenänderung ausdrückt. Setzen wir näherungsweise

$$\frac{\varrho_0}{\varrho} = 1, \quad (2.52)$$

so erhalten wir mit

$$J = 1 \quad (2.53)$$

für Gl. (2.50)

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_K. \quad (2.54)$$

Für die Spannungsgeschwindigkeit hingegen gilt

$$\dot{\underline{\underline{S}}}_K = \dot{\underline{\underline{S}}} + \underline{\underline{S}} \cdot \text{Sp}(\underline{\underline{u}}). \quad (2.55)$$

Wir wollen an dieser Stelle noch den Lagrang'schen Spannungstensor bestimmen, der insbesondere auch zur Formulierung der Randbedingungen benötigt wird, da ja im Allgemeinen die Lage der Randflächen des deformierten Körpers unbekannt sind. Er ist definiert durch

$$d\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{S}}_L \cdot d\underline{\underline{A}}_0. \quad (2.56)$$

Das Flächenelement im Körper, das im deformierten Zustand durch \underline{dA} gekennzeichnet ist, wird im undeformierten Zustand durch den Flächennormalenvektor \underline{dA}_0 beschrieben.

Die Beziehung zwischen dem Lagrang'schen Spannungstensor und dem Cauchy Spannungstensor lautet

$$\underline{S}_L = J \underline{S} (\underline{F}^{-1})^T. \quad (2.57)$$

Hierin bezeichnet \underline{F}^{-1} die Inverse des Deformationsgradienten \underline{F} aus Gl. (2.8).

Den Spannungsdeviator erhalten wir aus dem gewichteten Cauchy Spannungstensor

$$\underline{T}_K = \underline{S}_K - \frac{1}{3} \text{Sp}(\underline{S}_K) \cdot \underline{1}. \quad (2.58)$$

Eine weitere Betrachtung der Spannungen und Spannungsgeschwindigkeiten folgt im nächsten Abschnitt.

3. Stoffgesetz für den isothermen Belastungsschritt

3.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt soll das Formänderungsgesetz für elastisches und plastisches Materialverhalten sowie die Fließbedingung aufgestellt werden. Mit Hilfe dieser und weiterer Beziehungen leiten wir die Gleichungen für die Spannungsgeschwindigkeit her, die uns später ein Gleichungssystem zur Berechnung der Knotenpunktsgeschwindigkeiten im isothermen Belastungsschritt liefern.

3.2 Grundgleichungen

Die gesamte Verzerrungsgeschwindigkeit $\underline{\underline{D}}$ läßt sich aufteilen in einen elastischen und in einen plastischen Anteil (siehe hierzu auch Lehmann [4]).

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_e + \underline{\underline{D}}_p . \quad (3.1)$$

Die elastische Verzerrungsgeschwindigkeit bestimmen wir näherungsweise aus

$$\underline{\underline{D}}_e = \frac{1}{2G} \overset{0}{\underline{\underline{T}}}_k + \left\{ \frac{1}{9K} s_p(\underline{\underline{S}}) + \alpha \dot{\varphi} \right\} \underline{\underline{1}} \quad (3.2)$$

oder in Komponenten geschrieben

$$d_{ek}^i = \frac{1}{2G} t_{k|_0}^i + \left\{ \frac{1}{9K} \dot{s}_r + \alpha \dot{\varphi} \right\} d_k^i . \quad (3.3)$$

Die Größe $\overset{\circ}{\underline{\underline{T}}}_K$ gibt die objektive Zeitableitung des Spannungsdeviators aus Gl. (2.58) nach Jaumann an.

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{T}}}_K = \underline{\underline{S}}_K - \frac{1}{3} S_P(\underline{\underline{S}}_K) \underline{\underline{1}} \quad (3.4)$$

Der plastische Anteil der gesamten Verzerrungsgeschwindigkeit folgt nach der erweiterten Normalenregel

$$\underline{\underline{D}}_P = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{S}}_K} + \alpha \overset{\circ}{\underline{\underline{T}}}_K, \quad (3.5)$$

oder in Komponenten dargestellt als

$$d_{PK}^i = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial S_K^i} + \alpha t_{K|0}^i. \quad (3.6)$$

In den Gleichungen für die Verzerrungsgeschwindigkeit beschreibt K den Kompressionsmodul

$$K = 2G \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)}, \quad (3.7)$$

der über die Querkontraktionszahl ν mit dem Schubmodul verknüpft ist. Ersetzt man den Kompressionsmodul geeignet, folgt für die gesamte Verzerrungsgeschwindigkeit gemäß Gl. (3.1)

$$d_K^i = \left(\frac{1}{2G} + \alpha \right) t_{K|0}^i + \left(\frac{1}{2G} \cdot \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \right) \cdot \left(\dot{S}_F + \alpha \dot{\nu} \right) d_K^i + \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial S_K^i}. \quad (3.8)$$

Die allgemeine Formulierung der Fließbedingung soll die mit den plastischen Formänderungen verbundene Werkstoffverfestigung sowie die Erweichung durch Erhöhung der Temperatur berücksichtigen. Wir müssen auch damit rechnen, daß infolge der plastischen Formänderungen der Werkstoff anisotrop wird (Bauschinger-Effekt). Dies führt zu einem allgemeinen Ansatz der Form

$$F(\sigma_k^i, w_p, \nu, \alpha_k^i) = 0. \quad (3.9)$$

Die Größen w_p, ν, α_k^i sind sogenannte interne Parameter, die den Verfestigungszustand festlegen und von der Formänderungsgeschichte abhängen.

Wir benutzen die Fließbedingung nach v. Mises mit isotroper Verfestigung ($\alpha_k^i = 0$) da eine Belastungsumkehr ausgeschlossen ist. Die Fließbedingung lautet dann

$$F = t_k^i t_i^k - k^2(w_p, \nu) = 0. \quad (3.10)$$

Durch partielles Ableiten der Fließbedingung nach σ_k^i erhalten wir

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_k^i} = 2 t_k^i. \quad (3.11)$$

Diese ergibt eingesetzt in Gl. (3.8)

$$d_k^i = \left(\frac{1}{2G} + \alpha\right) t_k^i|_0 + \left(\frac{1}{2G} \cdot \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \dot{\sigma}_r + \alpha \dot{\nu}\right) \sigma_k^i + \dot{\lambda} \cdot 2 t_k^i. \quad (3.12)$$

Als nächstes ist nun noch die skalare Größe $\dot{\lambda}$ explizit zu bestimmen. Da die Fließbedingung während der ganzen Verformung gültig bleibt, also $F=0$ für alle Zeiten t erfüllt ist, muß gelten

$$\dot{F} = 0 . \quad (3.13)$$

Damit haben wir eine Bedingung zur Bestimmung von $\dot{\lambda}$.
Durch Ableiten der Fließbedingung folgt

$$\dot{F} = t_s^r|_0 t_r^s + t_s^r t_r^s|_0 - \frac{\partial k^2}{\partial w_p} \dot{w}_p - \frac{\partial k^2}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} = 0 . \quad (3.14)$$

Für die in [4] definierte Zeitableitung der plastischen Arbeit

$$\dot{w}_p = \frac{1}{g_0} t_k^i d_{p i}^k \quad (3.15)$$

ergibt sich durch Einsetzen von

$$\dot{w}_p = \frac{1}{g_0} (2 \dot{\lambda} t_k^i t_i^k + \alpha t_k^i t_i^k|_0) \quad (3.16)$$

und somit für die Zeitableitung der Fließbedingung aus Gl.(3.14) eine Bestimmungsgleichung für $\dot{\lambda}$

$$\begin{aligned} \dot{F} = & 2 t_r^s t_s^r|_0 - \frac{\partial k^2}{\partial w_p} \frac{1}{g_0} (2 \dot{\lambda} t_r^s t_s^r \\ & + \alpha t_r^s t_s^r|_0) - \frac{\partial k^2}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} = 0 . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Da wir das Gesamtproblem in isotherme Belastungsschritte und thermische Zeitschritte aufgeteilt haben, können wir an dieser Stelle die zeitliche Änderung der Temperatur $\dot{\nu} = 0$ setzen. Für die Größe $\dot{\lambda}$ ergibt sich dann

$$\dot{\lambda} = \frac{2 t_r^s t_s^r |_0 - \alpha \frac{1}{g_0} \frac{\partial k^2}{\partial w_p} t_r^s t_s^r |_0}{\frac{2}{g_0} \frac{\partial k^2}{\partial w_p} \cdot t_s^r t_r^s} \quad (3.18)$$

Nach Bruhns [5] kommen wir zur objektiven Zeitableitung des gewichteten Cauchy Tensors mit

$$\dot{\underline{\underline{S}}}_k = 2G \left[\underline{\underline{D}}_e + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Sp}(\underline{\underline{D}}_e) \underline{\underline{1}} \right] \quad (3.19)$$

Setzen wir für $\underline{\underline{D}}_e$ die Gl.(3.1) ein und berücksichtigen plastische Volumenkonstanz, also

$$\text{Sp}(\underline{\underline{D}}_p) = 0 \quad , \quad (3.20)$$

so erhalten wir aus Gl.(3.19) unter gleichzeitiger Verwendung von Gl.(3.5) und Gl.(3.18)

$$\dot{\underline{\underline{S}}}_k = \frac{2G}{1+2G\alpha} \left[\underline{\underline{D}} + \frac{\nu + \frac{2}{3}G\alpha(1+\nu)}{1-2\nu} \right] \quad (3.21)$$

$$\cdot \left[\text{Sp}(\underline{\underline{D}}) \underline{\underline{1}} - \sigma(1-\alpha B) \frac{\text{Sp}(\underline{\underline{T}}_k \underline{\underline{D}})}{\text{Sp}(\underline{\underline{T}}_k^2)} \underline{\underline{T}}_k \right] ,$$

wobei σ und B Materialkonstanten sind, auf die wir später noch genauer eingehen wollen.

Mit Hilfe der Beziehung

$$\dot{\underline{S}}_L = \dot{\underline{S}}_K - \underline{S} \cdot \underline{W} + \underline{W} \cdot \underline{S} - \underline{S} \underline{U}^T \quad (3.22)$$

läßt sich durch Einsetzen von Gl.(2.12) und Gl.(3.21) die zur Lösung des im folgenden Abschnitt erläuterten Potentialansatzes erforderliche Lagrang'sche Spannungsgeschwindigkeit angeben.

$$\dot{\underline{S}}_L = \frac{2G}{1+2G\alpha} \left[\underline{D} + \frac{\nu + \frac{2}{3}G\alpha(1+\nu)}{1-2\nu} \cdot \text{Sp}(\underline{D}) \underline{1} - \sigma(1-\alpha B) \frac{\text{Sp}(\underline{I}_K \underline{D})}{\text{Sp}(\underline{T}_K^2)} \underline{T}_K \right] \quad (3.23)$$

$$\cdot \text{Sp}(\underline{D}) \underline{1} - \sigma(1-\alpha B) \frac{\text{Sp}(\underline{I}_K \underline{D})}{\text{Sp}(\underline{T}_K^2)} \underline{T}_K$$

$$- \underline{S} \underline{D} + \underline{W} \underline{S}$$

3.3 Potentialansatz

Nach Bruhns [5] läßt sich für einen isothermen infinitesimalen Deformationsschritt vom Zustand C_i zum Nachbarzustand C_{i+1} ein Potential

$$E(v) = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \left(\underline{\underline{u}}^T \overset{\text{grad } v}{\underline{\underline{s}}_L} \right) \quad (3.24)$$

angeben. Aufgrund dieser Rechenvorschrift erhalten wir für das Potential mit Gl.(3.23)

$$E(v) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2G}{1+2G\alpha} \left[\operatorname{Sp}(\underline{\underline{D}}^2) + \frac{\nu + \frac{2}{3}G\alpha(1+\nu)}{1-2\nu} \cdot \operatorname{Sp}^2(\underline{\underline{D}}) - \sigma(1-\alpha B) \frac{\operatorname{Sp}^2(\underline{\underline{T}}_k \underline{\underline{D}})}{\operatorname{Sp}(\underline{\underline{T}}_k^2)} \right] - 2 \operatorname{Sp}(\underline{\underline{S}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{D}}) + \operatorname{Sp}(\underline{\underline{S}} \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{u}}) \right\}. \quad (3.25)$$

Die Konfiguration C_{i+1} werde hervorgerufen durch die gegebene Spannungsgeschwindigkeit

$$\underline{\underline{s}}_L \cdot \underline{\underline{n}}_L = \underline{\underline{f}}(v) \quad (3.26)$$

auf dem Teil O_f der Oberfläche des Körpers in der Konfiguration C_i . Für die Randbedingungen gelte

$$\underline{\underline{f}} = \frac{\partial \varphi(v)}{\partial v} \quad (3.27)$$

Sie seien also aus einem Potential herleitbar.

Die Anwendung des Gauß'schen Satzes auf Gl.(3.26) führt dann zu dem Funktional

$$\Pi = \int_V E(v) dV - \int_{O_f} \varphi(v) dO_f, \quad (3.28)$$

dessen Variation nach den Knotenpunktsgeschwindigkeiten

$$d\Pi = 0 \quad (3.29)$$

sein muß.

Wir erhalten durch Variation von Gl.(3.28)

$$d\Pi = \left\{ \int_V \frac{\partial E(v)}{\partial v} dV - \int_{O_f} \frac{\partial \varphi(v)}{\partial v} dO_f \right\} dv = 0. \quad (3.30)$$

Daraus folgt durch Einsetzen von \ddot{f} nach Gl.(3.27)

$$\int_V \frac{\partial E(v)}{\partial v} dV - \int_{O_f} \ddot{f}(v) dO_f = 0. \quad (3.31)$$

Wenn sich das gesamte Volumen des Körpers aus dem Teilvolumen einzelner finiter Elemente zusammensetzt, lassen sich die beiden Integrale auch als Summen Ihrer Teilintegrale bestimmen.

$$\sum_{El.}^{alle} \int_{V_E} \frac{\partial E(v)}{\partial v} dV_E = \sum_{El.}^{alle} \int_{O_f} \dot{f}(v) dO_f \quad (3.32)$$

Die Geschwindigkeiten sind die im Ansatz Gl.(2.41) erstmalig auftauchenden Knotenpunktsgeschwindigkeiten \underline{v}_k der Knotenpunkte der Elemente.

Das Potential soll nun die Form

$$E(\underline{v}_k) = \frac{1}{2} \underline{v}_k^T (\underline{M}_1 + \dots + \underline{M}_i) \underline{v}_k = \frac{1}{2} \underline{v}_k^T \underline{M} \underline{v}_k \quad (3.33)$$

annehmen.

Damit folgt also für die Variation des Funktionals

$$d\pi = \left\{ \sum_{El.}^{alle} \int_{V_E} \frac{\partial}{\partial \underline{v}_k} \left(\frac{1}{2} \underline{v}_k^T \underline{M} \underline{v}_k \right) dV_E \right. \quad (3.34)$$

$$\left. - \sum_{El.}^{alle} \int_{O_f} \dot{f} dO_f \right\} \delta \underline{v}_k = 0 ,$$

oder nach Ausführung dieser Rechnung

$$d\pi = \left\{ \sum_{El.}^{alle} \int_{V_E} \underline{M} dV_E \underline{v}_k - \sum_{El.}^{alle} \dot{\underline{F}} \right\} \delta \underline{v}_k = 0 . \quad (3.35)$$

In der Gleichung ist dann

$$\int_{V_E} \underline{\underline{M}} dV_E = \underline{\underline{St}}_i \quad (3.36)$$

die Steifigkeitsmatrix eines einzelnen Elementes, mit der wir für das Gesamtsystem den Ausdruck

$$\sum_{\substack{\text{all} \\ \text{El.}}} \underline{\underline{St}}_i \underline{\underline{V}}_K = \underline{\underline{F}} \quad (3.37)$$

erhalten. Die Steifigkeitsmatrix $\underline{\underline{St}}_i$ eines Elementes errechnen wir durch numerische Integration gemäß Barthe-Wilson [6] an den vier Stützstellen des Elementes.

An dieser Stelle müssen wir zwischen dem ebenen und dem axialsymmetrischen System unterscheiden. Für das ebene System gilt mit der auf 1 normierten Elementdicke

$$\int_{V_E} \underline{\underline{M}}(\varphi, \eta) dV_E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g(i) g(j) \cdot \underline{\underline{M}}[\varphi(i), \eta(j)] \cdot \det \underline{\underline{J}}[\varphi(i), \eta(j)]. \quad (3.38)$$

$$\underline{\underline{M}}[\varphi(i), \eta(j)] \cdot \det \underline{\underline{J}}[\varphi(i), \eta(j)].$$

Die Steifigkeitsmatrix eines rotationssymmetrischen Elementes hingegen errechnet sich bei normiertem Umfangswinkel aus

$$\int_{V_E} \underline{\underline{M}}(\varphi, \eta) dV_E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g(i) g(j) \cdot \underline{\underline{M}}[\varphi(i), \eta(j)] \cdot \det \underline{\underline{J}}[\varphi(i), \eta(j)] \frac{2\pi}{360} \cdot r. \quad (3.39)$$

In beiden Gleichungen sind $g(i), g(j)$ die Wichtungsfaktoren, die wir für das Vierknotenelement aus [6] entnehmen können. Der Summationsindex n gibt die Anzahl der Stützstellen pro Koordinatenrichtung an, die wir hier mit $n=2$ annehmen wollen.

3.4 Steifigkeitsmatrix

Hier soll nun die Herleitung der Steifigkeitsmatrix eines Elementes aus dem Stoffgesetz und die numerische Vorbereitung gezeigt werden. Zu bestimmen haben wir die Matrix $\underline{\underline{M}}$ aus dem Potential gemäß Gl. (3.33). Ein Vergleich von Gl. (3.25) mit Gl. (3.33) ergibt für die Einzelmatrizen

$$\begin{aligned} \underline{V}_k^T \underline{\underline{M}}_1 \underline{V}_k &= \frac{2G}{1+2G\alpha} \text{Sp}(\underline{\underline{D}}^2), \\ \underline{V}_k^T \underline{\underline{M}}_2 \underline{V}_k &= \frac{2G}{1+2G\alpha} \frac{\nu + \frac{2}{3}G\alpha(1+\nu)}{1-2\nu} \text{Sp}^2(\underline{\underline{D}}), \\ \underline{V}_k^T \underline{\underline{M}}_3 \underline{V}_k &= - \frac{2G\alpha(1-\alpha B)}{1+2G\alpha} \frac{\text{Sp}^2(\underline{\underline{I}}_k \underline{\underline{D}})}{\text{Sp}(\underline{\underline{I}}_k^2)}, \quad (3.40) \\ \underline{V}_k^T \underline{\underline{M}}_4 \underline{V}_k &= - 2 \text{Sp}(\underline{\underline{S}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{D}}), \\ \underline{V}_k^T \underline{\underline{M}}_5 \underline{V}_k &= \text{Sp}(\underline{\underline{S}} \underline{\underline{U}}^T \underline{\underline{U}}). \end{aligned}$$

Die Herleitung der Einzelmatrix $\underline{\underline{M}}_1$ wird hier stellvertretend für alle 5 Matrizen durchgeführt.

Aus Gl.(3.40) folgt mit der Abkürzung

$$f_1 = \frac{2G}{1 + 2Gx} \quad (3.41)$$

für den Ausdruck der Matrix $\underline{\underline{M}}_1$

$$\underline{\underline{V}}_k^T \underline{\underline{M}}_1 \underline{\underline{V}}_k = f_1 \cdot d_k^i d_i^k . \quad (3.42)$$

Gemäß Gl.(2.44) erhalten wir nach Einführung der Komponenten für

$$d_k^i = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & d_3 \\ 0 & d_4 & 0 \\ d_3 & 0 & d_6 \end{bmatrix} . \quad (3.43)$$

Durch Quadrieren der Verzerrungsgeschwindigkeit $\underline{\underline{D}}$ und Berechnung der Spur bekommt man

$$d_k^i d_i^k = d_1^2 + 2d_3^2 + d_4^2 + d_6^2 . \quad (3.44)$$

Die hierin enthaltenen Komponenten d_1, d_3, d_4 und d_6 lassen sich durch einen Vergleich der Gl.(2.44) mit der Gl.(3.43) explizit angeben.

$$d_1^2 = \underline{V}_k^T \begin{pmatrix} \underline{a}^T \\ \underline{0} \end{pmatrix} \cdot (\underline{a}, \underline{0}) \underline{V}_k = \underline{V}_k^T \begin{bmatrix} \underline{a}^T \underline{a} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{V}_k,$$

$$d_3^2 = \underline{V}_k^T \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \underline{b}^T \\ \underline{a}^T \end{pmatrix} \frac{\underline{b}, \underline{a}}{2} \underline{V}_k = \frac{1}{4} \underline{V}_k^T \begin{bmatrix} \underline{b}^T \underline{b} & \underline{b}^T \underline{a} \\ \underline{a}^T \underline{b} & \underline{a}^T \underline{a} \end{bmatrix} \underline{V}_k,$$

(3.45)

$$d_4^2 = \underline{V}_k^T \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \underline{h}^T \\ \underline{0} \end{pmatrix} \frac{\underline{h}, \underline{0}}{r} \underline{V}_k = \frac{1}{r^2} \underline{V}_k^T \begin{bmatrix} \underline{h}^T \underline{h} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \underline{V}_k,$$

$$d_6^2 = \underline{V}_k^T \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{b}^T \end{pmatrix} (\underline{0}, \underline{b}) \underline{V}_k = \underline{V}_k^T \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{b}^T \underline{b} \end{bmatrix} \underline{V}_k.$$

Durch Addition der einzelnen Komponenten gemäß Gl.(3.44) ergibt sich die Einzelmatrix \underline{M}_1 .

$$\underline{M}_1 = \frac{2G}{1+2G\nu} \begin{bmatrix} \underline{a}^T \underline{a} + \frac{\underline{b}^T \underline{b}}{2} + \frac{\underline{h}^T \underline{h}}{r^2} & \frac{\underline{b}^T \underline{a}}{2} \\ \frac{\underline{a}^T \underline{b}}{2} & \frac{\underline{a}^T \underline{a}}{2} + \underline{b}^T \underline{b} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

In ähnlicher Weise errechnen sich auch die Einzelmatrizen \underline{M}_2 - \underline{M}_5 .

Nach Durchführung der Addition

$$\underline{\underline{M}} = \sum_{i=1}^5 \underline{\underline{M}}_i \quad (3.47)$$

folgt die Gesamtmatrix M die auf der nächsten Seite dargestellt ist.

Diese Matrix ist für jede Stützstelle eines Elementes zu bestimmen, dann entsprechend Gl. (3.38) oder Gl. (3.39), je nachdem, ob man ein ebenes oder rotationssymmetrisches System rechnet, zu integrieren und entsprechend Gl. (3.37) zur Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammenzubauen. Ein Gleichungslöser ergibt uns dann bei vorgegebenen Kräfte- und Randbedingungen die Knotenpunktgeschwindigkeiten sämtlicher Knoten des Elementnetzes. Auf die entsprechenden numerischen Verfahren gehen wir später ein.

| | |
|---|--|
| $f_1 \left[\frac{d^2 a}{2} + \frac{b^2 h}{r^2} + f_2 \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right) \right]$ $+ f_3 \left[r_1^2 \frac{d^2 a}{2} + r_1 r_3 \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right) + r_3^2 \frac{b^2}{r} \right]$ $+ \frac{r_1 r_6}{r} \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right) + \frac{r_1 r_6}{r} \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right) + \frac{r_1^2 r_6}{r^2} \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right)$ $- 2 \left[S_1 \frac{d^2 a}{4} + S_3 \frac{d^2 a}{2} + \frac{b^2}{2} + S_6 \frac{d^2 a}{4} \right]$ $+ S_4 \frac{d^2 a}{2} + 2 S_5 \frac{d^2 b}{2} + S_7 \frac{d^2 b}{2} + S_8 \frac{d^2 b}{2}$ | $f_1 \frac{d^2 a}{2} + f_2 \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right)$ $+ f_3 \left[r_1^2 \frac{d^2 a}{2} + r_3^2 \frac{b^2}{r} + \frac{r_1 r_6}{r} \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right) \right]$ $+ r_1 r_6 \frac{d^2 b}{2} + r_3 r_6 \frac{d^2 b}{2} + \frac{r_1 r_6}{r} \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right)$ $- 2 \left[S_1 \frac{d^2 a}{4} + S_3 \frac{d^2 a}{2} + \frac{b^2}{2} + S_6 \frac{d^2 a}{4} \right]$ |
| $f_1 \frac{d^2 b}{2} + f_2 \left[\frac{b}{r} \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right) \right]$ $+ f_3 \left[r_1 r_3 \frac{d^2 a}{2} + r_3^2 \frac{d^2 b}{2} + \frac{r_1 r_6}{r} \frac{d^2 b}{r} \right]$ $+ r_1 r_6 \frac{d^2 a}{2} + r_3 r_6 \frac{d^2 b}{2} + \frac{r_1 r_6}{r} \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right)$ $- 2 \left[S_1 \frac{d^2 b}{4} + S_3 \frac{d^2 a}{2} + \frac{b^2}{2} + S_6 \frac{d^2 b}{4} \right]$ | $f_1 \left[\frac{d^2 a}{2} + \frac{b^2}{r} \right] + f_2 \frac{d^2 b}{2}$ $+ f_3 \left[r_3^2 \frac{d^2 a}{2} + r_3 r_6 \left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r} \right) + r_3^2 \frac{d^2 b}{2} \right]$ $- 2 \left[S_1 \frac{d^2 a}{4} + S_3 \frac{d^2 b}{2} + S_6 \left(\frac{d^2 a}{4} + \frac{d^2 b}{2} \right) \right]$ $+ S_4 \frac{d^2 a}{2} + 2 S_5 \frac{d^2 a}{2} + S_6 \frac{d^2 b}{2}$ |

$$f_1 = \frac{2G}{1+2G\kappa}$$

$$f_2 = f_1 \frac{v + \frac{2}{3}G\kappa(1+v)}{1-2v}$$

$$f_3 = \frac{2G\delta(1-\kappa B)}{(1+2G\kappa)Sp(\frac{1}{2})}$$

Diese Gleichung wollen wir in die Form

$$\underline{\dot{S}} = \underline{N} \underline{V}_k \quad (3.52)$$

bringen, wozu die Matrix \underline{N} zu bestimmen ist. Da gemäß Gl. (2.47) der Cauchy Spannungstensor symmetrisch ist, wollen wir, auch um später Speicherplätze zu sparen, einen dem Spannungstensor äquivalenten Vektor einführen.

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & S_3 \\ 0 & S_4 & 0 \\ S_3 & 0 & S_6 \end{bmatrix}; \quad \underline{s} = \begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \\ S_3 \\ S_4 \\ 0 \\ S_6 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Genauso werden der Spannungsdeviator \underline{T}_k

$$\underline{T}_k = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & T_3 \\ 0 & T_4 & 0 \\ T_3 & 0 & T_6 \end{bmatrix}; \quad \underline{t}_k = \begin{bmatrix} T_1 \\ 0 \\ T_3 \\ T_4 \\ 0 \\ T_6 \end{bmatrix}, \quad (3.54)$$

und die Verzerrungsgeschwindigkeit \underline{D}

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & d_3 \\ 0 & d_4 & 0 \\ d_3 & 0 & d_6 \end{bmatrix}; \quad \underline{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ d_3 \\ d_4 \\ 0 \\ d_6 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

in Vektoren umgewandelt.

Nach Gl.(3.51) läßt sich die Spannungsgeschwindigkeit in 7 Summanden aufteilen, die im einzelnen durch Vektoren auszudrücken sind. Am ersten Term wird stellvertretend die Umrechnung gezeigt.

$$\frac{2G}{1+2G\alpha} \underline{D} = \frac{2G}{1+2G\alpha} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{b}{2} & \frac{a}{2} \\ \frac{b}{r} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \underline{V}_k \quad (3.56)$$

Man erhält den jeweiligen Vektor durch Einsetzen der Gl.(2.44) und Gl.(2.45) sowie durch Eliminieren der Knotenpunktsgeschwindigkeiten \underline{V}_k . Die Gesamtmatrix \underline{N} ist in Gl.(3.58) auf der nächsten Seite dargestellt. Man erhält sie durch Addition der einzelnen Summanden aus Gl.(3.51).

Da wir nun die Spannungsgeschwindigkeit des momentanen Zeitschrittes kennen, können wir die neuen Spannungen der Konfiguration C_{i+1} aus denen der Konfiguration C_i mit Hilfe der Heun'schen Gleichung ermitteln.

$$\underline{s}_{i+1} = \underline{s}_i + \frac{\Delta t}{2} (\underline{\dot{s}}_{i+1} + \underline{\dot{s}}_i) \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned}
 \vec{N} = & \left\{ \frac{2G}{1+2G\kappa} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{a} \\ \bar{b} & 0 \\ \bar{h} & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{bmatrix} + \frac{2G}{1+2G\kappa} \cdot \frac{\nu + \frac{2}{3}G\kappa(1+\nu)}{1-2\nu} \cdot \begin{bmatrix} \bar{a} + \frac{\bar{h}}{r} & \bar{b} \\ 0 & \bar{a} + \frac{\bar{h}}{r} \\ \bar{a} + \frac{\bar{h}}{r} & \bar{b} \\ 0 & \bar{a} + \frac{\bar{h}}{r} \\ \bar{a} + \frac{\bar{h}}{r} & \bar{b} \end{bmatrix} - \frac{2G}{1+2G\kappa} \cdot \frac{\delta(1-\kappa B)}{Sp(\vec{I}_k)} \cdot \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_3 \\ S_3 & 0 \\ S_4 & 0 \\ 0 & S_6 \end{bmatrix} \right\} \\
 & \cdot \left[\begin{array}{l} T_1 \\ 0 \\ T_3 \\ T_4 \\ 0 \\ T_6 \end{array} \right] \cdot (T_1 \bar{a} + T_3 \bar{b} + T_4 \frac{\bar{h}}{r}, T_3 \bar{a} + T_6 \bar{b}) + \\
 & \left[\begin{array}{l} S_3 \\ 0 \\ \frac{S_6 - S_4}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -S_3 \end{array} \right] \cdot (\bar{b}, -\bar{a}) - \\
 & \left. \left[\begin{array}{l} S_1 \\ 0 \\ S_3 \\ S_4 \\ 0 \\ S_6 \end{array} \right] \cdot (\bar{a} + \frac{\bar{h}}{r}, \bar{b}) \right\}
 \end{aligned}$$

(3.58)

3.6 Verfestigungsgesetz

Zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix der Elemente und zur Durchführung der Spannungsintegration benötigen wir noch die Werkstoffkenngrößen ρ_0 , G , α und σ . Außerdem ist die Kenntnis des Verfestigungsgesetzes

$$k^2 = k^2(w_p, \vartheta) \quad (3.59)$$

von Bedeutung. Die Temperatur ϑ geht hier als fester Parameter ein und wird im thermischen Zeitschritt jeweils neu berechnet. Die Größe ρ_0 als Dichte im Ausgangszustand wollen wir als konstant annehmen (Gl. 2.52). Der Schubmodul G ist als Funktion der Temperatur zu sehen. Die den Verfestigungszustand beschreibende Größe σ werden wir aus dem Verfestigungsansatz ermitteln.

Aus der Fließbedingung Gl. (3.10) ergibt sich mit Gl. (3.4) für den einachsigen Zugversuch die Verfestigung

$$k^2 = \frac{2}{3} \sigma^2. \quad (3.60)$$

Um das Verfestigungsgesetz gemäß Gl. (3.59) aufstellen zu können, müssen wir die plastische Arbeit ermitteln.

Die gesamte Verzerrungsleistung berechnet sich aus

$$W = \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon, \quad (3.61)$$

wobei der elastische Anteil ausdrückbar ist durch

$$W_e = \frac{\sigma^2}{2 E g_0} \quad (3.62)$$

Subtrahieren wir den elastischen Anteil gemäß Gl.(3.62) folgt für die plastische Verzerrungsarbeit

$$W_p = \frac{1}{g_0} \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon - \frac{\sigma^2}{2 E g_0} \quad (3.63)$$

Die Gesamtarbeit läßt sich durch numerische Integration aus dem Spannungs-Dehnungsdiagramm (Abb.4) für die Temperaturen $\vartheta_R = 23,7^\circ\text{C}$ (gemessene Raumtemperatur bei Versuchsdurchführung) und $\vartheta_1 = 150^\circ\text{C}$ bestimmen. Mit dem dazugehörigen k^2 aus Gl.(3.60), das nur von den Spannungen und Temperaturen abhängt, können wir die Verfestigungskurve $k^2 = k^2(w_p, \vartheta)$ auftragen (Abb.5).

Da wir zur Bestimmung der Verfestigungsparameter das Verfestigungsgesetz in analytischer Form benötigen, machen wir einen geeigneten Ansatz durch 3 Punkte

$$k^2 = a \left(\frac{g_0}{2G} w_p \right)^c + k_0^2 \quad (3.64)$$

Die Konstanten sind nun für die beiden Versuchstemperaturen zu bestimmen. Ihre Temperaturabhängigkeit wird mit guter Näherung in diesem Bereich als linear angenommen. Wir bekommen für den gewählten Probenwerkstoff Al 99 (Werkstoff Nr. 3.0205.08)

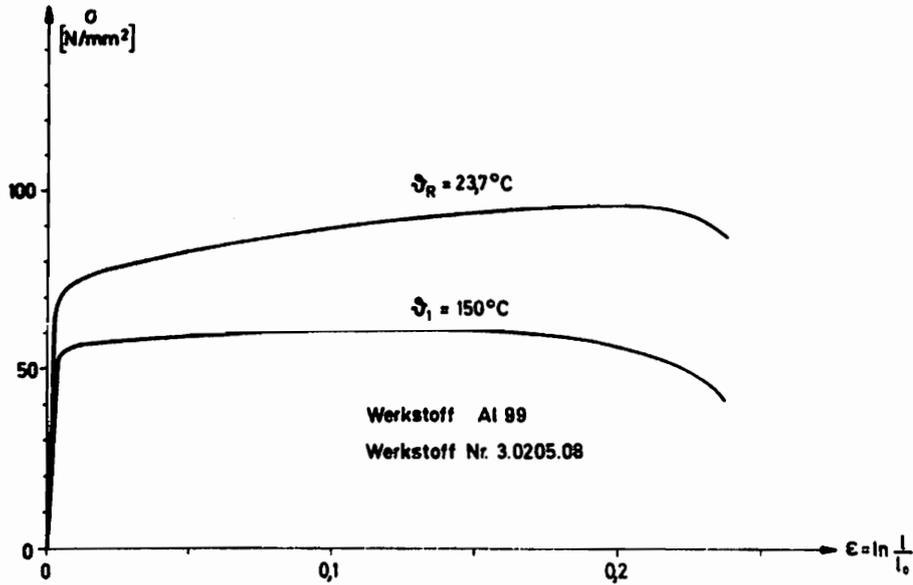


Abb.4: Spannungs-Dehnungsdiagramm für 2 Temperaturen

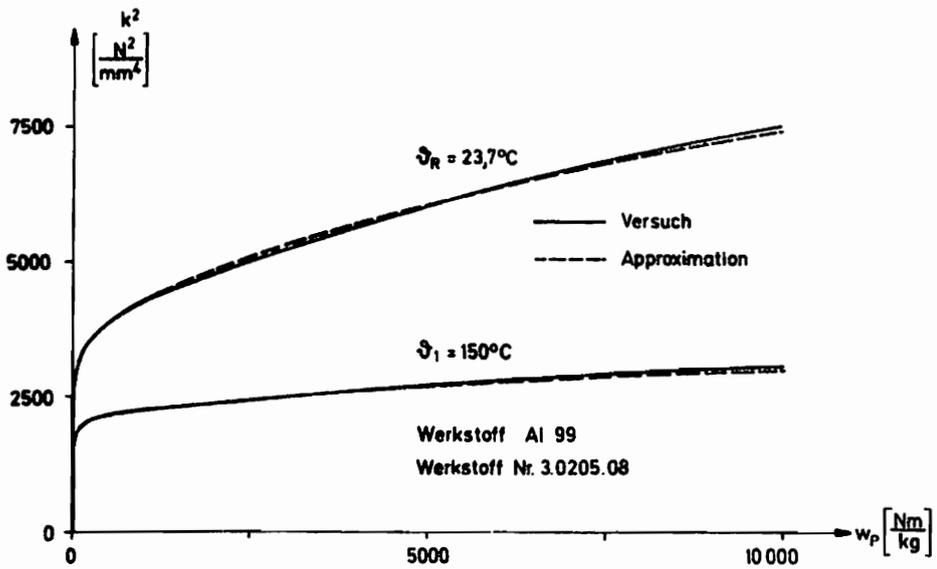


Abb.5: Verfestigungsgesetz für 2 Temperaturen

$$\begin{aligned} a &= 127164,3 \frac{N^2}{mm^4} - 704,7 \frac{N^2}{mm^4 \cdot ^\circ C} \cdot \vartheta, \\ c &= 0,4306 - 3,55 \cdot 10^{-4} \frac{1}{^\circ C} \cdot \vartheta, \\ k_0^2 &= 2818 \frac{N^2}{mm^4} - 7,26 \frac{N^2}{mm^4 \cdot ^\circ C} \cdot \vartheta. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Die Approximation der Verfestigungskurven ist in Abb.5 dargestellt.

Aus Messungen im elastischen Bereich erhalten wir die Temperaturabhängigkeit des Schubmoduls zu

$$G = 27969 \frac{N}{mm^2} - 15,637 \frac{N}{mm^2 \cdot ^\circ C} \cdot \vartheta. \quad (3.66)$$

Damit ist der in Abb.5 dargestellte Ansatz für k^2 in analytischer Form bekannt und wir können die Verfestigungsparameter ermitteln.

Zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens haben wir in Gl.(3.21) die normierte Größe δ eingeführt.

$$\delta = \frac{1}{\frac{B}{2G} + 1} \quad (3.67)$$

mit dem Wertebereich $0 \leq \delta \leq 1$. Die Grenzen haben dabei folgende Bedeutung:

- $\delta = 0$ elastisches Verhalten
- $\delta = 1$ idealplastisches Verhalten

Unter Berücksichtigung der Ableitung des Verfestigungsgesetzes in Gl.(3.64)

$$\frac{\partial k^2}{\partial w_p} = a \cdot c \left(\frac{s_0}{2G} w_p \right)^{c-1} \cdot \frac{s_0}{2G} \quad (3.68)$$

erhalten wir für $B(w_p, \nu)$

$$B(w_p, \nu) = \frac{1}{2 s_0} \cdot \frac{\partial k^2}{\partial w_p} \quad (3.69)$$

Um diese Verfestigungsparameter für jedes Inkrement bestimmen zu können, müssen wir für jeden Belastungsschritt die plastische Verzerrungsleistung errechnen und damit die plastische Arbeit aufintegrieren.

Die elastische Verzerrungsleistung errechnet sich aus dem Spannungsdeviator und der Deformationsgeschwindigkeit zu

$$\dot{w}_p = \frac{1}{s_0} s_p (\underline{T}_k \underline{D}_p) \quad (3.70)$$

oder nach Einsetzen von Gl.(3.5)

$$\dot{w}_p = \frac{1}{s_0} (2 \dot{\lambda} t_k^i t_i^k + \alpha t_k^i t_i^k |_0) \quad (3.71)$$

Setzen wir für $\dot{\lambda}$ Gl.(3.18) ein und vereinfachen den Ausdruck, so folgt

$$\dot{w}_p = \frac{1}{g_0} \cdot \frac{1}{B} \operatorname{Sp}(\underline{T}_k \underline{\dot{T}}_k) . \quad (3.72)$$

Überschieben wir Gl.(3.12) von links mit \underline{T}_k und bilden dann $\operatorname{Sp}(\underline{T}_k, \underline{D})$, so erhalten wir mit Gl.(3.18) und Gl.(3.67)

$$\operatorname{Sp}(\underline{T}_k \underline{\dot{T}}_k) = B \cdot \sigma \operatorname{Sp}(\underline{T}_k \underline{D}) . \quad (3.73)$$

Die Verwendung dieser Beziehung liefert uns endgültig für die plastische Verzerrungsleistung

$$\dot{w}_p = \frac{1}{g_0} \cdot \sigma \cdot \operatorname{Sp}(\underline{T}_k \underline{D}) . \quad (3.74)$$

Dieser Ausdruck läßt sich für jedes Inkrement leicht berechnen, da die bestimmenden Größen während eines Inkrements bereits errechnet werden.

4. Thermischer Prozeß

4.1 Dissipierte Arbeit

Die spezifische Verzerrungsleistung \dot{w} läßt sich in einen elastischen und in einen plastischen Anteil aufspalten.

$$\dot{w} = \dot{w}_p + \dot{w}_e \quad (4.1)$$

Bei der plastischen Arbeit w_p können wir wiederum unterscheiden zwischen dem Anteil w_D , der dissipiert, und dem Anteil w_H , der zur Strukturveränderung im Inneren des Materials beiträgt.

$$w_p = w_D + w_H \quad (4.2)$$

Wir beschreiben den Anteil der dissipierten Leistung durch

$$\dot{w}_D = \gamma \cdot \dot{w}_p \quad (4.3)$$

wobei für γ aus Experimenten [8] ein Wert von $\gamma = 0,9 \div 1,0$ angenommen werden kann.

Dieser Anteil der Verzerrungsleistung soll in dem zu berechnenden thermischen Zeitschritt als Wärmequellenleistung an der entsprechenden Stützstelle berücksichtigt werden. Die spezifische Verzerrungsleistung \dot{w}_p wird gemäß Gl. (3.74) für jedes Inkrement errechnet.

4.2 Wärmeleitungsgleichung

Die auch von Bruhns [5] angegebene Wärmeleitungsgleichung lautet

$$c \cdot \rho_0 \dot{\vartheta} = \gamma \operatorname{Sp}(\underline{\underline{S}}_k \underline{\underline{D}}_p) + m \vartheta_0 \operatorname{Sp}(\underline{\underline{D}}) + \lambda \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \vartheta. \quad (4.4)$$

Diese Gleichung ist aus der gekoppelten thermodynamischen Theorie hergeleitet und enthält den "Kopplungsterm"

$$m \vartheta_0 \operatorname{Sp}(\underline{\underline{D}}), \quad (4.5)$$

der durch die Volumendehnung bestimmt ist.

Die Frage nach der Temperaturveränderung durch Volumendehnung ist in der linearen Elastizitätstheorie, z.B. für Metalle von Lauert [34] und Mazilu/Schreiber [35] beantwortet worden. Sie haben gezeigt, daß der Fehler bei Ausnutzung der Streckgrenze in der Größenordnung von ca. 3°C liegt. Vernachlässigen wir diesen "Kopplungsterm", so kommen wir zur entkoppelten quasistatischen Theorie die uns eine sichere Grundlage auch für thermoplastische Prozesse liefert.

Wir erhalten dann aus Gl.(4.4)

$$c \cdot \rho_0 \dot{\vartheta} = \gamma \operatorname{Sp}(\underline{\underline{S}}_k \underline{\underline{D}}_p) + \lambda \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \vartheta, \quad (4.6)$$

oder unter Berücksichtigung der Gl.(4.3)

$$c \varrho_0 \cdot \dot{\mathcal{V}} - \lambda \cdot \Delta \mathcal{V} = \gamma \tilde{w}_F \cdot \varrho_0 . \quad (4.7)$$

Als Anfangsbedingung gilt

$$\mathcal{V}(x^i, 0) = \mathcal{V}_0(x^i) \quad (4.8)$$

und als Randbedingung auf einem Teil der äußeren Oberfläche

$$\mathcal{V}|_{\partial D} = \mathcal{V}_{Rand} . \quad (4.9)$$

Unser Ziel ist es, ein Funktional mit Extremaleigenschaften zu finden, dessen Variation nach den Temperaturen gleich Null gesetzt die neuen Temperaturen als Lösung des partiellen Differentialgleichungssystems ergibt. In allgemeiner Form ist dieses Funktional in [7] hergeleitet. Es sind jedoch alle Konstanten =1 gesetzt. Berücksichtigen wir die tatsächlich vorhandenen Konstanten, sowie die in Gl. (4.8) und Gl. (4.9) angegebenen Anfangs- und Randbedingungen, so erhalten wir mit

$$a = \frac{\lambda}{c \cdot \varrho_0} \quad (4.10)$$

als Temperaturleitfähigkeit und

$$\underline{H} = \nabla \mathcal{V}_0 \quad (4.11)$$

als Temperaturgradient zu Beginn eines Zeitschrittes
für das Funktional

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_V |\dot{\vartheta}|^2 dV dt + \frac{a^2}{2} \int_0^{t_0} \int_V (\Delta \vartheta)^2 dV dt \\ &+ \frac{a}{2} \int_V (\nabla \vartheta)_{t_0}^2 dV - \frac{\gamma}{c} \dot{w}_p \int_0^{t_0} \int_V \dot{\vartheta} dV dt \\ &+ \frac{a\gamma}{c} \dot{w}_p \int_0^{t_0} \int_V \Delta \vartheta dV dt \\ &- a \int_V \underline{H} \nabla \vartheta(x^i, 0) dV . \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.3 Temperaturansatzfunktion

Um die Variation des Funktionals Gl.(4.12) durchführen zu können, müssen wir für die Temperatur eine Ansatzfunktion der Form

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(r, z, t) \quad (4.13)$$

angeben.

Die zu erfüllenden Bedingungen sind:

1. Die Funktion muß einmal nach der Zeit differentierbar sein, also

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} \neq 0 \quad (4.14)$$

2. Die Funktion muß zweimal stetig nach den Koordinaten differentierbar sein.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial r^2} &\neq 0 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial z^2} &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Außerdem müssen zur Zeit $t=0$ eines Zeitschrittes die Temperaturen \mathcal{V}_0 und zur Zeit $t=t_0$ am Ende eines Zeitschrittes die Temperaturen \mathcal{V}_{t_0} angegeben werden.

Diese letzte Bedingung wird für eine beliebige Temperatur \mathcal{V} erfüllt durch

$$\mathcal{V} = \frac{t_0 - t}{t_0} \mathcal{V}_0 + \frac{t}{t_0} \mathcal{V}_{t_0} \quad (4.16)$$

oder vektoriell dargestellt

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \frac{t_0 - t}{t_0} & \frac{t}{t_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_0 \\ \mathcal{V}_{t_0} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Außerdem ist diese Gleichung einmal nach der Zeit stetig differenzierbar.

Zu einem beliebigen Zeitpunkt t muß die Temperatur in jedem Punkt eines Elementes durch die 4 Temperaturen der Knotenpunkte auszudrücken sein. Wir wählen für den Ansatz die Form

$$\mathcal{V} = (\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4) \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_3 \\ \mathcal{V}_4 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Unter Berücksichtigung der zweimalig stetigen Differenzierbarkeit nach den Koordinaten folgt für die Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned}
 \bar{h}_1 &= \frac{1}{4} \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \xi\right) \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \eta\right) \\
 \bar{h}_2 &= \frac{1}{4} \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} \xi\right) \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \eta\right) \\
 \bar{h}_3 &= \frac{1}{4} \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} \xi\right) \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} \eta\right) \\
 \bar{h}_4 &= \frac{1}{4} \left(1 - \sin \frac{\pi}{2} \xi\right) \left(1 + \sin \frac{\pi}{2} \eta\right) .
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Damit ergibt sich nun endgültig die Temperaturansatzfunktion

$$\mathcal{V} = (\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4) \left\{ \frac{t_0 - t}{t_0} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{01} \\ \mathcal{V}_{02} \\ \mathcal{V}_{03} \\ \mathcal{V}_{04} \end{bmatrix} + \frac{t}{t_0} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{t_0,1} \\ \mathcal{V}_{t_0,2} \\ \mathcal{V}_{t_0,3} \\ \mathcal{V}_{t_0,4} \end{bmatrix} \right\}, \tag{4.20}$$

wobei $\mathcal{V}_{01} - \mathcal{V}_{04}$ die Temperaturen der vier Knotenpunkte eines Elementes für $t=0$ sind, und $\mathcal{V}_{t_0,1} - \mathcal{V}_{t_0,4}$ die Temperaturen am Ende eines Zeitschrittes bei $t=t_0$.

4.4 Gradient und Divergenz

Berachten wir nun das Funktional in Gl.(4.12). Im ersten und vierten Integral geht die Zeitableitung der Temperaturansatzfunktion ein. Im zweiten und fünften Integral stehen die Gradienten der Temperatur $\nabla \mathcal{V}$. Außerdem finden wir den Laplace-Operator der Temperatur im dritten und sechsten Integral.

Bevor wir zur Variation des Funktionals kommen, wollen wir diese drei Ausdrücke explizit bestimmen. Die Zeitableitung erhalten wir aus der Temperaturansatzfunktion unter Berücksichtigung, daß die Formfunktionen \bar{h}_i zeitunabhängig sind.

$$\dot{\mathcal{V}} = \frac{1}{t_0} (\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4) \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \mathcal{V}_{t_01} \\ \mathcal{V}_{t_02} \\ \mathcal{V}_{t_03} \\ \mathcal{V}_{t_04} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \mathcal{V}_{01} \\ \mathcal{V}_{02} \\ \mathcal{V}_{03} \\ \mathcal{V}_{04} \end{array} \right] \end{array} \right\}, \quad (4.21)$$

oder abgekürzt

$$\dot{\mathcal{V}} = \frac{1}{t_0} \bar{h} (\mathcal{V}_{t_0} - \mathcal{V}_0). \quad (4.22)$$

Als nächstes wollen wir den Gradienten der Temperaturansatzfunktion bestimmen.

$$\nabla \mathcal{V} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Die Koordinatentransformation ergibt uns

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \varphi} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

oder in Matrizenform dargestellt auch

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

kürzer

$$\underline{\bar{p}} = \underline{J} \cdot \underline{\bar{q}} \quad (4.26)$$

Durch Umkehrung bekommen wir hieraus

$$\underline{\bar{q}} = \underline{J}^{-1} \cdot \underline{\bar{p}} \quad (4.27)$$

Der Vektor $\underline{\bar{q}}$ ersetzt uns den gesuchten Gradienten der Temperatur

$$\underline{\bar{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \end{bmatrix} = \nabla \mathcal{V} \quad (4.28)$$

Setzen wir diese Beziehung in Gl.(4.27) ein,folgt

$$\nabla \mathcal{V} = \underline{J}^{-1} \bar{P} = \underline{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Aus der Temperaturansatzfunktion Gl.(4.20) bekommen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi} &= \frac{t_0 - t}{t_0} \left(\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \varphi} \mathcal{V}_{01} + \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \varphi} \mathcal{V}_{02} + \frac{\partial \bar{h}_3}{\partial \varphi} \mathcal{V}_{03} + \frac{\partial \bar{h}_4}{\partial \varphi} \mathcal{V}_{04} \right) \\ &+ \frac{t}{t_0} \left(\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \varphi} \mathcal{V}_{t_01} + \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \varphi} \mathcal{V}_{t_02} + \frac{\partial \bar{h}_3}{\partial \varphi} \mathcal{V}_{t_03} + \frac{\partial \bar{h}_4}{\partial \varphi} \mathcal{V}_{t_04} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} &= \frac{t_0 - t}{t_0} \left(\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \eta} \mathcal{V}_{01} + \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \eta} \mathcal{V}_{02} + \frac{\partial \bar{h}_3}{\partial \eta} \mathcal{V}_{03} + \frac{\partial \bar{h}_4}{\partial \eta} \mathcal{V}_{04} \right) \\ &+ \frac{t}{t_0} \left(\frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \eta} \mathcal{V}_{t_01} + \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \eta} \mathcal{V}_{t_02} + \frac{\partial \bar{h}_3}{\partial \eta} \mathcal{V}_{t_03} + \frac{\partial \bar{h}_4}{\partial \eta} \mathcal{V}_{t_04} \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

oder zusammengefaßt in Matrizenform

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{t_0 - t}{t_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial \bar{h}_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial \bar{h}_4}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{h}_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{h}_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{01} \\ \mathcal{V}_{02} \\ \mathcal{V}_{03} \\ \mathcal{V}_{04} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$+ \frac{t}{t_0} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial \bar{h}_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial \bar{h}_4}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{h}_3}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{h}_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{t_01} \\ \mathcal{V}_{t_02} \\ \mathcal{V}_{t_03} \\ \mathcal{V}_{t_04} \end{bmatrix}$$

Analog zu der Herleitung der Koordinatenansatzfunktion wollen wir hier die Matrix $\underline{\underline{P}}$ einführen.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}} \left\{ \frac{t_0 - t}{t_0} \begin{bmatrix} \vartheta_{01} \\ \vartheta_{02} \\ \vartheta_{03} \\ \vartheta_{04} \end{bmatrix} + \frac{t}{t_0} \begin{bmatrix} \vartheta_{t_0 1} \\ \vartheta_{t_0 2} \\ \vartheta_{t_0 3} \\ \vartheta_{t_0 4} \end{bmatrix} \right\} \quad (4.32)$$

Zur expliziten Bestimmung haben wir noch die Inverse der Matrix $\underline{\underline{J}}$ nach Gl.(4.25) und Gl.(4.26) herzuleiten. Wir erhalten durch Invertieren

$$\underline{\underline{J}}^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial \eta}} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ -\frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Setzen wir jetzt die Gl.(4.32) und Gl.(4.33) in Gl.(4.29) ein, bekommen wir für den Temperaturgradienten

$$\nabla \vartheta = \underline{\underline{B}} \frac{\left\{ \frac{t_0 - t}{t_0} \begin{bmatrix} \vartheta_{01} \\ \vartheta_{02} \\ \vartheta_{03} \\ \vartheta_{04} \end{bmatrix} + \frac{t}{t_0} \begin{bmatrix} \vartheta_{t_0 1} \\ \vartheta_{t_0 2} \\ \vartheta_{t_0 3} \\ \vartheta_{t_0 4} \end{bmatrix} \right\}}{\frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial \eta}} \quad (4.34)$$

Hierin beschreibt die Matrix $\underline{\underline{B}}$

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \eta} \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{h}_3}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_4}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{h}_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{h}_3}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial \bar{h}_4}{\partial \eta} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_4}{\partial \varphi} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Führen wir nun noch die Abkürzung

$$D = \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad (4.36)$$

ein, bekommen wir letztendlich für den Temperaturgradienten

$$\nabla \mathcal{J} = \frac{\underline{\underline{B}}}{D} \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{01} \\ \mathcal{J}_{02} \\ \mathcal{J}_{03} \\ \mathcal{J}_{04} \end{bmatrix} \frac{t_0 - t}{t_0} + \frac{\underline{\underline{B}}}{D} \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{t_01} \\ \mathcal{J}_{t_02} \\ \mathcal{J}_{t_03} \\ \mathcal{J}_{t_04} \end{bmatrix} \frac{t}{t_0} \quad (4.37)$$

Die im Funktional benötigten Anfangs- und Endwerte der Zeitschritte sind dann zur Zeit $t=t_0$

$$\nabla \mathcal{J}(t_0) = \frac{\underline{\underline{B}}}{D} \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{t_01} \\ \mathcal{J}_{t_02} \\ \mathcal{J}_{t_03} \\ \mathcal{J}_{t_04} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

und zur Zeit $t=0$

$$\nabla \mathcal{V}(0) = \frac{\underline{\underline{B}}}{\underline{\underline{D}}} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{01} \\ \mathcal{V}_{02} \\ \mathcal{V}_{03} \\ \mathcal{V}_{04} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Den Ausdruck $\Delta \mathcal{V}$ erhalten wir, indem wir die Divergenz des Temperaturgradienten bilden

$$\Delta \mathcal{V} = \operatorname{div}(\nabla \mathcal{V}) = \operatorname{div} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_r \\ \mathcal{V}_z \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

oder ausgeschrieben

$$\Delta \mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{V}_r + \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{V}_z = \mathcal{V}_{rr} + \mathcal{V}_{zz} . \quad (4.41)$$

Die Anwendung des Operators aus Gl.(4.25) auf \mathcal{V}_r liefert

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \mathcal{V}_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{rr} \\ \mathcal{V}_{zz} \end{bmatrix} = \underline{\underline{J}}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \mathcal{V}_r . \quad (4.42)$$

Führen wir für die Matrix $\underline{\underline{B}}$ in Gl.(4.35) die Abkürzung

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{a}} \\ \underline{\underline{b}} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

mit $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}$ als Zeilenvektoren mit je 4 Komponenten ein,

bekommen wir für die Ableitungen die Ausdrücke

$$\mathcal{V}_r = \frac{\bar{a}}{D} \left\{ \frac{t_0 - t}{t_0} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{01} \\ \mathcal{V}_{02} \\ \mathcal{V}_{03} \\ \mathcal{V}_{04} \end{bmatrix} + \frac{t}{t_0} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{t_01} \\ \mathcal{V}_{t_02} \\ \mathcal{V}_{t_03} \\ \mathcal{V}_{t_04} \end{bmatrix} \right\} \quad (4.44)$$

$$\mathcal{V}_z = \frac{\bar{b}}{D} \left\{ \frac{t_0 - t}{t_0} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{01} \\ \mathcal{V}_{02} \\ \mathcal{V}_{03} \\ \mathcal{V}_{04} \end{bmatrix} + \frac{t}{t_0} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{t_01} \\ \mathcal{V}_{t_02} \\ \mathcal{V}_{t_03} \\ \mathcal{V}_{t_04} \end{bmatrix} \right\} .$$

Nun liefert uns Gl.(4.42) durch Einsetzen von $\underline{\underline{J}}^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_{rr} \\ \mathcal{V}_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \eta} & -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial \eta} \end{bmatrix} . \quad (4.45)$$

Durch Ausmultiplizieren bekommen wir die zweite Ableitung nach r

$$\mathcal{V}_{rr} = \frac{1}{D} \left[\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial \eta} \right] , \quad (4.46)$$

mit \mathcal{V}_r gemäß Gl.(4.44).

Führen wir noch in Gl.(4.44) für den zeitabhängigen Vektor

$$\underline{\underline{t}} = \left\{ \frac{t_0 - t}{t_0} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{01} \\ \mathcal{V}_{02} \\ \mathcal{V}_{03} \\ \mathcal{V}_{04} \end{bmatrix} + \frac{t}{t_0} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{t_01} \\ \mathcal{V}_{t_02} \\ \mathcal{V}_{t_03} \\ \mathcal{V}_{t_04} \end{bmatrix} \right\} \quad (4.47)$$

mit den Komponenten

$$\underline{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

ein, bekommen wir für \mathcal{V}_{rr} durch Einsetzen der Gl.(4.47) und Gl.(4.48) in Gl.(4.46)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{rr} = \frac{1}{D^2} \sum_{i=1}^4 & \left[\frac{\partial z}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \varphi} \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{h}_i}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \bar{h}_i}{\partial \varphi \partial \eta} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{h}_i}{\partial \varphi \partial \eta} - \frac{\partial z^2}{\partial \varphi \partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial^3 \bar{h}_i}{\partial \eta^2} \right) \right] \cdot t_i . \end{aligned} \quad (4.49)$$

In gleicher Weise gehen wir zur Bestimmung der Ableitung \mathcal{V}_{zz} vor und erhalten dafür

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{zz} = \frac{1}{D^2} \sum_{i=1}^4 & \left[\frac{\partial r}{\partial \varphi} \left(- \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{h}_i}{\partial \varphi \partial \eta} + \frac{\partial^2 r}{\partial \varphi \partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \eta} + \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \bar{h}_i}{\partial \eta^2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{\partial r}{\partial \eta} \left(- \frac{\partial^2 r}{\partial \varphi \partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \varphi} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{h}_i}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial^3 \bar{h}_i}{\partial \varphi \partial \eta} \right) \right] \cdot t_i . \end{aligned} \quad (4.50)$$

Gemäß Gl.(4.41) bekommen wir für $\Delta \mathcal{V}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{V} = & \frac{1}{D^2} \sum_{i=1}^4 \left[\frac{\partial z}{\partial \eta} \left(\frac{\partial' z}{\partial \eta \partial \varphi} \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial' \bar{h}_i}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \bar{h}_i}{\partial \varphi \partial \eta} \right) \right. \\
 & - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial' \bar{h}_i}{\partial \varphi \partial \eta} - \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi \partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \bar{h}_i}{\partial \eta^2} \right) \\
 & + \frac{\partial r}{\partial \varphi} \left(- \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial' \bar{h}_i}{\partial \varphi \partial \eta} + \frac{\partial^2 r}{\partial \varphi \partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \eta} + \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 \bar{h}_i}{\partial \eta^2} \right) \\
 & \left. - \frac{\partial r}{\partial \eta} \left(- \frac{\partial^2 r}{\partial \varphi \partial \eta} \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \varphi} - \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \bar{h}_i}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial' \bar{h}_i}{\partial \varphi \partial \eta} \right) \right] \cdot t_i .
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Diesen Ausdruck wollen wir abkürzen zu

$$\Delta \mathcal{V} = \frac{1}{D^2} \sum_{i=1}^4 K_i t_i . \tag{4.52}$$

4.5 Variation des Funktionals

Das Funktional Gl.(4.12) soll nach den Knotenpunktstemperaturen $\vartheta_{t_0,i}$; am Ende eines Zeitschrittes variiert werden. Durch Ausführung der Integration erhalten wir dann ein Gleichungssystem für die gesuchten Knotenpunktstemperaturen $\vartheta_{t_0,i}$; .Wir werden dies für jedes Integral einzeln durchführen und die einzelnen Gleichungen dann zusammenstellen.

$$\bar{\Phi} = \sum_{i=1}^6 \bar{\Phi}_i \quad (4.53)$$

Außerdem wollen wir dort, wo ein Doppelintegral steht, die Zeitintegration analytisch durchführen.

Wir betrachten zuerst

$$\bar{\Phi}_1 = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_V |\dot{\vartheta}|^2 dV dt \quad (4.54)$$

Aus Gl.(4.22) erhalten wir dann

$$\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{t_0^2} \left[\bar{h} (\vartheta_{t_0} - \vartheta_0) \right]^2 \quad (4.55)$$

Ausgeschrieben ergibt uns das

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{t_0^2} & \left[\bar{h}_1 (\vartheta_{t_0,1} - \vartheta_{0,1}) + \bar{h}_2 (\vartheta_{t_0,2} - \vartheta_{0,2}) \right. \\ & \left. + \bar{h}_3 (\vartheta_{t_0,3} - \vartheta_{0,3}) + \bar{h}_4 (\vartheta_{t_0,4} - \vartheta_{0,4}) \right]^2 \quad (4.56) \end{aligned}$$

Die Variation nach den Knotenpunktstemperaturen folgt zu

$$\delta \Phi_1 = \int_0^{t_0} \int_V \frac{1}{t_0^2} (\bar{h}^T \underline{h} \underline{v}_{t_0} - \bar{h}^T \underline{h} \underline{v}_0) dV dt \delta \underline{v}_{t_0} \quad (4.57)$$

mit den Formfunktionen

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \\ \bar{h}_3 \\ \bar{h}_4 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

und den Knotenpunktstemperaturen

$$\underline{v}_{t_0} = \begin{bmatrix} v_{t_01} \\ v_{t_02} \\ v_{t_03} \\ v_{t_04} \end{bmatrix} ; \quad \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{02} \\ v_{03} \\ v_{04} \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Durch Integration nach der Zeit und durch Einsetzen der Grenzen erhalten wir

$$\delta \Phi_1 = \left[-\frac{1}{t_0} \int_V \bar{h}^T \underline{h} \underline{v}_0 dV + \frac{1}{t_0} \int_V \bar{h}^T \underline{h} \underline{v}_{t_0} dV \right] \delta \underline{v}_{t_0} \quad (4.60)$$

Durch variieren des zweiten Ausdruckes

$$\Phi_2 = \frac{a^2}{2} \int_0^{t_0} \int_V (\Delta v)^2 dV dt \quad (4.61)$$

bekommen wir unter Berücksichtigung der Gl.(4.52)

$$\delta \Phi_2 = \frac{a^2}{2} \int_0^{t_0} \int_V \frac{2}{D^4} \left[\sum_{i=1}^4 K_i \left(\frac{t t_0 - t^2}{t_0^2} \vartheta_{oi} + \frac{t^2}{t_0^2} \vartheta_{toi} \right) \right. \\ \left. \cdot \left(\sum_{i=1}^4 K_i \delta \vartheta_{toi} \right) dV dt \right] \quad (4.62)$$

Die anschließende Zeitintegration ergibt dann

$$\delta \Phi_2 = \left(\frac{a^2}{D^4} \int_V \underline{K}^T \underline{K} \frac{t_0}{6} \vartheta_0 dV \right. \\ \left. + \frac{a^2}{D^4} \int_V \underline{K}^T \underline{K} \frac{t_0}{3} \vartheta_{t_0} dV \right) d\vartheta_{t_0} \quad (4.63)$$

Im dritten Integral

$$\Phi_3 = \frac{a}{2} \int_V \left(\nabla \vartheta \right)_{t_0}^2 dV \quad (4.64)$$

ist eine Zeitintegration nicht erforderlich. Wir erhalten durch variieren

$$\delta \Phi_3 = \frac{a}{D^2} \int_V \left(\underline{\bar{a}}^T \underline{\bar{a}} + \underline{\bar{b}}^T \underline{\bar{b}} \right) \vartheta_{t_0} dV \delta \vartheta_{t_0} \quad (4.65)$$

Setzen wir in

$$\bar{\Phi}_4 = - \frac{\gamma}{c} \dot{w}_p \int_0^{t_0} \int_V \dot{\vartheta} dV dt \quad (4.66)$$

die Gl. (4.22) ein, folgt hierfür nach Variation und anschließender Zeitintegration

$$\delta \bar{\Phi}_4 = - \frac{\gamma}{c} \dot{w}_p \int_V \bar{h} dV \delta \underline{\vartheta}_{t_0} . \quad (4.67)$$

In gleicher Weise erhalten wir aus

$$\bar{\Phi}_5 = \frac{a\gamma}{c} \dot{w}_p \int_0^{t_0} \int_V \Delta \vartheta dV dt \quad (4.68)$$

den Ausdruck

$$\delta \bar{\Phi}_5 = \frac{a\gamma}{c D^2} \dot{w}_p \frac{t_0}{2} \int_V \underline{K} dV \delta \underline{\vartheta}_{t_0} , \quad (4.69)$$

und aus

$$\bar{\Phi}_6 = -a \int_V \bar{h} \nabla \vartheta(x', 0) dV \quad (4.70)$$

die Variation zu

$$\delta \bar{\Phi}_6 = 0 . \quad (4.71)$$

Gemäß Gl.(4.53) setzen wir nun das gesamte Funktional wieder zusammen und bekommen dafür

$$\begin{aligned}
 \delta \Phi = & \left\{ -\frac{1}{t_0} \int_V \underline{\bar{h}}^T \underline{\bar{h}} \underline{\mathcal{J}}_0 dV + \frac{1}{t_0} \int_V \underline{\bar{h}}^T \underline{\bar{h}} dV \underline{\mathcal{J}}_{t_0} \right. \\
 & + \frac{a^2}{D^4} \int_V \underline{K}^T \underline{K} \frac{t_0}{6} \underline{\mathcal{J}}_0 dV + \frac{a^2}{D^4} \int_V \underline{K}^T \underline{K} \frac{t_0}{3} dV \underline{\mathcal{J}}_{t_0} \\
 & + \frac{a}{D^2} \int_V (\underline{\bar{a}}^T \underline{\bar{a}} + \underline{\bar{b}}^T \underline{\bar{b}}) dV \underline{\mathcal{J}}_{t_0} - \frac{\delta}{c} \dot{w}_p \int_V \underline{\bar{h}} dV \\
 & \left. + \frac{a\delta}{c D^2} \dot{w}_p \frac{t_0}{2} \int_V \underline{K} dV \right\} \delta \underline{\mathcal{J}}_{t_0} = 0 .
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

Wir ordnen diese Gleichung so, daß die Summanden mit $\underline{\mathcal{J}}_{t_0}$ auf der linken Seite stehen und kommen dann zu dem Gleichungssystem

$$\left[\int_V \frac{1}{t_0} \underline{\bar{h}}^T \underline{\bar{h}} + \frac{a^2}{D^4} \underline{K}^T \underline{K} \frac{t_0}{3} + \frac{a}{D^2} (\underline{\bar{a}}^T \underline{\bar{a}} + \underline{\bar{b}}^T \underline{\bar{b}}) dV \right] \underline{\mathcal{J}}_{t_0} =$$

(4.73)

$$= \int_V \left[\left(\frac{a^2}{D^4} \underline{K}^T \underline{K} \frac{t_0}{6} - \frac{1}{t_0} \underline{\bar{h}}^T \underline{\bar{h}} \right) \underline{\mathcal{J}}_0 + \frac{\delta}{c} \dot{w}_p \underline{\bar{h}} - \frac{a\delta}{c D^2} \dot{w}_p \frac{t_0}{2} \underline{K} \right] dV,$$

welches allgemein die Form

$$\underline{\underline{\bar{A}}} \cdot \underline{\underline{v}}_{t_0} = \underline{\underline{W}} \quad (4.74)$$

hat.

In dieser Gleichung werden wir nun die erforderliche Volumenintegration ähnlich der Gl.(3.38) und Gl.(3.39) für ebene oder rotationssymmetrische Systeme numerisch durchführen. Die erhaltenen Elementmatrizen werden dann zur Gesamtmatrix zusammengebaut und liefern ein Gleichungssystem zur Berechnung der Knotenpunkttemperaturen.

5. Experimentelle Untersuchungen

5.1 Quasistatische Versuche

Zur Bestimmung der Materialkonstanten und der Verfestigungsparameter werden Versuche mit Dehngeschwindigkeiten unter $\dot{\epsilon} = 0,003$ 1/min. bei verschiedenen Temperaturen auf einer hydraulischen Zug-Torsionsprüfmaschine)" durchgeführt. Bei einer solch niedrigen Dehngeschwindigkeit können wir den Versuch als isotherm annehmen.

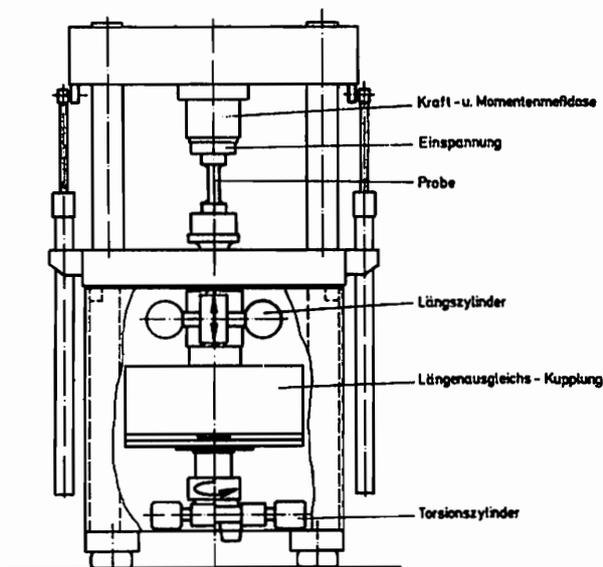


Abb.6: Zug-Torsionsprüfmaschine

Zur Werkstoffwahl muß bemerkt werden, daß zur Vermeidung von Einflüssen der Materialstabilität, die z.B. bei weichen Stählen in Form von Entlastungen nach Erreichen der

)" Die Maschine wurde von der Firma Schenk in Darmstadt gebaut und vom Institut für Mechanik mit Mitteln der Stiftung Volkswagenwerk erworben.

Streckgrenze auftritt, nur ein Material mit stetigem Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich gewählt werden sollte. Hochfeste Stähle haben zwar das gewünschte Verhalten, besitzen jedoch nur geringe Bruchdehnung und bedingen außerdem, wegen der begrenzten Leistung der Prüfmaschine kleine, für die Herstellung schwierige Probenabmessungen, da zur besseren Darstellung der Einschnürung ein Vollquerschnitt benötigt wird. Die Wahl fiel auf den Werkstoff Al 99, da unter Berücksichtigung seiner gegenüber Stahl geringen Dichte ρ_0 eine hohe Wärmeleitfähigkeit und eine geringere spezifische Wärme gegeben ist.

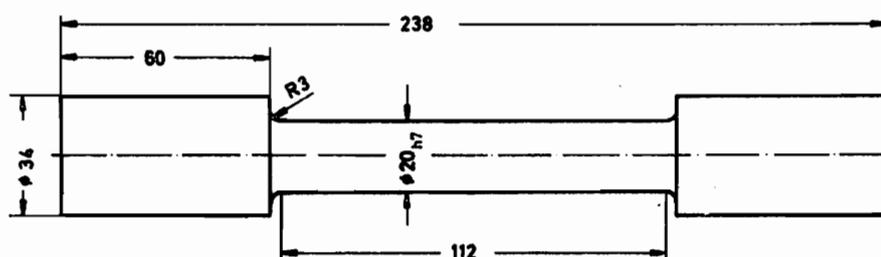


Abb.7: Probenabmessungen

Die Einspannung in der Maschine erfolgt an beiden Enden reibschlüssig.

Aus der Durchführung eines Zugversuches mit gesteuerter Längenänderung erhalten wir das Kraft-Verlängerungsdiagramm bei verschiedenen Temperaturen. Unter Voraussetzung der Volumenkonstanz bekommen wir für die logarithmische Dehnung

$$\varepsilon = \ln \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right) \quad (5.1)$$

und die wahre Spannung aus

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right) . \quad (5.2)$$

Diese Beziehung liefert uns dann das in Abb.4 dargestellte Spannungs-Dehnungsdiagramm.

Aus dem Zugversuch im rein elastischen Bereich erhalten wir unter Berücksichtigung der Elastizität der Maschine die Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls zu

$$E = 74958 \frac{N}{mm^2} - 41,91 \frac{N}{mm^2 \cdot ^\circ C} \cdot \vartheta . \quad (5.3)$$

Die in Gl.(5.1) und Gl.(5.2) errechneten Kurvenverläufe beziehen sich auf die äußeren Dehnungen (Gleichmaßdehnungen) die von der Maschine aufgezeichnet wurden.

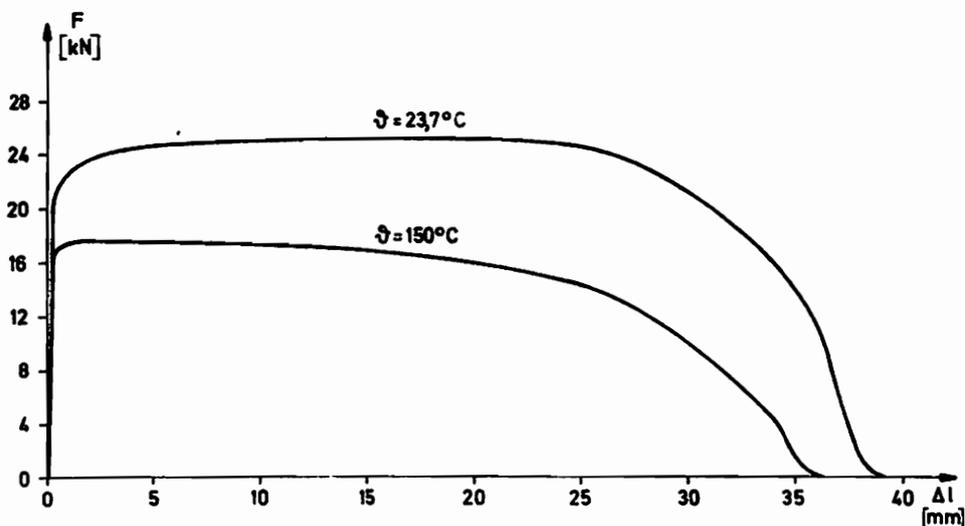


Abb.8: Kraft-Verlängerungsdiagramm aus Versuchen bei verschiedenen Temperaturen ermittelt.

Sobald die lokale Einschnürung auftritt, sind die gemessenen Werte nicht mehr brauchbar, da die Dehnung entlang der

Probenachse nicht mehr konstant ist. Um die tatsächliche Probendehnung entlang der Längsachse während des Einschnürvorgangs darzustellen, muß im Verlaufe des Zugversuches eine Diaserie aufgenommen und diese später durch Messung des örtlichen Durchmessers ausgewertet werden. Abb.9 zeigt ein Dia kurz vor Eintreten des Bruches.

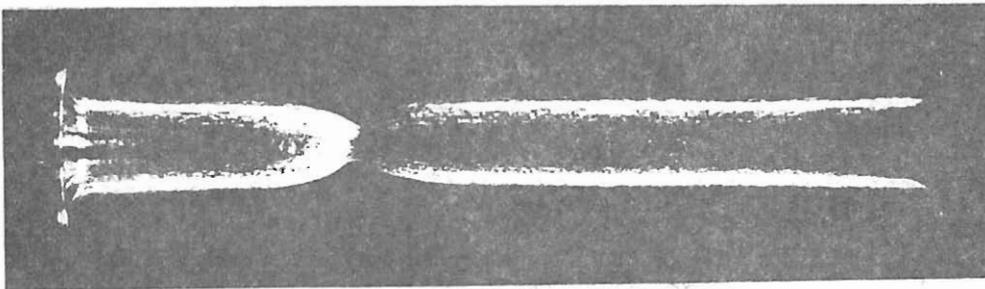


Abb.9: Eingeschnürte Probe

Nehmen wir wieder die Volumenkonstanz an, so erhalten wir für die mittlere örtliche Dehnung

$$\epsilon_t = \ln \frac{d_0^2}{d^2} \quad (5.4)$$

Die Auswertung ergibt uns für die Dehnungen den Verlauf in Abb.10. Die Flächen unter den beiden Kurven sind gleichgroß. Die Kenntnis der Dehnungen in der Einschnürung ermöglicht es uns, nachdem wir die tatsächliche mittlere Spannung in der Einschnürung mit

$$\bar{\sigma}_t = \frac{4 \cdot F}{d^2 \cdot \pi} \quad (5.5)$$

kennen, das Spannungs-Dehnungsdiagramm bis zum Versagen des Werkstoffes darzustellen.

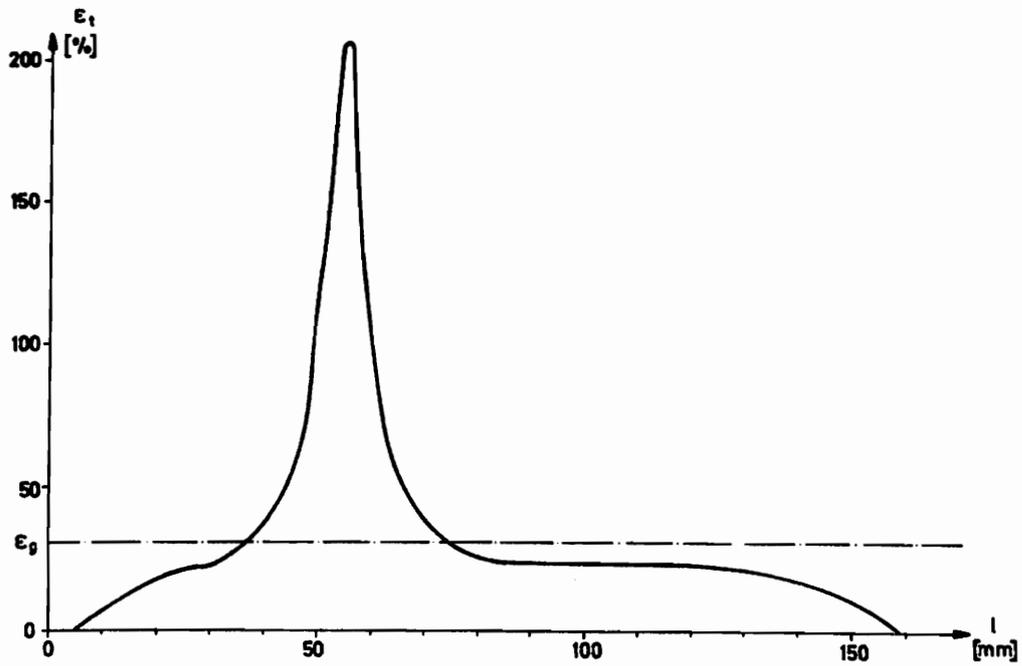


Abb.10: Mittlere örtliche Dehnung entlang der Probenachse

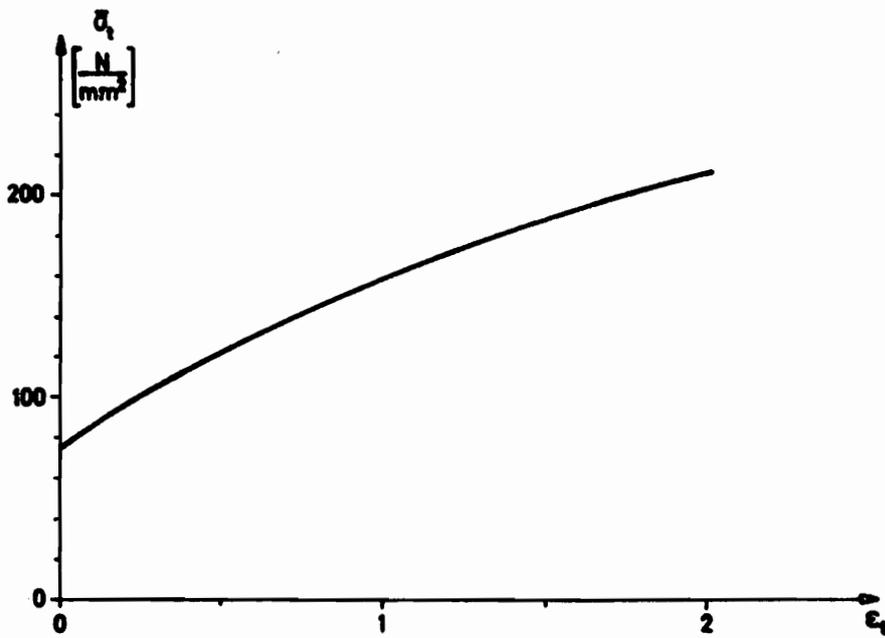


Abb.11: Mittlere Spannungen an der Einschnürstelle

Die Kenntnis des Diagramms in Abb.11 liefert uns dann das notwendige Verfestigungsgesetz in Gl.(3.64).

5.2 Schnell ablaufende Versuche

Diese Versuche werden geschwindigkeitsgesteuert mit den Ziehgeschwindigkeiten V und Anfangsdehngeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}_0$.

Versuchsreihe I $V= 1 \text{ mm/sec.}; \dot{\epsilon}_0= 8,9 \cdot 10^{-3} \text{ 1/sec.}$

Versuchsreihe II $V= 5 \text{ mm/sec.}; \dot{\epsilon}_0= 44,6 \cdot 10^{-3} \text{ 1/sec.}$

Versuchsreihe III $V=15 \text{ mm/sec.}; \dot{\epsilon}_0=133,8 \cdot 10^{-3} \text{ 1/sec.}$

Die Aufzeichnung der Temperatur erfolgte mit Hilfe einer infrarotempfindlichen Videokamera, weshalb wir uns kurz dem Verfahren der Temperaturbestimmung zuwenden wollen. Das von der Kamera empfangene Meßsignal S_k setzt sich zusammen aus der Emission der Probe, E_p , sowie der Transmission T_u und der Reflektion R_u der Umgebung

$$S_k = S \cdot E_p + R_u + T_u \quad . \quad (5.6)$$

Die Spannzylinder der Zug-Torsionsmaschine und die Probe befinden sich in einem von innen matt schwarzem Gehäuse, so daß die Transmission der Umgebung gänzlich und die Reflektion mit ausreichender Genauigkeit ausgeschlossen werden kann. Das von der Kamera empfangene Signal ergibt sich somit zu

$$S_k = S \cdot E_p \quad . \quad (5.7)$$

Das Signal S der Probe ist nun identisch mit der Temperatur der Probe

$$\vartheta = \frac{S_K}{E_P} \quad (5.8)$$

Wir erhalten diese, indem wir den von der Kamera empfangenen Wert S_K durch die Emissionszahl E_P der Probe dividieren. Ein schwarzer Strahler hat die Emissionszahl " 1 ", eine polierte Oberfläche eines Metalles ungefähr " 0,05 ". Man sieht hieran leicht, daß die Temperaturbestimmung mit steigender Emissionszahl genauer wird, da ein Meßfehler des Meßsignals S_K bei kleinem E_P verstärkt wird und somit große Temperaturfehler zur Folge hat. Die Änderung des Meßsignals um eine Einheit würde beim schwarzen Strahler eine Temperaturänderung von 1°C bei blankem Metall hingegen ungefähr 20°C zur Folge haben.

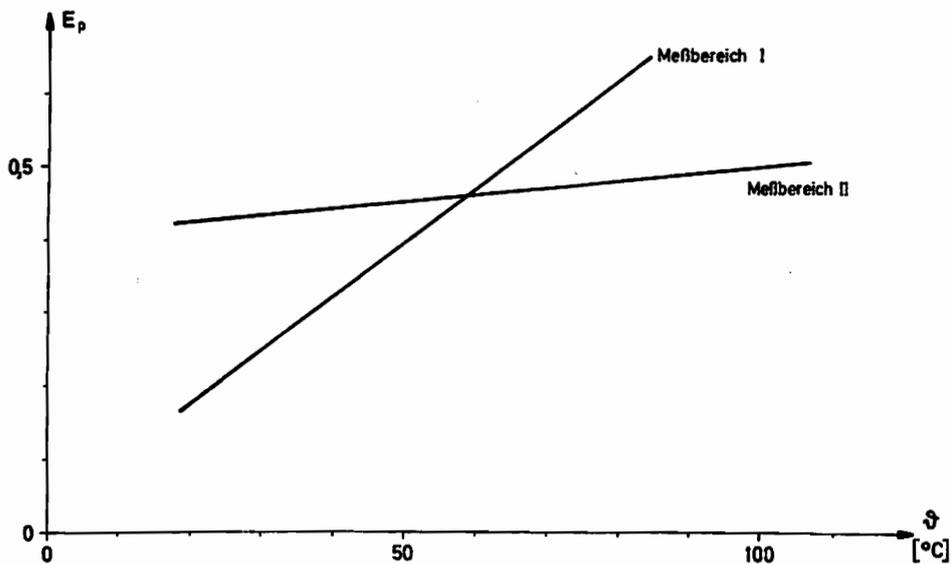


Abb.12: Temperaturabhängigkeit des Emissionswertes

Um nun eine größere Emissionszahl zu erhalten, wurde die Oberfläche der Proben sandgestahlt.

Vergleichsmessungen mit Hilfe mehrerer an der Oberfläche angebrachter Thermoelemente liefern uns den temperaturabhängigen Verlauf der Emissionszahl in Abb.12. Die Kenntnis der Emissionszahl erlaubt es uns nun das von der Kamera auf einen Videorecorder aufgezeichnete Signal in die tatsächliche Proben temperatur umzurechnen. Da wir jedem augenblicklichen Dehnungszustand einen Temperaturverlauf über dem Probenquerschnitt zuordnen wollen, müssen wir in jedes Videobild die aktuelle Zeit seit Versuchsbeginn einblenden. Der gemeinsame Start der Prüfmaschine und der Stoppuhr wird mit Hilfe eines eigens erstellten Rechnerprogrammes veranlaßt.



Abb.13: Videobild mit Zeitsignal zur Temperaturbestimmung

Die durch die Probenachse gelegte Linie ergibt uns sofort den Temperaturverlauf entlang dieser Linie wie in Abb.14 dargestellt. Aufgrund der Aufzeichnungstechnik des Videorecorders erhalten wir 50 Einzelbilder pro Sekunde auf die wir bei der Auswertung begrenzt sind. Bei der größten Versuchsgeschwindigkeit $V=15\text{mm/sec.}$ (Versuchsreihe III) erhalten wir also pro Bild eine Längenänderung von $0,3\text{mm.}$

Zur Bestimmung des Dehnungsverlaufes über der Probenachse werden bei den Versuchen Diaserien mit der Geschwindigkeit 4 Bilder pro Sekunde aufgenommen.

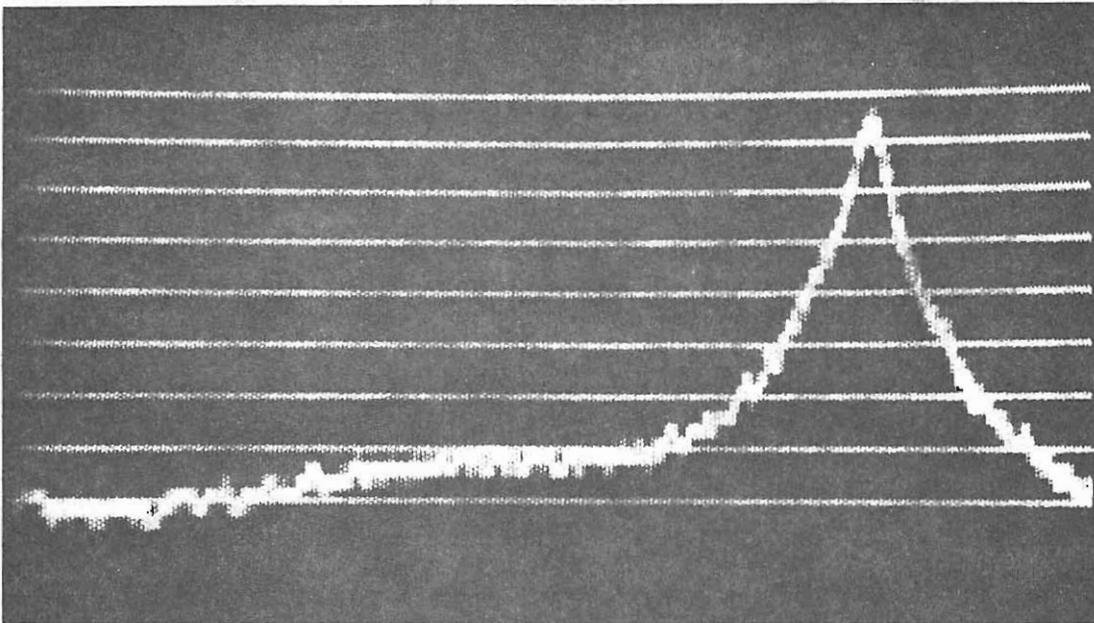


Abb.14: Temperaturverlauf entlang eines "Line select"

5.3 Darstellung und Diskussion der Ergebnisse

Vergleichen wir die globalen Spannungs-Dehnungsdiagramme, wie sie in Abb.4 für den isothermen Fall dargestellt sind, nun für den nichtisothermen Fall bei verschiedenen Ziehgeschwindigkeiten, so können wir im Bereich der Gleichmaßdehnung nur unwesentliche Abweichungen erkennen. Dies ist darauf zurückzuführen, daß vor Beginn der Einschnürung die Temperaturerhöhung im Probestab sehr klein ist, und die damit verbundene Änderung des Festigkeitsverhaltens keine großen Unterschiede im Spannungs-Dehnungsdiagramm zeigt.

Zur Betrachtung der Einschnürung können wir die globalen Spannungs-Dehnungsdiagramme nicht heranziehen, da diese nur einen Mittelwert aller momentanen Dehnungszustände wiedergeben. Wir betrachten deshalb ein Element in der Mitte des Zugstabes, also an der Einschnürstelle und

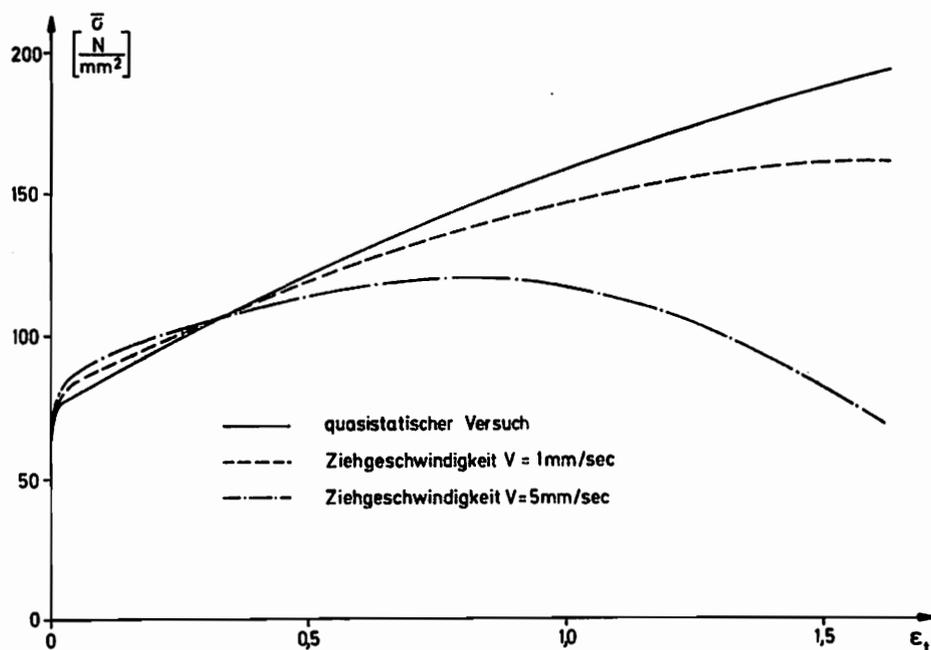


Abb.15: Spannungen an der Einschnürstelle

tragen die mittlere örtliche Dehnung gemäß Gl. (5.4) über der tatsächlichen mittleren Spannung auf. Abb. 15 zeigt das Materialverhalten an der Einschnürstelle bei den verschiedenen Ziehgeschwindigkeiten. Das steile Abfallen der Spannungen bei hoher Ziehgeschwindigkeit ist auf die deutliche Erwärmung des Probestabes im Bereich der Einschnürstelle zurückzuführen.

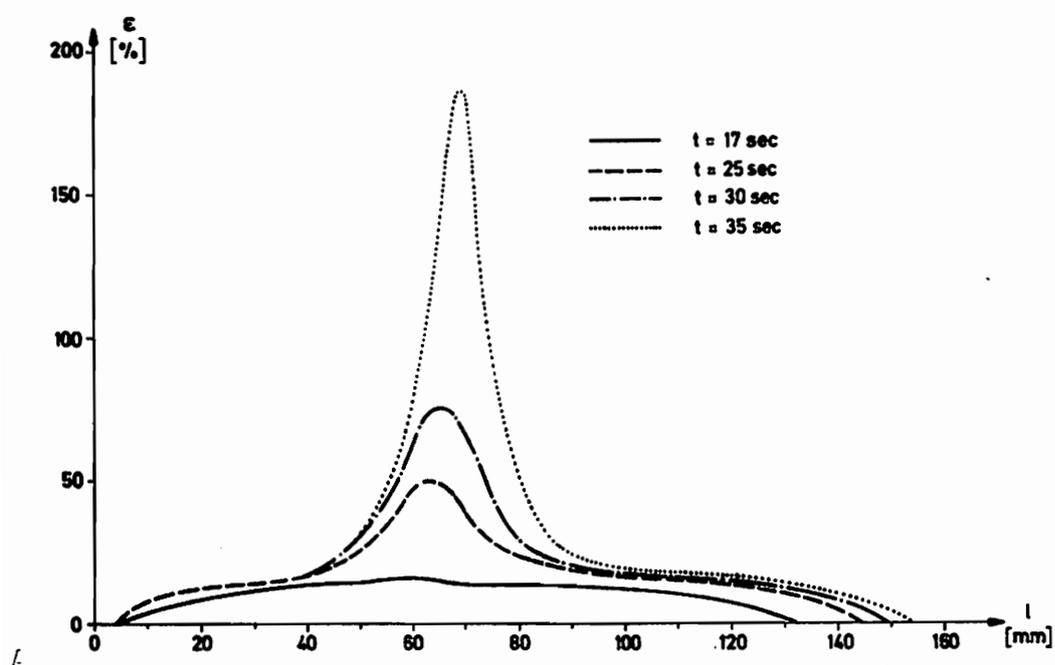


Abb. 16: Dehnungsverlauf über der Längsachse ($V=1\text{mm/sec.}$)

Die in Abb. 16 und Abb. 17 dargestellten Kurvenverläufe zeigen die örtliche Dehnung über der Probenachse zu verschiedenen Zeiten. Bemerkenswert hierbei ist, daß nachdem erst einmal die Probe an einer Stelle eingeschnürt ist, im Bereich der Gleichmaßdehnungen keine Änderungen mehr eintreten, sondern die Probe dort allmählich wieder entlastet. Die Wanderung der Einschnürstelle (Dehnungsmaximum) ist darauf zurückzuführen, daß die obere Einspannung der Maschine ($l=0$) fest steht, während die untere Einspannung die Probe zieht, also bewegt wird.

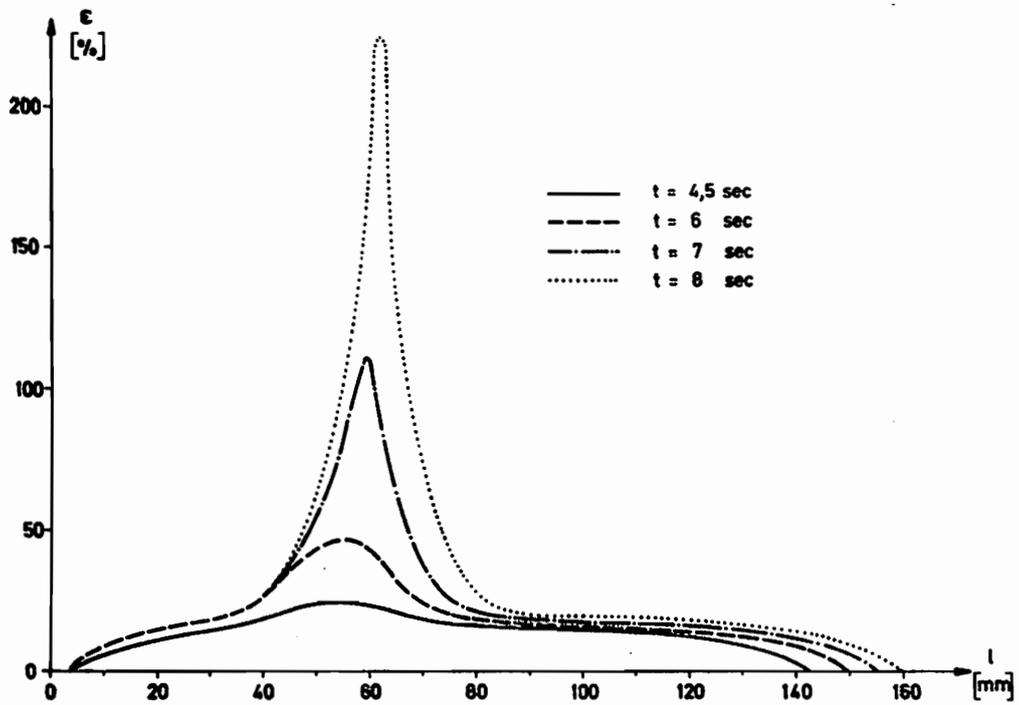


Abb.17: Dehnungsverlauf über der Längsachse ($V=5\text{mm/sec.}$)

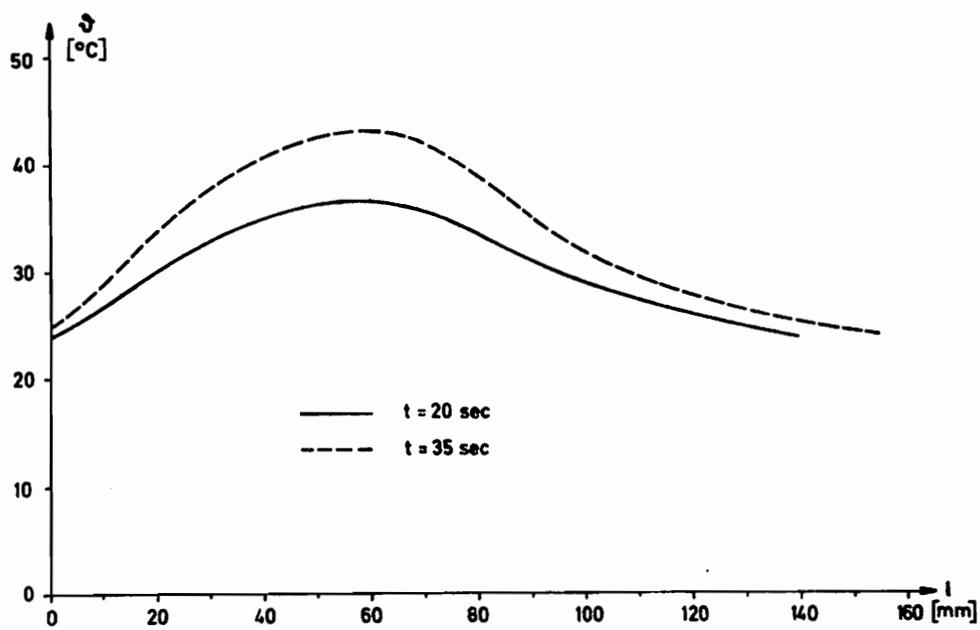


Abb.18: Temperaturverlauf über der Längsachse ($V=1\text{mm/sec.}$)

Im Weiteren wollen wir uns der Erwärmung des Probestabes zuwenden. In den Abb. 18, 19 und 20 sind die Temperaturverläufe der einzelnen Versuchsreihen zu verschiedenen Zeiten dargestellt.

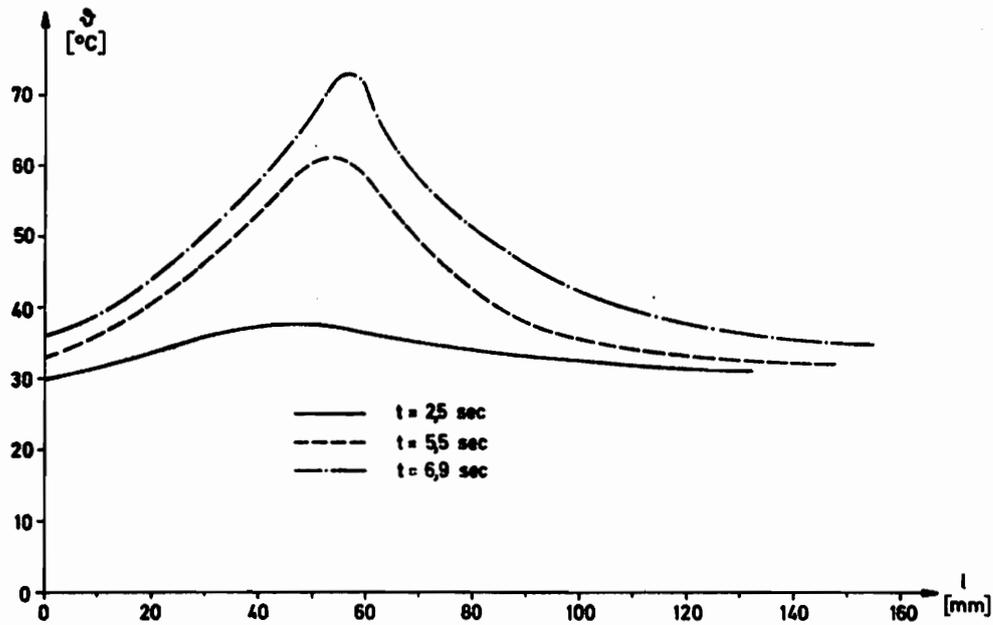


Abb.19: Temperaturverlauf über der Längsachse ($V=5\text{mm/sec.}$)

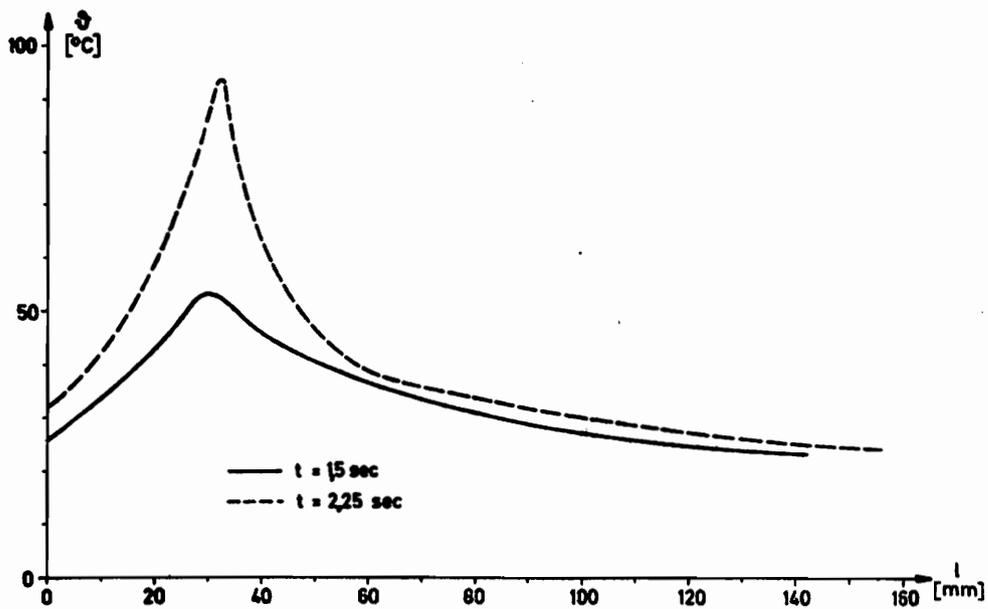


Abb.20: Temperaturverlauf über der Längsachse ($V=15\text{mm/sec.}$)

Vergleichen wir die Temperaturverläufe mit den Dehnungsverläufen in den Abb.16 und 17 so können wir sofort den Zusammenhang zwischen dem Temperatur- und dem Dehnungsmaximum erkennen.

In Abb.21 ist der Verlauf der Temperaturen an der Einschnürstelle für die drei Versuchsreihen dargestellt.

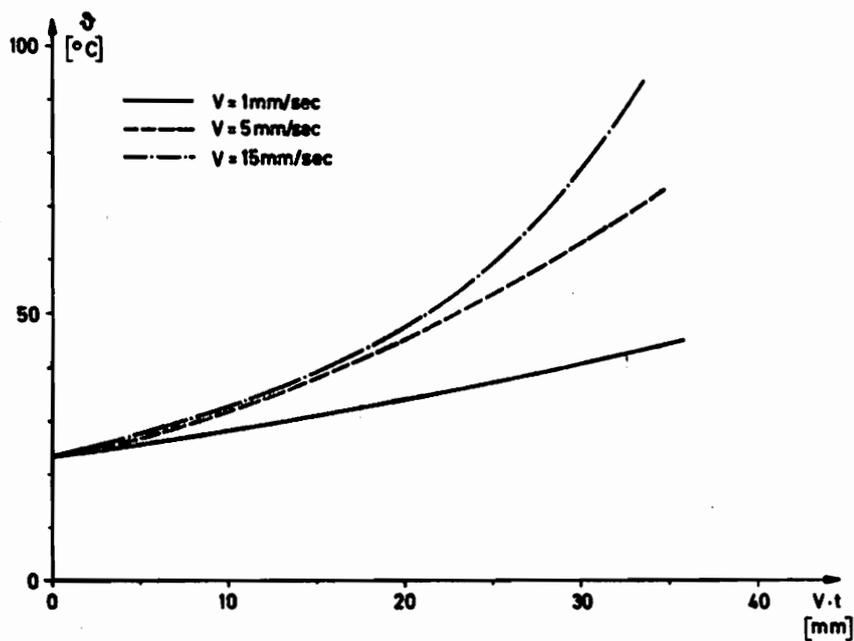


Abb.21: Temperaturverlauf an der Einschnürstelle bezogen auf die Probenverlängerung

Aus dieser Abbildung kann man erkennen, daß bei der Probe mit der größten Ziehgeschwindigkeit die Bruchdehnung am kleinsten ist, und mit fallender Ziehgeschwindigkeit die Bruchdehnung zunimmt. Dies erklärt sich leicht damit, daß mit kleiner werdender Ziehgeschwindigkeit der Einfluß der Wärmeleitung steigt und somit ein größerer Bereich um die Einschnürstelle herum erwärmt wird. Das führt dazu, daß ein größerer Bereich fließt, und somit eine größere Gesamtdehnung zur Folge hat. Bei schnellen Versuchen ist die Wärmeleitung so gering, daß der Bereich des starken

Fließens aufgrund der Erwärmung beschränkt ist auf die Umgebung der Einschnürstelle. Dies führt zu einer geringeren Gesamtdehnung der Probe.

Tragen wir die Maximaltemperatur der Einschnürstelle über der Ziehgeschwindigkeit auf, so erhalten wir den in Abb. 22 dargestellten Verlauf.

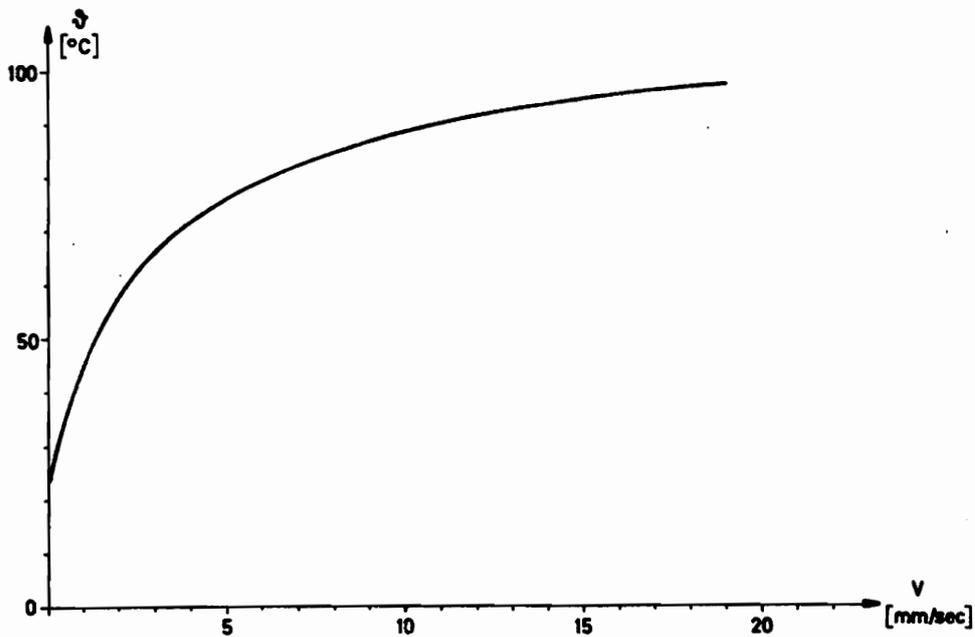


Abb. 22: Maximaltemperatur als Funktion der Ziehgeschwindigkeit.

Die Kurve verläuft immer flacher, gegen einen Wert, den wir für den adiabaten Versuch erhalten würden. Es bleibt dann nur noch der viskose Einfluß, der zu einer weiteren Temperaturerhöhung führt. Beim adiabaten Versuch verbliebe der gesamte in Wärme dissipierte Anteil der plastischen Arbeit gemäß Gl. (4.3) am Entstehungsort.

6. Numerische Lösung des Problems

6.1 Allgemeines

In der Einleitung wurde bereits angegeben, daß ein Inkrement in einen isothermen Belastungsschritt und in einen thermischen Zeitschritt aufgeteilt wird. Es folgt nun nacheinander immer die Berechnung des Belastungsschrittes und des thermischen Schrittes. Die während des Belastungsschrittes aufgebrauchte Verzerrungsleistung wird an den thermischen Zeitschritt übergeben und dann anteilmäßig als Wärme zugeführt.

Grundsätzlich setzt sich die Berechnung eines Inkrementes folgendermaßen zusammen:

1. Es werden der numerischen Reihenfolge nach die Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Elemente gebildet und zur Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammengebaut.
2. Die rechte Seite des Gleichungssystems bestehend aus den äußeren Kräften bei Kraftsteuerung oder den Geschwindigkeitsrandbedingungen bei Wegsteuerung wird erstellt.
3. Ein Gleichungslöser errechnet die Knotenpunktsgeschwindigkeiten des Gesamtsystems.
4. Die neuen Koordinaten der Knotenpunkte des globalen Elementnetzes werden aus den Geschwindigkeiten der Knotenpunkte errechnet und in einem Feld ORTE abgespeichert.
5. Für die einzelnen Elemente werden mit Hilfe der ermittelten Knotenpunktsgeschwindigkeiten die neuen Spannungen errechnet und in einem Feld WERTE abgespeichert.
6. Die Koeffizientenmatrix der Wärmeleitung wird für die einzelnen Elemente berechnet, und zur Gesamtmatrix zusammengebaut.

7. Die rechte Seite des thermodynamischen Gleichungssystems bestehend aus den Temperaturen zu Beginn eines Zeitschrittes wird erstellt.

8. Es werden die neuen Knotenpunktstemperaturen berechnet und in einem Feld WERTE abgespeichert.

9. Das Hauptprogramm steuert die Berechnung des neuen Inkrementes und die richtige Zeitschrittlänge.

Durch geeignete Wahl der Knotenpunkt Nummerierung läßt sich die Anzahl der von Null verschiedenen Größen in der Gesamtsteifigkeitsmatrix klein halten. Mit Hilfe des in [6] beschriebenen Skyline-Verfahrens werden nur diese von Null verschiedenen Größen der Gesamtmatrix abgespeichert. Dies führt zur Einsparung erheblicher Speicherkapazität und macht die Verwendung von sogenannten Hintergrundspeichern (z.B. Plattenabschnitte oder Magnetbänder) zum zwischenzeitlichen Abspeichern der Steifigkeitsmatrix unnötig. Bei Verwendung von Hintergrundspeichern müßten jeweils Teile der Gesamtmatrix in den Kernspeicher geladen, bearbeitet und wieder abgespeichert werden.

Das Skyline-Verfahren führt, da die gesamte Steifigkeitsmatrix bzw. die dazu notwendigen Informationen immer im Kernspeicher vorhanden sind, zu erheblicher Rechenzeitersparnis.

Das Rechnerprogramm wurde in FORTRAN IV erstellt, und die Berechnung an einem Rechner MODCOMP IV durchgeführt.

6.2 Berechnung der Knotenpunktsgeschwindigkeiten

Zur Beschreibung der Eigenschaften beliebig geformter Elemente wird ein spezielles lokales Koordinatensystem verwendet, wie in Abb.2 dargestellt. Es handelt sich dabei um ein isoparametrisches Vierknotenelement, da Koordinaten- und Geschwindigkeitsansatz linear sind (Gl.(2.24) und Gl.(2.26)). Jeder Knoten hat als Freiheitsgrade die Geschwindigkeitskomponenten u_x, u_y , so daß für ein Element maximal 8 Freiheitsgrade vorkommen. Die Elementsteifigkeitsmatrix ist also eine 8×8 Matrix entsprechend der lokalen Knotenpunktsummerierung in Abb.23.

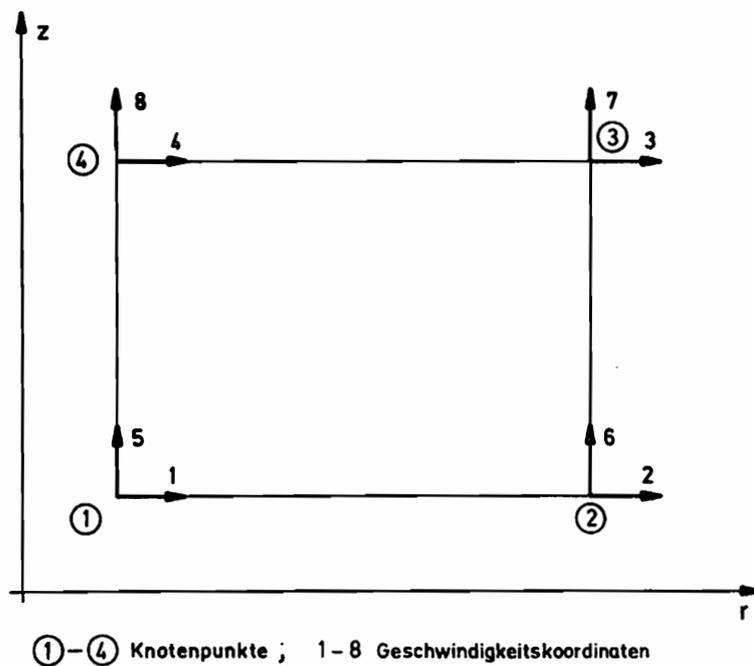


Abb.23: Lokale Nummerierung der Knotenpunktsgeschwindigkeiten.

Beim Zusammenbau der Einzelmatriizen zu dem Elementnetz kommen wir zur globalen Nummerierung wie in Abb.24 dargestellt.

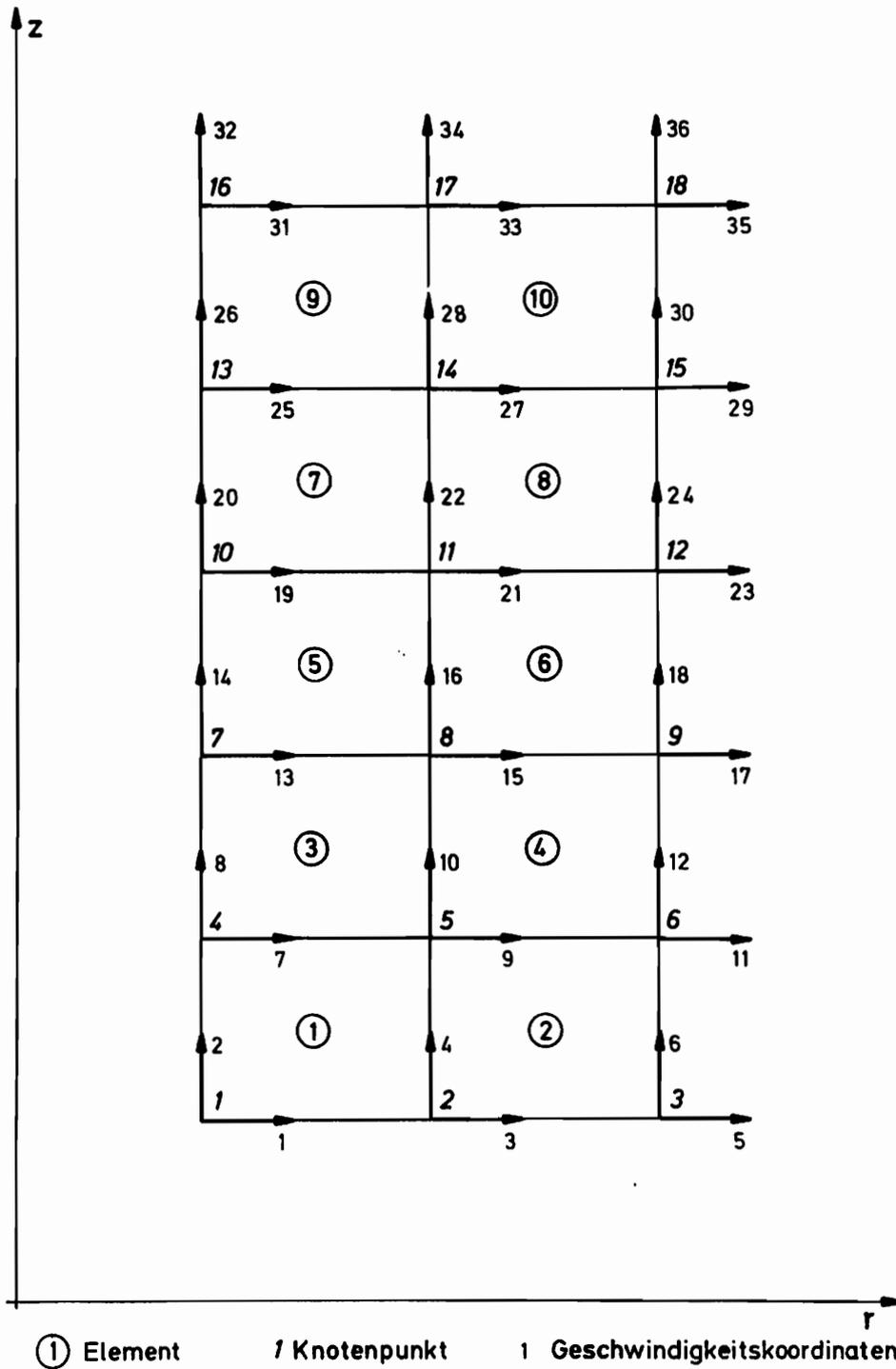


Abb.24: Globale Nummerierung der Knotenpunkte und der Knotenpunktsgeschwindigkeiten (hier 10 Elemente).

Die Größen der Einzelsteifigkeitsmatrizen werden entsprechend umnummeriert und in die Gesamtsteifigkeitsmatrix addiert.

Die als Randbedingungen im Elementnetz festgehaltenen Knotenpunkte bekommen im globalen System keine Geschwindigkeitsnummer, so daß sie im Gesamtsystem verschwinden. In Abb. 25 ist an einem Elementnetz mit zwei Elementen der Einbau der Randbedingungen dargestellt. Man erkennt hieran, daß die im Elementnetz festgehaltenen Koordinatenrichtungen im Gesamtgleichungssystem verschwinden. Dies ist beabsichtigt, da die entsprechenden Knotenpunktschwindigkeiten gleich Null sind.

Die Lösung dieses Gleichungssystems für mehrere Inkremente mit einer auf der rechten Seite als konstant angenommenen Kraftgeschwindigkeit \dot{F} ergibt nur zu Beginn der Formänderung brauchbare Ergebnisse. Da im tatsächlich durchgeführten Versuch die Kraftgeschwindigkeit \dot{F} von einem endlichen, im elastischen Bereich konstanten Wert ausgehend, immer kleiner und später auch negativ wird, ist es erforderlich, die Kraftgeschwindigkeit laufend zu ändern, so daß bei einem Zugversuch die äußeren Geschwindigkeiten konstant sind. Dies würde die Berechnung eines weggesteuerten Versuches sicherstellen. Der Verlauf der Geschwindigkeit bei veränderlicher und konstanter Kraftgeschwindigkeit \dot{F} ist in Abb. 26 dargestellt.

Eine sinnvolle Berechnung eines kraftgesteuerten Zugversuches ist somit nur möglich, wenn der Verlauf der äußeren Kraft vorgegeben wird. Der Versuch soll uns aber nur die Verfestigungsparameter und Materialkonstanten liefern. Wir geben deshalb die äußeren Geschwindigkeiten V_{Rand} am Zugstab vor und kommen dann der Berechnung einer Wegsteuerung nahe.

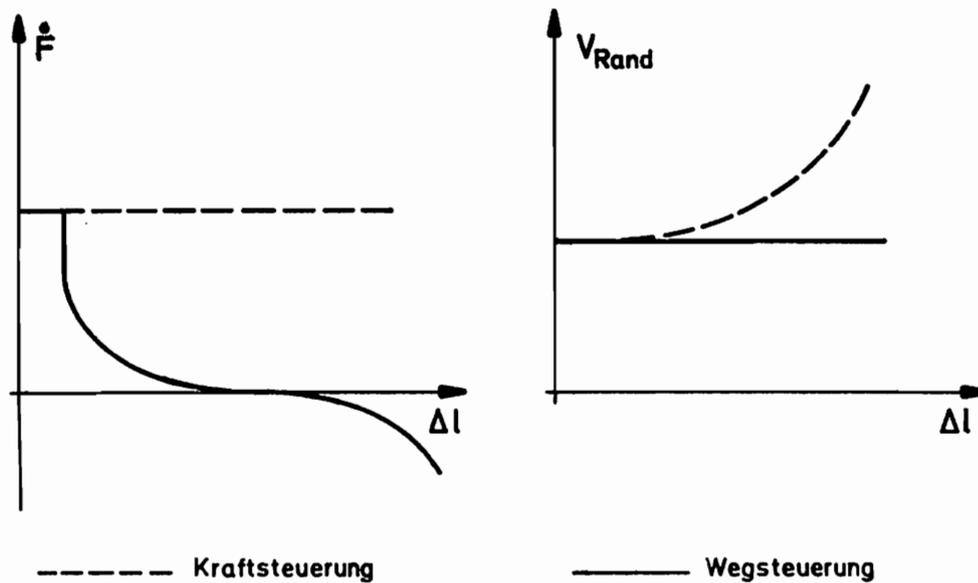


Abb.26: Beziehung zwischen \dot{F} und V_{Rand} beim Versuch unter Annahme von $\dot{F}=\text{const.}$ bzw. $V_{Rand}=\text{const.}$.

Die Vorgabe der Geschwindigkeit V_{Rand} erfordert nun den Umbau des vorhandenen Gleichungssystems. Abb.27 zeigt einen Zugstab mit 10 Elementen, jetzt unter Berücksichtigung der als konstant anzunehmenden Geschwindigkeiten V_{28} , V_{30} und V_{32} .

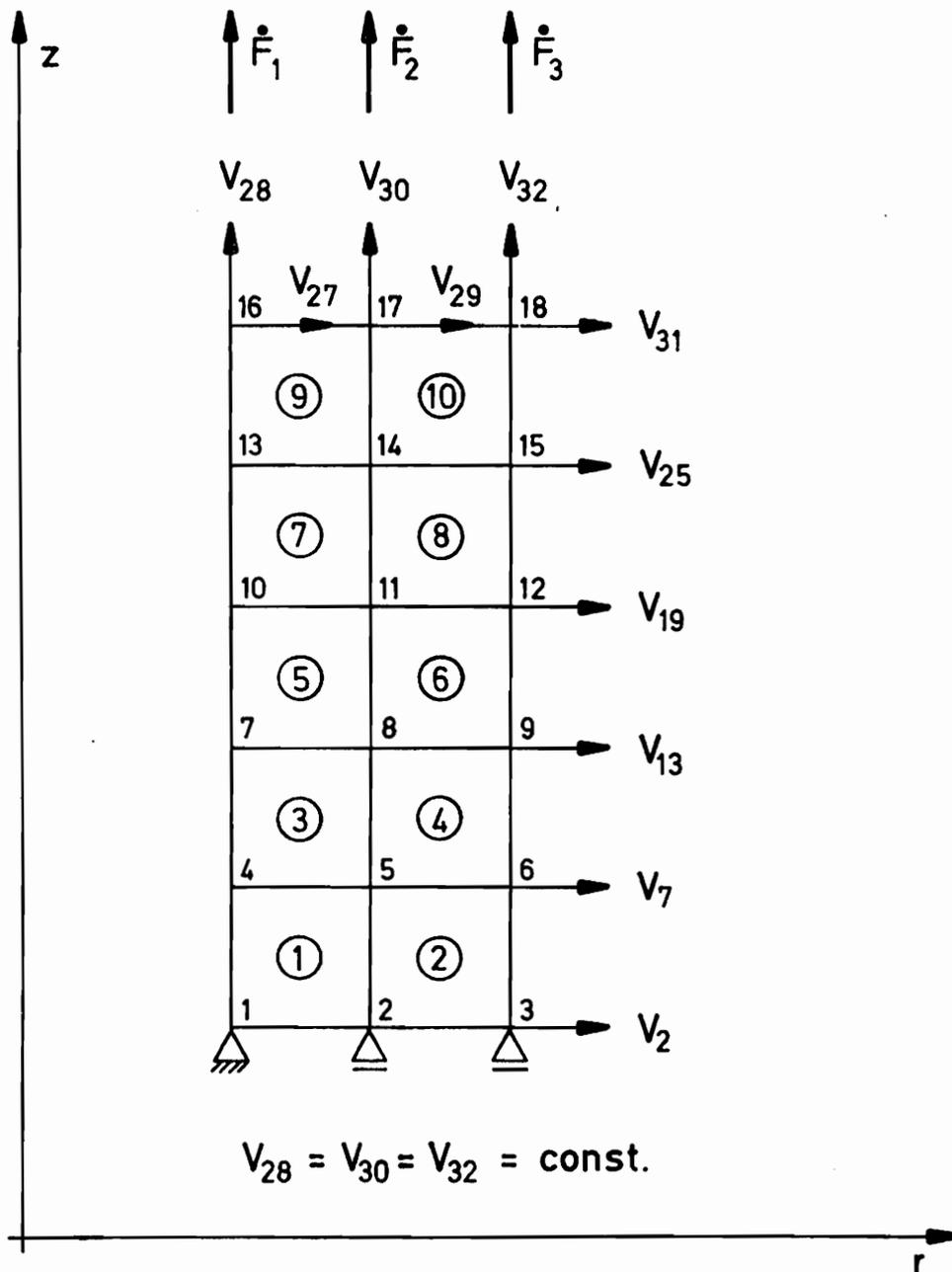


Abb.27: Vorgabe der konstanten Randgeschwindigkeiten V_{27}, V_{30} und V_{32} .

$$\begin{bmatrix}
 A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 & A_5^1 & \dots & A_{28}^1 & A_{29}^1 & A_{30}^1 & A_{31}^1 & A_{32}^1 \\
 A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 & A_5^2 & \dots & A_{28}^2 & A_{29}^2 & A_{30}^2 & A_{31}^2 & A_{32}^2 \\
 A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 & A_5^3 & \dots & A_{28}^3 & A_{29}^3 & A_{30}^3 & A_{31}^3 & A_{32}^3 \\
 A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 & A_4^4 & A_5^4 & \dots & A_{28}^4 & A_{29}^4 & A_{30}^4 & A_{31}^4 & A_{32}^4 \\
 A_1^5 & A_2^5 & A_3^5 & A_4^5 & A_5^5 & \dots & A_{28}^5 & A_{29}^5 & A_{30}^5 & A_{31}^5 & A_{32}^5 \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 A_{28}^{28} & A_{28}^{29} & A_{28}^{30} & A_{28}^{31} & A_{28}^{32} & \dots & A_{28}^{28} & A_{28}^{29} & A_{28}^{30} & A_{28}^{31} & A_{28}^{32} \\
 A_{29}^{29} & A_{29}^{30} & A_{29}^{31} & A_{29}^{32} & \dots & \dots & A_{29}^{29} & A_{29}^{30} & A_{29}^{31} & A_{29}^{32} \\
 A_{30}^{30} & A_{30}^{31} & A_{30}^{32} & \dots & \dots & \dots & A_{30}^{30} & A_{30}^{31} & A_{30}^{32} \\
 A_{31}^{31} & A_{31}^{32} & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{31}^{31} & A_{31}^{32} \\
 A_{32}^{32} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{32}^{32}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{28} \\ V_{29} \\ V_{30} \\ V_{31} \\ V_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Abb.28: Ausgangsgleichungssystem für Kraftsteuerung

$$\begin{bmatrix}
 A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 & A_4^1 & A_5^1 & \dots & A_{29}^1 & A_{31}^1 \\
 A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & A_4^2 & A_5^2 & \dots & A_{29}^2 & A_{31}^2 \\
 A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 & A_4^3 & A_5^3 & \dots & A_{29}^3 & A_{31}^3 \\
 A_1^4 & A_2^4 & A_3^4 & A_4^4 & A_5^4 & \dots & A_{29}^4 & A_{31}^4 \\
 A_1^5 & A_2^5 & A_3^5 & A_4^5 & A_5^5 & \dots & A_{29}^5 & A_{31}^5 \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 A_{29}^{29} & A_{29}^{30} & A_{29}^{31} & A_{29}^{32} & \dots & \dots & A_{29}^{29} & A_{29}^{31} \\
 A_{31}^{31} & A_{31}^{32} & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{31}^{31} & A_{31}^{32}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{29} \\ V_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 A_{28}^1 V_{28} + A_{30}^1 V_{30} + A_{32}^1 V_{32} \\
 A_{28}^2 V_{28} + A_{30}^2 V_{30} + A_{32}^2 V_{32} \\
 A_{28}^3 V_{28} + A_{30}^3 V_{30} + A_{32}^3 V_{32} \\
 A_{28}^4 V_{28} + A_{30}^4 V_{30} + A_{32}^4 V_{32} \\
 A_{28}^5 V_{28} + A_{30}^5 V_{30} + A_{32}^5 V_{32} \\
 \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\
 A_{29}^{29} V_{28} + A_{30}^{29} V_{30} + A_{32}^{29} V_{32} \\
 A_{31}^{31} V_{28} + A_{30}^{31} V_{30} + A_{32}^{31} V_{32}
 \end{bmatrix}$$

Abb.29: Reduziertes Gleichungssystem zur Steuerung der äußeren Geschwindigkeiten V_{Rand} .

Aus dem Gleichungssystem in Abb.28 für eine kraftgesteuerte Berechnung kommen wir gemäß dem Zugstab Abb.27 zu dem neuen Gleichungssystem in Abb.29 und Abb.30.

$$\begin{bmatrix}
 A_{11}^{28} & A_{12}^{28} & A_{13}^{28} & A_{14}^{28} & A_{15}^{28} & \dots & A_{28}^{28} & A_{29}^{28} & A_{30}^{28} & A_{31}^{28} & A_{32}^{28} \\
 A_{11}^{30} & A_{12}^{30} & A_{13}^{30} & A_{14}^{30} & A_{15}^{30} & \dots & A_{28}^{30} & A_{29}^{30} & A_{30}^{30} & A_{31}^{30} & A_{32}^{30} \\
 A_{11}^{32} & A_{12}^{32} & A_{13}^{32} & A_{14}^{32} & A_{15}^{32} & \dots & A_{28}^{32} & A_{29}^{32} & A_{30}^{32} & A_{31}^{32} & A_{32}^{32}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 v_5 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 v_{28} \\
 v_{29} \\
 v_{30} \\
 v_{31} \\
 v_{32}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \dot{F}_1 \\
 \dot{F}_2 \\
 \dot{F}_3
 \end{bmatrix}$$

Abb.30: Übrige Gleichungen zur Bestimmung der äußeren Kräfte F_i .

Die Lösung des Gleichungssystems in Abb.29 liefert uns die Beträge der noch freien Knotenpunktsgeschwindigkeiten innerhalb des Zugstabes. Die zusätzlichen Gleichungen in Abb.30 können wir zur Berechnung der äußeren Kräfte benutzen. Der Verlauf der Geschwindigkeiten zu Beginn des Zugversuches und nach Auftreten der Einschnürung sind qualitativ in Abb.31 dargestellt.

Da der Probestab für den Zugversuch symmetrisch ist, rechnen wir aus Gründen der Rechenzeit- und Speicherplatzersparnis nur ein Viertel des Stabes gemäß Abb.32. Die Mittelachse der Probe ändert sich nicht und kann daher in dem Viertelstab in radialer Richtung festgehalten werden.

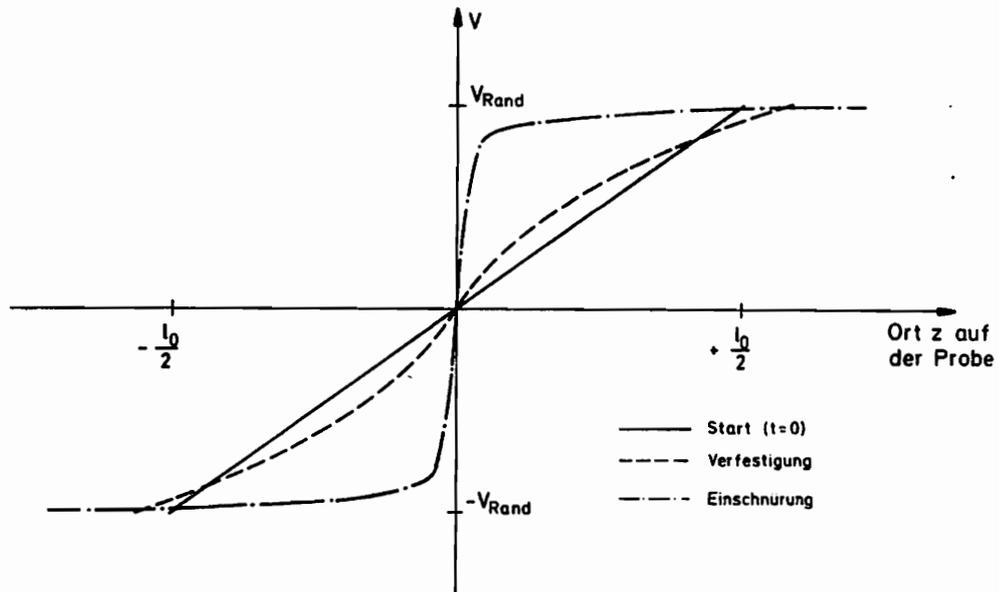


Abb.31: Geschwindigkeitsverlauf über der Probenachse bei festgehaltener Probenmitte.

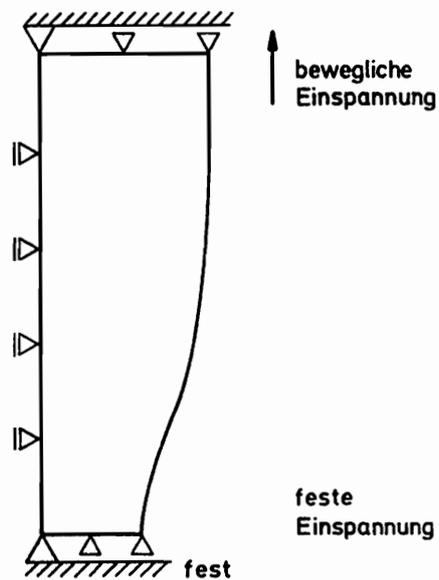


Abb.32: Darstellung des Viertelstabes.

Betrachten wir das Gesamtgleichungssystem in Abb.29, so können wir erkennen, daß die Gesamtsteifigkeitsmatrix symmetrisch ist und die von Null verschiedenen Größen in einem Band um die Hauptdiagonale angeordnet sind. Die Verwendung des bereits in Abschnitt 6.1 angesprochenen Skyline-Verfahrens ermöglicht es uns nun, nur die Werte der Gesamtsteifigkeitsmatrix abzuspeichern, die ungleich Null sind. Um diese Größen nun wieder gezielt aufzusuchen, ist es erforderlich die Gesamtsteifigkeitsmatrix in zwei Vektoren abzulegen. Der erste Vektor beinhaltet alle von Null verschiedenen Größen der Steifigkeitsmatrix. Im zweiten Vektor stehen nur die Nummern der Hauptdiagonalelemente. Abb.33 zeigt die Umwandlung der Gesamtsteifigkeitsmatrix in zwei Vektoren.

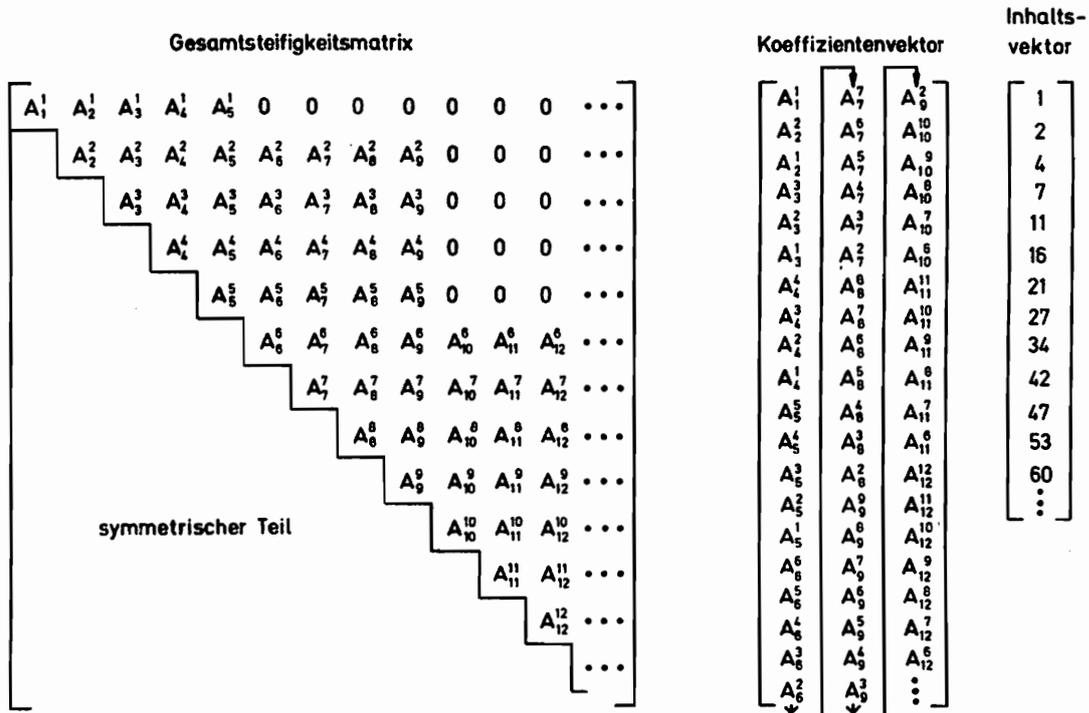


Abb.33: Umbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Da die Matrix symmetrisch ist, wird nur der Teil oberhalb der Hauptdiagonalen abgespeichert. Man findet nun einen Wert in der Gesamtsteifigkeitsmatrix wieder, indem man anhand der gewünschten Koordinatenrichtung aus dem Inhaltsvektor die Nummer des Hauptdiagonalelementes entnimmt und diese im Wertevektor aufsucht.

6.3 Spannungsintegration und Zeitschrittsteuerung

Die Lösung des linearen Gleichungssystems führt zu den Knotenpunktsgeschwindigkeiten in dem angenommenen Elementnetz. Die neuen Spannungen am Ende des derzeitigen Inkrementes erhalten wir gemäß Gl. (3.57) und Gl. (3.58), indem wir die entsprechenden Vektoren mit den hier errechneten Knotenpunktsgeschwindigkeiten multiplizieren. Zu beachten ist hierbei, daß wir die Spannungen für jedes Element einzeln ermitteln müssen. Es ist daher erforderlich die Knotenpunktsgeschwindigkeiten der lokalen Knotenpunktsummerierung aus dem globalen Netz herauszusuchen, und dabei die konstanten und die gleich Null gesetzten Knotenpunktsgeschwindigkeiten mit einzubauen. Der Vektor der Knotenpunktsgeschwindigkeiten liefert uns auch die neuen Koordinaten der Knotenpunkte im Elementnetz.

Die ermittelten neuen Koordinaten und Spannungen werden in einem Feld ORTE bzw. WERTE abgespeichert, um bei der Berechnung des nächsten Inkrementes wieder abrufbar zu sein.

Nun wollen wir an dieser Stelle noch auf die Größe der Zeitschritte eingehen. Die Zeitschrittsteuerung soll so erfolgen, daß der elastische Bereich in einem oder zwei Schritten durchlaufen wird, dann ein Bereich mit sehr kleinen Schrittweiten folgt, und wenn die Spannungskurve sich der Horizontalen nähert, sollen die Inkremente wieder anwachsen. Solange die Berechnung im elastischen Bereich

erfolgt, wird nach jedem Inkrement abgefragt, ob die Fließgrenze des Werkstoffes in einem Element bereits überschritten wurde. Ist das der Fall, erfolgt eine Verkleinerung der Schrittweite zur genaueren Bestimmung der Fließgrenze. Die Schrittweite wird nach Eingrenzung der Fließgrenze allmählich wieder vergrößert. Die Änderung erfolgt automatisch jeweils durch Halbieren bzw. später durch Verdoppeln des vorherigen Wertes der Zeitschrittgröße. Die Vorgabe eines anderen Multiplikationsfaktors im Programmablauf ist ebenfalls möglich.

6.4 Berechnung der Knotenpunktstemperaturen

Nachdem wie im vorherigen Abschnitt beschrieben für ein Inkrement im Belastungsschritt zuerst die Knotenpunktsgeschwindigkeiten und anschließend die neuen Spannungen berechnet wurden, soll nun die Erhöhung der Temperaturen aufgrund der Dissipation der plastischen Arbeit und der Wärmeleitung im Werkstoff berechnet werden.

Gemäß Gl. (4.74) bekommen wir ein Gleichungssystem in dem auf der linken Seite die Temperaturkoeffizientenmatrix und auf der rechten Seite ein Vektor der Temperaturen zu Beginn des Zeitschrittes steht. Die Lösung dieses Gleichungssystems erfolgt nach dem Skyline-Verfahren mit demselben Gleichungslöser, der uns auch die Knotenpunktsgeschwindigkeiten liefert. Im folgenden wollen wir die Berücksichtigung der Temperaturrandbedingungen betrachten.

Sollen in Abb. 34 die Temperaturen $\vartheta_{16} \div \vartheta_{18}$ konstant gehalten werden, so kommen wir zu dem in Abb. 35 dargestellten reduzierten Gleichungssystem, das nun nur noch die freien Temperaturen berechnet. Die nicht mehr benötigten Gleichungen in Abb. 35 können wir benutzen, um den Wärmefluß in die Einspannungen zu berechnen. Als Lösung dieses Gleichungssystems erhalten wir sofort die neuen Tempera-

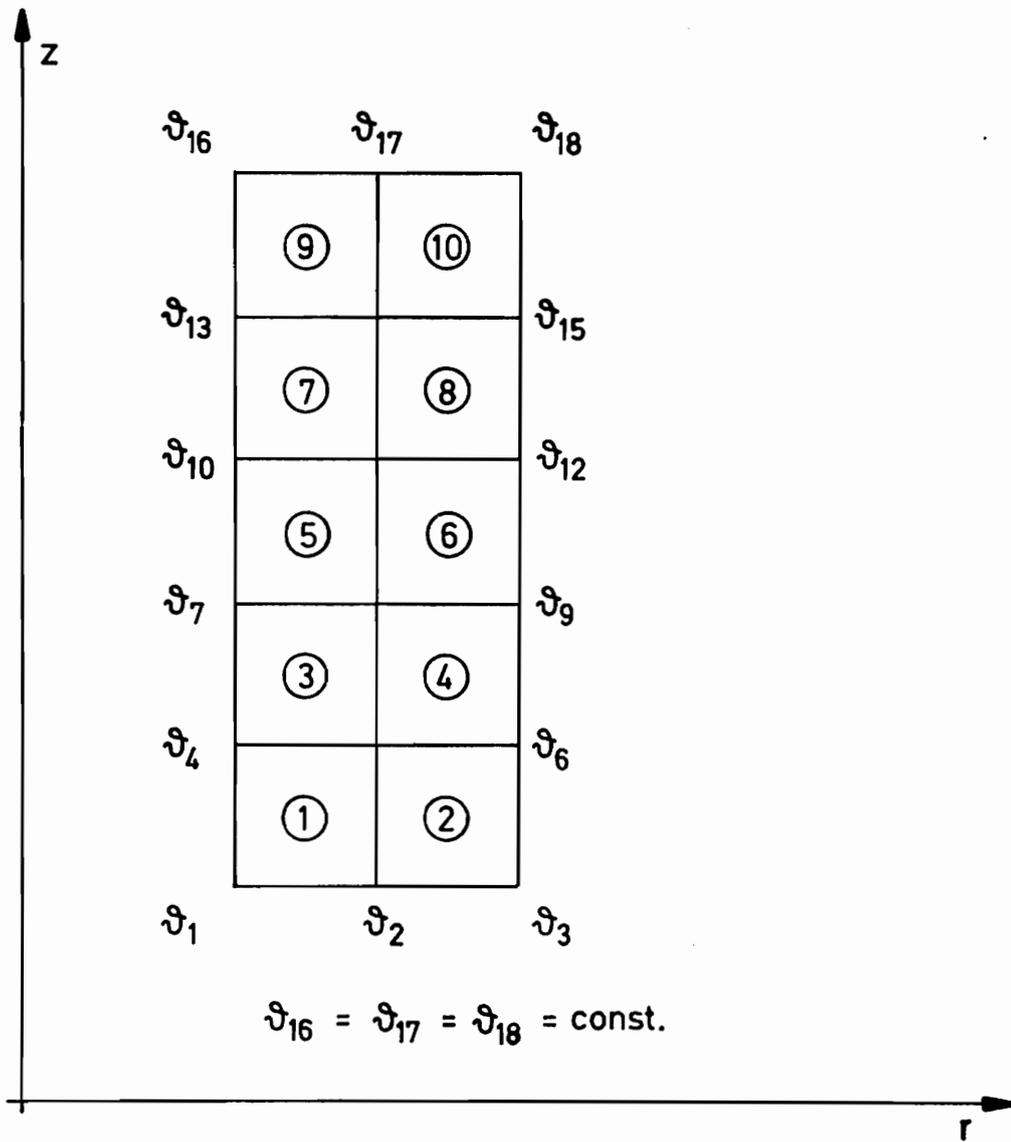


Abb.34: Elementnetz mit konstanten Temperaturen $v_{16} = v_{17} = v_{18} = \text{const.}$

turen am Ende eines Zeitschrittes. Eine Zeitintegration, ähnlich der Spannungsintegration, ist hier nicht erforderlich. Die ermittelten Temperaturen werden ebenfalls in dem Feld WERTE abgespeichert und stehen zur Berechnung des nächsten Inkrementes wieder zur Verfügung.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1^1 & \bar{A}_2^1 & \bar{A}_3^1 & \bar{A}_4^1 & \dots & \bar{A}_{14}^1 & \bar{A}_{15}^1 & \bar{A}_{16}^1 & \bar{A}_{17}^1 & \bar{A}_{18}^1 \\ \bar{A}_1^2 & \bar{A}_2^2 & \bar{A}_3^2 & \bar{A}_4^2 & \dots & \bar{A}_{14}^2 & \bar{A}_{15}^2 & \bar{A}_{16}^2 & \bar{A}_{17}^2 & \bar{A}_{18}^2 \\ \bar{A}_1^3 & \bar{A}_2^3 & \bar{A}_3^3 & \bar{A}_4^3 & \dots & \bar{A}_{14}^3 & \bar{A}_{15}^3 & \bar{A}_{16}^3 & \bar{A}_{17}^3 & \bar{A}_{18}^3 \\ \bar{A}_1^4 & \bar{A}_2^4 & \bar{A}_3^4 & \bar{A}_4^4 & \dots & \bar{A}_{14}^4 & \bar{A}_{15}^4 & \bar{A}_{16}^4 & \bar{A}_{17}^4 & \bar{A}_{18}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{A}_1^{15} & \bar{A}_2^{15} & \bar{A}_3^{15} & \bar{A}_4^{15} & \dots & \bar{A}_{14}^{15} & \bar{A}_{15}^{15} & \bar{A}_{16}^{15} & \bar{A}_{17}^{15} & \bar{A}_{18}^{15} \\ \bar{A}_1^{16} & \bar{A}_2^{16} & \bar{A}_3^{16} & \bar{A}_4^{16} & \dots & \bar{A}_{14}^{16} & \bar{A}_{15}^{16} & \bar{A}_{16}^{16} & \bar{A}_{17}^{16} & \bar{A}_{18}^{16} \\ \bar{A}_1^{17} & \bar{A}_2^{17} & \bar{A}_3^{17} & \bar{A}_4^{17} & \dots & \bar{A}_{14}^{17} & \bar{A}_{15}^{17} & \bar{A}_{16}^{17} & \bar{A}_{17}^{17} & \bar{A}_{18}^{17} \\ \bar{A}_1^{18} & \bar{A}_2^{18} & \bar{A}_3^{18} & \bar{A}_4^{18} & \dots & \bar{A}_{14}^{18} & \bar{A}_{15}^{18} & \bar{A}_{16}^{18} & \bar{A}_{17}^{18} & \bar{A}_{18}^{18} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vartheta_{15} \\ \vartheta_{16} \\ \vartheta_{17} \\ \vartheta_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ W_{15} \\ W_{16} \\ W_{17} \\ W_{18} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_1^1 & \bar{A}_2^1 & \bar{A}_3^1 & \bar{A}_4^1 & \dots & \bar{A}_{14}^1 & \bar{A}_{15}^1 \\ \bar{A}_1^2 & \bar{A}_2^2 & \bar{A}_3^2 & \bar{A}_4^2 & \dots & \bar{A}_{14}^2 & \bar{A}_{15}^2 \\ \bar{A}_1^3 & \bar{A}_2^3 & \bar{A}_3^3 & \bar{A}_4^3 & \dots & \bar{A}_{14}^3 & \bar{A}_{15}^3 \\ \bar{A}_1^4 & \bar{A}_2^4 & \bar{A}_3^4 & \bar{A}_4^4 & \dots & \bar{A}_{14}^4 & \bar{A}_{15}^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \bar{A}_1^{15} & \bar{A}_2^{15} & \bar{A}_3^{15} & \bar{A}_4^{15} & \dots & \bar{A}_{14}^{15} & \bar{A}_{15}^{15} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \vartheta_3 \\ \vartheta_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vartheta_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 - \bar{A}_{16}^1 \vartheta_{16} - \bar{A}_{17}^1 \vartheta_{17} - \bar{A}_{18}^1 \vartheta_{18} \\ W_2 - \bar{A}_{16}^2 \vartheta_{16} - \bar{A}_{17}^2 \vartheta_{17} - \bar{A}_{18}^2 \vartheta_{18} \\ W_3 - \bar{A}_{16}^3 \vartheta_{16} - \bar{A}_{17}^3 \vartheta_{17} - \bar{A}_{18}^3 \vartheta_{18} \\ W_4 - \bar{A}_{16}^4 \vartheta_{16} - \bar{A}_{17}^4 \vartheta_{17} - \bar{A}_{18}^4 \vartheta_{18} \\ \vdots \\ \vdots \\ W_{15} - \bar{A}_{16}^{15} \vartheta_{16} - \bar{A}_{17}^{15} \vartheta_{17} - \bar{A}_{18}^{15} \vartheta_{18} \end{bmatrix}$$

Abb.35: Gleichungssystem mit inhomogenen Temperaturrandbedingungen.

6.5 Strategie des Rechnerprogrammes

Für die Berechnung des Zugstabes wurde ein Finite-Element-Programm in Fortran IV erstellt. Der Programmablauf ist in Abb. 36 dargestellt. Das gesamte Programm besteht außer dem Hauptprogramm aus 22 Unterprogrammen von denen im folgenden die Wichtigsten erläutert werden.

Das Hauptprogramm hat neben der Zeitschrittsteuerung noch folgende Aufgaben:

1. Festlegung der Anfangswerte und Berechnung der Skyline-Inhaltsvektoren in EINGAB
2. Aufruf von HAU zur Berechnung der Knotenpunkts-
geschwindigkeiten.
3. Aufruf von SCHRIT zur Durchführung der Spannungs-
integration.
4. Aufruf von THAUPT zur Berechnung der neuen Tempe-
raturen.
5. Aufruf von AUSGAB zur Ausgabe der Elementwerte für
die gewünschten Elemente.
6. Am Ende der gesamten Rechnung erfolgt der Aufruf
des Unterprogrammes TOTAL zur Ausgabe sämtlicher
Knotenpunktskoordinaten, -spannungen und -tempera-
turen.

Im Unterprogramm EINGAB werden die Abmessungen des Zug-
stabes eingefragt und das Elementnetz mit allen Knoten-
punkts- und Elementnummerierungen aufgestellt. Außerdem
werden alle Geschwindigkeits- und Temperaturrandbedin-
gungen mit eingebaut.

Im Unterprogramm HAU wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix
des Elementnetzes im Skyline-Verfahren zusammengebaut,
und die Berechnung der Knotenpunkts-
geschwindigkeiten mittels des Gleichungslösers RGECCS veranlaßt.

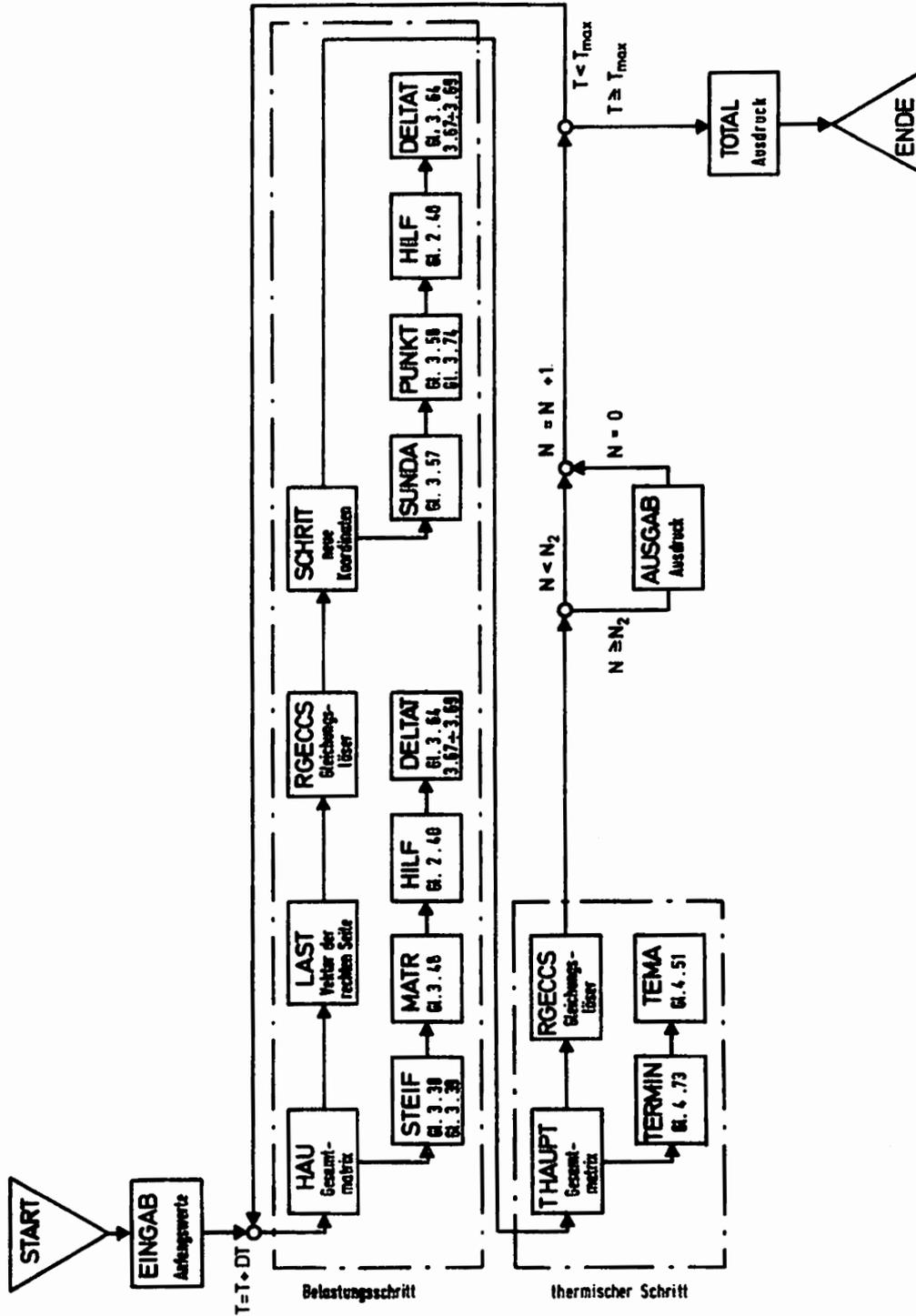


Abb.36: Programmablauf

Das von HAU gerufene Unterprogramm STEIF integriert die Steifigkeitsmatrix eines Elementes aus den Werten der jeweils in MATR berechneten Stützstelle. Im Unterprogramm LAST wird die rechte Seite des Gleichungssystems aufgebaut und die Reduzierung des Gleichungssystems für konstante Randgeschwindigkeit durchgeführt.

Nach Berechnung der Knotenpunktsgeschwindigkeiten wird vom Hauptprogramm das Unterprogramm SCHRIT gerufen, welches seinerseits die Spannungsintegration und die Berechnung der neuen Knotenpunktskoordinaten durchführt.

Die Berechnung eines thermischen Zeitschrittes erfolgt nach Abspeicherung der in SCHRIT ermittelten Werte. Das Unterprogramm THAUPT stellt dazu die Koeffizientenmatrix der linken Seite sowie die rechte Seite zusammen und ruft den Gleichungslöser RGECCS zur Berechnung der neuen Knotenpunktstemperaturen.

Nachdem nun jeweils ein Inkrement vollständig berechnet wurde, veranlaßt das Hauptprogramm durch Aufruf von AUSGAB für die gewünschte Anzahl von Elementen den Ausdruck der Knotenpunktskoordinaten, Spannungen und Temperaturen. Am Programmschluß werden mit Hilfe des Unterprogramms TOTAL sämtliche Knotenpunktstemperaturen, Spannungen und Koordinaten des Elementnetzes ausgedruckt.

Aufgrund der Speicherplatzkapazität des Rechners sind wir auf Berechnungen von maximal 120 Elementen beschränkt. Das bedeutet bei Berechnung eines Viertelstabes, daß wir den gesamten Zugstab in 480 Elemente aufteilen können.

6.6 Darstellung und Diskussion der Ergebnisse

In diesem Abschnitt wollen wir die errechneten Temperatur- und Spannungsverläufe den Versuchsergebnissen gegenüberstellen.

Die Abb. 37, 38 und 39 zeigen die Temperaturverläufe über der Probenachse beginnend an der festen Probeneinspannung zu verschiedenen Zeitpunkten. In Abb. 40 ist die Erwärmung der Einschnürstellen der drei Versuchsreihen bezogen auf die aktuelle Probenverlängerung dargestellt. Betrachten wir zuerst die Einschnürstelle selbst, so sehen wir, daß die Versuchsauswertung höhere Temperaturen ergab, als die Finite-Element-Rechnung. Außerdem ist die Temperaturspitze gegenüber der Berechnung beim Versuch auf einen schmalen Bereich beschränkt. Dies hängt mit der relativ kleinen Anzahl der verwendeten Elemente zusammen. Bis zum Beginn der Einschnürung haben sich wegen der Gleichmaßdehnung alle Elemente um den gleichen Betrag verlängert, wenn man einmal für einen Augenblick die Randeinflüsse und die Temperaturunterschiede nicht berücksichtigt.

Während der Einschnürung selbst verlängern sich nur noch die Elemente in der Umgebung der Einschnürung. Die größten Längenänderungen widerfahren den Elementen direkt an der Einschnürstelle, also an der Stelle engsten Querschnittes. Da die Dehnungen dort in der Größenordnung um $\epsilon_z = 1,5$ liegen, werden die inneren Elemente auf die ca. fünffache Ausgangslänge gedehnt. Dies führt bei Verwendung von z.B. 3×20 Elementen für einen Viertelstab dazu, daß ein Element an der Einschnürstelle, welches eine Ausgangslänge von 2,8 mm hatte, nun ca. 14 mm lang ist, und somit in diesem Bereich nur noch zwei Integrationsstützstellen in z-Richtung zur Verfügung stehen. Daraus folgt, daß die erreichte Endtemperatur kleiner ist, und der sehr steile Anstieg der Temperatur besonders im schnellen Versuch nicht erreicht wird. Eine Erhöhung der Anzahl der Elemente in Richtung der Probenachse liefert hier verbesserte Ergebnisse.

Im Bereich der Gleichmaßdehnung bzw. im Übergangsbereich zur Einschnürstelle liegt der errechnete Temperaturverlauf über den gemessenen Werten. Dies war zu erwarten, da die Rechnung von einer adiabaten Mantelfläche der Probe ausgeht, und somit keine Wärmestrahlung und keine Wärmeübertragung an die Umgebungsluft berücksichtigt. Die durchgeführten Berechnungen gehen davon aus, daß gemäß Gl. (4.3) 95% der plastischen Arbeit in Wärme dissipieren. Damit wird der Wert γ in Gl. (4.3) mit $\gamma=0,95$ angenommen. Um die Temperaturverläufe entlang der Probenachse aus Rechnung und Versuch miteinander vergleichen zu können, war es erforderlich die Randtemperatur an den Einspannungen der Probe in der Rechnung dem Versuch anzupassen. Im Versuch kann die Wärme nicht schnell genug aus der Probe abgeführt werden, so daß sich die Probenenden um einige Grade erwärmen. Die Rechnung jedoch hielt die Randtemperatur mit $\vartheta_R = 23,7^\circ\text{C}$ konstant. Durch Erhöhung der Randtemperatur während der Rechnung gemäß dem Versuchsablauf bekommen wir die dargestellten Temperaturverläufe in Abb. 37-39 und somit die Möglichkeit des Vergleichs zwischen Versuch und Rechnung. Die Anpassung erfolgte am rechten Probenrand. Die Unsymmetrie bzw. der steilere Abfall der Temperatur an der linken Einspannung erklärt sich dadurch, daß die Einschnürung beim Versuch einseitig erfolgte, und nur zum besseren Vergleich mit der Rechnung in die Probenmitte verlegt wurde. Aufgrund des im Versuch kleineren Abstandes zwischen Einschnürstelle und linker Einspannung folgt ein stärkeres Temperaturgefälle. Die Abb. 41 zeigt den Verlauf der Probenradien über der Länge der Probe, also die Geometrie der Einschnürstelle. Man sieht, daß in der Umgebung der Einschnürstelle die Rechnung einen höheren Materialfluß ergibt, als es der Versuch zeigt. Dies kann aufgrund der in der Rechnung höheren örtlichen plastischen Arbeit auch eine zusätzliche Temperaturerhöhung in der Umgebung der Einschnürung bewirken.

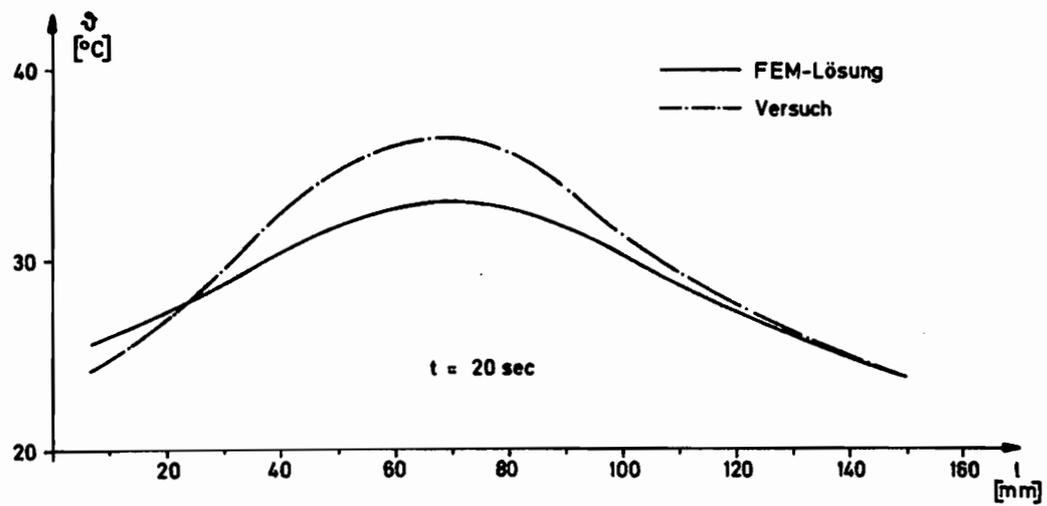
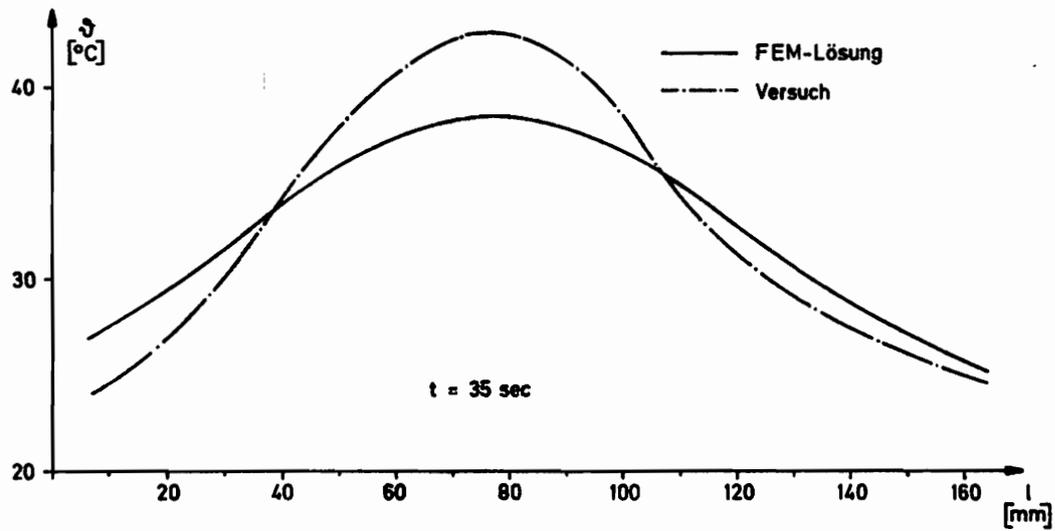


Abb.37: Temperaturverlauf über der Probenachse ($V = 1$ mm/sec.).

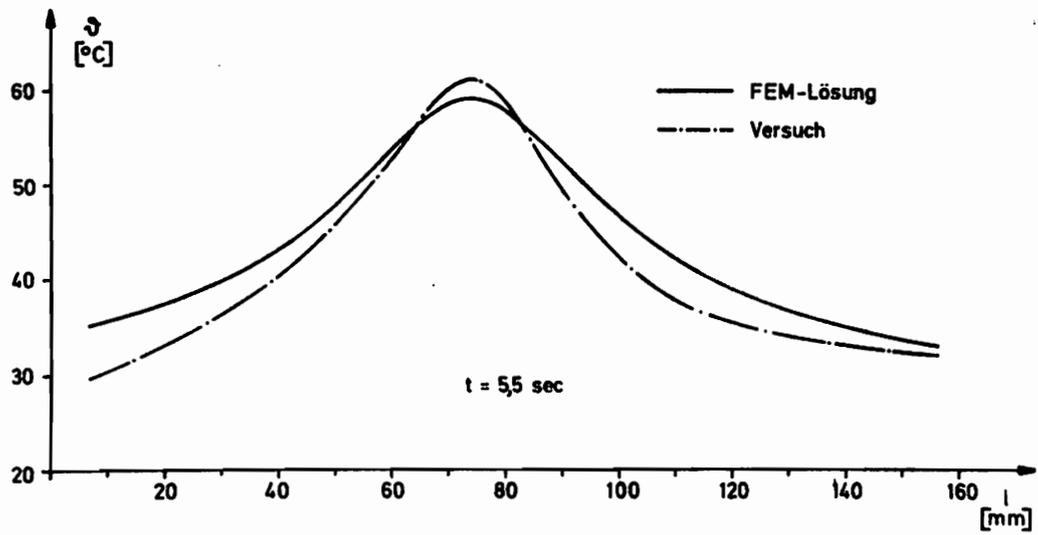
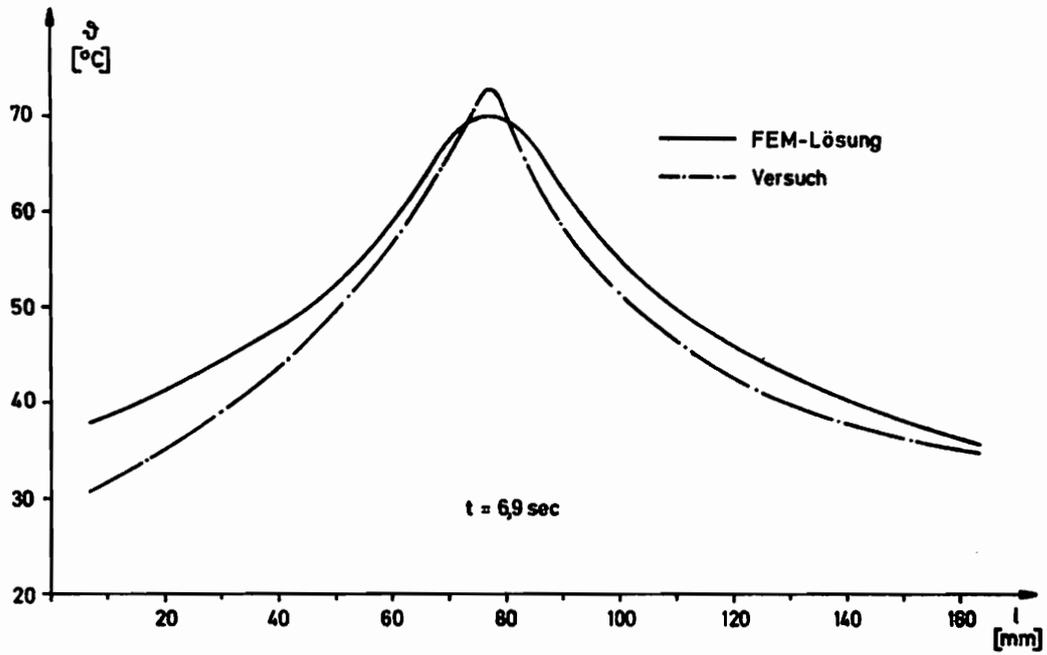


Abb.38: Temperaturverlauf über der Probenachse ($V = 5$ mm/sec.).

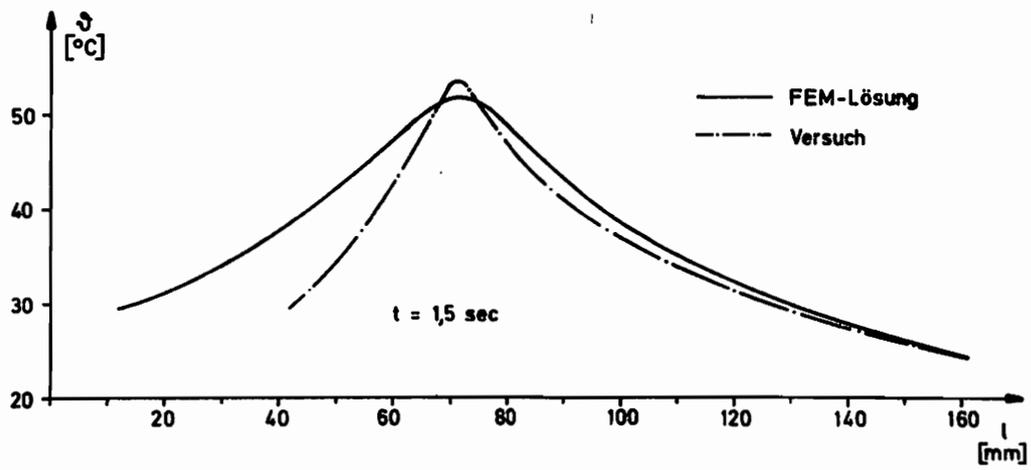
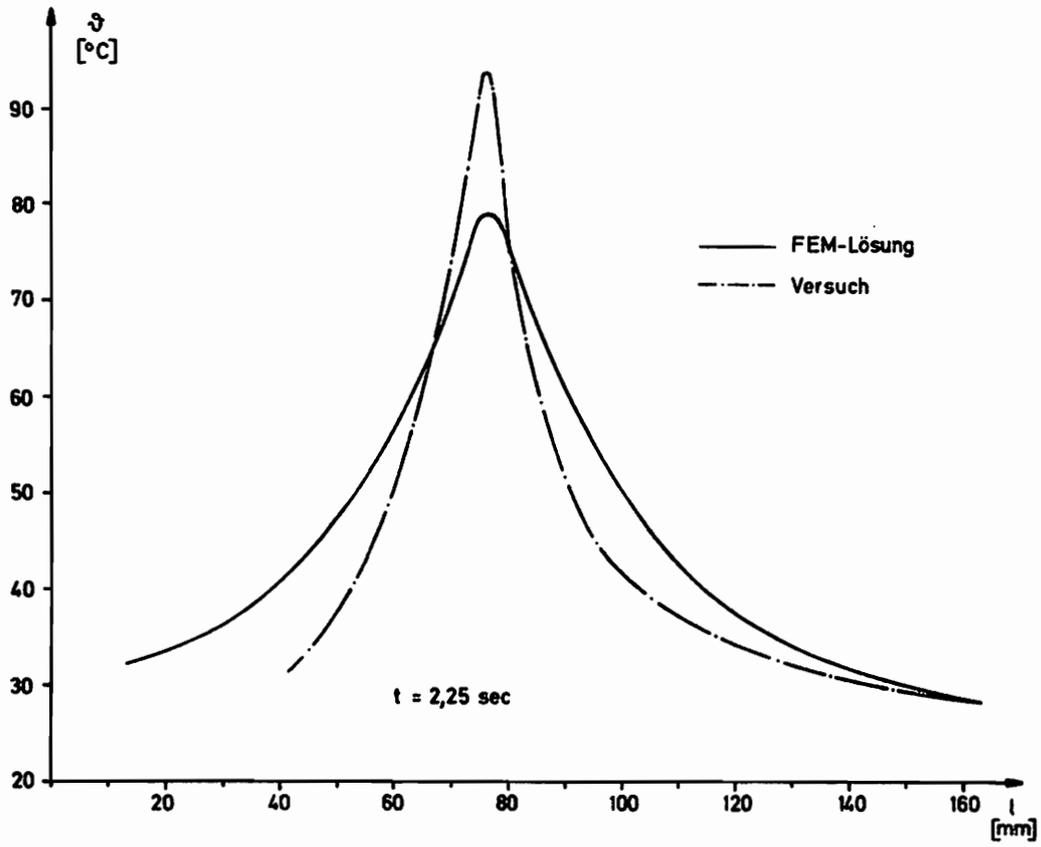


Abb.39: Temperaturverlauf über der Probenachse ($V=15\text{mm/sec.}$).

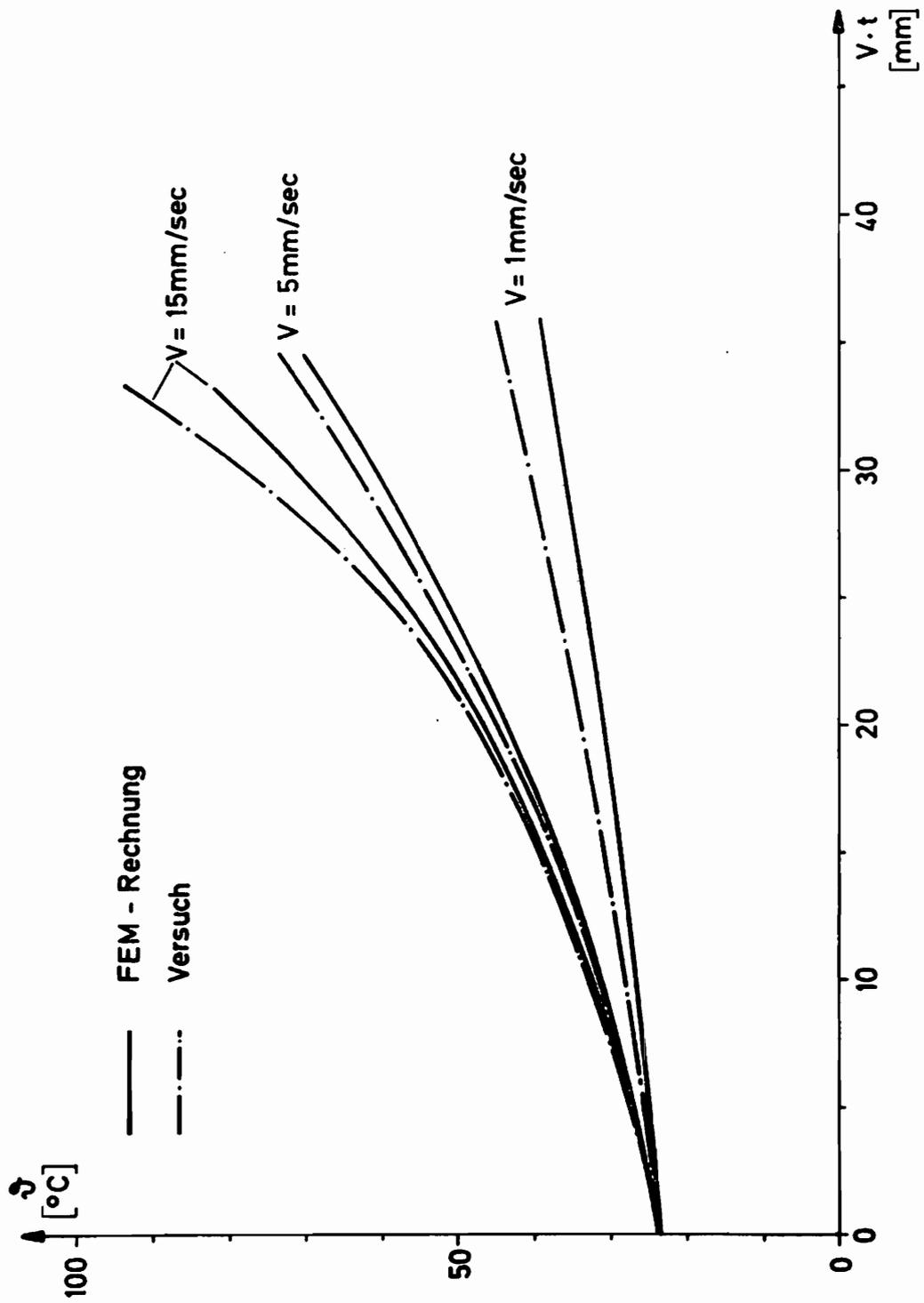


Abb.40: Temperaturverlauf der Einschnürstellen.

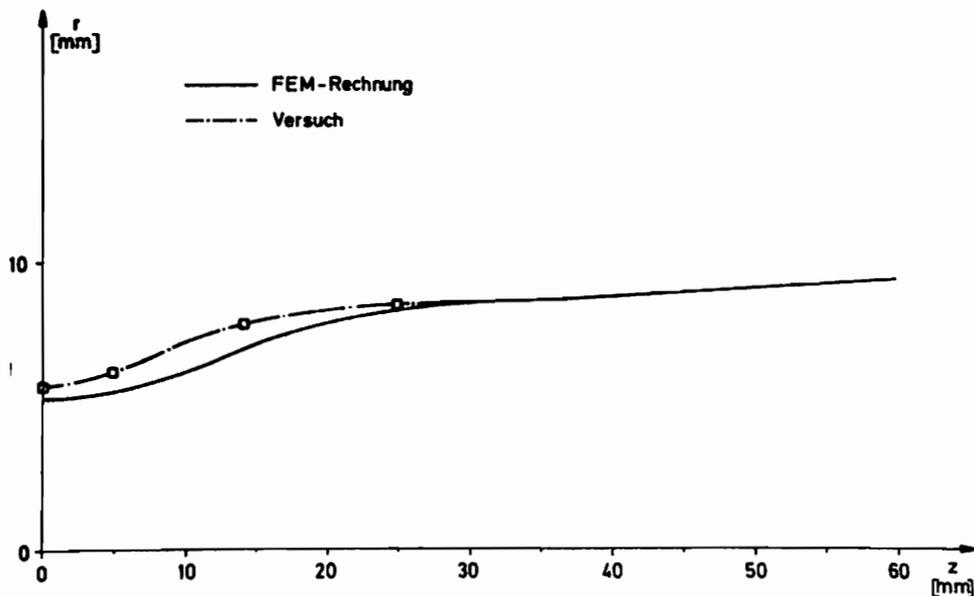


Abb.41: Verlauf der Probenradien.

Wenden wir uns nun der Betrachtung der Spannungsverläufe zu. Die Abb.42 und 43 zeigen uns den jeweils errechneten Spannungsverlauf für die Anwendung der Normalenregel ($\chi=0$) und für deren Erweiterung gemäß Gl.(3.5). Der Wert ϵ wurde für den gesamten Versuchsablauf konstant gehalten. Die jeweils dritte Kurve zeigt uns zum Vergleich die Versuchsergebnisse. Die Spannungsverläufe beziehen sich nur auf die Einschnürstellen und sind über der mittleren örtlichen Dehnung dargestellt.

Das in Abb.28 dargestellte Gleichungssystem errechnet im isothermen Belastungsschritt die Knotenpunktsgeschwindigkeiten für die Steuerung der äußeren Kraft. Erreicht man das Maximum der in Abb.8 dargestellten Kurve, so wird die Kraftgeschwindigkeit negativ, was zum Abbruch der kraftgesteuerten Rechnung führt. Dieser Punkt wird als Beginn der Einschnürung angenommen. Um nun das Materialverhalten während der Einschnürung zu berechnen, wurde ein Programm erstellt, das das Gleichungssystem in Abb.29 löst.

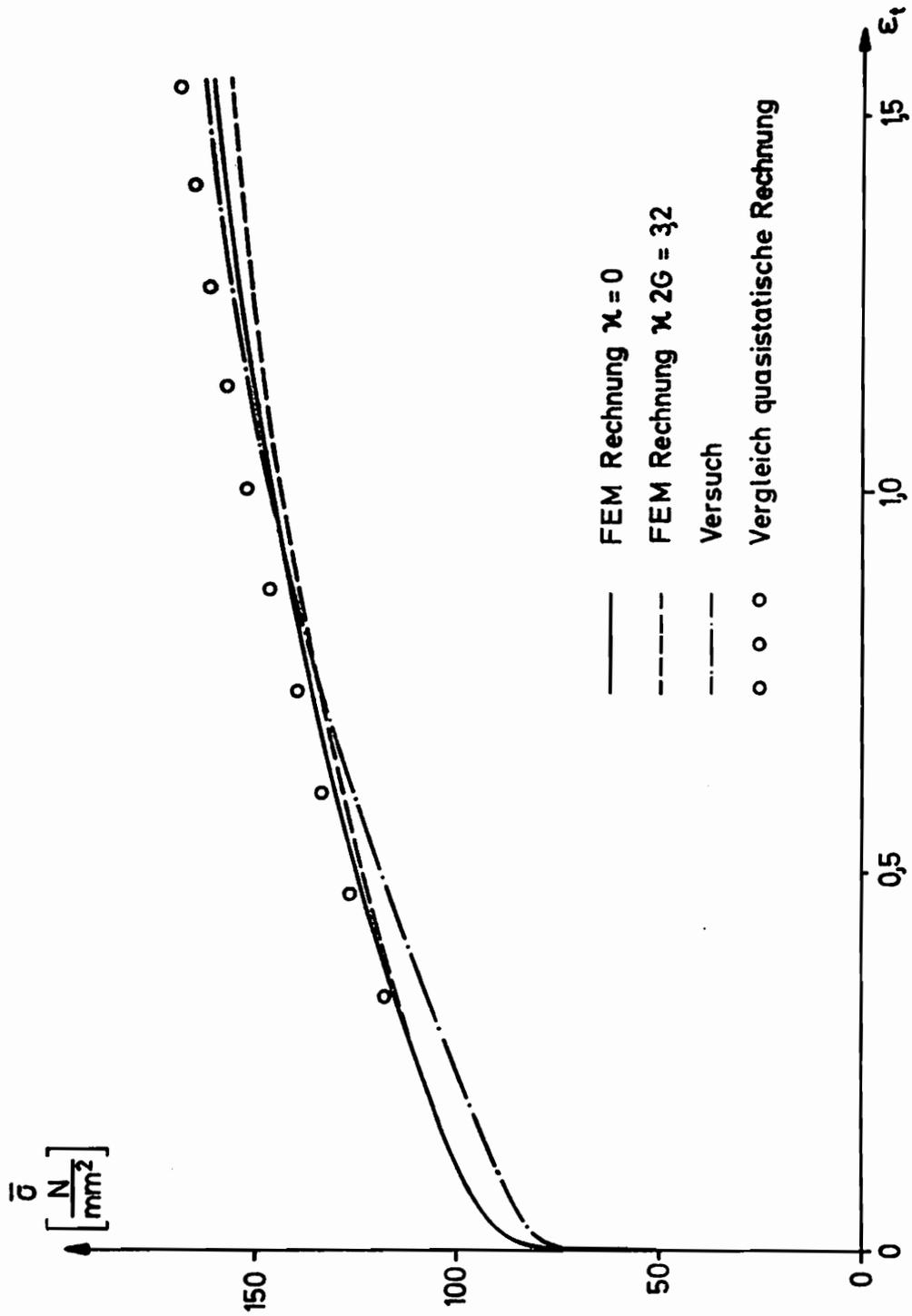


Abb.42: Spannungs-Dehnungsdiagramm für $V=1\text{mm/sec}..$

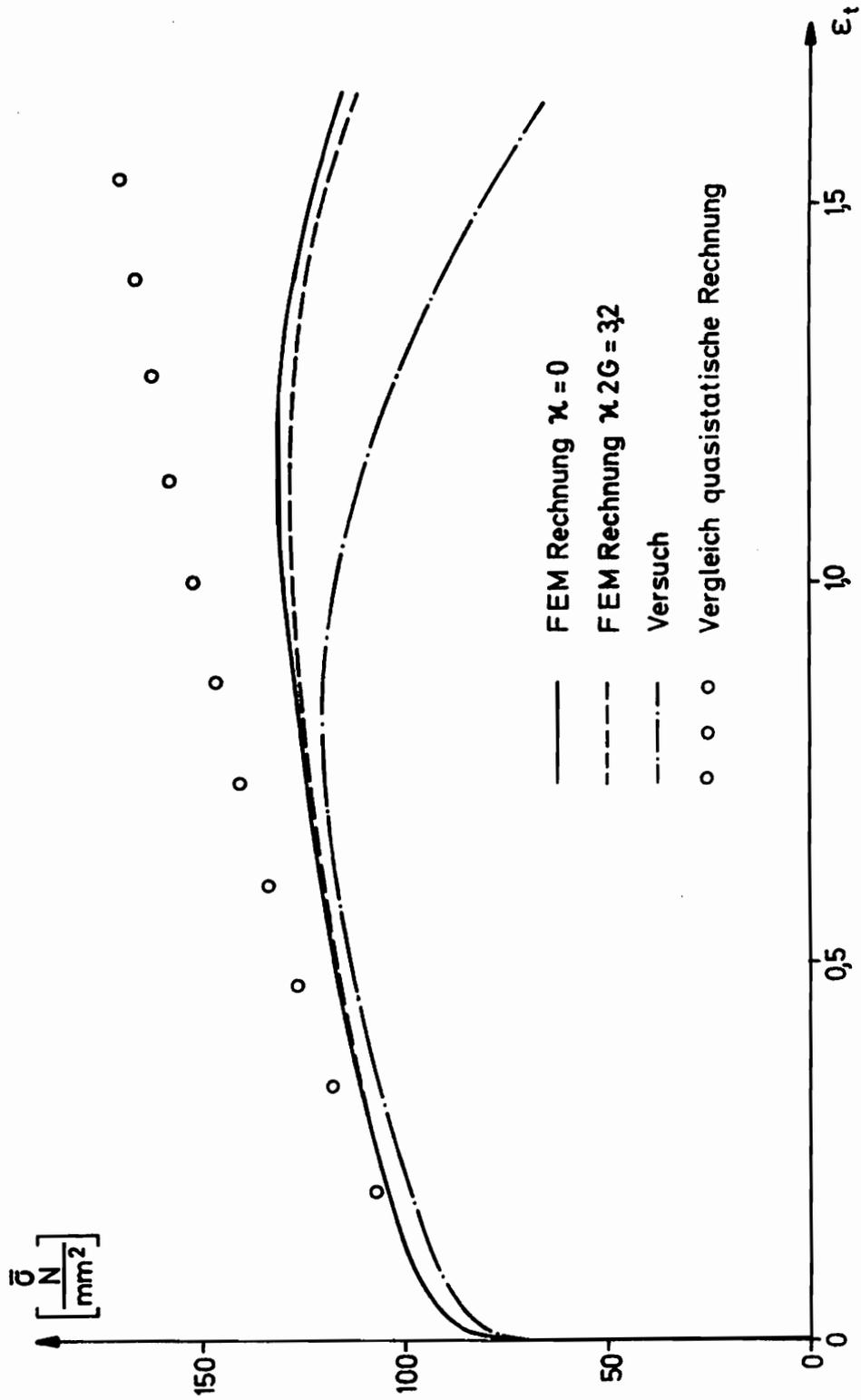


Abb.45: Spannungs-Dehnungsdiagramm für $v=5\text{mm/sec.}$

Durch Vorgabe einer konstanten Ziehgeschwindigkeit können wir über den Einschnürbeginn hinwegrechnen.

Allein aufgrund des Temperaturverlaufes, der uns in der Probenmitte die höchste Temperatur liefert, tritt die Einschnürung für die untersuchten Ziehgeschwindigkeiten und Probenabmessungen nicht auf. Es ist daher erforderlich eine örtliche Störung in den Prozeß einzubringen, die die Einschnürung bewirkt. Die gebräuchlichste Methode ist eine Kerbe an der Probe vorzusehen, die dann als geometrische Imperfektion in die Rechnung eingeht. Ein Vergleich der erzwungenen Einschnürung mit dem Zugversuch an einer glatten Probe ist dann eigentlich nicht zulässig. Die Erzwingung des kleineren Durchmessers an der Einschnürstelle wurde durch Zerspannung des Werkstoffes herbeigeführt und nicht durch plastische Materialumformung. Ich halte während der Rechnung, abgesehen von ca. 6 Elementen in Probenmitte die r-Koordinaten der Randknotenpunkte für ca. 100 von insgesamt 3000 gerechneten Inkrementen fest. Diese Elemente werden während der Rechenschritte nicht weiter verformt. Nachdem die Probe dann leicht eingeschnürt ist, lasse ich die Knotenpunkte wieder los. Die aufgebrachte Prozeßstörung wird also durch plastische Materialumformung hervorgerufen und somit die damit verbundene Verformungsarbeit an der Einschnürstelle berücksichtigt. Wir wollen diese Prozeßstörung im weiteren als kinematische Imperfektion bezeichnen.

Zur Frage der Stabilität und Fortpflanzung einer derartigen kinematischen Imperfektion betrachten wir die Abb. 44. Beginnen wir mit der erzwungenen Probeneinschnürung an der mit "A" gekennzeichneten Stelle, so beharren die Elemente, deren Knotenpunkte festgehalten werden für die Störungszeit im Zustand "A", während die einschnürenden Elemente den Zustand "B" erreichen und weiter verfestigen. Läßt man nun alle Elementknoten wieder los, so wird die aufgebrachte Störung allmählich wieder ausgeglichen und

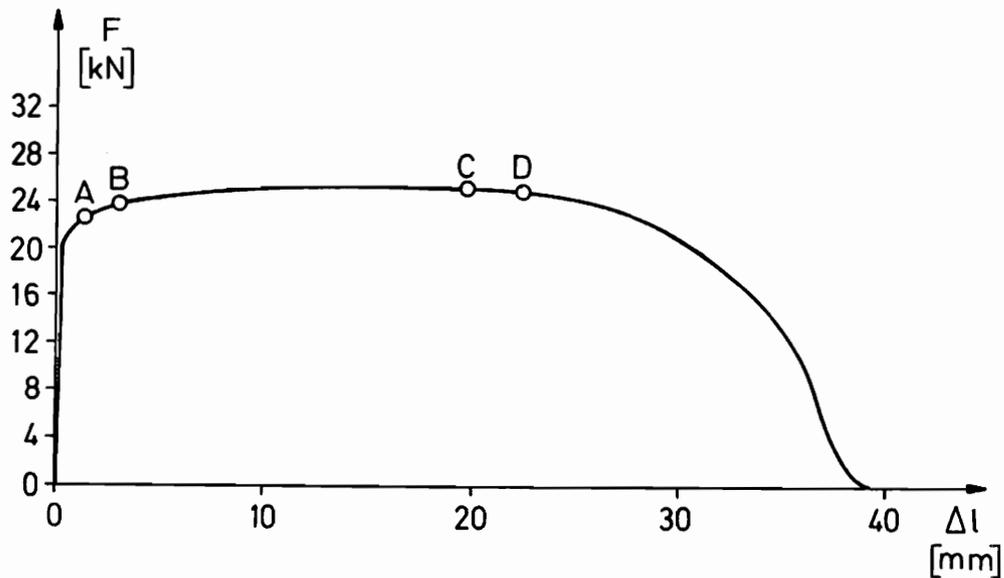


Abb.44: Kraft-Verlängerungsdiagramm des Zugstabes

eine Lokalisierung der Einschnürung tritt nicht ein. Anders ist es jedoch, wenn wir im Maximum der Kraft die Störung aufbringen. Alle Elemente befinden sich im Zustand "C", in dem auch die Elemente mit festgehaltenen Knotenpunkten verweilen, während die einschnürenden Elemente den Zustand "D" erreichen. Geben wir nun die Knotenpunktskoordinaten der Randknoten wieder frei, so pflanzt sich die Einschnürung weiter fort, und die anderen Elemente entlasten. Dies war auch zu erwarten, da die äußere angreifende Kraft abnimmt.

Abschließend soll noch auf eine numerische Besonderheit hingewiesen werden die die Übereinstimmung der theoretischen Ergebnisse mit den Werten der schnell ablaufenden Versuche sicherstellt.

Die Berechnung des isothermen Belastungsschrittes ergibt immer eine positive Spannungsgeschwindigkeit aus Gl. (3.52). Der Grund hierfür ist der stetige Anstieg des Verfestigungsansatzes $k^2 = k^2(w_p, \dot{\nu})$ nach Gl. (3.64) für zunehmende plastische Arbeit und konstante Temperatur $\dot{\nu}$. Daraus folgt, daß in den Belastungsschritten die Spannungen anwachsen und auch bei sehr schnell ablaufenden Versuchen nicht ab-

fallen können. Die anschließende Berechnung des jeweiligen thermischen Zeitschrittes ändert nach der bisher vorgestellten Berechnungsmethode nichts an den Spannungen. Faßt man einen Belastungsschritt und einen thermischen Zeitschritt zu einem Inkrement zusammen, so kann bei schnell ablaufenden Versuchen durch den Einfluß der Temperatur gemäß Gl. (3.64) die Verfestigung k^2 abnehmen. Da aber die Fließbedingung nach v. Mises erfüllt sein muß, folgt daraus eine Abnahme der Spannungen.

Um diesen Einfluß zu berücksichtigen, berechne ich am Ende eines thermischen Zeitschrittes mit den neuen Temperaturen nochmals die Verfestigung nach Gl. (3.64). Da während des Zeitschrittes die Temperaturen ansteigen, wird die Verfestigung \bar{k}^2 am Ende des Zeitschrittes kleiner sein. Um die Annäherung der Berechnung an die schnell ablaufenden Versuche durchzuführen, definieren wir einen Multiplikationsfaktor

$$\psi = \frac{\bar{k}^2}{k^2} \quad (6.1)$$

Er gibt uns das Verhältnis der Verfestigungen zu Beginn und am Ende eines thermischen Zeitschrittes an.

Setzen wir diese Gl. (6.1) in die Fließbedingung Gl. (3.10) ein, folgt als Bedingung zur Berechnung der neuen Spannungen im thermischen Zeitschritt

$$F = \psi \cdot \text{Sp}(\underline{T}_k^2) - \bar{k}^2 = 0, \quad (6.2)$$

wobei der Ausdruck $\psi \text{Sp}(\underline{T}_k^2)$ die neuen Spannungen am Ende des gesamten Inkrementes liefert. Diese Vorgehensweise stellt dann sicher, daß bei einem großen Temperaturanstieg die Spannungen dem Verfestigungsgesetz folgend abnehmen. Die so erhaltenen Spannungen werden in einem

Feld WERTE abgespeichert und dienen als Ausgangsgrößen zur Berechnung des nachfolgenden Inkrementes.

7. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur Berechnung der Einschnürung eines Zugstabes vorgestellt, das auch durch Einbau eines anderen Elementnetzes auf andere umformtechnische Probleme übertragbar ist.

Die Berechnung der thermoplastischen Materialumformung teilt sich auf in die Berechnung eines isothermen Belastungsschrittes und eines thermischen Zeitschrittes. Die jeweiligen Zustandsgrößen werden an den nachfolgenden Berechnungsschritt als externe Parameter übergeben und schaffen somit die Kopplung der thermischen Gleichungen mit den Stoffgesetzen. Die sich ergebenden Differentialgleichungen werden jeweils mit Hilfe der Finite-Element-Methode in lineare Gleichungssysteme umgerechnet und gelöst, wobei sich im Belastungsschritt als Lösung die Knotenpunktsgeschwindigkeiten ergeben. Die neuen Spannungen erhält man durch eine entsprechende Zeitintegration. Als Lösung des Gleichungssystems im thermischen Zeitschritt ergeben sich direkt die neuen Knotenpunktstemperaturen.

Der Beginn der Einschnürung wird in dieser Arbeit nicht durch eine an der Probe angebrachte Kerbe hervorgerufen, sondern durch Aufbringung einer kinematischen Imperfektion. Diese besteht darin, die Knotenpunktskoordinaten der Elemente außerhalb des Einschnürbereiches in radialer Richtung solange festzuhalten, bis sich die entstehende Einschnürung von selbst weiter fortpflanzt.

Die Berechnung wird mit Hilfe von Viereckselementen durchgeführt, wobei sich über den Probenquerschnitt maximal 480 Elemente gleichmäßig verteilen. Der Nachteil hierbei ist, daß eine Erhöhung der Elementzahl in radialer Richtung an der Einschnürstelle Probleme beim Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix ergibt. Bei Verwendung von z.B. Dreieckselementen ist eine Elementverfeinerung einfacher durchzuführen. Für die Berechnung des plastischen Anteils der Deformationen wird neben der Normalenregel auch die

Auswirkung eines Abweichens von der Normalenregel auf die Spannungen untersucht. Außerdem zeigt sich, daß die Verwendung anderer Stoffgesetze die z.B. zusätzlich von der Ziehgeschwindigkeit abhängig sind, eine Verbesserung der Berechnung der Spannungsverläufe bringen kann.

Den theoretisch ermittelten Ergebnissen werden die experimentell an Proben aus Al 99 gefundenen Werte gegenübergestellt.

Literaturverzeichnis

- [1] Fritsch,G.und Siegel,R.
Kalt-und Warmfließkurven von Baustählen;Inst.Forsch.
Maschinenbau,Karl-Marx-Stadt (1965).

- [2] DIN 50145
Zugversuch (1975).

- [3] Koropp,J.
Der Einfluß der Verformungswärme auf das Zähigkeits-
und Bruchverhalten von Baustählen;Dissertation Köln,
(1977).

- [4] Lehmann,Th.
On the concept of stress-strain relations in plasti-
city;acta mechanika 42 (1982),263-275.

- [5] Bruhns,O.und Mielniczuk,J.
Zur Theorie der Verzweigungen nicht-isothermer
elastoplastischer Deformationen;Ing.Archiv 46 (1977),
65-74.

- [6] Bathe,K.-J.und Wilson,E.L.
Numerical Methods in Finite Element Analysis;Prentice-
Hall,Inc.,Englewood Cliffs,New Jersey (1976).

- [7] Mazilu,P.
Variationsprinzip der Thermoplastizität,I Wärmeaus-
breitung und Plastizität;Mitt.Inst. Mech.
Ruhr-Universität Bochum Nr.33 (1982).

- [8] Farren,W.S.und Taylor,G.I.
The heat developed during plastic extension of metals;
Proc.Royal soc.,London 107 (1975),422-451.

- [9] Oeynhausen, H. und Zander, G.
Einführung in die Theorie endlicher inelastischer
Deformationen; unveröffentlicht, Inst. Mech. I, Ruhr-
Universität Bochum (1978).
- [10] Bruhns, O. und Thermann, K.
Verzweigungslasten elastoplastischer Kreisplatten;
acta mechanica 20 (1974), 247-262.
- [11] Bruhns, O.
Verzweigungslasten inelastischer Schalen; ZAMM 57
(1977), 165-174.
- [12] Lehmann, Th.
Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von
Stoffgesetzen für große elasto-plastische Formände-
rungen; Ing. Archiv 41 (1972), 297-310.
- [13] Lehmann, Th.
Some theoretical considerations and experimental
results concerning elastic-plastic stress-strain
relations; Ing. Archiv 52, (1982) 391-403.
- [14] Hartung, Chr. und Lehmann, Th.
Vergleich einiger Formänderungsgesetze für plastische
Formänderungen; ZAMM 43, (1968).
- [15] Li, Guo Chen
Necking in uniaxial tension; Int. J. Mech. Sci. 25, (1983)
47-57.
- [16] Needleman, A.
An analysis of the imperfection sensitivity of square
elastic-plastic plates under axial compression;
Int. J. Solids Structures 12, (1976) 185-201.

- [17] Kaplan, M.A.
The stress and deformation in mild steel during axisymmetric necking; J. Appl. Mech., (1973) 271-276.
- [18] Norris, D.M., Moran, B., Scudder, J.K. und Quinones, D.F.
A computer simulation of the tension test; J. Mech. Phys. Solids 26, (1978) 1-19.
- [19] Saje, M.
Residual stresses in a necked cylindrical bar; Mech. Res. Comm. 6, (1979) 263-268.
- [20] Saje, M.
Necking of a cylindrical bar in tension; J. Solids Structures 15, (1979) 731-742.
- [21] Klee, K.D. und Stein, E.
Inelastic analysis and life prediction in elevated temperature design; Am. Soc. Mech. Eng. PVP 59, (1982) 115-137.
- [22] Zander, G.
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünner Kreis- zylinder unter kombinierter Längs- und Torsionsbe- lastung; Mitt. Inst. Mech. Nr. 27, Ruhr-Universität Bochum, (1981).
- [23] Bruhns, O.
Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Verzweigungs- lasten elastisch-plastisch deformierter Kontinua; Mitt. 74-9 Inst. KIB, Ruhr-Universität Bochum, (1974).
- [24] Lehmann, Th.
Große elasto-plastische Formänderungen; Mitt. Inst. Mech. Nr. 1 Ruhr-Universität Bochum, (1976).

- [25] Bronstein, I.N. und Semendjajew, K.A.
Taschenbuch der Mathematik; Verlag Harry Deutsch,
(1969).
- [26] Waller, H. und Krings, W.
Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdy-
namik; Bibl. Inst. Mannheim, (1975).
- [27] Aluminium Halbzeuge
Mitt. der Vereinigten deutschen Metallwerke Frankfurt,
(1966).
- [28] Lehmann, Th.
Elemente der Mechanik; Vieweg Verlag, (1974-79).
- [29] Klingbeil, E.
Tensorrechnung für Ingenieure; BI Hochschultaschen-
buch Mannheim, (1966).
- [30] Prager, W. und Hodge, P.G.
Theorie plastischer Körper; Springer Verlag Wien,
(1954).
- [31] Gurtin, M.E.
An introduction in continuum mechanics;
Academic press New York, (1981).
- [32] Zienkiewicz, O.C.
Methode der Finiten Elemente; Carl Hanser Verlag
München, (1975).
- [33] Blix, U.
Vergleich verschiedener Formänderungsgesetze der
Plastizitätstheorie; unveröffentlicht, Inst. Mech. I
Ruhr-Universität Bochum, (1980).

- [34] Lauert, H.
Thermoelastizität kleiner Formänderungen;
unveröffentlicht, Inst. Mech. I, Ruhr-Universität Bochum,
(1977).
- [35] Mazilu, P. und Schreiber, L.
Über die Möglichkeiten eines neuen mathematischen
Alternativmodells für thermoelastische Prozesse;
unveröffentlicht, Inst. Mech. I, Ruhr-Universität Bochum
(1980).

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
 Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
 Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite
 Elastic-Plastic Deformations.
 Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
 Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,
 viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
 Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen
 elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
 Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen
 Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
 Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungs-
 zustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
 Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre
 Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
 Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden
 Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
 Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dick-
 wandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
 Introduction to the non-linear theory of shells

- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Paweł Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinemato-graphischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Kármán Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czesław Woźniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods

- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear
Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der
Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei
Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch
stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value
Problems in the Theory of Plasticity and Application to
Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-
Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsions-
last
- Nr. 28 Paweł Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic
Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger
Kreiszyylinder und Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen
Kontaktproblem

- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und
Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and
Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre
Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische
Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hin-
blick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik
und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Spline-
funktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung
geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksich-
tigung großer Rotationen

Nr. 40

Ulrich Blix:

Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 40**