



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Reinhard Piltner

Spezielle finite Elemente mit
Löchern, Ecken und Rissen
unter Verwendung von
analytischen Teillösungen

Heft Nr. 32



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Reinhard Piltner

Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken
und Rissen unter Verwendung von
analytischen Teillösungen

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 32

Juli 1982



Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit geht es um die Erstellung spezieller finiter Elemente mit Ansätzen, welche nicht nur das problemkennzeichnende Differentialgleichungssystem sondern auch Randbedingungen auf einem Teil des Elementrandes exakt erfüllen. Das Vorgehen ist unter dem Gesichtspunkt zu sehen, für kritische Teilbereiche des Lösungsgebietes den lokalen Lösungscharakter zu analysieren und in die numerische Rechnung einfließen zu lassen. Neben den speziellen problemangepaßten Elementen werden in den unkritischen Teilbereichen Standardelemente vorgesehen, so daß außer der Konstruktion von entsprechenden Ansatzfunktionen die Frage nach geeigneten Möglichkeiten zur Kopplung der unterschiedlichen Elemente ein Hauptpunkt in der Problembehandlung ist.

Konkret betrachtet und durchgeführt wird die Vorgehensweise zur Erstellung spezieller Elemente am Beispiel von linearen Scheibenproblemen mit Löchern, Ecken und Rissen. Von den diskutierten Kopplungsmöglichkeiten von speziellen Elementen mit Standardverschiebungselementen werden zwei, welche auf Randverschiebungsansätzen beruhen und besonders geeignet erscheinen, in verschiedenen speziellen Elementen realisiert. Die Effektivität der speziellen Elemente wird schließlich durch zahlreiche Beispielrechnungen illustriert.

Summary

The present paper deals with the construction of special finite elements on the basis of trial functions, which do not only satisfy the system of differential equations characterizing the problem but also some boundary conditions on a part of the element boundary. The procedure is to be seen under the aspect to analyse the local solution character for critical parts of the solution domain and to use it within the numerical computations. Besides the special elements suited to the problem standard elements are used in the uncritical subdomains, so that apart from the construction of appropriate trial functions the question for suitable possibilities for coupling of the different element types is a main subject within the problem treatment.

Concretely the procedure for constructing special elements is considered and realized with the example of linear plane stress and plain strain problems, respectively, with holes, edges and cracks. Two of the discussed possibilities of combining special elements with standard displacement elements are realized in different special elements. These two methods are based on assumed displacement functions on the element boundary and seem to be especially suited. The effectiveness of the special elements is finally illustrated by numerous numerical examples.

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand in der Arbeitsgruppe "Numerisches Rechnen in der Mechanik und Simulationstechnik" am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller und Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Wunderlich möchte ich für die Übernahme der Gutachten danken.

Meinem Kollegen Hans-Jürgen Michel danke ich recht herzlich für die sorgfältige Erstellung der Bilder sowie für das Schreiben der Formeln. Ebenfalls sei Frau Schmidt-Balve für weitere zeichnerische Beiträge gedankt. Bei Fräulein Karin Göbel bedanke ich mich schließlich für die Anfertigung der Reinschrift des Manuskriptes.

Juli 1982

Reinhard Piltner

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Prof. Dr.-Ing. Walter Wunderlich

Tag der Einreichung: 2.2.1982

Tag der mündlichen Prüfung: 29.6.1982

© 1982 Reinhard Piltner

Neustr. 60 I

4250 Bottrop

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
VERZEICHNIS HÄUFIG BENUTZTER FORMELZEICHEN	IX
1 EINLEITUNG	1
2 ÜBERSICHT	3
3 PROBLEMFORMULIERUNG DER TECHNISCHEN SCHEIBENTHEORIE	9
4 FORMULIERUNG DES SCHEIBENDIFFERENTIALGLEICHUNGS- PROBLEMS ALS VARIATIONSPROBLEM	14
4.1 Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials	14
4.2 Erweiterung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials	16
5 FINITE-ELEMENT-FORMULIERUNG FÜR STANDARDSCHEIBEN- ELEMENTE	17
6 ZUR FRAGE DER KONSTRUKTION VERTRÄGLICHER ELEMENTE	19
6.1 Allgemeines	19
6.2 Gegenüberstellung zweier Methoden zur Ermittlung einer Verknüpfungsmatrix zwischen Ansatzfreiwerten und Knoten- werten am Beispiel von Polynomansätzen (Knotenpunktinterpolation - Fehlerquadratmethode)	24
7 BESONDERHEITEN BEI ANSATZFUNKTIONEN, DIE LÖSUNGEN DES SCHEIBENDIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEMS SIND	34
8 GRUNDGLEICHUNGEN SPEZIELLER ELEMENTE	35
8.1 Verwendung des Funktional, das die potentielle Energie beinhaltet (Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials: Weggrößen- verfahren)	35
8.1.1 Darstellung des Funktionalanteils für ein spezielles Element in diskretisierter Form	42
8.1.2 Beziehungen zwischen Ansatzfreiwerten und Knotenwerten bei einem speziellen Element	46

	Seite
8.1.2.1 Methode I zur Berechnung von Verknüpfungsmatrizen \underline{G} und \underline{g} zwischen Freiwerten und Knotenwerten	46
8.1.2.2 Methode II zur Berechnung von Verknüpfungsmatrizen \underline{G} und \underline{g} zwischen Freiwerten und Knotenwerten	48
8.2 Verwendung eines erweiterten Funktionals für die potentielle Energie (Erweiterung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials: Hybrides Weggrößenverfahren)	53
8.2.1 Das erweiterte Funktional für ein spezielles Element in diskretisierter Form	58
8.2.2 Methode III zur Berechnung von Verknüpfungsmatrizen \underline{G} und \underline{g} zwischen Freiwerten und Knotenwerten sowie deren Verwendung in der Darstellung des Funktionalanteils Π_s^i eines speziellen Elementes	61
8.2.3 Interpretation der Kopplung von speziellem Elementbereich und übrigem Gebiet	63
9 KONSTRUKTION VON LÖSUNGSFUNKTIONEN	68
9.1 Inhomogene Lösungen	68
9.2 Homogene Lösungen in komplexer Darstellung	69
10 VERWENDUNG DER KONFORMEN ABBILDUNG ZUR ANGABE VON LÖSUNGSFUNKTIONEN	77
10.1 Konforme Abbildung	78
10.2 Besondere Beziehungen, die man sich bei konformer Abbildung auf eine Halbebene oder auf das Innere bzw. Äußere eines Einheitskreises zur Behandlung von Randbedingungen zu Nutze machen kann	80
10.2.1 Abbildung auf die obere oder untere Halbebene	80
10.2.2 Abbildung auf die rechte oder linke Halbebene	81
10.2.3 Abbildung auf das Innere oder Äußere eines Einheitskreises	82
10.3 Verschiebungs-, Spannungs- und Randbedingungsbeziehungen bei konformer Abbildung	83
10.4 Spezielle Formeln bei konformer Abbildung auf eine Halbebene	85

	Seite
10.5 Spezielle Formeln bei konformer Abbildung auf ein Kreisgebiet	87
10.6 Formeln, bezogen auf Polarkoordinaten	89
11 DIE STRUKTUR DER KOMPLEXEN FUNKTIONEN Φ UND Ψ	90
12 FUNKTIONEN Φ UND Ψ , WELCHE STARRKÖRPERANTEILE REPRÄSENTIEREN	101
13 FINITE ELEMENTE MIT KREISFÖRMIGEM LOCH	102
13.1 Konstruktion der Ansatzfunktionen bei unbelastetem Kreisrand	102
13.1.1 Konforme Abbildung	103
13.1.2 Ansätze für Φ und Ψ in der ζ -Ebene	104
13.1.2.1 Ermittlung von Ψ in Abhängigkeit von Φ zur Erfüllung der Randbedingungen	105
13.1.2.1.1 Verwendung der Randbedingungsform $\sigma_{rr} - i\tau_{r\varphi} = 0$ und Durchführung eines Koeffizientenvergleichs	105
13.1.2.1.2 Verwendung der Randbedingungsform $\Phi + f\bar{\Phi}/\bar{f} + \bar{\Psi} = 0$ und Durchführung eines Koeffizientenvergleichs	107
13.1.2.1.3 Verwendung der Randbedingungsform $\Psi = -\bar{\Phi} - \bar{f}\Phi/\dot{f}$ und Umgehung eines Koeffizientenvergleichs	108
13.1.3 Die Funktionen Φ, Ψ sowie $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ und τ_{xy} für eine Finite-Element-Lösung	110
13.2 Spezielle Ansatzterme bei konstanter radialer Belastung ($\sigma_{rr} = \text{const.}$)	114
13.3 Spezielle Ansatzterme für ein Kreisloch unter gleichmäßig verteilter Schubspannung	116
13.4 Kurzbeschreibung einiger finiter Elemente mit kreisförmigem Loch	117
14 FINITE ELEMENTE MIT ELLIPTISCHEM LOCH	120
14.1 Konstruktion der Ansatzfunktionen bei unbelastetem elliptischen Rand	120
14.1.1 Konforme Abbildung	122
14.1.2 Ansätze für Φ und Ψ bzw. \dot{X} in der ζ -Ebene	125

	Seite
14.1.2.1 Ermittlung von \dot{X} und Ψ in Abhängigkeit von Φ zur Erfüllung der Randbedingungen unter Verwendung der Randbedingungsform $\dot{X} = -\dot{f}\bar{\Phi} - \bar{f}\dot{\Phi}$ und Umgehung eines Koeffizientenvergleiches	126
14.1.3 Die Funktionen Φ, Ψ, \dot{X} sowie $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ und τ_{xy} für eine Finite-Element-Lösung	127
14.1.4 Identifizierung von Starrkörperanteilen	137
14.2 Spezielle Ansatzterme für ein elliptisches Loch unter gleichmäßigem Druck p	139
14.3 Spezielle Ansatzterme für ein elliptisches Loch unter gleichmäßig verteilter Schubspannung q	140
14.4 Kurzbeschreibung einiger finiter Elemente mit elliptischem Loch	141
 15 FINITE ELEMENTE MIT AUßENRIß (GERADLINIGER SCHLITZ)	 143
15.1 Konstruktion der Ansatzfunktionen bei unbelasteten Rißufern	143
15.1.1 Konforme Abbildung	144
15.1.2 Ansätze für Φ und Ψ in der ζ -Ebene	146
15.1.2.1 Ermittlung von Ψ in Abhängigkeit von Φ zur Erfüllung der Randbedingungen unter Verwendung der Randbedingungsform $\Psi = -\bar{\Phi} - \bar{f}\dot{\Phi}/\dot{f}$ und Umgehung eines Koeffizientenvergleiches	147
15.1.3 Die Funktionen Φ, Ψ sowie $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ und τ_{xy} für eine Finite-Element-Lösung	148
15.1.4 Singuläre Spannungsgrößen für $z = 0$ bzw. $\zeta = 0$ und Spannungsintensitätsfaktoren	151
15.1.5 Rißuferverformungen bei singulären Spannungen im Nullpunkt	154
15.2 Nutzung von Spannungsintensitätsfaktoren	155
15.3 Gewinnung der Spannungsintensitätsfaktoren aus der Funktion $\Phi'(z)$ bzw. aus $\Phi'(\zeta)$	156
15.4 Verwendung eines Skalierungsfaktors in der Ab- bildungsfunktion aus numerischen Gründen	158
15.5 Kurzbeschreibung einiger finiter Elemente mit Außenriß	160

16 FINITE ELEMENTE MIT INNENRIß (EINGESCHLOSSENER GERADLINIGER SCHLITZ) 164

16.1 Spannungsintensitätsfaktoren bei Betrachtung in einem nicht an der Rißspitze liegenden Koordinatensystem 165

16.1.1 Spannungsintensitätsfaktoren für die Rißspitze bei $z = a$ bzw. $\zeta = 1$ 169

16.1.2 Spannungsintensitätsfaktoren für eine Rißspitze bei $z = -a$ bzw. $\zeta = -1$ 171

16.2 Nachweis von endlichen Verschiebungsgrößen für die Rißspitzen bei $z = \pm a$ bzw. $\zeta = \pm 1$ 172

17 FINITE ELEMENTE, DIE DAS BESONDERE LÖSUNGS- VERHALTEN AN EINER ECKE BERÜCKSICHTIGEN 178

17.1 Schwierigkeiten bezüglich der Gewinnung von Ansatzfunktionen bei konformer Abbildung auf die rechte Halbebene 181

17.2 Konstruktion der Ansatzfunktionen bei unbelasteter Ecke 182

17.2.1 Potenzansätze für Φ und Ψ in der z -Ebene mit reellen Exponenten 182

17.2.1.1 Ermittlung der Beziehung zwischen Φ und Ψ zur Erfüllung der Randbedingungen unter Annahme von nur reellen Exponenten 183

17.2.1.1.1 Fall 1: Lösungen, die aus $\sin\alpha \lambda_j - \lambda_j \sin\alpha = 0$ hervorgehen 186

17.2.1.1.2 Fall 2: Lösungen, die aus $\sin\alpha \lambda_j + \lambda_j \sin\alpha = 0$ hervorgehen 187

17.2.1.1.3 Zusammenstellungen der Lösungen mit reellen Exponenten 189

17.2.2 Potenzansätze für Φ und Ψ in der z -Ebene mit komplexwertigen Exponenten 189

17.2.2.1 Ermittlung der Beziehung zwischen Φ und Ψ zur Erfüllung der Randbedingungen 191

17.2.3 Ansätze für Φ und Ψ in einer Ebene, die durch Streckung bzw. Stauchung aus der z -Ebene hervorgeht 197

	Seite
17.2.4 Die Exponentenfolgen λ_j , ω_j und Auswahl zulässiger Werte	200
17.2.5 Die Funktionen Φ, Ψ sowie $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ und τ_{xy} für eine Finite-Element-Lösung	208
17.3 Spannungsintensitätsfaktoren bei spitzen Ecken	215
17.4 Kurzbeschreibung einiger finiter Elemente mit spitzer Ecke	216
18 KONVERGENZ DER INTEGRALE BEI FUNKTIONEN, DIE IN EINEM RANDPUNKT SINGULÄRE SPANNUNGSGRÖßEN HERVORRUFEN	220
19 TESTHILFEN ZUR ÜBERPRÜFUNG VON ANSATZFUNKTIONEN FÜR $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ UND VON ELEMENTMATRIZEN	226
20 HINWEISE ZUR NUMERISCHEN BERECHNUNG DER INTEGRAL- MATRIZEN SOWIE EINSPARUNG VON RECHENOPERATIONEN BEI AUSNUTZUNG VON SYMMETRIE- UND ANTIMETRIE- EIGENSCHAFTEN	227
21 KURZE DARSTELLUNG EINIGER KOPPELBARER STANDARD- ELEMENTE	233
22 BEISPIELE	235
23 ZUSAMMENFASSUNG	273
LITERATURVERZEICHNIS	274

Verzeichnis häufig benutzter Formelzeichen

- Ω : Lösungsbereich
- Γ : Rand des Lösungsgebietes Ω ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$)
- Γ_1 : Teil des Randes Γ , auf dem $\underline{u} = \bar{\underline{u}}$ gilt
- Γ_2 : Teil des Randes Γ , auf dem $\underline{T} = \bar{\underline{T}}$ gilt
- A^i : Bereich des i-ten Elementes
- ∂A^i : Rand des i-ten Elementes ($\partial A^i = \partial A_1^i + \partial A_2^i + \partial A_3^i$)
- ∂A_1^i : Elementrandteil, auf dem $\underline{u} = \bar{\underline{u}}$ gilt
- ∂A_2^i : Elementrandteil, auf dem $\underline{T} = \bar{\underline{T}}$ gilt
- ∂A_3^i : Elementrandteil, der die Grenze zu Nachbarelementen darstellt
- E : Elastizitätsmodul
- t : Scheibendicke
- μ : Schubmodul (s. (9.8))
- ν : Poissonsche Querkontraktionszahl
- λ : siehe (9.9)
- κ : siehe (9.50)
- \underline{E} : Matrix der elastischen Konstanten (siehe (3.7) bzw. (3.8))
- u, v : Verschiebungskomponenten in x- bzw. y-Richtung
- \underline{u} : Vektor der Verschiebungskomponenten u, v : $\underline{u}^T = [u \ v]$
oder
Knotenverschiebungsvektor zur Funktion u : $\underline{u}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_n]$
- \underline{v} : Knotenverschiebungsvektor zur Funktion v : $\underline{v}^T = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_n]$
- \underline{q} : Knotenverschiebungsvektor zu u und v : $\underline{q}^T = [\underline{u}^T \ \underline{v}^T]$

$u_x, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$: partielle Ableitungen

$v_x, v_{xx}, v_{yy}, v_{xy}$: partielle Ableitungen

\bar{u}, \bar{v} : auf dem Randteil Γ_1 vorgeschriebene Verschiebungskomponenten

$\underline{\bar{u}}$: Vektor der auf Γ_1 vorgeschriebenen Verschiebungskomponenten:
 $\underline{\bar{u}}^T = [\bar{u} \quad \bar{v}]$

\bar{u}, \bar{v} : auf dem Elementrand angesetzte Verschiebungsverläufe

$\underline{\bar{u}}$: Vektor der auf dem Elementrand ∂A^i angenommenen Verschiebungsverläufe \bar{u}, \bar{v} : $\underline{\bar{u}}^T = [\bar{u} \quad \bar{v}]$

\hat{u} : Vektor der Ansatzfreiwerte bei einem Polynomansatz für u

\hat{v} : Vektor der Ansatzfreiwerte bei einem Polynomansatz für v

n_x, n_y : Richtungskosinus: $n_x = \frac{dy}{ds}$, $n_y = -\frac{dx}{ds}$

\underline{n} : Matrix mit Richtungskosinus gemäß Gleichung (3.16)

\underline{D} : Operatormatrix nach Gleichung (3.3)

\bar{F}_x, \bar{F}_y : Volumenkräfte

$\underline{\bar{F}}$: Vektor der Volumenkräfte: $\underline{\bar{F}}^T = [\bar{F}_x \quad \bar{F}_y]$

$\underline{\epsilon}$: Verzerrungsvektor: $\underline{\epsilon}^T = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]$

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$: Normalspannungen

$\tau_{xy}, \tau_{r\varphi}$: Schubspannungen

$\underline{\sigma}$: Vektor der Spannungen: $\underline{\sigma}^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy}]$

T_x, T_y : Komponenten der Randspannungen

\underline{T} : Vektor der Randspannungskomponenten: $\underline{T}^T = [T_x \quad T_y]$

\bar{T}_x, \bar{T}_y : auf dem Randteil Γ_2 vorgeschriebene Spannungskomponenten

$\underline{\bar{T}}$: Vektor der auf Γ_2 vorgeschriebenen Spannungskomponenten:
 $\underline{\bar{T}}^T = [\bar{T}_x \quad \bar{T}_y]$

$\underline{\Phi}(\xi, \eta)$: Zeilenvektor der Polynomansatzterme

$\underline{N}(\xi, \eta)$: Zeilenvektor der Formfunktionen

s : Randkoordinate

$\underline{U}(s), \underline{V}(s)$: Zeilenvektor der Lösungsfunktionsterme zur Verschiebungskomponente u bzw. v in Abhängigkeit einer Randkoordinate s (mit $s=s(x,y)$)

$u_p(s), v_p(s)$: spezielle Lösungsanteile in Abhängigkeit einer Randkoordinate s

a_j : komplexer Koeffizient (Freiwert) : $a_j = \alpha_j + i \beta_j$

a_j^* : komplexer Koeffizient : $a_j^* = \alpha_j^* + i \beta_j^*$

b_j : komplexer Koeffizient

$\underline{\alpha}$: Vektor der Realteilmfreiwerte mit den Komponenten α_j (und α_j^* bei den Eckelementen)

$\underline{\beta}$: Vektor der Imaginärteilmfreiwerte mit den Komponenten β_j (und β_j^* bei den Eckelementen)

\underline{c} : Vektor der Ansatzfreiwerte bei speziellen Elementen:

$$\underline{c}^T = [\underline{\alpha}^T \quad \underline{\beta}^T]$$

$\underline{G}, \underline{g}$: Verknüpfungsmatrizen zwischen Freiwerten und Knotenwerten

$\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$: Winkel

z : komplexe Variable: $z = x + iy = r \cos \varphi + i r \sin \varphi$

\bar{z} : konjugiert komplexe Variable: $\bar{z} = x - iy$

x, y und r, φ : Koordinatenpaare in der z -Ebene

ζ : komplexe Variable: $\zeta = \xi + i \eta = R \cos \theta + i R \sin \theta$

ξ, η und R, θ : Koordinatenpaare in der ζ -Ebene

i : imaginäre Einheit ($i = \sqrt{-1}$)

$U(x,y)$: Airysche Spannungsfunktion

$\Phi(z), \Psi(z), X(z)$: komplexe Funktionen

$\Phi(\zeta), \Psi(\zeta), X(\zeta)$: komplexe Funktionen

$$\frac{d}{dz} = '$$

$$\frac{d}{d\zeta} = \bullet$$

$f(\zeta)$: Abbildungsfunktion [$f(\zeta) = g^{-1}(\zeta)$]

$g(z)$: Abbildungsfunktion [$g(z) = f^{-1}(z)$]

$\text{Re}[\]$: Realteil von []

$\text{Im}[\]$: Imaginärteil von []

K_1, K_2 : Spannungsintensitätsfaktoren

λ_j : reeller oder komplexer Exponent

ω_j : reeller oder komplexer Exponent

k^i : Elementsteifigkeitsmatrix des i-ten Elementes

$\underline{\bar{p}}^i$: Elementbelastungsvektor

\underline{K} : Gesamtsteifigkeitsmatrix

$\underline{\bar{p}}$: Belastungsvektor

Π : Funktional (Gesamtpotential)

Π^i : Funktionalanteil des i-ten Elementes

$\delta \Pi$: 1. Variation von Π

Abkürzungen:

ESZ : ebener Spannungszustand

EVZ : ebener Verzerrungszustand

RB : Randbedingung(en)

DGL : Differentialgleichung bzw. Differentialgleichungssystem

1 Einleitung

Finite Elemente auf der Grundlage von Polynomansätzen haben sich als effektives Hilfsmittel zur Lösung partieller Differentialgleichungen erwiesen. Allerdings gibt es Problemstellungen, bei denen sich gute Näherungslösungen bei Einsatz der Standard-Finite-Elemente nur mit hohem Aufwand oder gar nicht erzielen lassen. Dies sind in der Regel Probleme, wo sich die Lösungsfunktionen bzw. die partiellen Ableitungen dieser Funktionen durch die in der Finite-Element-Methode verwendeten Polynomansätze nur schlecht oder überhaupt nicht approximieren lassen. Als Beispiele für die Ursachen der Schwierigkeiten seien hier genannt

- a) Randbedingungen, die nicht stetig auf der Randkurve vorgegeben sind,
- b) die Form des Randes, welcher nicht hinreichend glatt ist und beispielsweise einspringende Ecken aufweist oder zu einem Gebiet mit Löchern, also zu einem mehrfach zusammenhängenden Bereich gehört.

Da die Schwierigkeiten in der Gewinnung guter Näherungslösungen zumeist aus kleinen Teilbereichen herrühren, bietet es sich an, für diese "Problemgebiete", in denen sich Standardelemente weniger bzw. überhaupt nicht eignen, spezielle finite Elemente heranzuziehen, die durch besondere Ansatzfunktionen den lokalen Gegebenheiten angepaßt sind. Als Ansätze kommen hier Funktionen in Betracht, die die Differentialgleichungen und Teilrandbedingungen (Randbedingungen auf einem Teil des Randes) schon erfüllen. Neben den speziellen problemangepaßten Elementen sollen in den unkritischen Teilbereichen die Standardelemente angeordnet werden.

Die Bewältigung einer derartigen Aufgabe beinhaltet zwei wesentliche Teilgebiete, nämlich einen zu den analytischen Methoden zählenden sowie einen zu den numerischen Verfahren und deren Grundlagen einzuordnenden Problem-bereich:

1. die Konstruktion einer zulässigen Folge von Lösungsfunktionen, welche Differentialgleichungen und Teilrandbedingungen erfüllen.
2. eine geeignete Finite-Element-Formulierung zur Kopplung von speziellen finiten Elementen mit Standardelementen

Am Beispiel von linearen Scheibenproblemen mit Löchern, Ecken und Rissen soll die Vorgehensweise erörtert werden, und numerische Rechnungen mögen einen Eindruck von der Effizienz speziell konstruierter finiter Elemente geben.

Die Behandlung der einzelnen Scheibenprobleme erfolgt mit Hilfe der komplexen Funktionentheorie, und zur Berücksichtigung von Teilrandbedingungen werden konforme Abbildungen herangezogen. Die Grundideen der speziellen Methoden des analytischen Teils zur Scheibenproblembehandlung mit Hilfe von komplexen Funktionen lassen sich sinngemäß auf die Plattengleichung (Bipotentialgleichung) und auf die Laplacesche bzw. Poissonsche Differentialgleichung übertragen, während die Grundgedanken zur Herleitung spezieller Elementbeziehungen von der explizit ausgeführten Darstellung am Scheibenrandwertproblem auf andere lineare Differentialgleichungsprobleme leicht abgewandelt übernommen werden können.

Das Ziel dieser Arbeit ist, für verschiedene beispielhafte Problemstellungen adäquate spezielle finite Elemente zu konstruieren, in die der lokale Lösungscharakter über die Ansatzfunktionen eingearbeitet ist, die sich mit den vorhandenen Standardelementen koppeln lassen und deren Verwendung eine Einsparung von alternativ anwendbaren Elementen (sofern es solche gibt) einerseits und eine hohe Genauigkeitserzielung andererseits im Auge hat.

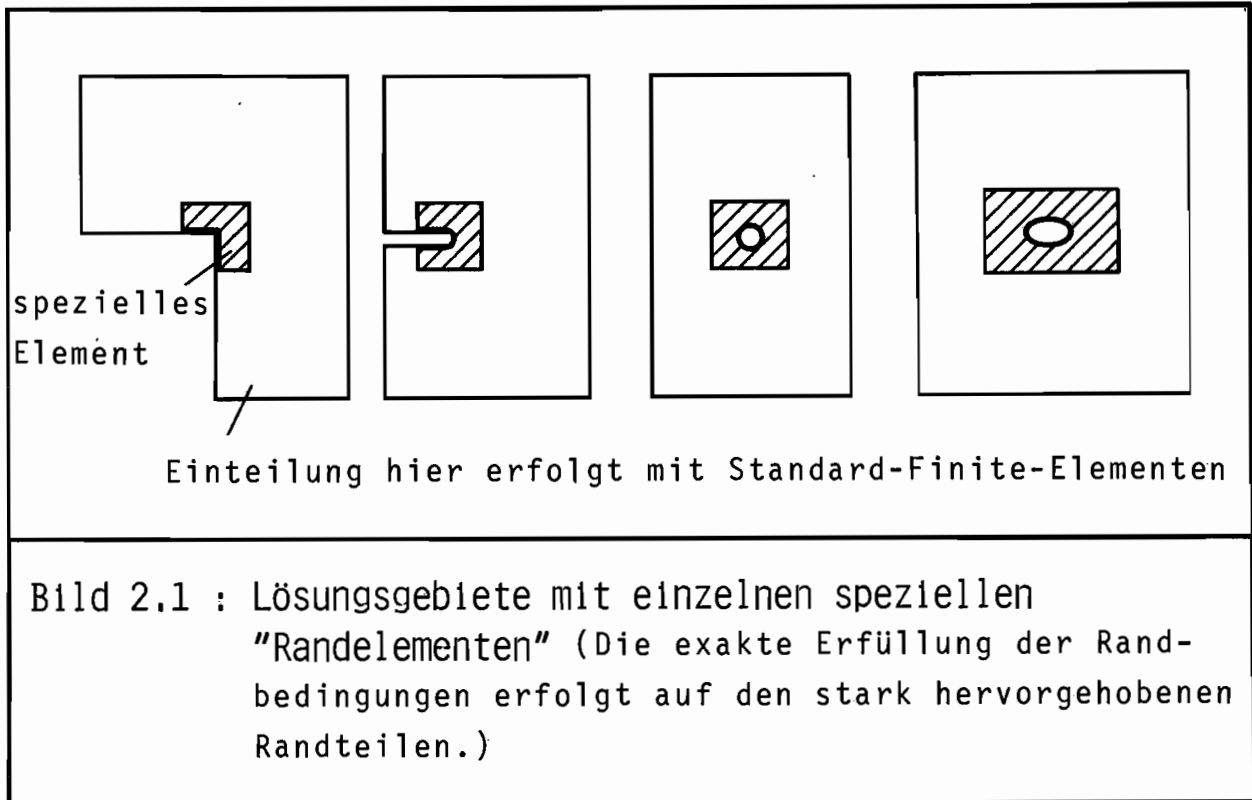
2 Übersicht

Die Grundidee, für die Konstruktion einer Näherungslösung bei Behandlung eines partiellen Differentialgleichungsproblems eine Folge von Funktionen zu verwenden, welche die Differentialgleichung schon erfüllen, geht auf Trefftz [34] zurück. In seiner Arbeit "Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren" aus dem Jahre 1926 findet man in speziellen Beispielen schon eine Einteilung der Lösungsgebiete in Teilbereiche, längs deren gemeinsamer Verbindungslinien (Innenränder genannt) der wirkliche, aber unbekannte Funktionsverlauf durch zusätzliche Funktionsansätze in Abhängigkeit der einzelnen Innenrandkoordinaten zu approximieren versucht wird. Die Überlegungen Trefftz' beinhalten, daß das Differentialgleichungsproblem durch Einzelbehandlung der Teilbereiche zu lösen wäre, wenn die entsprechenden Funktionsverläufe auf den Innenrändern vorlägen. Da sie aber nicht bekannt sind, vollzieht er durch Annahme der Funktionsverläufe auf den Innenrändern eine Kopplung der Teilbereiche, in denen jeweils speziell konstruierte Funktionen angesetzt sind.

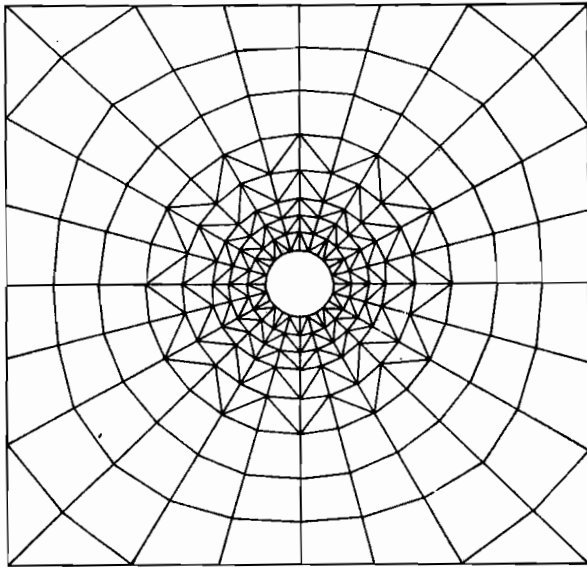
Das Trefftzsche Vorgehen erinnert nicht nur an die viel später zum Einsatz gekommene Finite-Element-Methode allgemein, sondern im speziellen auch an sogenannte hybride finite Elemente [9,20,29,36], bei denen Ansätze sowohl in den Teilbereichen als auch auf Elementrändern für Funktionsverläufe gemacht werden. Trefftz selbst hielt die Überlegungen nur für einfache Fälle von praktischer Bedeutung, da das Fehlen leistungsfähiger Rechenanlagen damals weitergehende Hoffnungen nicht aufkommen ließ.

Wie die ursprüngliche Ritz-Methode so läßt sich auch das von Trefftz vorgestellte Verfahren zu finiten Elementen verschiedenen Typs ausbauen. Als zwei bedeutende Obergruppen seien genannt

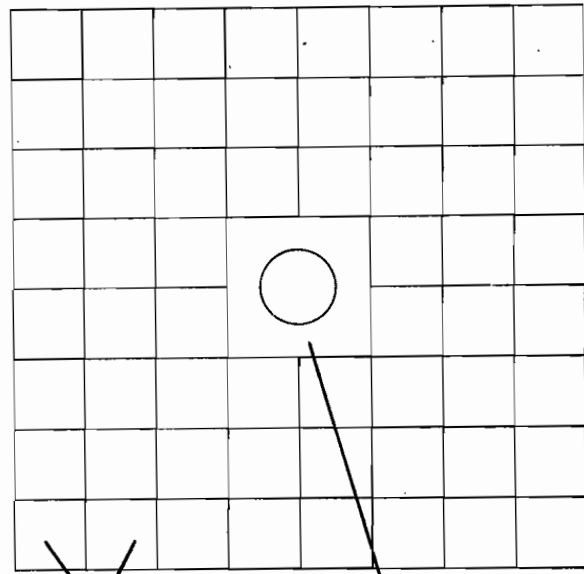
1. Verwendung von Funktionenfolgen für den Elementbereich, die die vorgegebene Differentialgleichung erfüllen, aber keine der im Differentialproblem vorgegebenen Randbedingungen befriedigen.
2. Verwendung von Funktionenfolgen, die nicht nur die vorgegebene Differentialgleichung, sondern auch Randbedingungen auf Teilen des Elementrandes erfüllen, der zum eigentlichen Rand des Lösungsgebietes gehört und durch den die gesuchte Lösung besonders stark geprägt wird. Solche am Gebietsrand angeordnete Elemente (s. Bild 2.1) können als spezielle Randelemente angesehen werden. Diese Art von Randelementen hat aber nichts mit der Boundary-Element-Methode zu tun, die als Alternative zum klassischen Finite-Element-Verfahren entwickelt wurde.



In dieser Arbeit soll auf die Berücksichtigung besonders starker Einflüsse von Randkurventeilen und der zugehörigen Randbedingungen eingegangen werden. Da kritische Randbereiche sich in nahezu jedem numerischen Verfahren ungünstig bemerkbar machen, wird versucht, durch Einarbeiten des lokalen Lösungsverhaltens in das numerische Verfahren der finiten Elemente die Schwierigkeiten zu beheben. Da die Konstruktion von Lösungsfunktionen, die nicht nur die gegebene Differentialgleichung, sondern auch noch zusätzlich Teilrandbedingungen erfüllen sollen, natürlich schwieriger ist als der Fall, daß zunächst keine Randbedingungen berücksichtigt werden, sollte die Konstruktion und Verwendung spezieller Randelemente für Teilgebiete mit besonderem Einfluß auf die Lösung beschränkt bleiben (siehe Beispiele in Bild 2.1). Im Beispiel eines Lösungsgebietes mit kreisförmigem Loch erfolgt der Einsatz eines speziellen Elementes, das im Inneren ein Loch enthält, mit der Motivation, eine feine Unterteilung in Standardelemente am Kreisrand zu umgehen (s. Bild 2.2) und eine hohe Genauigkeit zu erzielen.



Standard-Finite-Elemente



Standard-Finite-Elemente
(Polynomansätze)

spezielles Element
(DGL. und RB. von
Ansätzen erfüllt)

Bild 2.2 : Lösungsgebiet mit Kreisloch in nur Standard-elemente sowie in Standardelemente und ein spezielles Element aufgeteilt

Für das Beispiel einer in das Lösungsgebiet einspringenden Ecke ist zwar bei Vermehrung der Standardelemente die Konvergenz bezüglich der Funktionswerte selber sichergestellt, jedoch nicht bezüglich der partiellen Ableitungen in der Umgebung des Eckpunktes, da in der Ecke Ableitungssingularitäten auftreten. Diese Singularitäten lassen sich jedoch in speziellen Elementen mitberücksichtigen.

Da neben den speziellen Elementen die Standardelemente für die verbleibenden Bereiche verwendet werden sollen, kommt es wesentlich darauf an, die verschiedenartigen Elemente geeignet zu koppeln. Hierbei geht es im Prinzip darum, die Funktionen eines speziellen Elementes auf den Verbindungsflächen zu Nachbar-elementen den angrenzenden Funktionsverläufen optimal anzupassen.

Zwei der in dieser Arbeit dargestellten Kopplungsmöglichkeiten basieren auf der Idee, zusätzlich zu den Ansätzen im Elementbereich Ansätze für Funktions-

verläufe auf dem Elementrand zu machen. Die Grundidee hierzu kann, wie schon erwähnt, aus der Trefftz'schen Arbeit herausgelesen werden. Bei den angesprochenen Kopplungsmethoden ist die optimale Anpassung der Ansätze der verschiedenartigen, aneinanderstoßenden Elemente einmal Bestandteil des sich aus dem verwendeten erweiterten Funktional ergebenden Näherungsverfahrens, und im zweiten Fall erfolgt sie mittels eines pro Element unabhängig definierten Fehlerquadratfunktional vor Anwendung des eigentlichen, für eine Finite-Element-Lösung zugeschnittenen (nicht erweiterten) Funktional. Als dritte Kopplungsmöglichkeit wird das punktweise Erfüllen der Übergangsbedingungen an den Elementknotenpunkten aufgeführt, was vom theoretischen Standpunkt aus gesehen allerdings im allgemeinen nicht ganz ohne Bedenken betrachtet werden darf, da die Güte einer auf diesem Wege erhaltenen Lösung natürlich davon abhängt, wie stark die Stetigkeit zwischen den Knotenpunkten verletzt ist. Die beiden zuerst angesprochenen und am geeignetsten erscheinenden Kopplungsmethoden werden schließlich in numerischen Beispielrechnungen gegenübergestellt.

Konkret wird das Vorgehen zur Erstellung spezieller finiter Elemente am Beispiel des Differentialgleichungssystems der Scheibe erläutert. Hierbei werden zunächst die Grundgleichungen für spezielle Elemente mit den einzelnen Kopplungsmöglichkeiten hergeleitet. Im analytischen Teil der Problembearbeitung geht es um die Behandlung von konkreten Randformen und zugehörigen Randbedingungen, wobei aber trotz der Auswahl von Beispielproblemen auf eine Betonung des methodischen Vorgehens geachtet wird. Zur Ermittlung von Lösungsfunktionen der einzelnen Scheibenteilprobleme wird die komplexe Funktionentheorie herangezogen, die in größerem Umfange für Elastizitätsprobleme vor allem von Mußchelischwili [19] benutzt wurde.

Insbesondere werden zur Behandlung von Randbedingungen konforme Abbildungen herangezogen, was sich infolge der Darstellung der Lösungsfunktionen durch komplexe Funktionen natürlich anbietet. Da hier solche Lösungen für Teilgebiete (Elemente) gesucht sind, welche zunächst nur Bedingungen auf Teilen des zugehörigen Randes erfüllen, ergeben sich beim Auffinden der komplexen Funktionen Vereinfachungen gegenüber einer Suche nach Lösungen für ein vollständiges Lösungsgebiet.

Lösungsgebiet mit Finite - Element - Einteilung:

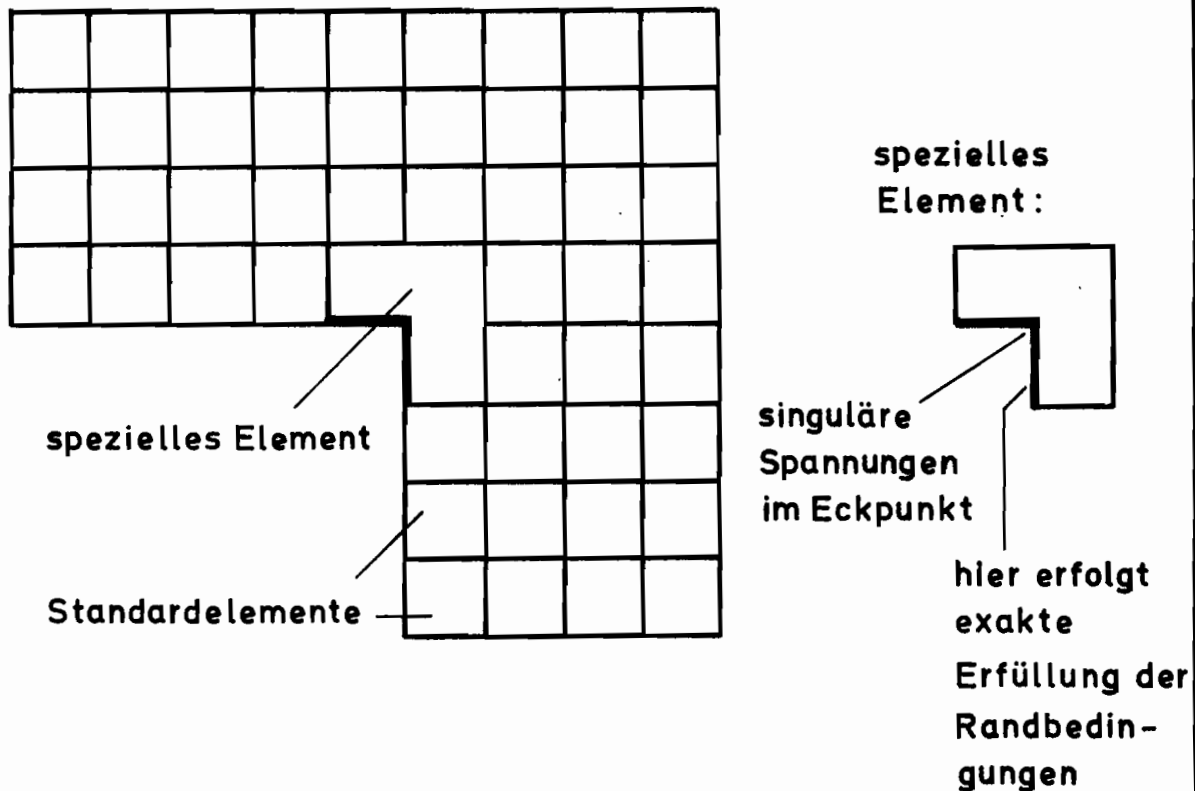


Bild 2.3 : Spezielles Randelement bei einem Scheibenproblem mit einspringender Ecke

Eine Kurzcharakterisierung der hier behandelten speziellen Randelemente möge durch folgende Stichworte vermittelt werden (s. auch Bild 2.3):

1. exakte Erfüllung des Differentialgleichungssystem im Elementbereich (d.h. für die Scheibe: Gleichgewichtsbedingungen sind exakt erfüllt)
2. exakte Erfüllung der Randbedingungen auf dem Elementrandteil, der zur eigentlichen Berandung des Lösungsgebietes gehört
3. auf der Zwischenelementgrenze Anpassung der Ansätze des speziellen Elementes an die Nachbarelementfunktionen in einem als optimal definierten Sinne

Die Verwendung von speziellen Randelementen basiert auf der Idee, die Schwierigkeiten, gute Näherungen durch irgendein numerisches Verfahren für Verschiebungen und Spannungen (für Lösungsfunktionen einschließlich ihrer ersten partiellen Ableitungen im allgemeinen) in unmittelbarer Nähe eines stark einflußreich wirkenden Randstückes zu gewinnen, nach einer analytischen Sonderbehandlung des kritischen Bereiches auf das Problem zu verlagern, eine möglichst gute Kopplung an den Zwischenelementgrenzen zu erreichen, welche sich in einem solchen Abstand vom kritischen Rand befinden, wo Verschiebungs- und Spannungsfunktionen sich hinreichend gut durch Polynome approximieren lassen. So werden im Beispiel einer Scheibe mit einer einspringenden Ecke gemäß Bild 2.3 die Spannungsfunktionen im Eckpunkt zwar singulär, jedoch klingen die singulär werdenden Funktionsanteile mit zunehmendem Abstand vom Eckpunkt rasch ab. Bei Verwendung von speziellen Elementen geht man also davon aus, daß in der Regel die Einflüsse eines bedeutsamen Randteils in einiger Entfernung hiervon sich nicht mehr störend für das numerische Verfahren bemerkbar machen.

Spezielle Randelemente sind in erster Linie für Teilbereiche gedacht, bei denen es darum geht, eine größere Anzahl von sonst erforderlichen Standardelementen zu ersetzen und die Genauigkeit zu erhöhen bzw. Lösungen erst möglich zu machen, wie es bei Problemen der Fall ist, die Singularitäten in den Ableitungen beinhalten. Beim Auftreten von Spannungssingularitäten geht es darum, die Art der singulären Funktionen zu analysieren und deren Koeffizienten (Spannungsintensitätsfaktoren) zu ermitteln, welche ein Maß für die Intensitäten der Spannungssingularitäten darstellen.

3 Problemformulierung der technischen Scheibentheorie

Das lineare partielle Differentialgleichungssystem in den Verschiebungsgrößen u und v lautet für

a) den ebenen Spannungszustand (ESZ) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \left[u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{xy} \right] + \underbrace{\bar{F}_x}_{\frac{\bar{p}_x}{t}} &= 0 \\ \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1+\nu}{2} u_{xy} + v_{yy} + \frac{1-\nu}{2} v_{xx} \right] + \underbrace{\bar{F}_y}_{\frac{\bar{p}_y}{t}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

und für

b) den ebenen Verzerrungszustand (EVZ) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)u_{xx} + \frac{1-2\nu}{2} u_{yy} + \frac{1}{2} v_{xy} \right] + \underbrace{\bar{F}_x}_{\frac{\bar{p}_x}{t}} &= 0 \\ \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{1}{2} u_{xy} + \frac{1-2\nu}{2} v_{xx} + (1-\nu)v_{yy} \right] + \underbrace{\bar{F}_y}_{\frac{\bar{p}_y}{t}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

mit den gegebenen Größen

- E : Elastizitätsmodul
- t : Scheibendicke
- ν : Querkontraktionszahl

- \bar{F}_x : Volumenkraft in x-Richtung (Kraft pro Volumeneinheit)
- \bar{F}_y : Volumenkraft in y-Richtung (Kraft pro Volumeneinheit)
- \bar{p}_x : in Scheibenmittelfläche wirksame Massenkraft in x-Richtung
(Kraft pro Flächeneinheit)
- \bar{p}_y : in Scheibenmittelfläche wirksame Massenkraft in y-Richtung
(Kraft pro Flächeneinheit)

und den gesuchten Funktionen $u=u(x,y)$ und $v=v(x,y)$, welche die Verschiebungskomponenten in x- bzw. in y-Richtung darstellen.

Mit Hilfe der Operatormatrix

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

und den Spaltenvektoren

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

lassen sich die partiellen Differentialgleichungssysteme (3.1) und (3.2) in Matrixschreibweise formulieren :

$$\underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u} + \underline{F} = \underline{0} \quad (3.6)$$

Für den ebenen Spannungszustand ist

$$\underline{\underline{E}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

zu setzen, wogegen für den ebenen Verzerrungszustand

$$\underline{\underline{E}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

gilt.

Durch Verwendung der kinematischen Beziehungen zwischen Verzerrungen $\underline{\underline{\epsilon}}$ und den Verformungen $\underline{\underline{u}}$, nämlich

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{u}} = \begin{bmatrix} u_x \\ v_y \\ u_y + v_x \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

sowie durch Einbeziehen der konstitutiven Beziehungen zwischen Spannungen $\underline{\underline{\sigma}}$ und Verzerrungen $\underline{\underline{\epsilon}}$, in Matrixschreibweise ausgedrückt durch

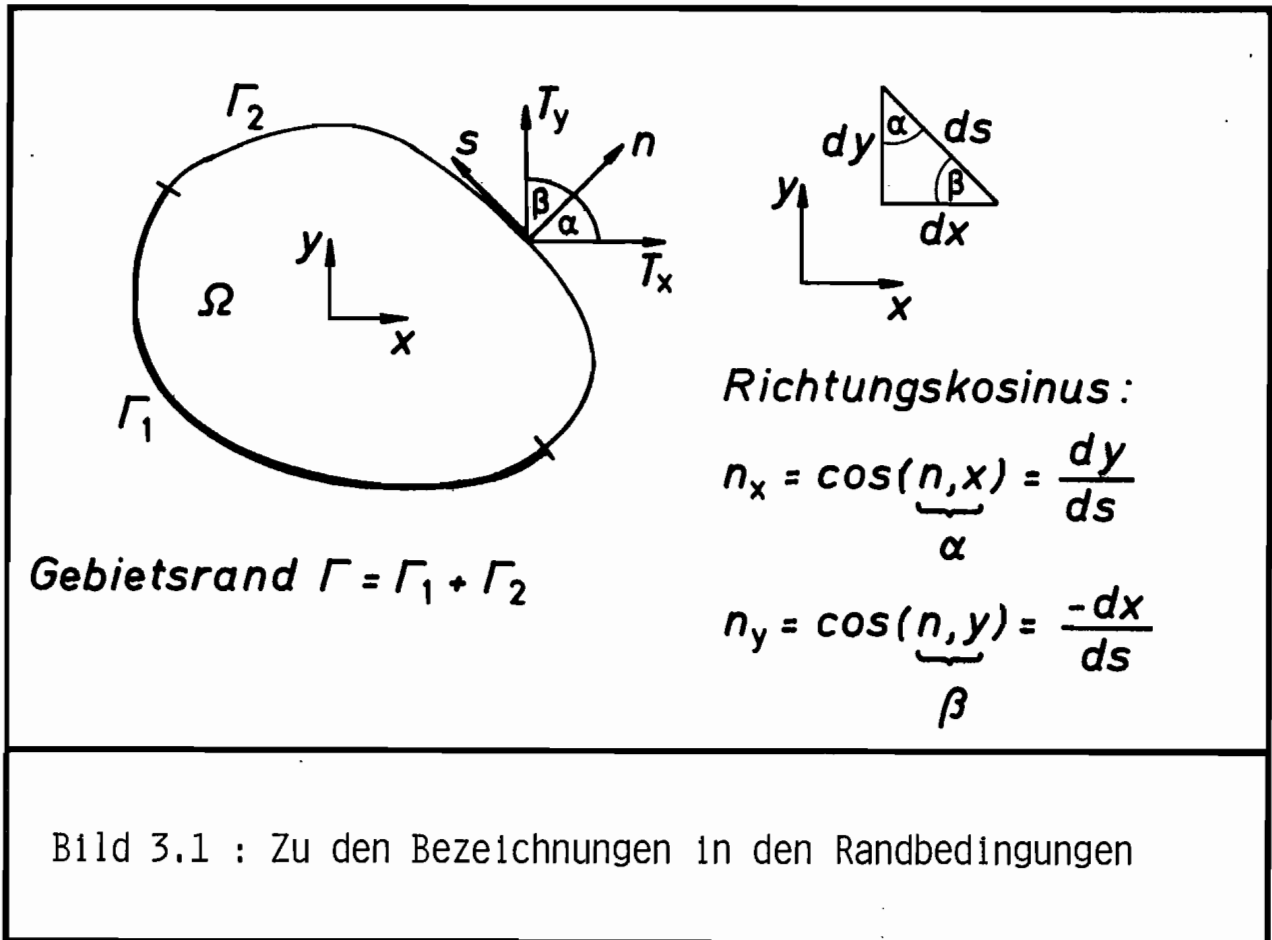
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\epsilon}} \quad (3.10)$$

läßt sich (3.6) auch angeben durch

$$\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{0}} \quad (3.11)$$

bzw. durch

$$\underline{D}^T \underline{\sigma} + \underline{\bar{F}} = \underline{0} \tag{3.12}$$



Die Komponenten der auf die Flächeneinheit bezogenen Randkräfte seien hier mit T_x und T_y bezeichnet (s. Bild 3.1) , so daß bei Berücksichtigung der Scheibendicke t sich auf einem Randstück ds die Kraftkomponenten $(T_x t ds)$ und $(T_y t ds)$ ergeben. Die Größen T_x und T_y sind mit den am Rand wirkenden Spannungen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y \\ T_y &= \sigma_{yy} n_y + \tau_{xy} n_x \end{aligned} \tag{3.13}$$

bzw. durch

$$\underline{T} = \underline{n} \underline{\sigma} \tag{3.14}$$

verknüpft, wobei

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

und

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

gesetzt sind. Als Randbedingungen vorgegebene Werte für T_x und T_y werden im folgenden mit \bar{T}_x und \bar{T}_y bezeichnet und zu einem Vektor $\bar{\underline{T}} = [\bar{T}_x \ \bar{T}_y]$ zusammengefaßt. Entsprechend sei ein auf dem Rand vorgegebener Verschiebungsvektor mit \bar{u} bezeichnet.

Mit Hilfe der oben angegebenen Matrizen läßt sich das partielle Differentialgleichungsproblem in der folgenden Weise formulieren:

$$\underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u} + \underline{\bar{F}} = \underline{0} \quad \text{in } \Omega \quad (3.17)$$

$$\underline{u} = \bar{u} \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (3.18)$$

$$\underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u} = \underline{T} = \bar{\underline{T}} \quad \text{auf } \Gamma_2 \quad (3.19)$$

4 Formulierung des Scheibendifferentialgleichungsproblems als Variationsproblem

4.1 Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials

Die zu dem Differentialgleichungssystem (3.17) und der Spannungsrandbedingung (3.19) gehörende Variationsaufgabe läßt sich als zu minimierendes Funktional Π in der Form

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\underline{u}^T \underline{D}^T) \underline{E} (\underline{D} \underline{u}) - \underline{u}^T \underline{\bar{F}} \right] t d\Omega - \int_{\Gamma_2} \underline{u}^T \underline{\bar{T}} t ds \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} - \underline{u}^T \underline{\bar{F}} \right] t d\Omega - \int_{\Gamma_2} \underline{u}^T \underline{\bar{T}} t ds = \text{Minimum} \end{aligned} \quad (4.1)$$

darstellen, die das Extremalprinzip vom minimalen Wert des Gesamtpotentials wiedergibt. Hierbei muß

$$\underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (4.2)$$

erfüllt sein.

Explizit für den ebenen Spannungs- bzw. den ebenen Verzerrungszustand lautet Gleichung (4.1) ausgeschrieben

a)

$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left[u_x^2 + v_y^2 + 2\nu u_x v_y + \frac{1-\nu}{2} (u_y + v_x)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. - u \bar{F}_x - v \bar{F}_y \right\} t dx dy - \int_{\Gamma_2} \left[u \bar{T}_x + v \bar{T}_y \right] t ds = \text{Minimum} \end{aligned} \quad (4.3)$$

für den ESZ

bzw.

b)

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{\Omega} \int \left\{ \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu)(u_x^2 + v_y^2) + 2\nu u_x v_y + \frac{1-2\nu}{2} (u_y + v_x)^2 \right] + \right. \\ \left. -u\bar{F}_x - v\bar{F}_y \right\} t \, dx \, dy - \int_{\Gamma_2} [u\bar{T}_x + v\bar{T}_y] t \, ds = \text{Minimum} \end{aligned} \quad (4.4)$$

für den EVZ

Die erste Variation von Π aus Gleichung (4.1) führt zu der Beziehung

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_{\Omega} \underbrace{(\delta \underline{u}^T \underline{D}^T)}_{\delta \underline{\epsilon}^T} \underline{E} \underline{D} \underline{u} t \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \underline{\bar{F}} t \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \delta \underline{u}^T \underline{\bar{T}} t \, ds \\ &= - \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T [\underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u} + \underline{\bar{F}}] t \, d\Omega + \int_{\Gamma} \delta \underline{u}^T [\underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}] t \, ds + \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} \delta \underline{u}^T \underline{\bar{T}} t \, ds \\ &= - \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \underbrace{[\underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u} + \underline{\bar{F}}]}_{=0 \rightsquigarrow \text{Dgl. (3.17)}} t \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \delta \underline{u}^T \underbrace{[\underline{T} - \underline{\bar{T}}]}_{=0 \rightsquigarrow \text{Rb. (3.19)}} t \, ds = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei berücksichtigt wurde, daß sich die Randkurve Γ aus Γ_1 und Γ_2 zusammensetzt (s. Bild 3.1), daß \underline{u} auf Γ_1 die Beziehung (4.2) nach Voraussetzung erfüllt und daher

$$\delta \underline{u} = \underline{0} \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (4.6)$$

gilt.

4.2 Erweiterung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials

Bei Verwendung des Funktionals (4.1) wird vorausgesetzt, daß die geometrische Randbedingung $\underline{u} = \underline{\bar{u}}$ auf Γ_1 erfüllt wird. Diese Einschränkung kann durch Benutzung des folgenden erweiterten Funktionals fallengelassen werden; es lautet

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} (\underline{u}^T \underline{D}^T) \underline{E} (\underline{D} \underline{u}) - \underline{u}^T \underline{F} \right] t \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \underline{u}^T \underline{T} \, t \, ds + \\ & - \int_{\Gamma_1} \underline{T}^T (\underline{u} - \underline{\bar{u}}) \, t \, ds \\ & \quad \underline{[n \underline{E} \underline{D} \underline{u}]^T} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nach einer Variation von (4.7) gemäß

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \left[\underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u} + \underline{F} \right] t \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} \delta \underline{u}^T \left[\underline{T} - \underline{\bar{T}} \right] t \, ds + \\ & = \underline{0} \rightsquigarrow \text{Dgl. (3.17)} \qquad \qquad \qquad = \underline{0} \rightsquigarrow \text{Rb. (3.19)} \\ & + \int_{\Gamma_1} \delta \underline{T}^T \left[\underline{\bar{u}} - \underline{u} \right] t \, ds = 0 \\ & = \underline{0} \rightsquigarrow \text{Rb. (3.18)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

erhält man als Eulersche Gleichungen die Gleichgewichtsbedingungen (3.17). Die Randbedingungen (3.18) für Verschiebungen und (3.19) für Spannungen ergeben sich als natürliche Randbedingungen.

Das erweiterte Funktional (4.7) dient als Ausgangspunkt für das sogenannte "hybride Weggrößenverfahren" [9,20,29,36], bei dem in einer Finite-Element-Diskretisierung der Erweiterungsterm nicht nur auf dem Gebietsrand, sondern auch auf sämtlichen Elementgrenzen ausgewertet wird, so daß die Ansätze keine Übergangsbedingungen zu erfüllen brauchen. Auf den Elementgrenzen wird dann - wie später näher erläutert - $\underline{\bar{u}}$ mit gewählten Elementrandverschiebungsverläufen $\underline{\tilde{u}}$ identifiziert.

5 Finite-Element-Formulierung für Standardscheibenelemente

Zur Erläuterung eines Teils der verwendeten Nomenklatur sei hier der Ausdruck für Π herangezogen, wie er bei einer Finite-Element-Diskretisierung mit zu Formfunktionen umgerechneten Polynomansätzen für u und v erscheint. Nach Wahl von Ansatzfunktionen $\underline{N}^i \underline{u}^i$ und $\underline{N}^i \underline{v}^i$ in den einzelnen Elementbereichen erhält man als zu minimierendes Funktional den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \sum_{i=1}^m \Pi^i = \sum_{i=1}^m \underline{q}^{iT} \underbrace{\frac{1}{2} \int_{A^i} (\underline{N}_{uv}^{iT} \underline{D}^T) \underline{E} (\underline{D} \underline{N}_{uv}^i) t dA^i}_{\underline{k}^i} \underline{q}^i + \\
 &\quad - \sum_{i=1}^m \underline{q}^{iT} \left[\underbrace{\int_{A^i} \underline{N}_{uv}^{iT} \underline{F} t dA^i + \int_{\partial A_2^i} \underline{N}_{uv}^{iT} \underline{T} t ds}_{\underline{p}^i} \right] \\
 &= \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \underline{q}^{iT} \underline{k}^i \underline{q}^i - \sum_{i=1}^m \underline{q}^{iT} \underline{p}^i \\
 &= \frac{1}{2} \underline{q}^T \underbrace{\sum_{i=1}^m \underline{a}^{iT} \underline{k}^i \underline{a}^i}_{\underline{K}} \underline{q} - \underline{q}^T \underbrace{\sum_{i=1}^m \underline{a}^{iT} \underline{p}^i}_{\underline{p}} \tag{5.1} \\
 &= \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{K} \underline{q} - \underline{q}^T \underline{p}
 \end{aligned}$$

Hierbei bedeuten in einzelnen :

- m : Anzahl der Elemente
- \underline{N}^i : Zeilenvektor der Ansatzterme (Formfunktionen)
- \underline{u}^i : Verschiebungsvektor zur Funktion u des i -ten Elementes
- \underline{v}^i : Verschiebungsvektor zur Funktion v des i -ten Elementes
- \underline{q}^i : Verschiebungsvektor des i -ten Elementes : $\underline{q}^i = \begin{bmatrix} \underline{u}^i \\ \underline{v}^i \end{bmatrix}$

\underline{q} : Gesamtverschiebungsvektor

\underline{a}^i : Verknüpfungsmatrix des i-ten Elementes zwischen dem Verschiebungsvektor \underline{q}^i dieses Elementes und dem Gesamtverschiebungsvektor \underline{q} nach der Gleichung

$$\underline{q}^i = \underline{a}^i \underline{q}$$

\underline{N}_{uv}^i : Matrix mit den Ansatzvektoren (Formfunktionsvektoren) \underline{N}^i für u und v des i-ten Elementes :

$$\underline{N}_{uv}^i = \begin{bmatrix} \underline{N}^i & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{N}^i \end{bmatrix}$$

A^i : Fläche des i-ten Elementes

∂A_2^i : Elementrandstück des i-ten Elementes, das zu Γ_2 gehört, worauf \bar{T} vorgegeben ist

\underline{k}^i : Elementsteifigkeitsmatrix

$\underline{\bar{p}}^i$: Elementbelastungsvektor

\underline{K} : Gesamtsteifigkeitsmatrix

$\underline{\bar{p}}$: Belastungsvektor

Als Gleichungssystem für die Unbekannten \underline{q} folgt

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \underline{q}^T} = \underline{K} \underline{q} - \underline{\bar{p}} = \underline{0} \tag{5.2}$$

6 Zur Frage der Konstruktion verträglicher Elemente

6.1 Allgemeines

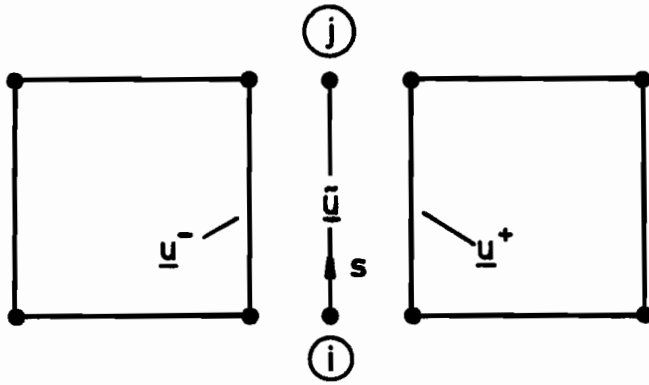
Um Verschiebungselemente sinnvoll koppeln zu können, müssen die aneinanderzufügenden Elemente gleichartige Knotenwerte und zwischen den Knoten gleichartige Elementrandverschiebungsverläufe (linear, quadratisch, etc.) aufweisen. Als ausreichende Knotengrößen erweisen sich für Scheibenprobleme die diskreten Verschiebungswerte für u und v , während partielle Ableitungswerte der Verschiebungen nicht erforderlich werden.

Auf den einzelnen Elementseiten eines Elementes werden Verschiebungsverläufe in Form von Polynomen angestrebt, welche auf jeder Elementseite allein durch die dort vorhandenen Knotenwerte eindeutig bestimmt sein sollen. Im Prinzip sollen also auf jeder Elementseite Einheitsverschiebungszustände gemäß den dort vorliegenden Knotenwerten erscheinen.

Die für ein konkretes Element als besonders vorteilhaft für eine Kopplung erscheinenden Randverschiebungsverläufe seien mit \underline{u} bezeichnet (s. Bild 6.1). Als geeignete Randverschiebungen \underline{u} erweisen sich beispielsweise für eine Elementseite, an deren Endpunkten je ein Knoten mit den diskreten Werten der beiden Verschiebungskomponenten liegt, lineare Funktionsverläufe, die allein durch die im betrachteten Intervall vorhandenen Knotenwerte festgelegt sind.

Im Prinzip geht es darum, die Ansätze u des Elementinnenbereichs den sinnvoll gewählten Verläufen von \underline{u} auf dem Elementrand anzupassen. Wie und ob dies exakt oder approximativ zu erreichen ist, läßt sich nur bezogen auf das verwendete Funktional und die Art der gewählten Gebietsansätze beantworten.

Am einfachsten läßt sich die Antwort für das hybride Weggrößenverfahren geben : Da keine Übergangsbedingungen von den Ansätzen erfüllt werden müssen, brauchen die Verschiebungsansätze für den Elementbereich von vornherein nicht in derartige Elementrandverschiebungsverläufe, welche zur Stetigkeitserzielung dienen, exakt überzugehen, sondern es können zunächst unabhängig voneinander Ansätze im Gebietsinneren (mit u bezeichnet) und Verschiebungsverläufe auf dem Elementrand (mit \underline{u} bezeichnet) gewählt werden, und zwar letztere sinnvollerweise mittels Einheitsverschiebungsfunktionen auf den einzelnen Elementseiten. Der Randverschiebungsverlauf \underline{u} , in dessen Darstellung die Knotenwerte eingehen, kann



angestrebt wird : $\underline{u}^- \stackrel{!}{=} \underline{u}^+$

Realisierung : wenn $\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}^- = \underline{\tilde{u}} \\ \text{und} \\ \underline{u}^+ = \underline{\tilde{u}} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{u}^- = \underline{u}^+$

geeignete Wahl für $\underline{\tilde{u}}$: eindimensionale Formfunktionen bestimmten Grades in Verbindung mit zugehörigen Knotenwerten

Beispiel für $\underline{\tilde{u}}$:

(lineare Randverschiebungen zwischen Knoten i und j)

$$\underline{\tilde{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \frac{s}{s_{ij}}) u_i + \frac{s}{s_{ij}} u_j \\ (1 - \frac{s}{s_{ij}}) v_i + \frac{s}{s_{ij}} v_j \end{bmatrix}, \quad (0 \leq s \leq s_{ij})$$

mit s_{ij} = Strecke zwischen i und j

Bild 6.1 : Zur Kopplung von Verschiebungselementen
(veranschaulicht an einem Schnitt längs
der Grenze zweier Elemente)

ohne besondere Rücksicht auf die Gebietsansätze so gewählt werden, wie man es im konkreten Fall benötigt. Die Anpassung der gewählten Verläufe aus dem Gebietsinnern an die Randverschiebungsfunktionen \underline{u} ist dann Teil des Näherungsverfahrens, und zwar wird im hybriden Weggrößenverfahren durch den Erweiterungsterm gefordert, daß die Differenz $(\underline{u} - \underline{u})$ auf dem Elementrand verschwinden soll.

Anders sieht es bei den Verschiebungselementen auf der Basis von Funktional (4.1) aus. Hier müssen die Ansätze die geometrischen Übergangsbedingungen von vornherein erfüllen, d.h. die Elementansätze \underline{u} müssen auf dem Elementrand einen zur Kopplung geeigneten Randverschiebungsverlauf \underline{u} exakt annehmen. Da für koppelbare Elemente auf den Elementseiten gleichartige Randverschiebungsverläufe bezüglich des Grades der Polynomkurven und der Knotenwerte vorliegen müssen, ist zunächst einmal festzustellen, welchen Polynomgrad die Verschiebungsverläufe auf den Elementseiten annehmen sollen. Mit dem Polynomgrad ist sogleich auch die Anzahl der auf jeder Seite erforderlichen Knotenwerte festgelegt, nach deren sinnvoller Wahl sich dann der für eine Kopplung geeignete Randverschiebungsverlauf \underline{u} stückweise angeben läßt. Bei der Konstruktion von solchen Elementansatzfunktionen \underline{u} , die auf dem Elementrand identisch mit \underline{u} werden, geht es somit erst einmal darum, die Ansätze im Element so zu wählen, daß sie auf allen Seiten einen Kurvenverlauf vom gleichen Grad annehmen. Dies geschieht beispielsweise bei den iso- und subparametrischen Elementen, indem Polynomansätze in schiefwinkligen bzw. krummlinigen Koordinatensystemen definiert werden.

Um nun letztlich für ein bestimmtes Element die sogenannten Formfunktionen zu erhalten, erfolgt bei Ansätzen, die auf allen Elementseiten einen Polynomverlauf bestimmten Grades bewirken, eine Umrechnung der freien Ansatzparameter in die Knotenwerte dadurch, daß ein Gleichungssystem aufgestellt und gelöst wird, welches die Bedingungsgleichungen dafür enthält, daß die Ansatzfunktion an den Knotenpunkten die gewählten Knotenwerte annehmen. Bei einer Kontrolle der konstruierten Ansatzfunktionen \underline{u} , die in ihrer Darstellung nun die Knotenwerte des gesamten Elementes enthalten, muß sich nach Angabe der Verschiebungsverläufe auf jeder einzelnen Elementseite ergeben, daß nur die jeweils auf ihr vorliegenden Knotenwerte einen Einfluß auf die Verläufe im betrachteten Bereich haben und die Gleichheit von \underline{u} und \underline{u} auf dem Elementrand bestätigt wird.

Nun kann es aber, wie es bei speziellen Elementen mit Lösungsfolgen des Differentialgleichungssystems als Ansatzfunktionen der Fall ist, vorkommen, daß für den Innenbereich eines Elementes gewählte Ansätze auf dem Elementrand einen gewünschten polynomförmigen Randverschiebungsverlauf $\underline{\bar{u}}$ nicht exakt annehmen können. Wird die Umrechnung der freien Ansatzparameter in Knotenwerte auch hier mit Hilfe von Bedingungsgleichungen für die Knotenwerte durchgeführt, so ist zwar die Stetigkeit für die Knotengrößen sichergestellt, nicht jedoch für die Funktionsverläufe zwischen den Knoten des Randes, weil auf der Elementgrenze zur Kopplung verschiedener Elemente geeignete Referenzfunktionen, nämlich Polynome wohldefinierter Grades fehlen. Diese Methode, mit N Bedingungsgleichungen N freie Parameter in N Knotenwerte umzurechnen, kann als ein Verfahren angesehen werden, das eine Approximation der gewünschten Randverschiebungen $\underline{\bar{u}}$ (im Sinne einer Interpolation) liefert, jedoch im allgemeinen nicht zu einer optimalen Näherungsdarstellung der geforderten polynomförmigen Einheitsverschiebungszustände auf dem Elementrand führt.

Um nun eine optimale Approximation der gewünschten Randverschiebungsverläufe $\underline{\bar{u}}$ durch die aus dem Elementbereich herrührenden Ansätze \underline{u} zu erreichen, kann die Fehlerquadratmethode zur Minimierung der Fehlerquadrate herangezogen werden, die sich aus dem Differenzvektor $(\underline{\bar{u}} - \underline{u})$ ergeben. Explizit lautet die Minimierungsaufgabe hier

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{2} \int_{\partial A} [\underline{\bar{u}} - \underline{u}]^T [\underline{\bar{u}} - \underline{u}] ds && (\partial A: \text{Elementrand}) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial A} [(\bar{u} - u) (\bar{v} - v)] \begin{bmatrix} (\bar{u} - u) \\ (\bar{v} - v) \end{bmatrix} ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\partial A} [(\bar{u} - u)^2 + (\bar{v} - v)^2] ds \rightarrow \text{Minimum} && (6.1)
 \end{aligned}$$

In den Ansätzen für das Verschiebungsfeld \underline{u} des Elementbereiches treten die freien Ansatzparameter auf, während in $\underline{\bar{u}}$ die gewählten Elementknotenwerte erscheinen. Durch Lösen der Minimierungsaufgabe läßt sich eine (im Fehlerquadratsinne) optimale Verknüpfung zwischen Freiwerten und Knotenwerten finden. Die Anzahl der freien Parameter ist hier größer oder gleich der Anzahl N der Knotenwerte, so daß die Güte der Approximation durch die Anzahl der in

\underline{u} verwendeten Ansatzterme beeinflusst werden kann. Wenn der gewählte Randverschiebungsverlauf $\underline{\bar{u}}$, welcher als unbestimmte Größen noch die Knotenwerte enthält, hinreichend gut approximiert wird, so ist quasi Konformität erreicht. Das geschilderte Vorgehen möge kurz durch die Stichworte "Vorabminimierung der Randverschiebungsdifferenzen verschiedener Elemente im Fehlerquadrat-sinn" charakterisiert sein.

Bei den genannten Vorgehensweisen, koppelbare Elemente zu erzeugen, geht es letztendlich immer um eine geeignete Verknüpfung von freien Ansatzparametern und Knotenwerten. Zum Überblick seien die drei angesprochenen Methoden noch einmal stichwortartig aufgeführt:

I.: Aufstellen von N Bedingungsgleichungen für N Knotenwerte, um zu erzwingen, daß die Elementansätze für \underline{u} an den Knotenpunkten die gewählten Knotenwerte exakt annehmen.

Verwendung der so erhaltenen, nun mit Knotenwerten behafteten Ansätze für \underline{u} in Funktional (4.1). (Anmerkung: Diese Methode der Verwendung von Bedingungsgleichungen für die Knotenwerte kann als eine punktweise Approximation eines zur Elementkopplung geeigneten Randverschiebungsverlaufes $\underline{\bar{u}}$ angesehen werden, wobei die approximative Darstellung von $\underline{\bar{u}}$ durch \underline{u} für spezielle Fälle in eine exakte übergeht.)

II.: Wahl geeigneter Randverschiebungsverläufe $\underline{\bar{u}}$ auf dem Elementrand. Approximation auf der Elementrandkurve von $\underline{\bar{u}}$ durch die Elementansätze für \underline{u} mittels Fehlerquadratmethode. Verwendung der so erhaltenen, nun mit Knotenwerten behafteten Ansätze für \underline{u} in Funktional (4.1).

III.: Verwendung des erweiterten Funktionals (4.7). Wahl geeigneter Randverschiebungsverläufe $\underline{\bar{u}}$ auf dem Elementrand. Anpassen des Funktionsverlaufs \underline{u} an den auf dem Elementrand gewählten Verschiebungsverlauf $\underline{\bar{u}}$ mittels des Erweiterungsterms $\int_{\partial A} \underline{I}^T(\underline{u} - \underline{\bar{u}}) \underline{t} \, ds$.

Bei den für diese Arbeit erstellten speziellen Elementen sind die Methoden II und III zur Anwendung gekommen; in numerischen Rechnungen werden in Kapitel 22 die zwei Elementtypen gegenübergestellt, um zu demonstrieren, daß beide Verfahren etwa gleichgute Ergebnisse liefern.

Unter Verwendung der Fehlerquadratmethode lassen sich in gewissen Fällen bei Polynomansätzen für \underline{u} (gegebenenfalls durch Berücksichtigung von Nebenbedingungen beim Vorhandensein von Innenknoten) dieselben Verknüpfungsmatrizen zwischen Ansatzfreiwerten und Knotengrößen ermitteln wie mit der unter (I) charakterisierten Methode. Dies ist der Fall, wenn die erfolgreiche Konstruktion eines konformen Elementes aufgrund der Elementform, der gewählten Knotenwerte, des lokalen Koordinatensystems und der verwendeten Polynomterme möglich ist.

Zur Erläuterung der verwendeten Nomenklatur seien die beiden unter (I) und (II) angedeuteten Wege an einem ganz einfachen Beispiel mit Polynomansätzen für u und v konkretisiert. Weiterhin wird mit der expliziten Anführung von Verknüpfungsbeziehungen für Standardansätze bezweckt, eine Vergleichsmöglichkeit zu den Verknüpfungsgleichungen bei speziellen Ansätzen zu haben, die das Differentialgleichungssystem und eventuell Teilrandbedingungen erfüllen.

6.2 Gegenüberstellung zweier Methoden zur Ermittlung einer Verknüpfungsmatrix zwischen Ansatzfreiwerten und Knotenwerten am Beispiel von Polynomansätzen.

(Knotenpunktinterpolation - Fehlerquadratmethode)

Als Beispiel wird die Ermittlung der Verknüpfungsmatrizen nach den beiden Methoden für einen quadratischen Bereich gemäß Bild 6.2 gewählt, der durch eine Transformation aus einem viereckigen Bereich hervorgegangen sein kann und in dem unabhängige Polynomansätze für u und v gemacht werden. Konkret soll es sich hier um ein 4-Knotenelement handeln, dessen Knotenwerte ebenfalls Bild 6.2 entnommen werden können.

Mit den Ansatztermen aus dem Polynomschema im Bild 6.3 und den Freiwerten \hat{u} und \hat{v} lassen sich die Ansatzfunktionen u und v zunächst durch

$$u(\xi, \eta) = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 \xi + \hat{u}_3 \xi \eta + \hat{u}_4 \eta = \underline{\Phi} \underline{\hat{u}} \quad (6.2)$$

und

$$v(\xi, \eta) = \hat{v}_1 + \hat{v}_2 \xi + \hat{v}_3 \xi \eta + \hat{v}_4 \eta = \underline{\Phi} \underline{\hat{v}} \quad (6.3)$$

ausdrücken, und zwar mit dem Zeilenvektor

$$\underline{\Phi} = \underline{\Phi}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \xi \eta & \eta \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

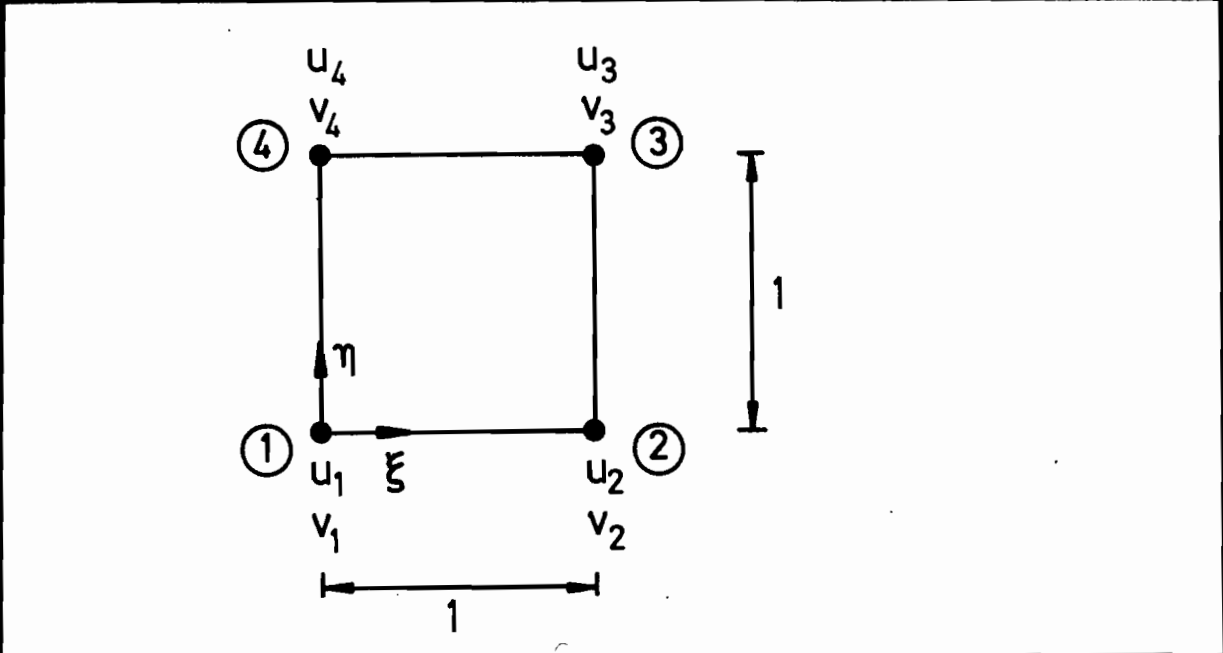


Bild 6.2 : (transformierter) Elementbereich eines 4-Knotenscheibenelementes mit Knotenwerten

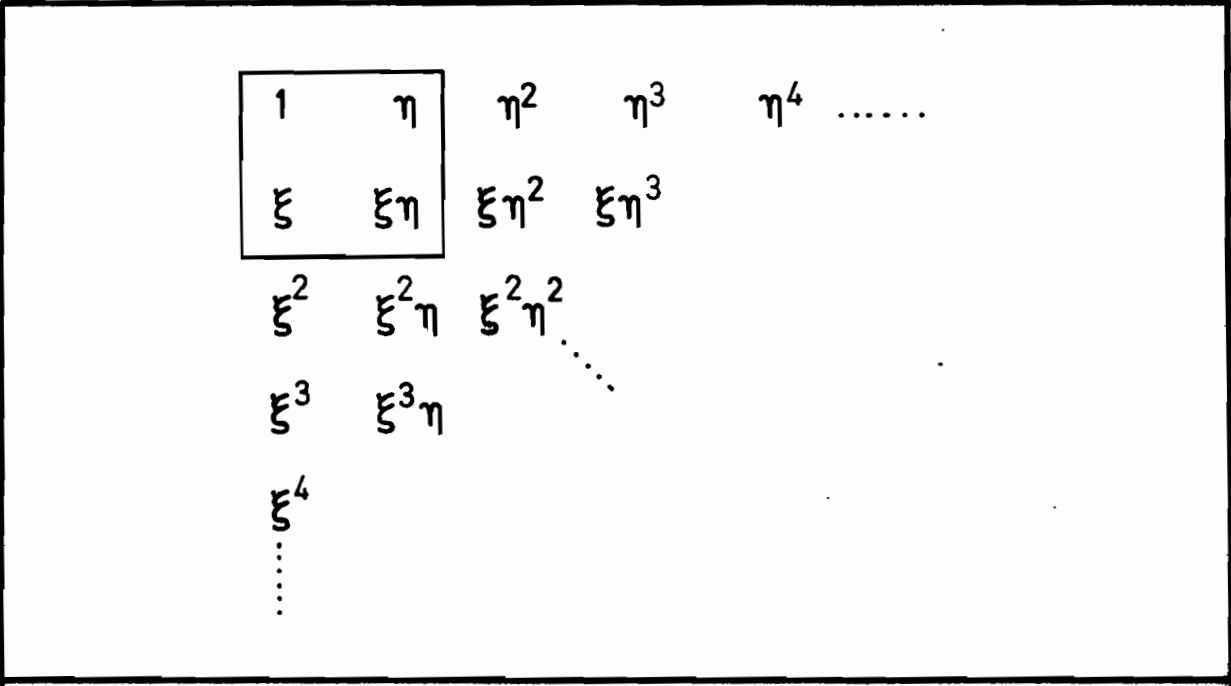


Bild 6.3 : Polynomschema (eingerahmt: bilinearer Ansatz)

sowie den Spaltenvektoren

$$\underline{\hat{a}} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\hat{v}} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \\ \hat{v}_4 \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

$$\tag{6.6}$$

Eine Möglichkeit, die Ansatzfreiwerte aus den Spaltenvektoren $\underline{\hat{u}}$ und $\underline{\hat{v}}$ durch die diskreten Knotenverschiebungswerte auszudrücken, ist das Aufstellen von zwei Gleichungssystemen, welche die einzelnen Bedingungsgleichungen mit den Forderungen enthalten, daß die Funktionen an den Koordinatenpaaren der Knoten die gewünschten Werte annehmen. Formelmäßig läßt sich dies bezüglich u wie folgt umsetzen:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0,0) \\ u(1,0) \\ u(1,1) \\ u(0,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \\ \hat{a}_4 \end{bmatrix} = \underline{\hat{\Phi}} \underline{\hat{a}} \tag{6.7}$$

Der Spaltenvektor $\underline{\hat{u}}$ läßt sich nun ausdrücken als

$$\underline{\hat{u}} = \underline{\hat{\Phi}}^{-1} \underline{u} = \underline{G} \underline{u} \tag{6.8}$$

Die Ermittlung von $\underline{\hat{v}}$ verläuft analog, und da für $u(\xi, \eta)$ und $v(\xi, \eta)$ dieselben Ansatzterme gewählt wurden, ergibt sich

$$\underline{\hat{v}} = \underline{G} \underline{v} \tag{6.9}$$

Für einen späteren Vergleich seien die Beziehungen (6.8) und (6.9) in einer Gleichung zusammengefaßt:

$$\underline{\hat{q}} = \begin{bmatrix} \underline{\hat{a}} \\ \underline{\hat{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G} & 0 \\ 0 & \underline{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix} = \underline{G}^* \underline{q} \tag{6.10}$$

Die einzelnen Formfunktionen erhält man nun explizit durch Ausmultiplikation von $\underline{\Phi}(\xi, \eta) \underline{G}$, und zwar gilt

$$\underline{N}(\xi, \eta) = \underline{\Phi}(\xi, \eta) \underline{G} \quad (6.11)$$

Mit den erhaltenen Ausdrücken gewinnen die Ansatzfunktionen folgende Gestalt:

$$u(\xi, \eta) = \underline{\Phi}(\xi, \eta) \underline{\hat{u}} = \underline{\Phi} \underline{G} \underline{u} = \underline{N}(\xi, \eta) \underline{u} \quad (6.12)$$

$$v(\xi, \eta) = \underline{\Phi}(\xi, \eta) \underline{\hat{v}} = \underline{\Phi} \underline{G} \underline{v} = \underline{N}(\xi, \eta) \underline{v} \quad (6.13)$$

bzw. zu einer Gleichung zusammengefaßt:

$$\begin{bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{N}(\xi, \eta) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{N}(\xi, \eta) \end{bmatrix}}_{\underline{N}_{uv}(\xi, \eta)} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix}}_{\underline{q}} = \underline{N}_{uv}(\xi, \eta) \underline{q} \quad (6.14)$$

Bei der 2. Möglichkeit, mittels der Fehlerquadratmethode für u und v jeweils eine Matrix \underline{G} zu ermitteln, welche die Verknüpfung zwischen freien Ansatzparametern und endgültigen Knotenwerten herstellt, geht es darum, die Abweichung des Verlaufs der einzelnen Ansätze auf dem Rand von zusätzlich angenommenen Randfunktionen minimal zu machen. Bezüglich der Ansatzfunktion u lautet die Problemstellung: Wie müssen die freien Parameter in $\underline{\hat{u}}$ gewählt werden, damit das Fehlerquadrat der Abweichung der bilinearen Ansatzfunktion $u(\xi, \eta)$ nach Gleichung (6.2) von einem vorgegebenen Funktionsverlauf \bar{u} auf den vier Elementseiten minimal wird. Zur Kopplung des betrachteten Elementes mit anderen Elementen, die lineare Verläufe ihrer Ansätze auf den Rändern aufweisen, wird hier der Funktionsverlauf \bar{u} sinnvollerweise linear gewählt. Die Funktion $\bar{u}(s)$ habe folgende Form (s. Bild 6.4):

$$\bar{u}(s) = \begin{cases} (1-s)u_1 + s u_2 & \text{zwischen Knoten 1 und 2} \\ (1-s)u_2 + s u_3 & \text{zwischen Knoten 2 und 3} \\ (1-s)u_3 + s u_4 & \text{zwischen Knoten 3 und 4} \\ (1-s)u_4 + s u_1 & \text{zwischen Knoten 4 und 1} \end{cases} \quad (6.15)$$

\bar{u} nimmt also an einem Knoten i den Wert u_i ($i = 1, 2, 3, 4$) an.

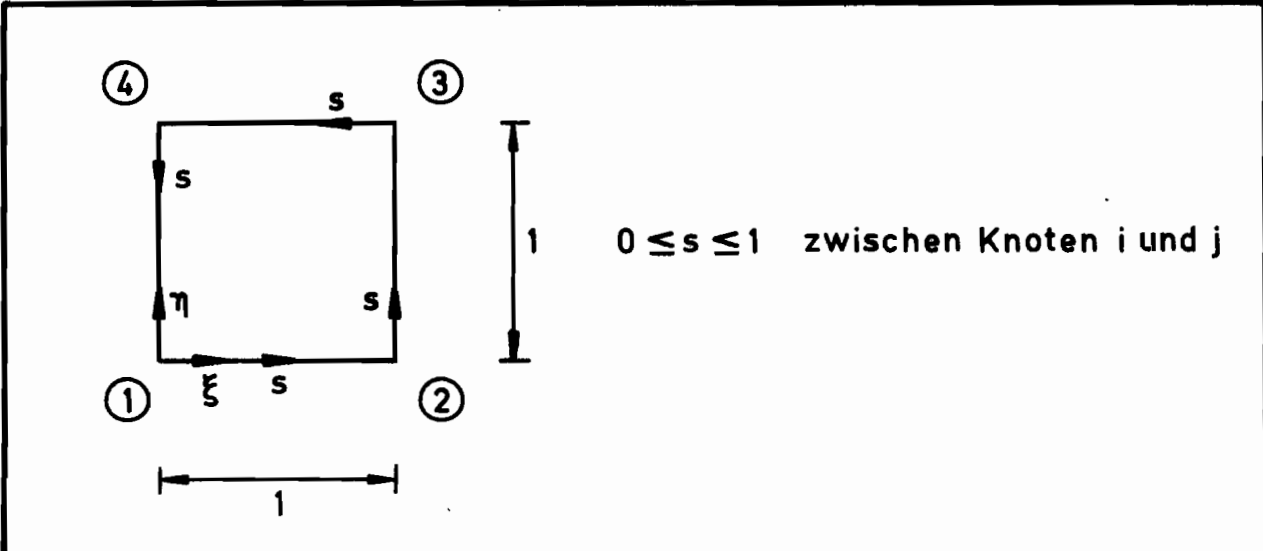


Bild 6.4 : Element in der ξ - η -Ebene mit abschnittsweise definierter Randkoordinate s

Eigentlich müßte die abschnittsweise Definition von s durch

$$s = \begin{cases} s_1 & \text{mit } 0 \leq s_1 \leq 1 & \text{zwischen Knoten 1 und 2} \\ s_2 & \text{mit } 0 \leq s_2 \leq 1 & \text{zwischen Knoten 2 und 3} \\ s_3 & \text{mit } 0 \leq s_3 \leq 1 & \text{zwischen Knoten 3 und 4} \\ s_4 & \text{mit } 0 \leq s_4 \leq 1 & \text{zwischen Knoten 4 und 1} \end{cases} \quad (6.16)$$

erfolgen; es wird aber in Bild 6.4 und den einzelnen Beziehungen auf eine Indizierung verzichtet, weil ansich klar ist, was gemeint ist.

Die bilineare Ansatzfunktion $u(\xi, \eta)$ läßt sich auf dem Elementrand in Abhängigkeit von s folgendermaßen abschnittsweise ausdrücken :

$$u(s) = \begin{cases} \hat{u}_1 + s \hat{u}_2 & \text{zwischen Knoten 1 und 2} \\ \hat{u}_1 + \hat{u}_2 + s \hat{u}_3 + s \hat{u}_4 & \text{zwischen Knoten 2 und 3} \\ \hat{u}_1 + (1-s) \hat{u}_2 + (1-s) \hat{u}_3 + \hat{u}_4 & \text{zwischen Knoten 3 und 4} \\ \hat{u}_1 + (1-s) \hat{u}_4 & \text{zwischen Knoten 4 und 1} \end{cases} \quad (6.17)$$

Um nun das Minimum des Fehlerquadratfunktionals J mit

$$J = \int_{\partial A} (\tilde{u}(s) - u(s))^2 ds \quad (6.18)$$

(∂A : Elementrand)

zu erhalten, werden die Funktionen $\tilde{u}(s)$ und $u(s)$ zunächst in Matrizenform ausgedrückt :

$$\tilde{u}(s) = \underline{\tilde{U}}(s) \underline{u} \quad (6.19)$$

$$u(s) = \underline{U}(s) \underline{\hat{u}} \quad (6.20)$$

Die abschnittsweise definierten Vektoren $\underline{\tilde{U}}$ und \underline{U} lauten im einzelnen

$$\underline{\tilde{U}}(s) = \begin{cases} [(1-s) & s & 0 & 0] & \text{zwischen Knoten 1 und 2} \\ [0 & (1-s) & s & 0] & \text{zwischen Knoten 2 und 3} \\ [0 & 0 & (1-s) & s] & \text{zwischen Knoten 3 und 4} \\ [s & 0 & 0 & (1-s)] & \text{zwischen Knoten 4 und 1} \end{cases} \quad (6.21)$$

$$\underline{U}(s) = \begin{cases} [1 & s & 0 & 0] & \text{zwischen Knoten 1 und 2} \\ [1 & 1 & s & s] & \text{zwischen Knoten 2 und 3} \\ [1 & (1-s) & (1-s) & 1] & \text{zwischen Knoten 3 und 4} \\ [1 & 0 & 0 & (1-s)] & \text{zwischen Knoten 4 und 1} \end{cases} \quad (6.22)$$

Als Minimierungsproblem erhält man nun

$$J = \int_{\partial A} (\tilde{u}^2 - 2u\tilde{u} + u^2) ds \quad (6.23)$$

$$= \int_{\partial A} \underline{u}^T \underline{\tilde{U}}^T \underline{\tilde{U}} \underline{u} ds - 2 \int_{\partial A} \underline{\hat{u}}^T \underline{U}^T \underline{\tilde{U}} \underline{u} ds + \int_{\partial A} \underline{\hat{u}}^T \underline{U}^T \underline{U} \underline{\hat{u}} ds = \text{Min.}$$

Die Forderung $\frac{\partial J}{\partial \underline{\hat{u}}^T} = \underline{0}$ führt schließlich auf das Gleichungssystem

$$\underbrace{\int \underline{U}^T \underline{U} ds}_{\underline{Q}} \underline{\hat{u}} - \underbrace{\int \underline{U}^T \underline{\tilde{U}} ds}_{\underline{L}} \underline{u} = \underline{0} \tag{6.24}$$

bzw.

$$\underline{Q} \underline{\hat{u}} = \underline{L} \underline{u} \tag{6.25}$$

mit

$$\underline{Q} = \int \underline{U}^T \underline{U} ds \tag{6.26}$$

und

$$\underline{L} = \int \underline{U}^T \underline{\tilde{U}} ds \tag{6.27}$$

Den Spaltenvektor $\underline{\hat{u}}$ mit den freien Ansatzparametern erhält man bei dieser Methode nun aus Gleichung (6.24) :

$$\underline{\hat{u}} = \underline{Q}^{-1} \underline{L} \underline{u} = \underline{G} \underline{u} \tag{6.28}$$

mit

$$\underline{G} = \underline{Q}^{-1} \underline{L} \tag{6.29}$$

Die explizite Ausrechnung von $\underline{Q}^{-1} \underline{L}$ liefert, wie zu erwarten war, für das angeführte Beispiel dieselbe Verknüpfungsmatrix \underline{G} wie die zuerst angeführte Standardmethode.

Die Durchführbarkeit des soeben beschriebenen Weges hängt natürlich davon ab, ob die Matrix Q singulär ist oder nicht. An dieser Stelle sei nun ein Fall konstruiert, bei dem die Fehlerquadratmethode ohne Berücksichtigung von Nebenbedingungen nicht durchführbar ist.

Für diesen Fall sei nun eine biquadratische Ansatzfunktion mit Termen gemäß Bild 6.5 gewählt.

$$\begin{array}{ccc}
 1 & \eta & \eta^2 \\
 \xi & \xi \eta & \xi \eta^2 \\
 \xi^2 & \xi^2 \eta & \xi^2 \eta^2
 \end{array}$$

Bild 6.5 : Biquadratische Ansatzterme

Die Wahl der Knotenvariablen geht aus Bild 6.6 hervor.

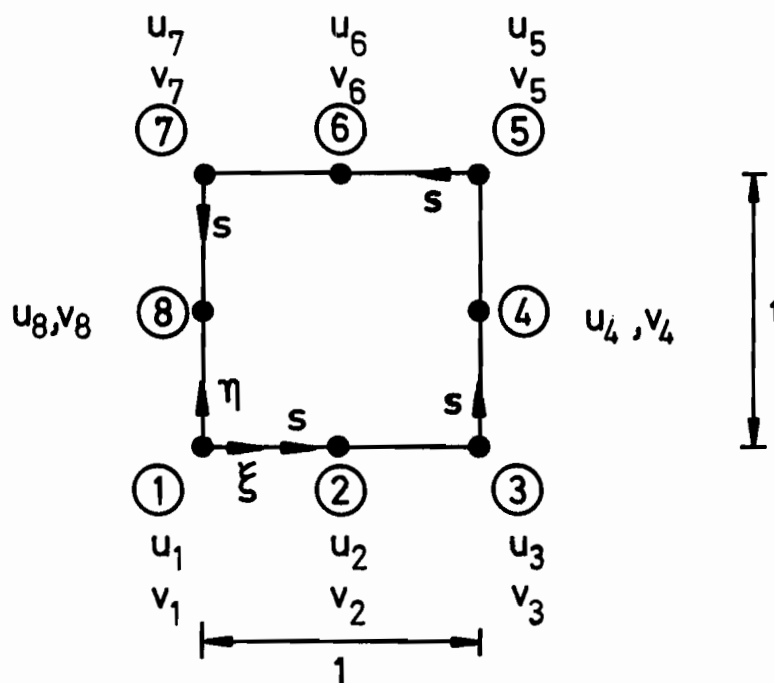


Bild 6.6 : (transformierter) Elementbereich eines 8-Knotenscheibenelementes mit Knotenwerten

Die Randverschiebungsfunktion $\bar{u}(s)$ wird wiederum abschnittsweise auf den vier Elementseiten definiert, und zwar habe \bar{u} auf jeder Seite mit den aufeinanderfolgenden Knoten i, j, k und den zugehörigen Knotenwerten u_i, u_j, u_k den quadratischen Kurvenverlauf

$$\bar{u}(s) = (1-s)(1-2s)u_i + 4s(1-s)u_j + s(2s-1)u_k \quad (6.30)$$

Nach Darstellung der biquadratischen Ansatzfunktion $u(\xi, \eta)$ als Funktion $u(s)$ auf den Elementrändern lassen sich die Matrizen \underline{Q} und \underline{L} nach (6.26) bzw. (6.27) berechnen. In dem konstruierten Fall wird \underline{Q} singulär, was für dieses Beispiel anschaulich bedeutet, daß es unendlich viele Möglichkeiten gibt, die biquadratische Ansatzfunktion mit einer vorgegebenen quadratischen Funktion auf dem Elementrand identisch werden zu lassen. Um das Problem eindeutig zu machen, muß eine Nebenbedingung festgelegt werden.

In der anderen auf Erfüllung von Knotenpunktbedingungen gerichteten Betrachtungsweise geht es darum, für die einzelnen Knoten Bedingungsgleichungen aufzustellen, und dort würde mit den 9 zur Verfügung stehenden Ansatztermen und 8 vorhandenen Knoten sich eine nichtinvertierbare rechteckige Matrix $\hat{\Phi}$ ergeben. Die Behebung der Unterbestimmtheit würde dort durch Einführung eines 9. Knoten in den Innenbereich des Elementes erfolgen.

Bei der Fehlerquadratbetrachtungsweise ist analog die Information, welche hier nur vom Elementrand herrührt, zur eindeutigen Lösung nicht vollständig und muß entsprechend ergänzt werden. Dies kann entweder in Form einer Nebenbedingung bezüglich des Innenknotens geschehen oder durch Addition der quadrierten Verschiebungsdifferenz für den Innenknoten im Fehlerquadratfunktional. Ohne Berücksichtigung einer Zusatzbedingung wird die Fehlerquadratmethode sofort durchführbar nach Wahl von 8 Knoten auf dem Elementrand und Weglassen beispielsweise des Ansatztermes $\xi^2 \eta^2$.

Die Verknüpfungsmatrizen, die man nun für die im Beispiel angesprochenen Varianten eines Elementes mit quadratischen Ansatztermen auf den verschiedenen Wegen erhält, sind gleich.

In den Fällen, bei denen die betrachteten zwei Verfahren schon von der Anschauung her die gleichen Ergebnisse liefern, ist natürlich die einfacher durchzuführende Methode, in der eine $\hat{\Phi}$ -Matrix aufgestellt wird, von größerer praktischer Bedeutung. Aber im Hinblick auf allgemeinere Ansatzfunktionen und speziell auf die Konstruktion von Sonderelementen, bei denen das Problem auftauchen kann, Polynomfunktionen mit Nichtpolynomfunktionen zu verbinden, wird die Fehlerquadratmethode interessant.

Bei speziellen Elementansätzen für u und v , die wegen ihrer Lösungseigenschaften nicht vollkommen unabhängig voneinander sein können, läßt sich die Umrechnung der Freiwerte in Knotengrößen nicht wie bei den Standardelementen getrennt mit einem Fehlerquadratfunktional (6.18) für u und einem entsprechenden für v durchführen, sondern es wird ein Minimierungsfunktional erforderlich, das sowohl u als auch v enthält und mit

$$J = \frac{1}{2} \int_{\partial A} [(\bar{u} - u)^2 + (\bar{v} - v)^2] ds \rightarrow \text{Minimum} \quad (6.31)$$

gegeben ist.

Die getrennt durchführbaren Rechenschritte für voneinander unabhängige Ansätze u und v werden bei Benutzung von (6.31) formal zusammengefaßt, und zwar erhält man nach Umformung der Beziehungen (6.19) und (6.20) für u und Hinzufügen der entsprechenden Ausdrücke für v mit

$$u(s) = \begin{bmatrix} \underline{U}(s) & \underline{0} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix}}_{\hat{q}} \quad , \quad (6.32)$$

$$v(s) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{V}(s) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix}}_{\hat{q}} \quad , \quad (6.33)$$

$$\bar{u}(s) = \begin{bmatrix} \underline{\bar{U}}(s) & \underline{0} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix}}_{\underline{q}} \quad (6.34)$$

und

$$\bar{v}(s) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{\bar{V}}(s) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix}}_{\underline{q}} \quad (6.35)$$

eine Darstellung, welche eingesetzt in das Fehlerquadratfunktional (6.31) zu einem Gleichungssystem führt, das sich in zwei Systeme entkoppeln läßt.

7 Besonderheiten bei Ansatzfunktionen, die Lösungen des Scheibendifferentialgleichungssystems sind

Um die Besonderheiten herauszustellen, seien zunächst die Merkmale bei den Ansatzfunktionen der Standardelemente angeführt :

- a) Es werden für u und v dieselben Ansatzfunktionsterme verwendet.
- b) Die Ansatzterme sind für u und v mit verschiedenen freien Ansatzparametern \hat{u} und \hat{v} versehen. Hieraus ergab sich, daß die Umrechnung der Spaltenvektoren \hat{u} und \hat{v} in die Vektoren der Knotenwerte \underline{u} bzw. \underline{v} für die Funktionen u und v getrennt erfolgen kann.

Im Gegensatz hierzu weisen Ansätze, die das homogene Scheibendifferentialgleichungssystem befriedigen, aufgrund ihrer Lösungseigenschaft folgende Charakteristiken auf :

- a) Für u und v ergeben sich bis auf ein paar Ausnahmen verschiedene Ansatzterme.
- b) Je ein Ansatzterm für u und ein Term für v sind (bis auf ein paar Ausnahmen) mit einem gemeinsamen Freiwert versehen. In Gleichungsform ausgedrückt, erhält man hier :

$$\underline{u} = \underline{U} \underline{c} \quad (7.1)$$

$$\underline{v} = \underline{V} \underline{c} \quad (7.2)$$

wobei \underline{c} die freien Parameter beinhaltet.

Zusätzlich zu den Funktionenfolgen mit noch bestimmbareren Koeffizienten kann noch ein fest vorgewählter Lösungsanteil, der sich aus u_p und v_p zusammensetzt, in die Ansatzfunktion aufgenommen werden. Dieser Lösungsanteil ohne Freiwert kann für folgende Zwecke verwendet werden :

- a) zur Erfüllung der inhomogenen Differentialgleichungen oder
- b) zur Erfüllung einer inhomogenen Randbedingung auf einem Teil des Randes (einschließlich der Erfüllung des Differentialgleichungssystems).

Ein Ansatz mit fest vorgewähltem Anteil (u_p, v_p) läßt sich darstellen durch

$$\underline{u} = u_p + \underline{U} \underline{c} \quad (7.3)$$

$$\underline{v} = v_p + \underline{V} \underline{c} \quad (7.4)$$

Aus dieser Form der speziellen Ansatzfunktionen wird ersichtlich, daß die Umrechnung der freien Ansatzparameter in Knotenwerte für u und v im allgemeinen nicht getrennt durchgeführt werden kann.

8 Grundgleichungen spezieller Elemente

8.1 Verwendung des Funktionals, das die potentielle Energie beinhaltet

(Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials: Weggrößenverfahren)

Wird ein Ansatz der Form

$$\underline{u} = \underline{u}_p + \underline{u}_h = \begin{bmatrix} u_p \\ v_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_h \\ v_h \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

gewählt, wobei \underline{u}_h einen homogenen Lösungsanteil des Differentialgleichungssystems, welcher mit noch freien Parametern versehen ist, darstellt und \underline{u}_p einen fest vorgewählten Lösungsanteil (zur Erfüllung der inhomogenen Dgln. und einer Teilrandbedingung bzw. zur Erfüllung einer Teilrandbedingung und des homogenen Differentialgleichungssystems, wenn $\underline{F} = \underline{0}$ gilt) enthält, so läßt sich das Funktional (4.1) in folgender Weise spezifizieren:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{u}_h^T \underline{D}^T) \underline{E} (\underline{D} \underline{u}_h) t \, d\Omega + \int_{\Omega} (\underline{u}_h^T \underline{D}^T) \underline{E} (\underline{D} \underline{u}_p) t \, d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{u}_p^T \underline{D}^T) \underline{E} (\underline{D} \underline{u}_p) t \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{u}_h^T \underline{F} t \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{u}_p^T \underline{F} t \, d\Omega + \\ &- \int_{\Gamma_2} \underline{u}_h^T \underline{\bar{T}} t \, ds - \int_{\Gamma_2} \underline{u}_p^T \underline{\bar{T}} t \, ds \\ &= - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{u}_h^T \underbrace{[\underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u}_h]}_{= \underline{0}} t \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \underline{u}_h^T \underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_h t \, ds + \\ &- \int_{\Omega} \underline{u}_h^T \underbrace{[\underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u}_p + \underline{F}]}_{= \underline{0}} t \, d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{u}_h^T \underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_p t \, ds + \\ &- \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{u}_p^T [\underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u}_p] t \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{2} \underline{u}_p^T \underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_p t \, ds + \\ &- \int_{\Omega} \underline{u}_p^T \underline{F} t \, d\Omega - \int_{\Gamma_2} \underline{u}_h^T \underline{\bar{T}} t \, ds - \int_{\Gamma_2} \underline{u}_p^T \underline{\bar{T}} t \, ds \end{aligned} \quad (8.2)$$

Γ bezeichnet hier den Rand des Gebietes Ω , welcher sich aus Γ_1 und Γ_2 zusammensetzt (s. Bild 8.1).

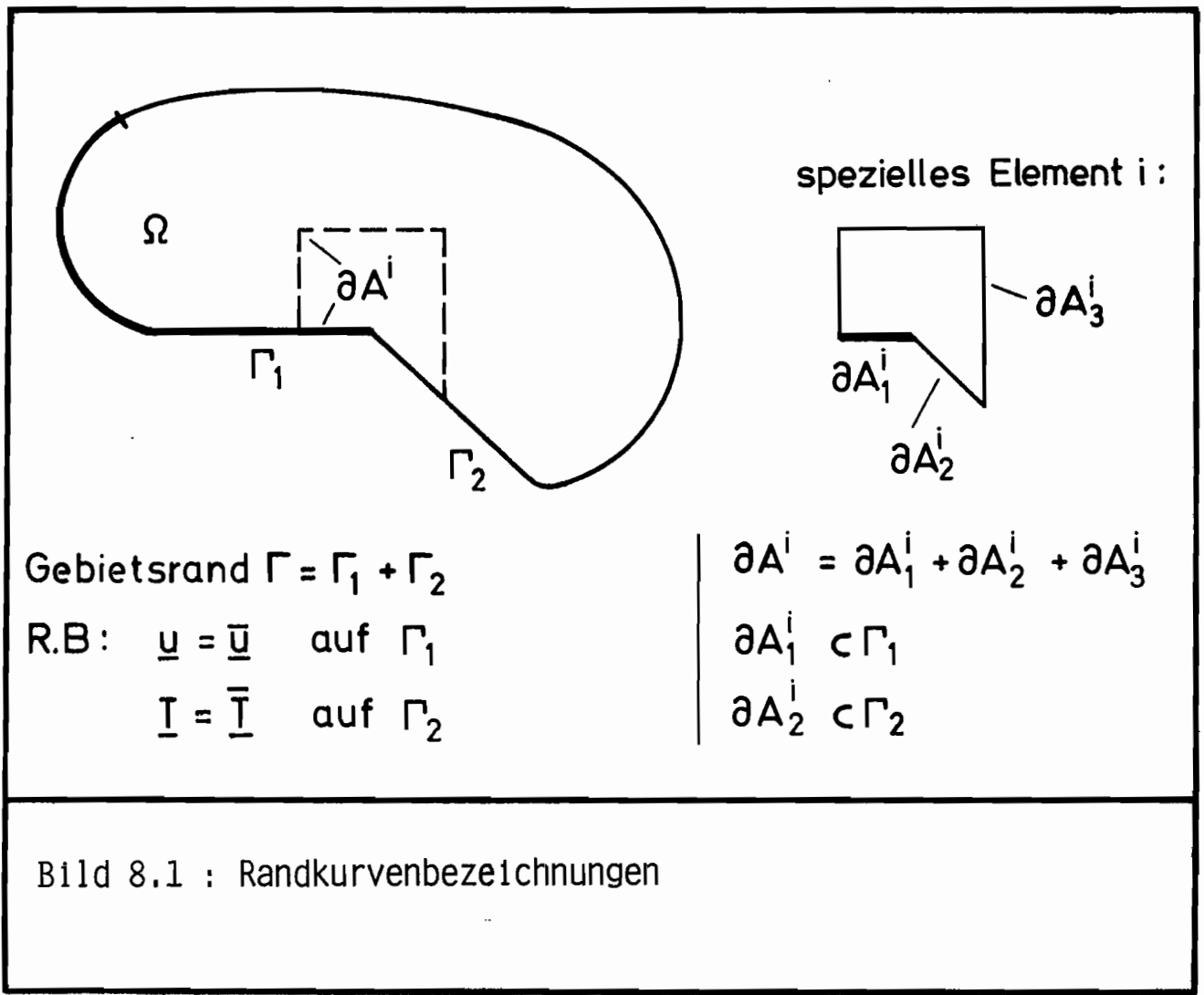
Da die Eulerschen Gleichungen von \underline{u} exakt erfüllt werden, verbleibt gemäß (4.5) in der 1. Variation

$$\delta \Pi = \int_{\Gamma_2} \underbrace{\delta \underline{u}^T}_{\neq \underline{0}} \underbrace{[\underline{T} - \bar{\underline{T}}]}_{\stackrel{!}{=} \underline{0}} t ds \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.3)$$

$\neq \underline{0} \stackrel{!}{=} \underline{0} \rightsquigarrow RB. (3.19)$

ein Ausdruck, der die Spannungsrandbedingung (3.19) beinhaltet.

Wenn in einer Finite-Element-Lösung für ein spezielles Element Ansätze konstruierbar sind, durch die auch noch die Spannungsrandbedingung (3.19) auf dem Teil des Elementrandes, der zu Γ_2 gehört, exakt erfüllt wird, so geht es nur noch um die Erfüllung der geometrischen Übergangsbedingungen. Zunächst sei jedoch in den für ein spezielles Element anzugebenden Beziehungen nicht von der exakten Erfüllung der Spannungsrandbedingung auf dem Elementrand ausgegangen.



Wird nun Π nicht für den gesamten Lösungsbereich, sondern für ein Teilgebiet i mit der Fläche A^i und der Randkurve ∂A^i , welche sich im allgemeinen aus ∂A_1^i , ∂A_2^i und ∂A_3^i gemäß Bild 8.1 zusammensetzt, angeschrieben, so erhält man nach Änderung der Randkurven- und Gebietsbezeichnungen aus (8.2)

$$\begin{aligned}
 \Pi^i = & \int_{\partial A^i} \frac{1}{2} \underline{u}_h^T \underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_h t ds + \int_{\partial A^i} \underline{u}_h^T \underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_p t ds + \\
 & - \int_{\partial A_2^i} \underline{u}_h^T \underline{\bar{T}} t ds + \int_{\partial A^i} \frac{1}{2} \underline{u}_p^T \underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_p t ds + \\
 & - \int_{A^i} \frac{1}{2} \underline{u}_p^T [\underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u}_p] t dA^i - \int_{A^i} \underline{u}_p^T \underline{\bar{F}} t dA^i + \\
 & - \int_{\partial A_2^i} \underline{u}_p^T \underline{\bar{T}} t ds
 \end{aligned} \tag{8.4}$$

Die vorausgesetzte Erfüllung der Verschiebungsrandbedingung

$$\underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i \quad (\text{mit} \quad \underline{u} = \underline{u}_h + \underline{u}_p) \tag{8.5}$$

erfolge nun in der Form

$$\underline{u}_h = \underline{0} \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i \tag{8.6}$$

und

$$\underline{u}_p = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i \tag{8.7}$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\underline{u}_h^T = [u_h \quad v_h] \tag{8.8}$$

$$\underline{u}_p^T = [u_p \quad v_p] \tag{8.9}$$

$$\underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_h = \underline{T}_h = \begin{bmatrix} T_{x_h} \\ T_{y_h} \end{bmatrix} \tag{8.10}$$

$$\underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_p = \underline{T}_p = \begin{bmatrix} T_{x_p} \\ T_{y_p} \end{bmatrix}, \quad (8.11)$$

erhält man den Ausdruck für Π^i , in dem nur die Erfüllung der geometrischen Randbedingung auf ∂A_1^i bzw. in dem ∂A_1^i als leere Menge vorausgesetzt ist:

$$\Pi^i = \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} \frac{1}{2} \underline{u}_h^T \underline{T}_h t \, ds + \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} \underline{u}_h^T \underline{T}_p t \, ds - \int_{\partial A_2^i} \underline{u}_h^T \underline{T} t \, ds +$$

+ Terme, die nur Anteile aus der speziellen Lösung \underline{u}_p enthalten

$$= \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} \frac{1}{2} [u_h T_{x_h} + v_h T_{y_h}] t \, ds + \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} [u_h T_{x_p} + v_h T_{y_p}] t \, ds +$$

$$- \int_{\partial A_2^i} [u_h \bar{T}_x + v_h \bar{T}_y] t \, ds + \quad (8.12)$$

+ Terme, die nur Anteile aus der speziellen Lösung \underline{u}_p enthalten

Hier sind nur die Terme ausgeschrieben, welche zur Ermittlung einer Näherungslösung relevant sind.

Neben der Befriedigung von Verschiebungsrandbedingungen kann unter Umständen bei entsprechender Konstruktion der Ansätze erreicht werden, daß auch die Spannungsrandbedingung

$$\underline{T} = \underline{\bar{T}} \quad \text{auf} \quad \partial A_2^i \quad (8.13)$$

exakt erfüllt wird. Zur Betrachtung dieses Falles wird die Darstellung von \underline{T}

durch

$$\begin{aligned}
 \underline{T} &= \underline{n} \underline{E} \underline{D} (\underbrace{\underline{u}_h + \underline{u}_p}_{\underline{u}}) \\
 &= \underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_h + \underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_p \\
 &= \underline{T}_h + \underline{T}_p
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

herangezogen, welche sich aus der durch $\underline{u} = \underline{u}_h + \underline{u}_p$ erfolgten Aufspaltung des Verschiebungsfeldes in einen homogenen und einen partikulären Anteil ergibt. Gewährleisten nun die Ansätze die Erfüllung der Spannungsrandbedingung (8.13) in der Form

$$\underline{T}_h = \underline{0} \quad \text{auf} \quad \partial A_2^i \tag{8.15}$$

und

$$\underline{T}_p = \underline{\bar{T}} \quad \text{auf} \quad \partial A_2^i, \tag{8.16}$$

so ergibt sich aus (8.12) der Ausdruck für Π^i eines speziellen Elementes in der Form

$$\begin{aligned}
 \Pi^i &= \int_{\partial A_3^i} \frac{1}{2} \underline{u}_h^T \underline{T}_h t ds + \int_{\partial A_3^i} \underline{u}_h^T \underline{T}_p t ds + \\
 &+ \text{Terme, die nur Anteile aus der speziellen Lösung } \underline{u}_p \text{ enthalten} \\
 &= \int_{\partial A_3^i} \frac{1}{2} [u_h T_{x_h} + v_h T_{y_h}] t ds + \int_{\partial A_3^i} [u_h T_{x_p} + v_h T_{y_p}] t ds + \\
 &+ \text{Terme, die nur Anteile aus der speziellen Lösung enthalten}
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

Neben dem erwähnten Fall, daß Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen auf dem Elementrand schon exakt erfüllt werden, ist diese Beziehung zusätzlich auch für Möglichkeiten gültig, bei der das Erfüllen einer Randbedingung mit dem Fehlen eines Randteiles ∂A_1^i oder ∂A_2^i kombiniert auftritt (s. Beispiel in Bild 8.2). Die Beziehung (8.17) für ein spezielles Element mit der Elementrandkurve ∂A^i gilt für folgende Fälle:

Fall a) : ∂A_1^i ist nicht vorhanden und die Randbedingung

$$\underline{T} = \underline{\bar{T}} \quad \text{auf} \quad \partial A_2^i$$

wird exakt erfüllt.

Fall b) : ∂A_2^i ist nicht vorhanden und die Randbedingung

$$\underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i$$

wird exakt erfüllt.

Fall c) : ∂A_1^i , ∂A_2^i sowie ∂A_3^i sind vorhanden und die Randbedingungen

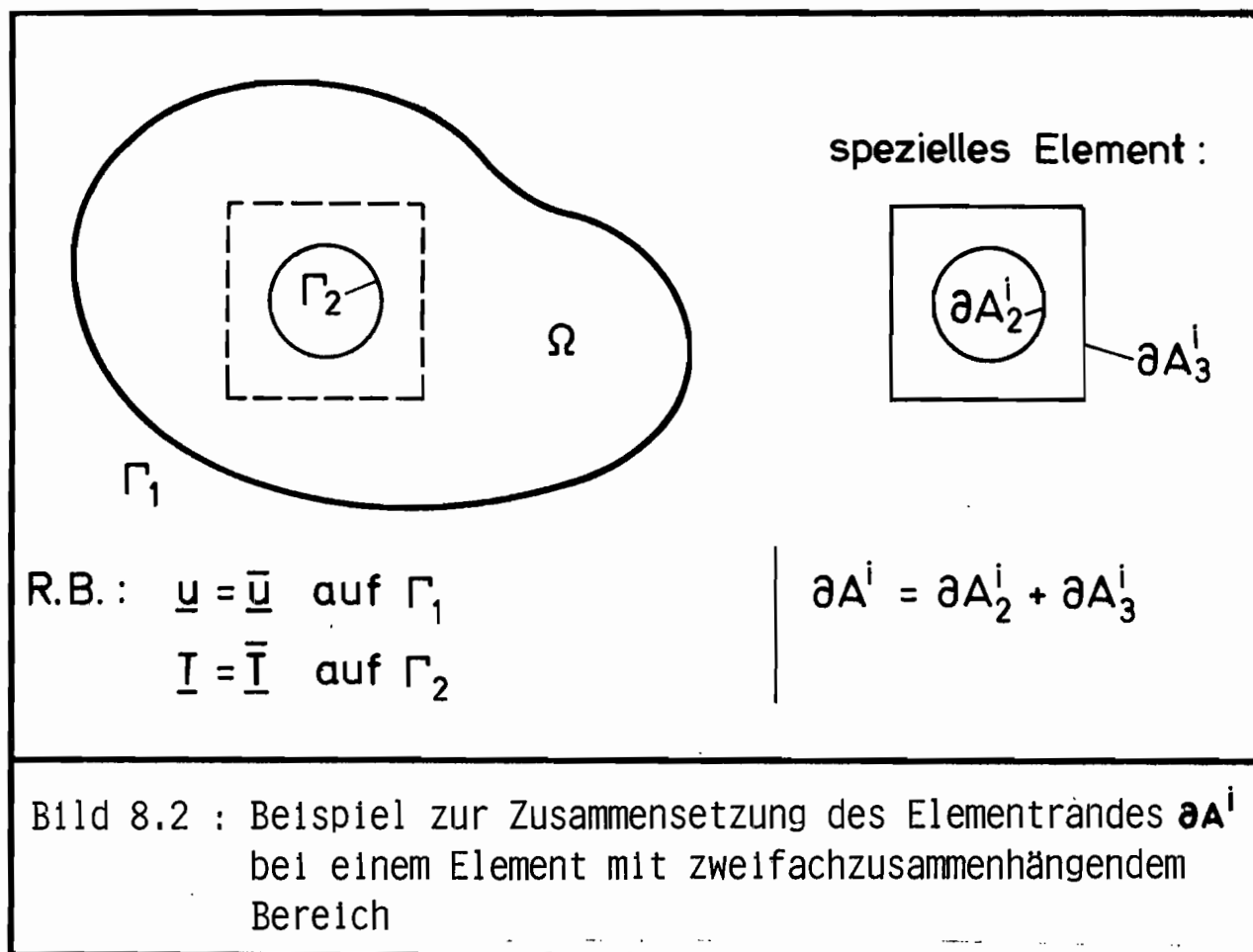
$$\underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i$$

und

$$\underline{T} = \underline{\bar{T}} \quad \text{auf} \quad \partial A_2^i$$

werden exakt erfüllt.

Fall d) : ∂A_1^i und ∂A_2^i sind nicht vorhanden, d.h. das Element ist vollkommen von anderen Elementen eingeschlossen.



Bezüglich der in der Herleitung dieses Kapitels auftretenden Integrale der Form

$$\int_{\partial A^i} \underline{u}^T \underline{I} t ds$$

seien noch folgende Bemerkungen angefügt:

Die Integration entlang einer Randkurve erfolgt richtungsmäßig so, daß das "umfahrene" Gebiet sich stets zur Linken befindet. Enthält ein spezielles Element ein Loch (s. Bild 8.3), so kann man sich die äußere und innere Randkurve durch einen virtuellen Schnitt miteinander verbunden denken und infolge des zweimaligen Durchlaufens des Schnittes in entgegengesetzten Richtungen heben sich die auftretenden Integrale entlang des Schnittes heraus. Das heißt also, daß entlang der virtuellen Schnittlinie keine Integrationen explizit ausgeführt werden zu brauchen.

$$\int_{\partial A} \underline{u}^T \underline{I} ds = \int_{\text{ABCDEFHGHI}FEA} \underline{u}^T \underline{I} ds =$$

$$= \int_{\text{ABCDE}} \underline{u}^T \underline{I} ds + \int_{\text{EF}} \underline{u}^T \underline{I} ds + \int_{\text{FGHIF}} \underline{u}^T \underline{I} ds +$$

$$+ \int_{\text{FE}} \underline{u}^T \underline{I} ds + \int_{\text{EA}} \underline{u}^T \underline{I} ds$$

$$= \int_{\text{ABCDEA}} \underline{u}^T \underline{I} ds + \int_{\text{FGHIF}} \underline{u}^T \underline{I} ds$$

Bild 8.3 : Zur Ausführung der Randintegration bei einem zweifachzusammenhängendem Gebiet

8.1.1 Darstellung des Funktionalanteils für ein spezielles Element in diskretisierter Form

Für den Bereich eines speziellen Elementes werden Lösungsfunktionen des Differentialgleichungssystems (3.6) als Ansätze in der folgenden Form gewählt:

$$\underline{u} = \underline{u}_p + \underline{U} \underline{c} \quad \left(\begin{array}{l} \underline{U} : \text{Zeilenvektor} \\ \underline{c} : \text{Spaltenvektor} \end{array} \right) \quad (8.18)$$

$$\underline{v} = \underline{v}_p + \underline{V} \underline{c} \quad \left(\underline{V} : \text{Zeilenvektor} \right) \quad (8.19)$$

Die homogenen Ansatzanteile für die Verschiebungsfunktionen lauten hier also

$$\underline{u}_h = \underline{U} \underline{c} \quad (8.20)$$

sowie

$$\underline{v}_h = \underline{V} \underline{c} \quad , \quad (8.21)$$

und die partikulären Anteile sind mit \underline{u}_p und \underline{v}_p bezeichnet. Die zu den Verschiebungsfunktionen (8.18) und (8.19) gehörenden Spannungsterme T_x und T_y , welche durch die Beziehung

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \underline{T} = \underline{n} \underline{c} = \underline{n} \underline{E} \underline{D} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

gekennzeichnet sind, seien in der folgenden Weise dargestellt:

$$T_x = T_{x_p} + \underline{T}_x \underline{c} \quad (8.23)$$

$$T_y = T_{y_p} + \underline{T}_y \underline{c} \quad (8.24)$$

Für die zur homogenen Lösung gehörenden Terme T_{x_h} und T_{y_h} gilt hier also

$$T_{x_h} = \underline{T}_x \underline{c} \quad (8.25)$$

sowie

$$T_{y_h} = \underline{T}_y \underline{c} \quad (8.26)$$

Nach Einsetzen der erläuterten Ansatzfunktionsterme in den Ausdruck für Π^i nach Gleichung (8.12), in der keine exakte Erfüllung der Spannungsrand-

bedingungen auf ∂A_2^i durch die Ansätze vorausgesetzt ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \Pi^i = & \frac{1}{2} \underline{c}^T \int \frac{1}{2} \left[\underline{U}^T \underline{T}_x + \underline{T}_x^T \underline{U} + \underline{V}^T \underline{T}_y + \underline{T}_y^T \underline{V} \right] t ds \underline{c} + \\ & \frac{1}{2} \underline{c}^T \int \left[\underline{U}^T \underline{T}_{x_p} + \underline{V}^T \underline{T}_{y_p} \right] t ds - \frac{1}{2} \underline{c}^T \int \left[\underline{U}^T \underline{T}_x + \underline{V}^T \underline{T}_y \right] t ds \\ & + \text{Terme, die den Vektor } \underline{c} \text{ bzw. } \underline{c}^T \text{ nicht enthalten} \end{aligned} \quad (8.27)$$

Das Auftreten von vier anstatt von zwei Summanden in dem ersten Integralausdruck von (8.27) erklärt sich daher, daß sich die Terme, welche durch die entsprechenden Ansatzfunktionen ersetzt werden, folgendermaßen umformen lassen:

$$u_h T_{x_h} + v_h T_{y_h} = \frac{1}{2} \left[u_h T_{x_h} + T_{x_h} u_h + v_h T_{y_h} + T_{y_h} v_h \right] \quad (8.28)$$

Diese Umformung wird angewendet, damit sich zwangsweise eine symmetrische Matrix, nämlich

$$\int \frac{1}{2} \left[\underline{U}^T \underline{T}_x + \underline{T}_x^T \underline{U} + \underline{V}^T \underline{T}_y + \underline{T}_y^T \underline{V} \right] t ds \quad (8.29)$$

ergibt. Da den Gleichungen nun aber ein physikalisches Problem zugrunde liegt, ergibt sich hier allerdings auch ohne den Aufspaltungstrick (8.28) aus mechanischen Gründen (Satz von Betti) schon für

$$\int \left[\underline{U}^T \underline{T}_x + \underline{V}^T \underline{T}_y \right] t ds \quad (8.30)$$

eine symmetrische Matrix. Weil bei einer numerischen Rechnung die entsprechenden symmetrisch zueinander liegenden Koeffizienten der Matrix (8.30) aber durch eine unterschiedliche Folge von Operationen ermittelt werden, ist es vom Standpunkt der Numerik besser, zur Programmierung die Darstellung (8.29) mit den vier Summanden zu verwenden.

Da es sich hier ausschließlich um Größen eines Elementes handelt, wird bis zum Ende dieses Kapitels auf eine explizite Indizierung aller einzelnen Terme (\underline{c} , \underline{u} , \underline{v} , \underline{q} , etc.) mit "i" verzichtet.

Wird nun in (8.27) der Vektor \underline{c} , der die Ansatzfreiwerte enthält, mit dem Elementknotenwertvektor \underline{q} durch eine Matrix \underline{G} und einem Spaltenvektor \underline{g} gemäß

$$\underline{c} = \underline{G} \underline{q} + \underline{g} \quad \left(\text{mit } \underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix} \right) \quad (8.31)$$

verknüpft, so erhält man für den Potentialanteil Π^i den Ausdruck

$$\begin{aligned} \Pi^i = & \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{G}^T \underline{H} \underline{G} \underline{q} + \underline{q}^T \underline{G}^T \underline{H} \underline{g} + \underline{q}^T \underline{G}^T \underline{r}_p - \underline{q}^T \underline{G}^T \underline{\bar{r}} + \\ & + \text{Terme, die } \underline{q} \text{ bzw. } \underline{q}^T \text{ nicht enthalten} \end{aligned} \quad (8.32)$$

mit

$$\underline{H} = \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} \frac{1}{2} \left[\underline{U}^T \underline{T}_x + \underline{T}_x^T \underline{U} + \underline{V}^T \underline{T}_y + \underline{T}_y^T \underline{V} \right] t \, ds \quad (8.33)$$

(symmetrische Matrix)

$$\underline{r}_p = \int_{\partial A_2^i + \partial A_3^i} \left[\underline{U}^T \underline{T}_{x_p} + \underline{V}^T \underline{T}_{y_p} \right] t \, ds \quad (8.34)$$

$$\underline{\bar{r}} = \int_{\partial A_2^i} \left[\underline{U}^T \underline{\bar{T}}_x + \underline{V}^T \underline{\bar{T}}_y \right] t \, ds \quad (8.35)$$

\underline{q} : Knotenwerte des betrachteten Elementes

\underline{G} : erläutert in Kapitel 8.1.2

\underline{g} : erläutert in Kapitel 8.1.2

(nur vorhanden, wenn eine spezielle Lösung vorgegeben ist)

∂A_2^i : Teil des Elementrandes ∂A^i , auf dem $\underline{\bar{T}}_x$ und $\underline{\bar{T}}_y$ vorgegeben sind.

∂A_3^i : Teil des Elementrandes ∂A^i , der die Grenze zu Nachbarelementen darstellt

Zwei Verknüpfungsmöglichkeiten zwischen \underline{c} und \underline{q} mittels einer Matrix \underline{G} und einem Spaltenvektor \underline{g} werden im nächsten Kapitel erläutert.

Für die 1. Variation ergibt sich aus (8.32)

$$\begin{aligned}\delta \Pi^i &= \frac{\partial \Pi^i}{\partial \underline{q}} \delta \underline{q} = \delta \underline{q}^T \frac{\partial \Pi^i}{\partial \underline{q}^T} \\ &= \delta \underline{q}^T \left[\underbrace{\underline{G}^T \underline{H} \underline{G}}_{\underline{k}} \underline{q} + \underbrace{\underline{G}^T \underline{H} \underline{g} + \underline{G}^T \underline{r}_p - \underline{G}^T \underline{r}}_{-\underline{\bar{p}}} \right]\end{aligned}\quad (8.36)$$

bzw.

$$\delta \Pi^i = \delta \underline{q}^T \left[\underline{k} \underline{q} - \underline{\bar{p}} \right] \quad (8.37)$$

mit

$$\underline{k} = \underline{G}^T \underline{H} \underline{G} \quad (\text{Elementsteifigkeitsmatrix}) \quad (8.38)$$

$$\underline{\bar{p}} = \underline{G}^T \left[-\underline{H} \underline{g} - \underline{r}_p + \underline{r} \right] \quad (\text{Elementbelastungs-vektor}) \quad (8.39)$$

Einige Vereinfachungen bezüglich des Integrationsumfanges ergeben sich für die zu Beziehung (8.17) angegebenen Fälle, unter welche die erstellten Beispielelemente sich einordnen lassen. Der wesentliche Teil von Π^i reduziert sich hier unter Verwendung von (8.17) gemäß folgender Beziehung:

$$\begin{aligned}\Pi^i &= \frac{1}{2} \underline{q}^T \underbrace{\underline{G}^T \underline{H} \underline{G}}_{\underline{k}} \underline{q} + \underline{q}^T \underbrace{\underline{G}^T \left[\underline{H} \underline{g} + \underline{r}_p \right]}_{-\underline{\bar{p}}} + \\ &+ \text{Terme, die } \underline{q} \text{ bzw. } \underline{q}^T \text{ nicht enthalten}\end{aligned}\quad (8.40)$$

mit

$$\underline{H} = \int_{\partial A_3^i} \frac{1}{2} \left[\underline{U}^T \underline{T}_x + \underline{T}_x^T \underline{U} + \underline{V}^T \underline{T}_y + \underline{T}_y^T \underline{V} \right] t \, ds \quad (8.41)$$

$$\underline{r}_p = \int_{\partial A_3^i} \left[\underline{U}^T \underline{T}_{x_p} + \underline{V}^T \underline{T}_{y_p} \right] t \, ds \quad (8.42)$$

$$\underline{k} = \underline{G}^T \underline{H} \underline{G} \quad (\text{Elementsteifigkeitsmatrix}) \quad (8.43)$$

$$\underline{\bar{p}} = \underline{G}^T \left[-\underline{H} \underline{g} - \underline{r}_p \right] \quad (\text{Elementbelastungsvektor}) \quad (8.44)$$

Hier werden nur Integrationen längs Elementrandteilen erforderlich, welche die Grenze zu Nachbarelementen bilden. Liegen gar keine speziellen Lösungsanteile vor, so wird aus $\underline{\bar{p}}$ ein Nullvektor.

Um die Darstellung mit den Gleichungen in Kapitel 5 in Einklang zu bringen und um zu kennzeichnen, daß es sich hier durchweg um Anteile des i -ten Elementes handelte, seien die einzelnen Größen des Ausdruckes für den Potentialanteil Π^i noch formal mit dem (bisher aus Schreibvereinfachung weggelassenen) Index "i" versehen :

$$\Pi^i = \frac{1}{2} \underline{q}^{iT} \underline{k}^i \underline{q}^i - \underline{q}^{iT} \underline{\bar{p}}^i + \text{Terme ohne } \underline{q}^i \quad (8.45)$$

8.1.2 Beziehungen zwischen Ansatzfreiwerten und Knotenwerten bei einem speziellen Element

Für die Ansätze spezieller Elemente des reinen Weggrößenverfahrens seien nun explizit zwei verschiedene Wege aufgezeigt, Beziehungen zwischen Ansatzparametern und Knotenwerten herzustellen. Bei dem ersten Weg geht es - wie schon in Kapitel 6 angeschnitten - um die zwangsweise Erfüllung der Elementübergangsbedingungen an den Knotenpunkten, während bei der vorzuziehenden zweiten Methode die Approximation eines zur Elementkopplung geeigneten Randverschiebungsverlaufs $\underline{\bar{u}}$ durch die Innenbereichsansätze mittels Fehlerquadratmethode erfolgt.

8.1.2.1 Methode I zur Berechnung von Verknüpfungsmatrizen \underline{G} und \underline{g} zwischen Freiwerten und Knotenwerten

Diese Methode beinhaltet das Standardverfahren, welches darauf basiert, Bedingungsgleichungen aufzustellen, um für die Funktionen die Annahme von Knotenwerten an den Knotenpunkten zu erzwingen. Mit den speziellen Ansatzfunktionen nach den Gleichungen (8.18) und (8.19) erhält man zunächst

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ \hline v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(x_1, y_1) \\ u(x_2, y_2) \\ u(x_3, y_3) \\ \vdots \\ u(x_n, y_n) \\ \hline v(x_1, y_1) \\ v(x_2, y_2) \\ v(x_3, y_3) \\ \vdots \\ v(x_n, y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_p(x_1, y_1) \\ u_p(x_2, y_2) \\ u_p(x_3, y_3) \\ \vdots \\ u_p(x_n, y_n) \\ \hline v_p(x_1, y_1) \\ v_p(x_2, y_2) \\ v_p(x_3, y_3) \\ \vdots \\ v_p(x_n, y_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{U}(x_1, y_1) \\ \underline{U}(x_2, y_2) \\ \underline{U}(x_3, y_3) \\ \vdots \\ \underline{U}(x_n, y_n) \\ \hline \underline{V}(x_1, y_1) \\ \underline{V}(x_2, y_2) \\ \underline{V}(x_3, y_3) \\ \vdots \\ \underline{V}(x_n, y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \\ \hline c_{n+1} \\ c_{n+2} \\ c_{n+3} \\ \vdots \\ c_{2n} \end{bmatrix} \\
 \underline{q} \qquad \qquad \qquad \underline{\hat{\psi}}_p \qquad \qquad \qquad \underline{\hat{\phi}} \qquad \qquad \qquad \underline{c}
 \end{array} \tag{8.46}$$

bzw.

$$\underline{q} = \underline{\hat{\psi}}_p + \underline{\hat{\phi}} \underline{c} \tag{8.47}$$

Die Matrix $\underline{\hat{\phi}}$ hat hier $2n$ Zeilen und Spalten, wobei n die Anzahl der Knoten des Elementes bedeutet. Weiterhin geben die Koordinatenpaare (x_i, y_i) (mit $i = 1, 2, \dots, n$) die Lage der Knotenpunkte an.

Aus (8.47) ergibt sich für den Vektor \underline{c} der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \underline{c} &= \underline{\hat{\phi}}^{-1} \underline{q} - \underline{\hat{\phi}}^{-1} \underline{\hat{\psi}}_p \\
 &= \underline{G} \underline{q} + \underline{g}
 \end{aligned} \tag{8.48}$$

mit

$$\underline{G} = \underline{\hat{\phi}}^{-1} \tag{8.49}$$

und

$$\underline{g} = -\underline{\hat{\phi}}^{-1} \underline{\hat{\psi}}_p \tag{8.50}$$

An dieser Stelle sei zu einem Vergleich auf die Beziehungen (6.7) bis (6.10) bei Standardelementen hingewiesen. Im Unterschied zu der entsprechenden dort erhaltenen Verknüpfung von Knotenwerten und Freiwerten ergibt sich hier keine Entkopplung in je eine Verknüpfungsmatrix \underline{G} für u und v , weil die Ansatzfreiwerte in \underline{c} sowohl in u als auch in v erscheinen.

Mit Hilfe der hier angeführten Methode läßt sich zwar erreichen, daß die Ansatzfunktionen an den Knoten die gewünschten Knotenwerte annehmen, aber im Hinblick auf eine Kopplung mit Polynomansatzfunktionen von Nachbarelementbereichen muß erwähnt werden, daß im allgemeinen Stetigkeit zwischen den Knotenpunkten nicht gewährleistet ist. In den Fällen, bei denen vollkommene Stetigkeit auf den Elementrändern nicht erreicht werden kann, stellt diese Methode kein sicheres Mittel dar, um wenigstens die Abweichungen auf den Rändern zu den Nachbarelementen minimal zu machen. Für eine derartige Abweichungsminimierung kann die im folgenden dargestellte Methode II verwendet werden.

8.1.2.2 Methode II zur Berechnung von Verknüpfungsmatrizen \underline{G} und \underline{g} zwischen Freiwerten und Knotenwerten

Zu einer optimalen Approximation der für eine Elementkopplung geeignet zu wählenden Verschiebungsverläufe \tilde{u} und \tilde{v} auf dem Elementrand durch spezielle Elementansatzfunktionen u und v nach (8.18) bzw. (8.19) wird das Funktional

$$J = \frac{1}{2} \int_{\partial A_3^i} (\tilde{u} - u)^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\partial A_3^i} (\tilde{v} - v)^2 ds \rightarrow \text{Minimum} \quad (8.51)$$

verwendet. Die Funktionsverläufe \tilde{u} und \tilde{v} beinhalten die Knotenwerte des Elementes und werden in Abhängigkeit von einer Randkoordinate s stückweise linear oder quadratisch gewählt, je nach dem mit welchen Standardelementen das spezielle Element gekoppelt werden soll. ∂A_3^i kennzeichnet hier den Teil des Elementrandes, an den andere Elemente stoßen; u und v stellen in (8.51) die Verläufe der speziellen Gebietsansätze auf dem Rand dar. Im einzelnen werden folgende Ausdrücke benötigt:

$$\tilde{u}(s) = \underline{\tilde{U}}(s) \underline{u} \quad (\underline{u} : \text{Knotenverschiebungsvektor}) \quad (8.52)$$

$$\tilde{v}(s) = \underline{\tilde{V}}(s) \underline{v} \quad (\underline{v} : \text{Knotenverschiebungsvektor}) \quad (8.53)$$

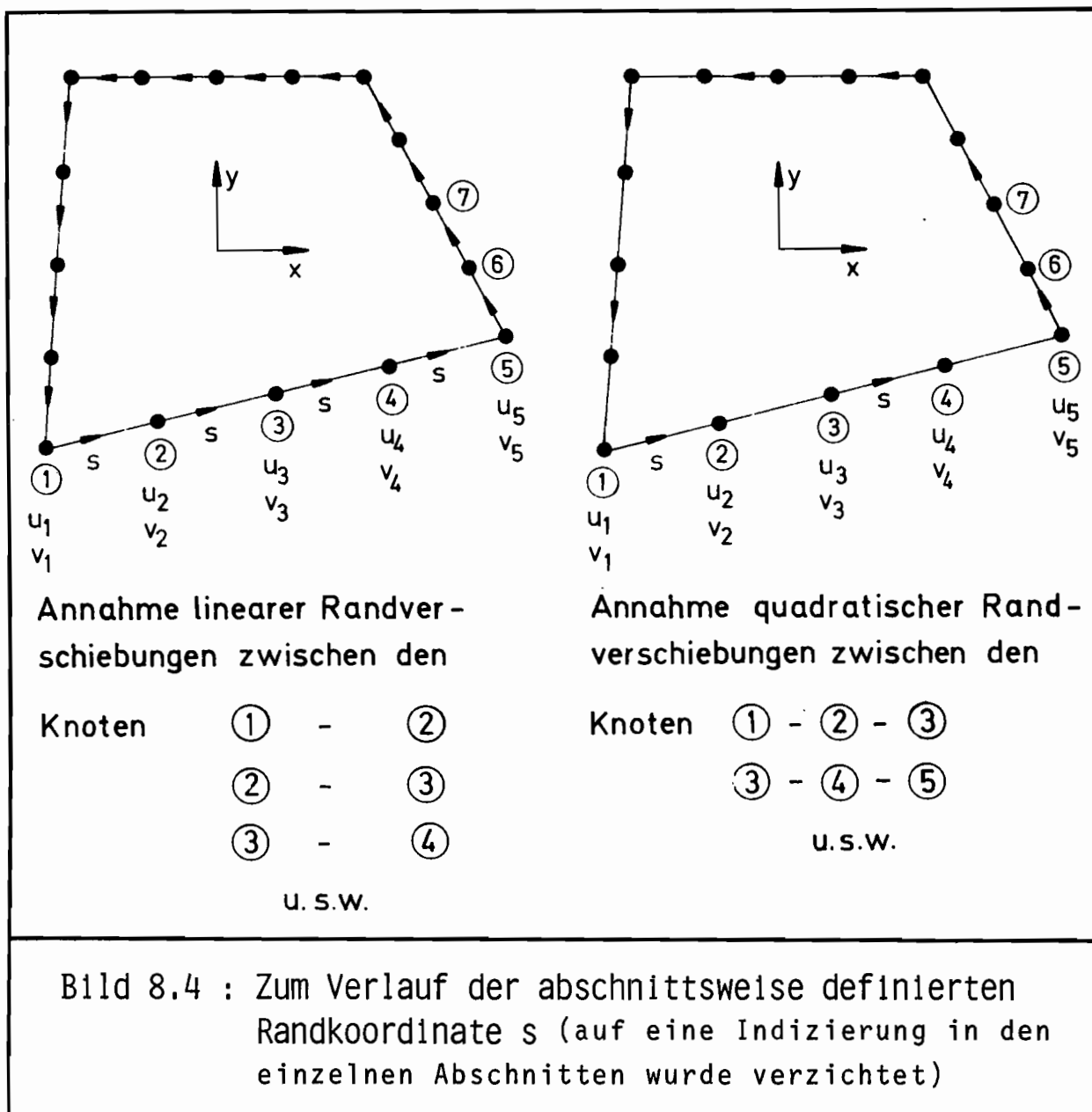
$$u(s) = u_p(s) + \underline{U}(s) \underline{c} \quad (8.54)$$

$$v(s) = v_p(s) + \underline{V}(s) \underline{c} \quad (8.55)$$

Da bei Standardelementen für u und v die gleichen Polynomansatzterme verwendet werden, gilt

$$\underline{\tilde{U}}(s) = \underline{\tilde{V}}(s) \tag{8.56}$$

Im übrigen sei an die Ausführungen in Kapitel 6 angeknüpft, und zur Illustration der aktuellen Verhältnisse diene Bild 8.4 .



Die Zeilenvektoren $\underline{\tilde{U}}(s)$ und $\underline{\tilde{V}}(s)$ werden abschnittsweise definiert, und zwar enthalten sie jeweils zwei bzw. drei von Null verschiedene Terme an Positionen, die sich nach den zugehörigen Spaltenvektoren der Knotenverschiebungen \underline{u} und \underline{v} sowie nach dem betrachteten Teilintervall richten. Bei lineären Randverschiebungen liegen zwei und bei quadratischen kommen drei Terme vor. Der Aufbau der Vektoren $\underline{\tilde{U}}$ und $\underline{\tilde{V}}$ sei durch

$$\underline{\tilde{U}}(s) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(1 - \frac{s}{s_{12}}\right) \quad \frac{s}{s_{12}} \quad \underline{0} \quad \quad \right] \\ \text{zwischen Knoten } \textcircled{1} - \textcircled{2} \\ \text{(mit } 0 \leq s \leq s_{12} \text{)} \\ \\ \left[\quad 0 \quad \left(1 - \frac{s}{s_{23}}\right) \quad \frac{s}{s_{23}} \quad \underline{0} \quad \right] \\ \text{zwischen Knoten } \textcircled{2} - \textcircled{3} \\ \text{(mit } 0 \leq s \leq s_{23} \text{)} \\ \\ \left[\quad 0 \quad \quad 0 \quad \left(1 - \frac{s}{s_{34}}\right) \quad \frac{s}{s_{34}} \quad \underline{0} \right] \\ \text{zwischen Knoten } \textcircled{3} - \textcircled{4} \\ \text{(mit } 0 \leq s \leq s_{34} \text{)} \\ \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \quad (8.57)$$

für lineare Randverschiebungen und durch

$$\underline{\tilde{U}}(s) = \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(1 - \frac{s}{s_{13}}\right)\left(1 - 2\frac{s}{s_{13}}\right) \quad 4\frac{s}{s_{13}}\left(1 - \frac{s}{s_{13}}\right) \quad \frac{s}{s_{13}}\left(2\frac{s}{s_{13}} - 1\right) \quad \underline{0} \quad \right] \\ \text{zwischen Knoten } \textcircled{1} - \textcircled{2} - \textcircled{3} \\ \text{(mit } 0 \leq s \leq s_{13} \text{)} \\ \\ \left[\quad 0 \quad 0 \quad \left(1 - \frac{s}{s_{35}}\right)\left(1 - 2\frac{s}{s_{35}}\right) \quad 4\frac{s}{s_{35}}\left(1 - \frac{s}{s_{35}}\right) \quad \frac{s}{s_{35}}\left(2\frac{s}{s_{35}} - 1\right) \quad \underline{0} \right] \\ \text{zwischen Knoten } \textcircled{3} - \textcircled{4} - \textcircled{5} \\ \text{(mit } 0 \leq s \leq s_{35} \text{)} \\ \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right. \quad (8.58)$$

für quadratische Randverschiebungen angedeutet (s. Bild 8.4). Hierbei geben s_{12} , s_{23} , s_{34} , s_{13} und s_{35} die Strecken zwischen den entsprechenden Knoten an. Werden die Beziehungen (8.52) bis (8.55) in das Funktional (8.51) eingesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{1}{2} \int_{\partial A_3^i} [\underline{u}^T \underline{\tilde{U}}^T \underline{\tilde{U}} \underline{u} - 2 \underline{c}^T \underline{U}^T \underline{\tilde{U}} \underline{u} - 2 u_p \underline{\tilde{U}} \underline{u} + \underline{c}^T \underline{U}^T \underline{U} \underline{c} + 2 \underline{c}^T \underline{U}^T u_p + u_p^2] ds \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\partial A_3^i} [\underline{v}^T \underline{\tilde{V}}^T \underline{\tilde{V}} \underline{v} - 2 \underline{c}^T \underline{V}^T \underline{\tilde{V}} \underline{v} - 2 v_p \underline{\tilde{V}} \underline{v} + \underline{c}^T \underline{V}^T \underline{V} \underline{c} + 2 \underline{c}^T \underline{V}^T v_p + v_p^2] ds
 \end{aligned}
 \tag{8.59}$$

Als Bedingungsgleichung für ein Minimum von (8.59) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial \underline{c}^T} = & \underbrace{- \int_{\partial A_3^i} \underline{U}^T \underline{\tilde{U}} ds}_{\underline{L}_1} \underline{u} - \underbrace{\int_{\partial A_3^i} \underline{V}^T \underline{\tilde{V}} ds}_{\underline{L}_2} \underline{v} + \underbrace{\int_{\partial A_3^i} [\underline{U}^T \underline{U} + \underline{V}^T \underline{V}] ds}_{\underline{Q}} \underline{c} + \\
 & \underbrace{\int_{\partial A_3^i} [\underline{U}^T u_p + \underline{V}^T v_p] ds}_{\underline{r}_p} = \underline{0} \\
 = & - \underbrace{[\underline{L}_1 \ \underline{L}_2]}_{\underline{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix}}_{\underline{q}} + \underline{Q} \underline{c} + \underline{r}_p \\
 = & - \underline{L} \underline{q} + \underline{Q} \underline{c} + \underline{r}_p = \underline{0}
 \end{aligned}
 \tag{8.60}$$

mit

$$\underline{Q} = \int_{\partial A_3^i} [\underline{U}^T \underline{U} + \underline{V}^T \underline{V}] ds \tag{8.61}$$

$$\underline{L} = \left[\int_{\partial A_3^i} \underline{U}^T \underline{\tilde{U}} ds \quad \vdots \quad \int_{\partial A_3^i} \underline{V}^T \underline{\tilde{V}} ds \right] \tag{8.62}$$

und

$$\underline{r}_p = \int_{\partial A_3^i} [\underline{U}^T u_p + \underline{V}^T v_p] ds \tag{8.63}$$

Der Vektor \underline{c} läßt sich nach Gleichung (8.60) nun darstellen als

$$\begin{aligned} \underline{c} &= \underline{Q}^{-1} \underline{L} \underline{q} - \underline{Q}^{-1} \underline{r}_p \\ &= \underline{G} \underline{q} + \underline{g} \end{aligned} \tag{8.64}$$

wobei in diesem Falle

$$\underline{G} = \underline{Q}^{-1} \underline{L} \tag{8.65}$$

und

$$\underline{g} = -\underline{Q}^{-1} \underline{r}_p \tag{8.66}$$

gesetzt wurden.

8.2 Verwendung eines erweiterten Funktionals für die potentielle Energie

(Erweiterung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials:
Hybrides Weggrößenverfahren)

Ausgangspunkt für das hybride Weggrößenverfahren ist das Funktional (4.7), dessen erste Variation gemäß (4.8) bei Verwendung von Ansatzfunktionen, welche die Gleichgewichtsbedingungen beinhaltende Differentialgleichungssystem (3.17) schon exakt erfüllen, mit

$$\delta \Pi = \int_{\Gamma_1} \delta \underline{T}^T \underbrace{[\underline{\bar{u}} - \underline{u}]}_{= \underline{0} \rightsquigarrow \text{R.B. (3.18)}} t ds + \int_{\Gamma_2} \delta \underline{u}^T \underbrace{[\underline{T} - \underline{\bar{T}}]}_{= \underline{0} \rightsquigarrow \text{R.B. (3.19)}} t ds \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.67)$$

nur noch die natürlichen Randbedingungen enthält, welche sich als die Verschiebungsrandbedingung (3.18) und die Spannungsrandbedingung (3.19) herausstellen.

In einer Finite-Element-Lösung kann der in (4.7) enthaltene Erweiterungsterm nach einer Modifikation nicht nur auf dem äußeren zu Γ gehörenden Kurventeil Γ_1 ausgewertet werden, um \underline{u} an $\underline{\bar{u}}$ anzupassen, sondern auch auf den Elementgrenzen, um keine Übergangsbedingungen an die Ansätze stellen zu müssen und eine Anpassung von \underline{u} an für eine Elementkopplung geeignet gewählte Randverschiebungsverläufe $\underline{\bar{u}}$ (siehe Kap. 6 und Kap. 8.1.2.2) zu erreichen. Der Erweiterungsterm kann für ein Element mit der Elementrandkurve ∂A^i , welche sich gemäß Bild 8.1 aus ∂A_1^i , ∂A_2^i und ∂A_3^i zusammensetzt, durch

$$\int_{\partial A_1^i + \partial A_3^i} \underline{T}^T (\underline{u} - \underline{\bar{u}}) t ds \quad (8.68)$$

angegeben werden, wenn vereinbart wird, daß

$$\underline{\bar{u}} = \underline{u} \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i \quad (8.69)$$

zu setzen ist.

Explizit lautet das für eine Finite-Element-Lösung zugeschnittene Funktional folgendermaßen:

$$\Pi_m = \sum_{i=1}^m \Pi_m^i \quad (8.70)$$

mit

$$\begin{aligned} \Pi_m^i = & \int_{A^i} \left[\frac{1}{2} (\underline{u}^T \underline{D}^T) \underline{E} (\underline{D} \underline{u}) - \underline{u}^T \underline{F} \right] t \, dA^i - \int_{\partial A_2^i} \underline{u}^T \underline{T} t \, ds + \\ & - \int_{\partial A_1^i + \partial A_3^i} \underline{T}^T (\underline{u} - \underline{\bar{u}}) t \, ds \end{aligned} \quad (8.71)$$

und

m = Anzahl der Elemente

$\underline{\bar{u}}$ stellt hier den für eine Kopplung sinnvoll zu wählenden Elementrandverschiebungsverlauf des i -ten Elementes dar.

Das Funktional (8.70) soll nun für solche Fälle verwendet werden, in denen ein spezielles Element mit Lösungsfunktionen als Ansätze ganz oder teilweise von Standardelementen umgeben wird, die auf der Basis von Polynomfunktionen hergeleitet wurden. Bei Verwendung konformer Elemente fällt der Erweiterungsterm (8.68) für diese Standardelemente weg, wenn man sinnvollerweise

$$\underline{\bar{u}} = \underline{u} \quad \text{auf} \quad \partial A_3^i \quad (\text{d.h. auf den Zwischenelementgrenzen}) \quad (8.72)$$

setzt und vorausschickt, daß die Ansätze der konformen Elemente auf der Randkurve Γ_1 vorgegebene Verschiebungswerte $\underline{\bar{u}}$ exakt annehmen können, so daß man also

$$\underline{\bar{u}} = \underline{\bar{u}} = \underline{u} \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i \subset \Gamma_1 \quad (8.73)$$

setzen kann. Für eine derartige Kombination von speziellen Elementen mit

konformen Standardelementen gilt dann

$$\Pi_m^i = \begin{cases} \Pi^i & \text{für ein Standardelement} \\ \underbrace{\Pi^i + \int_{\partial A_1^i + \partial A_3^i} \underline{T}^T (\underline{\tilde{u}} - \underline{u}) t ds}_{\Pi_s^i} & \text{für ein spezielles Element} \end{cases} \quad (8.74)$$

mit

$$\Pi^i = \int_{A^i} \left[\frac{1}{2} (\underline{u}^T \underline{D}^T) \underline{E} (\underline{D} \underline{u}) - \underline{u}^T \underline{F} \right] t dA^i - \int_{\partial A_2^i} \underline{u}^T \underline{T} t ds \quad (8.75)$$

Wie in Kapitel 8.1 werden die speziellen, das Differentialgleichungssystem (3.17) erfüllenden Verschiebungsansätze wiederum durch $\underline{u} = \underline{u}_h + \underline{u}_p$ in homogene und partikuläre Anteile aufgespalten. Der Term \underline{T} in (8.74) ist in direkte Verbindung mit dem Verschiebungsfeld \underline{u} gemäß

$$\underline{T} = \underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u} \quad (8.76)$$

zu setzen, so daß aus der Darstellung von \underline{u} eine entsprechende für \underline{T} folgt:

$$\underline{T} = \underbrace{\underline{T}_h}_{\underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_h} + \underbrace{\underline{T}_p}_{\underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_p} \quad (8.77)$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung (8.4) erhält man nun aus (8.74) für ein spezielles Element den Anteil Π_s^i zu

$$\begin{aligned} \Pi_s^i &= \int_{\partial A^i} \frac{1}{2} \underline{u}_h^T \underline{T}_h t ds + \int_{\partial A^i} \underline{u}_h^T \underline{T}_p t ds - \int_{\partial A_2^i} \underline{u}_h^T \underline{T} t ds + \\ &+ \text{Terme, die } \underline{u}_p \text{ und } \underline{T}_p \text{ enthalten, } + \\ &+ \int_{\partial A_1^i + \partial A_3^i} \underbrace{\left[\underline{T}_h^T \underline{\tilde{u}} + \underline{T}_p^T \underline{\tilde{u}} - \underline{T}_h^T \underline{u}_h - \underline{T}_h^T \underline{u}_p - \underline{T}_p^T \underline{u}_h - \underline{T}_p^T \underline{u}_p \right]}_{\underline{T}^T (\underline{\tilde{u}} - \underline{u})} t ds \end{aligned} \quad (8.78)$$

Vereinfachungen bezüglich des Integrationsumfanges ergeben sich, wenn die Ansätze beispielsweise eine Randbedingung schon exakt erfüllen oder das spezielle Element so in das Lösungsgebiet gelegt ist, daß ein Randkurventyp (∂A_1^i oder ∂A_2^i) gar nicht im Elementrand auftritt. Folgende Fälle führen nun von (8.78) auf ein und dasselbe vereinfachte Ergebnis:

Fall a) : ∂A_1^i ist nicht vorhanden und die Randbedingung

$$\underline{I} = \bar{I} \quad \text{auf} \quad \partial A_2^i$$

wird exakt erfüllt (s. Bild 8.5).

Fall b) : ∂A_2^i ist nicht vorhanden, und die Randbedingung

$$\underline{u} = \bar{u} \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i$$

wird exakt erfüllt.

Fall c) : ∂A_1^i , ∂A_2^i sowie ∂A_3^i sind vorhanden; die Randbedingungen

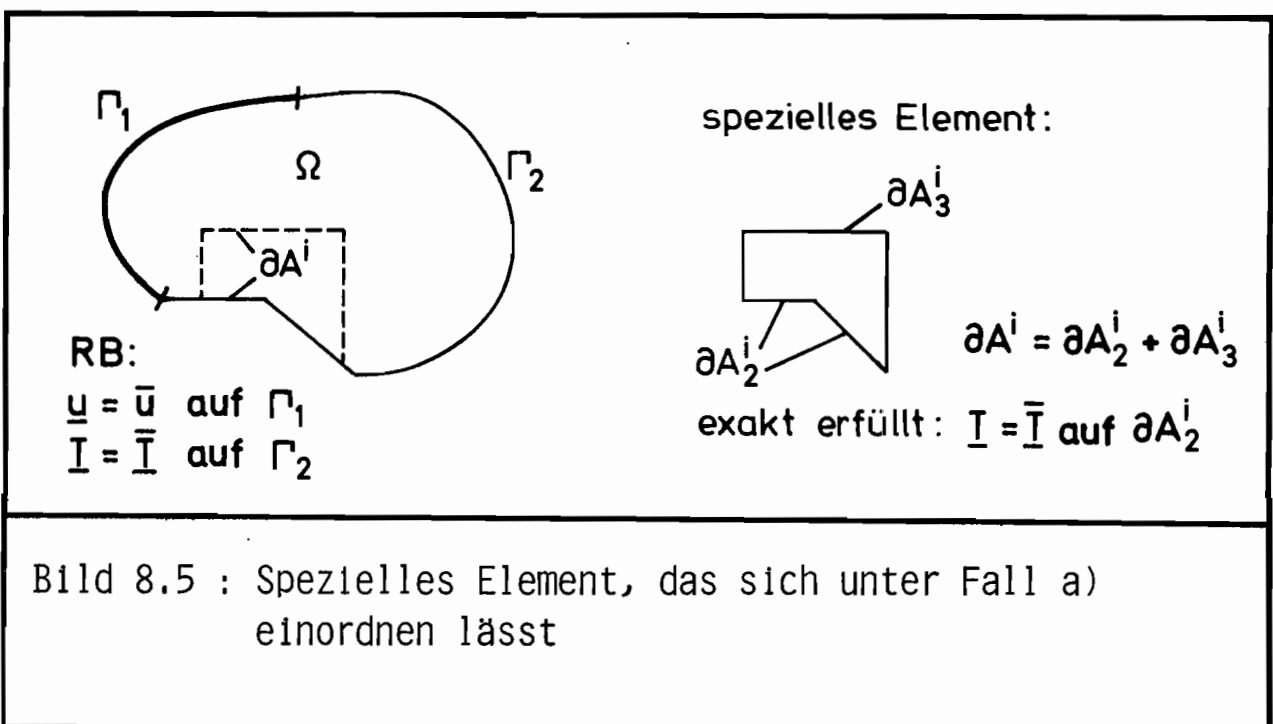
$$\underline{u} = \bar{u} \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i$$

und

$$\underline{I} = \bar{I} \quad \text{auf} \quad \partial A_2^i$$

werden exakt erfüllt.

Fall d) : ∂A_1^i und ∂A_2^i sind nicht vorhanden, d.h. das Element ist vollkommen von anderen Elementen eingeschlossen.



Aus (8.78) ergibt sich für die genannten Fälle die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \Pi_s^i &= - \int_{\partial A_3^i} \frac{1}{2} \underline{T}_h^T \underline{u}_h t ds - \int_{\partial A_3^i} \underline{T}_h^T \underline{u}_p t ds + \\
 &+ \int_{\partial A_3^i} \underline{T}_h^T \underline{\bar{u}} t ds + \int_{\partial A_3^i} \underline{T}_p^T \underline{\bar{u}} t ds + \\
 &+ \text{Terme, die } \underline{u}_p \text{ und } \underline{T}_p \text{ enthalten,} \\
 &= - \int_{\partial A_3^i} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (u_h T_{x_h} + T_{x_h} u_h + v_h T_{y_h} + T_{y_h} v_h) \right] t ds + \\
 &- \int_{\partial A_3^i} [T_{x_h} u_p + T_{y_h} v_p] t ds + \\
 &+ \int_{\partial A_3^i} [T_{x_h} \bar{u} + T_{y_h} \bar{v}] t ds + \int_{\partial A_3^i} [T_{x_p} \bar{u} + T_{y_p} \bar{v}] t ds \\
 &+ \text{Terme, die } u_p, v_p, T_{x_p} \text{ und } T_{y_p} \text{ enthalten,} \tag{8.79}
 \end{aligned}$$

worin die Beziehungen (8.8) bis (8.11) sowie

$$\underline{\bar{u}} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} \tag{8.80}$$

berücksichtigt sind.

Noch zu erwähnen ist, daß die Erfüllung der in den Fällen a) bis c) erscheinenden Randbedingungsgleichungen in folgender Form erfolgt:

Bezüglich $\underline{u} = \underline{\bar{u}}$ auf ∂A_1^i gelte

$$\underline{u}_h = 0 \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i \tag{8.81}$$

und

$$\underline{u}_p = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf} \quad \partial A_1^i \tag{8.82}$$

während analog $\underline{T} = \bar{T}$ auf ∂A_2^i durch

$$\underline{T}_h = \underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_h = \underline{0} \quad \text{auf} \quad \partial A_2^i \quad (8.83)$$

und

$$\underline{T}_p = \underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}_p = \bar{T} \quad \text{auf} \quad \partial A_2^i \quad (8.84)$$

erfüllt werde.

8.2.1 Das erweiterte Funktional für ein spezielles Element in diskretisierter Form

Für den Bereich eines speziellen Elementes werden die Verschiebungsansätze wie in Kapitel 8.1.1 gemacht, und in die Randspannungsverläufe \underline{T} gehen wiederum die den Verschiebungsansätzen zugeordneten Spannungsgrößen ein. Mit den vorliegenden partikulären Anteilen u_p, v_p, T_{xp}, T_{yp} und den homogenen Ansatzkomponenten

$$\underline{u}_h = \underline{U} \underline{c} \quad (8.85)$$

$$\underline{v}_h = \underline{V} \underline{c} \quad (8.86)$$

$$T_{xh} = \underline{T}_x \underline{c} \quad (8.87)$$

$$T_{yh} = \underline{T}_y \underline{c} \quad (8.88)$$

sowie mit den Randverschiebungsansätzen

$$\tilde{\underline{u}} = \tilde{\underline{U}} \underline{u} \quad (\underline{u} : \text{Knotenverschiebungsvektor}) \quad (8.89)$$

und

$$\tilde{\underline{v}} = \tilde{\underline{V}} \underline{v} \quad (\underline{v} : \text{Knotenverschiebungsvektor}) \quad (8.90)$$

erhält man aus (8.79) für ein spezielles Element den Anteil Π_s^i in der

Form

$$\begin{aligned}
 \pi_s^i &= - \frac{1}{2} \underline{c}^T \int \frac{1}{2} \underbrace{[\underline{U}^T \underline{T}_x + \underline{T}_x^T \underline{U} + \underline{V}^T \underline{T}_y + \underline{T}_y^T \underline{V}]}_{\underline{H}} t \, ds \, \underline{c} + \\
 &\quad - \underline{c}^T \int \underbrace{[\underline{T}_x^T u_p + \underline{T}_y^T v_p]}_{\underline{r}_p} t \, ds + \\
 &\quad + \underline{c}^T \int \underbrace{\underline{T}_x^T \underline{\tilde{U}}}_{\underline{L}_1} t \, ds \, \underline{u} + \underline{c}^T \int \underbrace{\underline{T}_y^T \underline{\tilde{V}}}_{\underline{L}_2} t \, ds \, \underline{v} + \\
 &\quad + \underline{u}^T \int \underline{\tilde{U}}^T \underline{T}_{x_p} t \, ds + \underline{v}^T \int \underline{\tilde{V}}^T \underline{T}_{y_p} t \, ds + \\
 &\quad + \text{weitere Terme, die } \underline{c}, \underline{u} \text{ und } \underline{v} \text{ nicht enthalten} \\
 &= - \frac{1}{2} \underline{c}^T \underline{H} \underline{c} - \underline{c}^T \underline{r}_p + \underline{c}^T \underline{L} \underline{q} + \underline{q}^T \underline{\tilde{r}}_p +
 \end{aligned}$$

+ weitere Terme, die \underline{c} und \underline{q} nicht enthalten (8.91)

mit

$$\underline{H} = \int \frac{1}{2} \underbrace{[\underline{U}^T \underline{T}_x + \underline{T}_x^T \underline{U} + \underline{V}^T \underline{T}_y + \underline{T}_y^T \underline{V}]}_{\partial A_3^i} t \, ds \tag{8.92}$$

(symmetrische Matrix)

$$\underline{L} = \left[\int \underline{T}_x^T \underline{\tilde{U}} t \, ds \quad \vdots \quad \int \underline{T}_y^T \underline{\tilde{V}} t \, ds \right]_{\partial A_3^i} \tag{8.93}$$

$$\underline{\tilde{r}}_p = \begin{bmatrix} \int_{\partial A_3^i} \underline{\tilde{U}}^T T_{x_p} t ds \\ \int_{\partial A_3^i} \underline{\tilde{V}}^T T_{y_p} t ds \end{bmatrix} \quad (8.94)$$

$$\underline{r}_p = \int_{\partial A_3^i} \left[\underline{T}_x^T u_p + \underline{T}_y^T v_p \right] t ds \quad (8.95)$$

$$\underline{q}^T = \left[\underline{u}^T \quad \underline{v}^T \right] \quad (8.96)$$

Die Darstellung von Π_s^i nach (8.91) gilt den Ausführungen in Kapitel 8.2 zufolge für spezielle Elemente bei denen die eventuell auftretenden Randbedingungen auf Elementrandteilen von den Ansätzen exakt erfüllt werden. Aus der Beziehung (8.91) ergeben sich die Bedingungsgleichungen zur Ermittlung der Ansatzfreiwerte im Spaltenvektor \underline{c} , und zwar gilt

$$\frac{\partial \Pi_s^i}{\partial \underline{c}^T} = - \underline{H} \underline{c} - \underline{r}_p + \underline{L} \underline{q} = \underline{0} \quad (8.97)$$

Hieraus erhält man nun

$$\underline{c} = \underline{H}^{-1} \underline{L} \underline{q} - \underline{H}^{-1} \underline{r}_p \quad (8.98)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdruckes für \underline{c} in die Beziehung (8.91) läßt sich Π_s^i nun unter Berücksichtigung der wesentlichen Terme mit \underline{q} in der folgenden Form schreiben:

$$\Pi_s^i = \frac{1}{2} \underline{q}^T \underbrace{\underline{L}^T \underline{H}^{-1} \underline{L}}_{\underline{k}} \underline{q} - \underline{q}^T \underbrace{\left[\underline{L}^T \underline{H}^{-1} \underline{r}_p - \underline{\tilde{r}}_p \right]}_{\underline{\bar{p}}} +$$

+ weitere Terme, die \underline{q} nicht enthalten. (8.99)

Als Elementsteifigkeitsmatrix erhält man hier

$$\underline{k} = \underline{L}^T \underline{H}^{-1} \underline{L} \quad , \quad (8.100)$$

und als Elementbelastungsvektor ergibt sich

$$\underline{\bar{p}} = \underline{L}^T \underline{H}^{-1} \underline{r}_p - \underline{\bar{r}}_p \quad . \quad (8.101)$$

Da es sich in diesem Kapitel durchweg nur um Größen des i -ten Elementes handelte und keine Verwechslungsgefahr besteht, wurde wiederum zur Schreibvereinfachung auf eine explizite Indizierung aller vorkommenden Größen mit " i " verzichtet.

8.2.2 Methode III zur Berechnung von Verknüpfungsmatrizen \underline{G} und \underline{g} zwischen Freiwerten und Knotenwerten sowie deren Verwendung in der Darstellung des Funktionalanteils Π_s^i eines speziellen Elementes

Der Vollständigkeit halber sei auch für das erweiterte Funktional noch explizit auf die Beziehung zwischen Freiwerten \underline{c} und Knotenwerten \underline{q} hingewiesen. Aus der Herleitung in Kapitel 8.2.1 ergibt sich gemäß (8.98) mit

$$\begin{aligned} \underline{c} &= \underline{H}^{-1} \underline{L} \underline{q} - \underline{H}^{-1} \underline{r}_p \\ &= \underline{G} \underline{q} + \underline{g} \end{aligned} \quad (8.102)$$

die Matrix \underline{G} zu

$$\underline{G} = \underline{H}^{-1} \underline{L} \quad (8.103)$$

und der Spaltenvektor \underline{g} zu

$$\underline{g} = -\underline{H}^{-1} \underline{r}_p \quad (8.104)$$

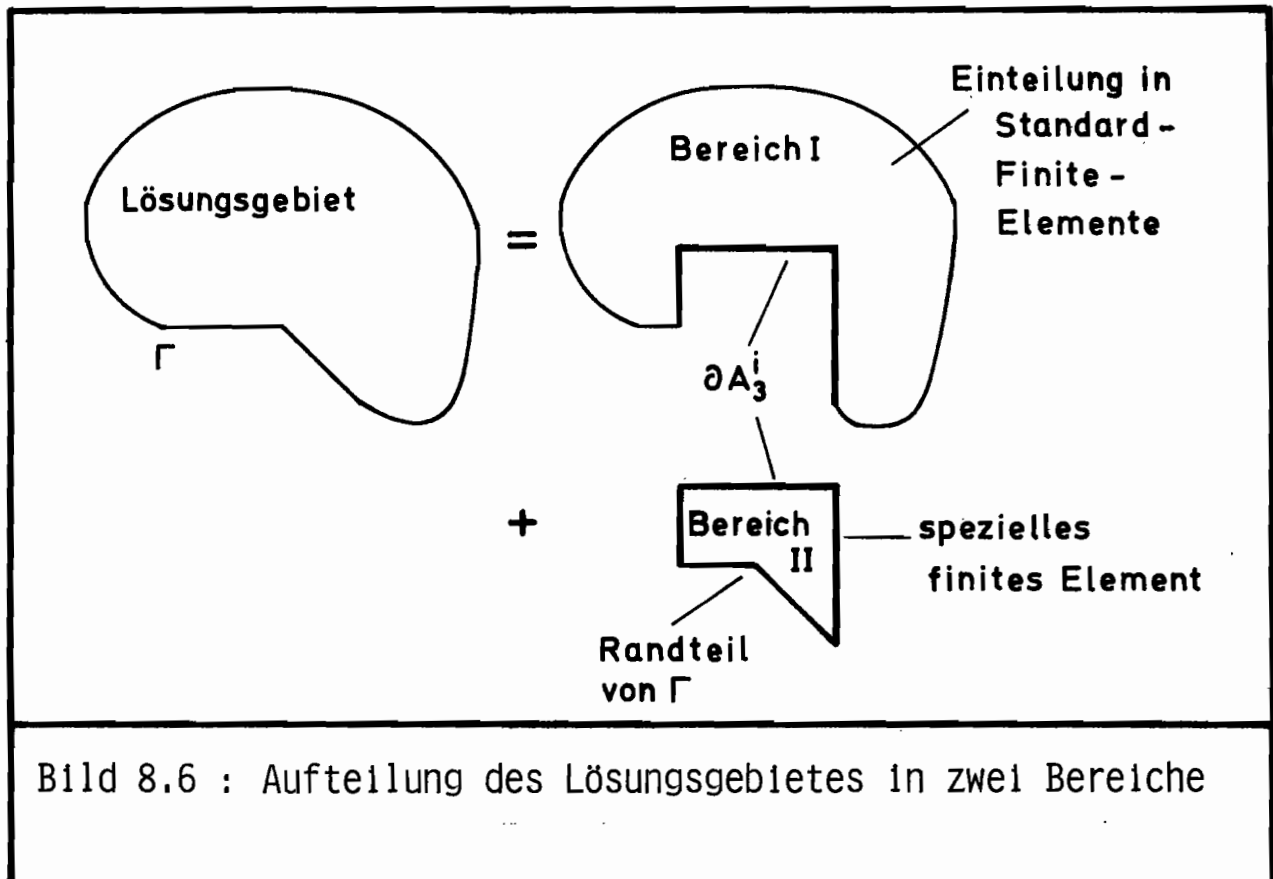
Werden die Verknüpfungsmatrizen \underline{G} und \underline{g} nun in der Darstellung für Π_s^i verwendet, so erhält man aus (8.99) nacheinander

$$\begin{aligned}
 \Pi_s^i &= \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{L}^T \underline{H}^{-1} \underline{L} \underline{q} - \underline{q}^T \underline{L}^T \underline{H}^{-1} \underline{r}_p + \underline{q}^T \underline{\tilde{r}}_p + \\
 &\quad + \text{Terme ohne } \underline{q} \\
 &= \frac{1}{2} \underline{q}^T \underbrace{\underline{L}^T \underline{H}^{-1} \underline{H} \underline{H}^{-1} \underline{L}}_{\underline{G}^T} \underline{q} - \underline{q}^T \underbrace{\underline{L}^T \underline{H}^{-1} \underline{H} \underline{H}^{-1}}_{\underline{G}^T} \underline{r}_p + \underline{q}^T \underline{\tilde{r}}_p + \\
 &\quad + \text{Terme ohne } \underline{q} \\
 &= \frac{1}{2} \underline{q}^T \underbrace{\underline{G}^T \underline{H} \underline{G}}_{\underline{k}} \underline{q} + \underline{q}^T \underline{G}^T \underline{H} \underline{g} + \underline{q}^T \underline{\tilde{r}}_p + \\
 &\quad + \text{Terme ohne } \underline{q}
 \end{aligned}
 \tag{8.105}$$

Der zuletzt erhaltene Ausdruck weist eine ähnliche Form auf wie die Beziehung (8.40) für Π^i beim nicht erweiterten Funktional. Während die Verknüpfungsmatrizen \underline{G} und \underline{g} jeweils auf verschiedenen Wegen ermittelt werden, sind bei Verwendung des erweiterten und nicht erweiterten Funktionals die Gleichungen für \underline{H} mit (8.41) und (8.92) formal identisch. Der wesentliche Unterschied besteht jedoch darin, daß zur Berechnung der Matrix \underline{H} des hybriden Weggrößenverfahrens wegen der zu bildenden Inversen von \underline{H} die Ansatzfunktionen keine Starrkörperanteile enthalten dürfen, wogegen sie in Kapitel 8.1 beim reinen Weggrößenverfahren zur Ermittlung von \underline{H} enthalten sein müssen.

8.2.3 Interpretation der Kopplung von speziellem Elementbereich und übrigem Gebiet

Das auf einem erweiterten Funktional basierende Verfahren sei noch anschaulich interpretiert, und zwar kann man sich hierzu das zu behandelnde Lösungsgebiet in zwei Bereiche geteilt denken, die zunächst einzeln behandelt und dann geeignet gekoppelt werden (s. Bild 8.6).



Bereich I wird in Standard-Finite-Elemente aufgeteilt, so daß auf der Verbindungslinie der beiden Gebiete - mit ∂A_3^i bezeichnet - der Verlauf der Verschiebungsgrößen u und v je nach Elementwahl durch lineare oder quadratische Funktionen \tilde{u} bzw. \tilde{v} mit den Knotenwerten als Parameter dargestellt werden kann.

Für den Bereich II werden Funktionen u und v gewählt, die das Differentialgleichungssystem der technischen Scheibentheorie und die Randbedingungen auf dem zum Element gehörenden Teil von Γ erfüllen. Diese Funktionen sollen nun auf dem Randstück ∂A_3^i den Verlauf von \tilde{u} und \tilde{v} annehmen, was durch die

Gleichung

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial A_3^i} \delta \underbrace{[\underline{T}_x \ \underline{T}_y]}_{\delta \underline{T}^T} \left(\begin{bmatrix} \underline{\tilde{u}} \\ \underline{\tilde{v}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \end{bmatrix} \right) t \, ds = 0 \\
 & = \delta \underline{c}^T \int \left\{ \underline{T}_x^T (\underline{a} - \underline{u}) + \underline{T}_y^T (\underline{\tilde{v}} - \underline{v}) \right\} t \, ds \\
 & = \delta \underline{c}^T \left\{ \int_{\partial A_3^i} \underline{T}_x^T \underline{\tilde{U}} t \, ds \underline{u} - \int_{\partial A_3^i} \frac{1}{2} [\underline{T}_x^T \underline{U} + \underline{U}^T \underline{T}_x] t \, ds \underline{c} - \int_{\partial A_3^i} \underline{T}_x \underline{u}_p t \, ds + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{\partial A_3^i} \underline{T}_y^T \underline{\tilde{V}} t \, ds \underline{v} - \int_{\partial A_3^i} \frac{1}{2} [\underline{T}_y^T \underline{V} + \underline{V}^T \underline{T}_y] t \, ds \underline{c} - \int_{\partial A_3^i} \underline{T}_y \underline{v}_p t \, ds \right\} \\
 & = \delta \underline{c}^T \underbrace{\left[\underline{L} \underline{q} \ - \underline{H} \underline{c} \ - \underline{r}_p \right]}_{\underline{0}} = 0 \tag{8.106}
 \end{aligned}$$

erreicht werden soll. Hierbei ergab sich aus der Definition für \underline{T} , nämlich

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{T}_x \\ \underline{T}_y \end{bmatrix} \underline{c} + \begin{bmatrix} \underline{T}_{x_p} \\ \underline{T}_{y_p} \end{bmatrix} \tag{8.107}$$

der variierte Ausdruck $\delta \underline{T}$ zu

$$\delta \underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{T}_x \\ \underline{T}_y \end{bmatrix} \delta \underline{c} \tag{8.108}$$

Aus (8.106) folgt nun wiederum die Beziehung (8.98) zur Darstellung von \underline{c} womit sich die Lösungsfunktionen u und v für Bereich II nun in Abhängigkeit

der Knotenwerte \underline{q} angeben lassen als

$$\underline{u} = \underline{U} \underline{H}^{-1} \underline{L} \underline{q} - \underline{U} \underline{H}^{-1} \underline{r}_p + u_p \tag{8.109}$$

und

$$\underline{v} = \underline{V} \underline{H}^{-1} \underline{L} \underline{q} - \underline{V} \underline{H}^{-1} \underline{r}_p + v_p \tag{8.110}$$

Weiterhin folgt hieraus die Darstellung für die Spannungsgrößen T_x und T_y zu

$$T_x = \underline{T}_x \underline{H}^{-1} \underline{L} \underline{q} - \underline{T}_x \underline{H}^{-1} \underline{r}_p + T_{x_p} \tag{8.111}$$

und

$$T_y = \underline{T}_y \underline{H}^{-1} \underline{L} \underline{q} - \underline{T}_y \underline{H}^{-1} \underline{r}_p + T_{y_p} \tag{8.112}$$

woraus sich die Werte auf dem Rand ∂A_3^i ermitteln lassen.

Für das Randstück ∂A_3^i des Bereichs I können nun folgende Randbedingungen formuliert werden:

$$\bar{T}_x = - T_x \quad \text{auf} \quad \partial A_3^i \tag{8.113}$$

$$\bar{T}_y = - T_y \quad \text{auf} \quad \partial A_3^i \tag{8.114}$$

Da Bereich I nur mit Standardelementen behandelt wird, gehen die Bedingungen (8.113) und (8.114) als Belastungsterme in die Rechnung ein, und zwar gilt für den Anteil des variierten Potentials der äußeren Kräfte auf ∂A_3^i , bezeichnet mit

$$\delta \Pi_a^{(\partial A_3^i)} .$$

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_a^{(\partial A_3^i)} &= - \int_{\partial A_3^i} [\delta u \bar{\tau}_x + \delta v \bar{\tau}_y] t ds \\
 &= \int_{\partial A_3^i} [\delta u \tau_x + \delta v \tau_y] t ds \\
 &= \int_{\partial A_3^i} [\delta \underline{u}^T \underline{\tilde{U}}^T \tau_x + \delta \underline{v}^T \underline{\tilde{V}}^T \tau_y] t ds \\
 &= \delta \underline{q}^T \int_{\partial A_3^i} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{U}}^T & \tau_x \\ \underline{\tilde{V}}^T & \tau_y \end{bmatrix} t ds \\
 &= \delta \underline{q}^T \left\{ \underbrace{\int_{\partial A_3^i} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{U}}^T & \tau_x \\ \underline{\tilde{V}}^T & \tau_y \end{bmatrix} t ds}_{\underline{L}^T} (\underline{H}^{-1} \underline{L} \underline{q} - \underline{H}^{-1} \underline{r}_p) + \underbrace{\int_{\partial A_3^i} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{U}}^T & \tau_{x_p} \\ \underline{\tilde{V}}^T & \tau_{y_p} \end{bmatrix} t ds}_{\underline{\tilde{r}}_p} \right\} \\
 &= \underbrace{\delta \underline{q}^T [\underline{L}^T \underline{H}^{-1} \underline{L} \underline{q} - (\underline{L}^T \underline{H}^{-1} \underline{r}_p - \underline{\tilde{r}}_p)]}_{\delta \Pi_s^i} \tag{8.115}
 \end{aligned}$$

Da hier \underline{q} die Knotenwerte auf ∂A_3^i und gleichzeitig die Knotenvariablen des speziellen Elementes (Bereich II) beinhaltet, führte die Betrachtungsweise dieses Abschnittes also auf einen Ausdruck, der einer Variation von Π_s^i nach (8.99) entspricht.

Zusammenfassend läßt sich die Kopplung von speziellem Elementbereich und übrigem Gebiet stichwortartig in folgender Weise beschreiben:

Verwendung von Standardelementen im Bereich I;

Annahme von Verschiebungsverläufen auf der Grenzlinie ∂A_3^i , die zu den gewählten Polynomansätzen der Standardelemente passen;

Verwendung spezieller Lösungsfunktionenfolgen im Bereich II;

Erzielung möglichst guter Übereinstimmung der Verschiebungsfunktionen von Bereich II mit den vorgegebenen Verschiebungsverläufen auf der Grenzlinie ∂A_3^i durch entsprechende Verknüpfung von Freiwerten und auf ∂A_3^i liegenden Knotenwerten;

Angabe der Schnittgrößen aus Bereich II auf ∂A_3^i mit den noch unbestimmten Knotenwerten als Parameter;

Aufbringen der Schnittgrößen aus Bereich II auf die Grenzlinie ∂A_3^i des Bereiches I als Belastungsgrößen.

9 Konstruktion von Lösungsfunktionen

9.1 Inhomogene Lösungen

An dieser Stelle seien explizit nur für den Fall konstanter Volumenkräfte verschiedene Lösungen der Problemgleichungen (3.6) bzw. (3.12) angegeben. Zu deren Ermittlung geht man am besten von einer Formulierung mit Spannungsgrößen aus, gemäß

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= -\bar{F}_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= -\bar{F}_y \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Einige Lösungen für $\bar{F}_x = \text{const.}$ und $\bar{F}_y = \text{const.}$ sind

$$\sigma_{xx} = -\bar{F}_x x ; \quad \sigma_{yy} = -\bar{F}_y y ; \quad \tau_{xy} = 0 \quad (9.2)$$

$$\sigma_{xx} = 0 \quad ; \quad \sigma_{yy} = 0 \quad ; \quad \tau_{xy} = -\bar{F}_y x - \bar{F}_x y \quad (9.3)$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{2}\bar{F}_x x ; \quad \sigma_{yy} = -\frac{1}{2}\bar{F}_y y ; \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{2}\bar{F}_y x - \frac{1}{2}\bar{F}_x y \quad (9.4)$$

Weitere folgen aus

$$\sigma_{xx} = a\bar{F}_x x ; \quad \sigma_{yy} = b\bar{F}_y y ; \quad \tau_{xy} = -(1+b)\bar{F}_y x - (1+a)\bar{F}_x y \quad (9.5)$$

mit beliebigen Werten für a und b.

Die Verschiebungsfunktionen u und v erhält man ganz allgemein aus gegebenen Spannungsgrößen durch die Gleichungen [19]

$$2\mu u(x,y) = \int \left[\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] dx + f_1(y) \quad (9.6)$$

$$2\mu v(x,y) = \int \left[\sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] dy + f_2(x), \quad (9.7)$$

wobei

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9.8)$$

und

$$\lambda = \begin{cases} \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \text{für ESZ} \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \text{für EVZ} \end{cases} \quad (9.9)$$

bzw.

$$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \begin{cases} \frac{\nu}{1+\nu} & \text{für ESZ} \\ \nu & \text{für EVZ} \end{cases} \quad (9.10)$$

gilt.

9.2 Homogene Lösungen in komplexer Darstellung

Ausgehend von den Problemgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

Lassen sich Lösungen in den Spannungsgrößen mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion $U(x,y)$ in der Form

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (9.12)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (9.13)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (9.14)$$

darstellen [19] . Die Verträglichkeitsbedingung

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \tag{9.15}$$

liefert mit

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \Delta U \tag{9.16}$$

die biharmonische Gleichung

$$\Delta\Delta U = U_{xxxx} + 2U_{xxyy} + U_{yyyy} = 0 \tag{9.17}$$

deren Lösung mit Hilfe von komplexen Funktionen durch

$$U = \chi_1(z) + \chi_2(\bar{z}) + \bar{z}\varphi_1(z) + z\varphi_2(\bar{z}) \tag{9.18}$$

ausgedrückt werden kann. Hierbei gilt

$$z = x + iy \tag{9.19}$$

und

$$\bar{z} = x - iy \tag{9.20}$$

Unter der Einschränkung, daß U eine reelle Funktion sein soll, ergeben sich die Bedingungen

$$\chi_2(\bar{z}) = \overline{\chi_1(z)} \tag{9.21}$$

$$\varphi_2(\bar{z}) = \overline{\varphi_1(z)} \tag{9.22}$$

und damit erhält man

$$U = \chi_1(z) + \overline{\chi_1(z)} + \bar{z}\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1(z)} \tag{9.23}$$

Mit den Substitutionen

$$\chi_1 = \frac{1}{2} X \tag{9.24}$$

und

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \Phi \tag{9.25}$$

gewinnt man die Lösung der biharmonischen Gleichung in der Form

$$U = \text{Re} [\bar{z}\Phi(z) + X(z)] \tag{9.26}$$

$$= \frac{1}{2} [\bar{z}\Phi(z) + z\overline{\Phi(z)} + X(z) + \overline{X(z)}] .$$

Der Vorteil der Verwendung komplexer Funktionen besteht zunächst darin, daß beliebige Funktionen $\Phi(z)$ und $X(z)$ zu Lösungen der Bipotentialgleichung führen.

Nun gilt es, alle Spannungs- und Verschiebungsgrößen durch die komplexen Funktionen Φ und X auszudrücken. Hierzu benötigt man die folgenden Ausdrücke:

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\Phi(z) + \bar{z}\Phi'(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + X'(z) + \overline{X'(z)} \right] \quad (9.27)$$

$$U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = i \frac{1}{2} \left[-\Phi(z) + \bar{z}\Phi'(z) + \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} + X'(z) - \overline{X'(z)} \right] \quad (9.28)$$

$$U_x + iU_y = \Phi(z) + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{X'(z)} \quad (9.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [U_x + iU_y] = \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + z\overline{\Phi''(z)} + \overline{X''(z)} \quad (9.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [U_x + iU_y] = i \left[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} - z\overline{\Phi''(z)} - \overline{X''(z)} \right] \quad (9.31)$$

Mit diesen Beziehungen erhält man unter Einbeziehung der oft nützlichen Substitution

$$X'(z) = \Psi(z) \quad (9.32)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + i\tau_{xy} &= U_{yy} - iU_{xy} = -i \frac{\partial}{\partial y} [U_x + iU_y] \\ &= \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} - z\overline{\Phi''(z)} - \overline{X''(z)} \\ &= \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} - z\overline{\Phi''(z)} - \overline{\Psi'(z)} \end{aligned} \quad (9.33)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= U_{xx} + iU_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} [U_x + iU_y] \\ &= \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + z\overline{\Phi''(z)} + \overline{X''(z)} \\ &= \Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)} + z\overline{\Phi''(z)} + \overline{\Psi'(z)} \end{aligned} \quad (9.34)$$

In einer anderen Kombination lassen sich die Spannungen in den Beziehungen

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 [\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] = 4 \operatorname{Re} [\phi'(z)] \quad (9.35)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2i\tau_{xy} &= 2 [z\overline{\phi''(z)} + \overline{\chi''(z)}] \\ &= 2 [z\overline{\phi''(z)} + \overline{\psi'(z)}] \end{aligned} \quad (9.36)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} &= 2 [\bar{z}\phi''(z) + \chi''(z)] \\ &= 2 [\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \quad (9.37)$$

zusammenfassen.

Um die Verschiebungsgrößen auf einfachem Wege zu erhalten, wird die Funktion $\Phi(z)$ vorübergehend mit dem Realteil $p(x,y)$ und dem Imaginärteil $q(x,y)$ dargestellt gemäß

$$\Phi(z) = p + iq, \quad (9.38)$$

und im weiteren werden folgende Beziehungen ausgenutzt:

$$\phi'(z) = p_x + iq_x = q_y - ip_y, \quad (9.39)$$

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \quad (9.40)$$

$$= 4 \operatorname{Re} [\phi'(z)] = 4p_x = 4q_y$$

$$U_{yy} = 4p_x - U_{xx} \quad (9.41)$$

$$U_{xx} = 4q_y - U_{yy} \quad (9.42)$$

Die Verschiebungsfunktionen u und v erhält man aus den Beziehungen für u_x und v_y , wenn die entsprechenden Ausdrücke so umgeformt werden, daß direkte Integration möglich wird. Aus den Identitäten

$$\begin{aligned}
 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} &= \sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
 &= U_{yy} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \Delta U \\
 &= 4p_x - U_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} 4p_x \\
 &= -U_{xx} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} p_x
 \end{aligned} \tag{9.43}$$

und

$$\begin{aligned}
 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= \sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
 &= U_{xx} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \Delta U \\
 &= 4q_y - U_{yy} - \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} 4q_y \\
 &= -U_{yy} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} q_y
 \end{aligned} \tag{9.44}$$

ergeben sich durch Integration die gesuchten Funktionen zu

$$2\mu u = -U_x + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} p \tag{9.45}$$

und

$$2\mu v = -U_y + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} q \tag{9.46}$$

mit

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9.47)$$

und

$$\lambda = \begin{cases} \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \text{für } ESZ \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \text{für } EVZ \end{cases} \quad (9.48)$$

Integrationsfunktionen wurden in (9.45) und (9.46) weggelassen, weil sie nur Starrkörperanteile beinhalten, welche aber später mitberücksichtigt werden können. Die Kombination $(u+iv)$ liefert die gewünschte Beziehung zu den komplexen Funktionen $\Phi(z)$, $\chi(z)$ bzw. $\Psi(z)$, und zwar gilt mit (9.29) und (9.38) unter Berücksichtigung von (9.47) sowie von (9.48)

$$\begin{aligned} 2\mu(u+iv) &= -[U_x + iU_y] + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} (p+iq) \\ &= \chi \Phi(z) - z \overline{\Phi'(z)} - \overline{\chi'(z)} \\ &= \chi \Phi(z) - z \overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \end{aligned} \quad (9.49)$$

wobei

$$\chi = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{für } ESZ \\ 3-4\nu & \text{für } EVZ \end{cases} \quad (9.50)$$

zu setzen ist. Starrkörperanteile lassen sich durch entsprechende Wahl von Φ und X' mitberücksichtigen.

Zur Berechnung der resultierenden Kraft mit den Komponenten $(T_x t ds)$ und $(T_y t ds)$ auf einen Randstück ds mit der Dicke t ist es vorteilhaft, die Beziehungen

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_{xx} \frac{dy}{ds} - \tau_{xy} \frac{dx}{ds} \\ &= U_{yy} \frac{dy}{ds} + U_{xy} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial}{\partial y} [U_y] \frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial x} [U_y] \frac{dx}{ds} \\ &= \frac{d}{ds} [U_y] \end{aligned} \tag{9.51}$$

und

$$\begin{aligned} T_y &= -\sigma_{yy} \frac{dx}{ds} + \tau_{xy} \frac{dy}{ds} \\ &= -U_{xx} \frac{dx}{ds} - U_{xy} \frac{dy}{ds} = -\frac{\partial}{\partial x} [U_x] \frac{dx}{ds} - \frac{\partial}{\partial y} [U_x] \frac{dy}{ds} \\ &= -\frac{d}{ds} [U_x] \end{aligned} \tag{9.52}$$

zu der Kombination $(T_x + iT_y)$ in folgender Weise zu verwenden:

$$\begin{aligned} T_x + iT_y &= \frac{d}{ds} [U_y - iU_x] = -i \frac{d}{ds} [U_x + iU_y] \\ &= -i \frac{d}{ds} [\Phi(z) + z \overline{\Phi'(z)} + \overline{X'(z)}] \end{aligned} \tag{9.53}$$

Integration dieses Ausdruckes zwischen den Punkten **(A)** und **(B)** auf dem Rand liefert sodann

$$\begin{aligned}
 \int_{(A)}^{(B)} (T_x + iT_y) t ds &= -i \left[\Phi(z) + z \overline{\Phi'(z)} + \overline{X'(z)} \right]_{(A)}^{(B)} t \\
 &= -i \left[\Phi(z) + z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right]_{(A)}^{(B)} t, \quad (9.54)
 \end{aligned}$$

und somit erhält man die Komponenten der auf der Bogenkurve zwischen (A) und (B) wirkenden resultierenden Kraft aus

$$F_x + i F_y = -i \left[\Phi(z) + z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right]_{(A)}^{(B)} t \quad (9.55)$$

Sind Spannungsgrößen T_x und T_y auf einem Randstück Γ_2 mit \bar{T}_x und \bar{T}_y vorgeschrieben, so läßt sich die Randbedingung in der Form

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) + z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} &= i \int_{(A)}^{(z)} (\bar{T}_x + i \bar{T}_y) ds = i \int_{s_0}^s (\bar{T}_x(s) + i \bar{T}_y(s)) ds \\
 &= f_1(s) + i f_2(s) + c_1 + i c_2 \text{ auf } \Gamma_2 \quad (9.56)
 \end{aligned}$$

verwenden, wobei hier von einem festen Punkt (A) zu einem variablen Punkt (B) mit der Koordinate z entlang der Randkurve Γ_2 integriert wird (s. Bild 9.1). Die Integrationsrichtung ist so zu wählen, daß sich beim Durchlaufen der Randkurve das Gebiet Ω immer zur Linken befindet (s. Bild 9.1). Da hier z einen Punkt auf der Randkurve Γ_2 bezeichnet, ist die Randkoordinate s natürlich eine Funktion des Punktes z .

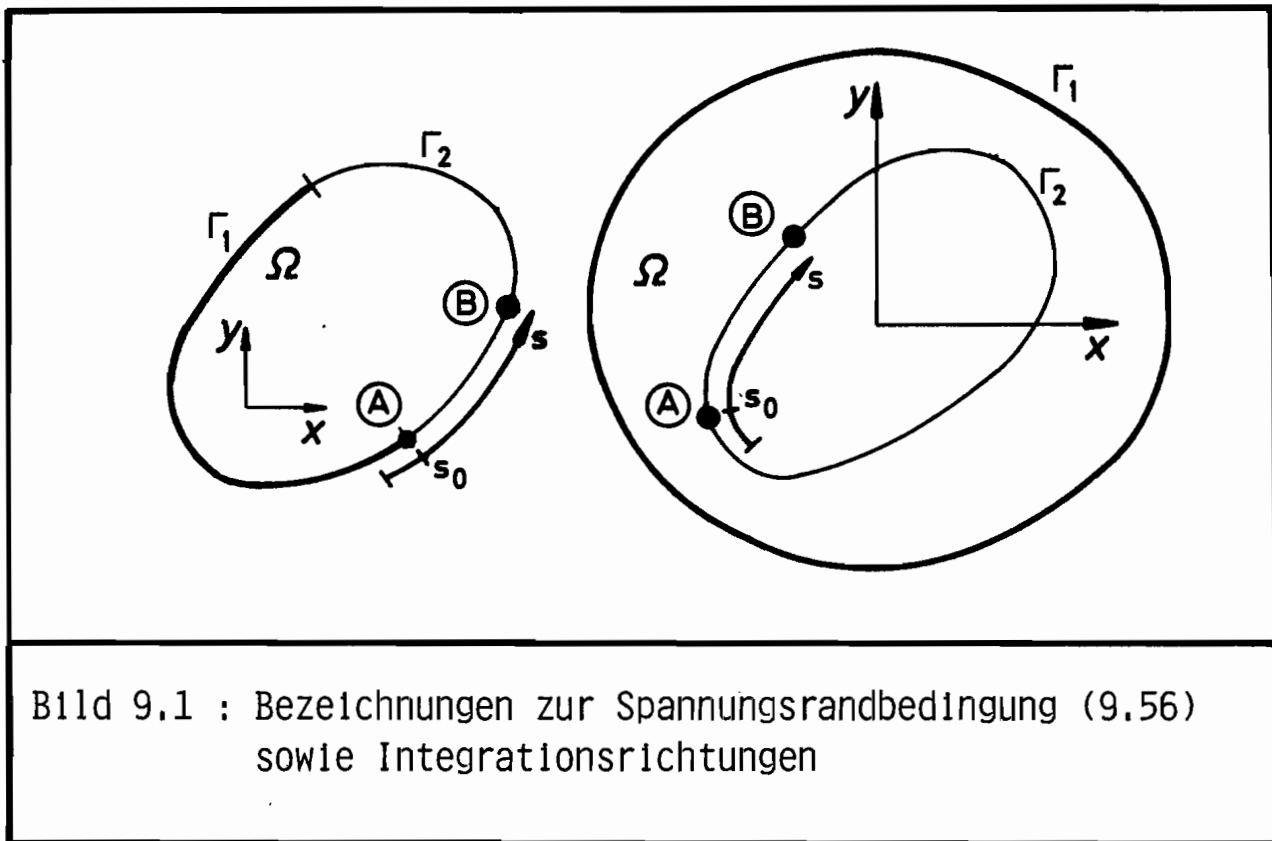


Bild 9.1 : Bezeichnungen zur Spannungsrandbedingung (9.56)
sowie Integrationsrichtungen

10 Verwendung der konformen Abbildung zur Angabe von Lösungsfunktionen

Zur Konstruktion von Lösungen partieller Differentialgleichungen für Gebiete mit Rändern, die durch ihre "komplizierte" Form eine direkte Problembehandlung nicht erlauben, hat sich für zweidimensionale Probleme die Verwendung der konformen Abbildung als sehr hilfreich erwiesen. Sie wird dazu benutzt, um ein Gebiet mit seiner Randkurve auf ein anderes Gebiet mit einer geometrisch einfacheren Randkurve abzubilden.

Bei dem vorliegenden Problemkreis geht es darum, auf besonders einflussreichen Randteilen die Randbedingungen exakt zu erfüllen. Zur Ermittlung derartiger Lösungsfunktionen, die auf einem Teil des Randes den geforderten Bedingungen genügen, kann der entscheidende Lösungsschritt sein, den betrachteten Randabschnitt auf eine einfach zu behandelnde Kurve mittels einer konformen Abbildung zu transformieren.

Nach kurzer Charakterisierung der konformen Abbildung werden einige Beziehungen zusammengestellt, die zur Behandlung von Randbedingungen dienlich sind.

Weiterhin werden Formeln für eine Lösungsdarstellung in transformierten Gebieten aufgeführt.

10.1 Konforme Abbildung

Eine konforme Abbildung läßt sich kurz an Hand von Bild 10.1 folgendermaßen charakterisieren:

Eine Abbildung, bei der alle Winkel erhalten bleiben, bezeichnet man als winkeltreu oder konform. Sie wird durch eine analytische Funktion der Form

$$\zeta = g(z) \tag{10.1}$$

$$= f^{-1}(z)$$

vermittelt und bildet ein Gebiet Ω der komplexen z -Ebene auf ein Gebiet Ω' der ζ -Ebene ab.

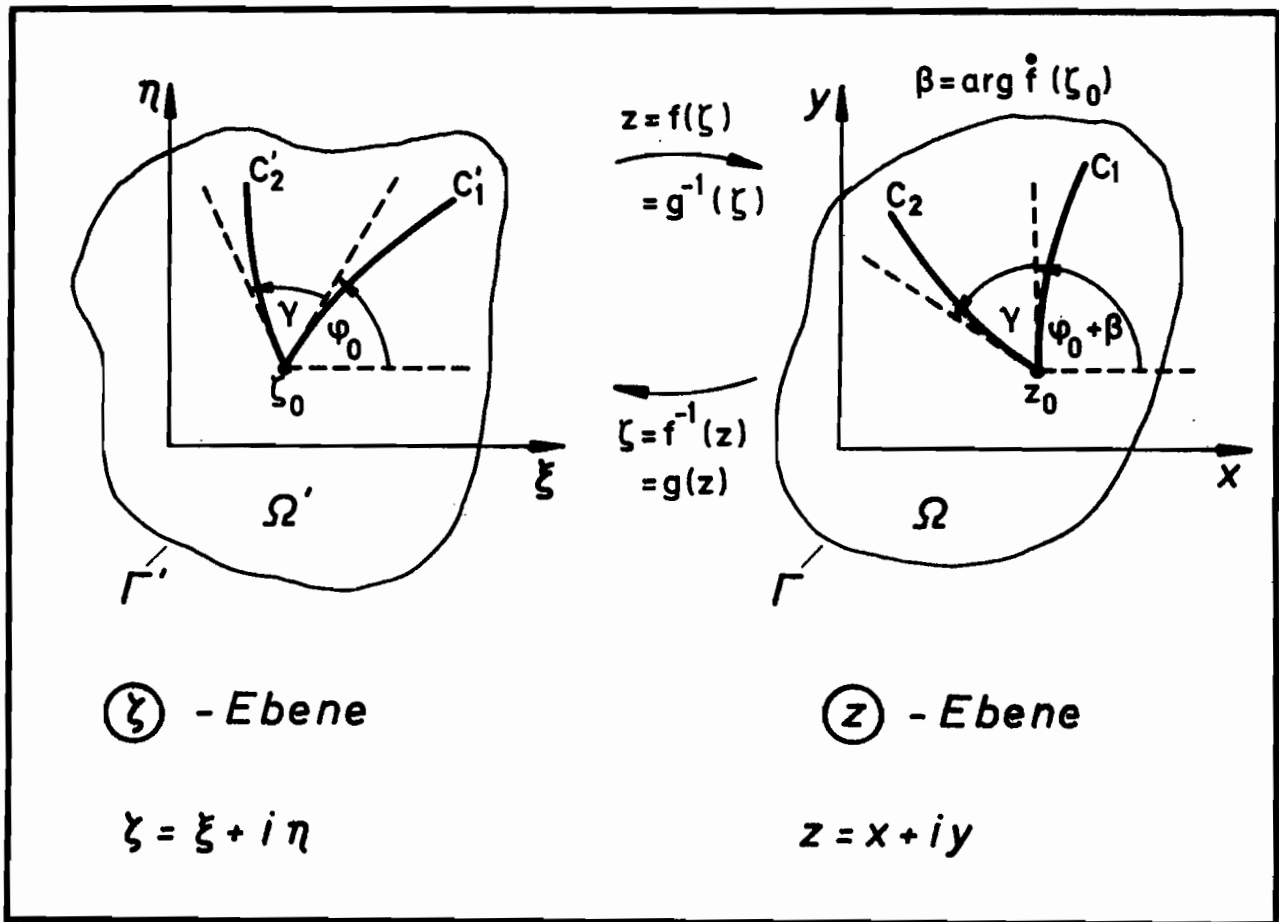


Bild 10.1 : Eineindeutige konforme Abbildung und inverse Beziehungen

Umgekehrt, bildet die Funktion

$$\begin{aligned}
z &= f(\zeta) \\
&= g^{-1}(\zeta)
\end{aligned}
\tag{10.2}$$

das Gebiet Ω' der ζ -Ebene in das Gebiet Ω der z -Ebene ab. Hierbei bedeuten f^{-1} die Umkehrfunktion zu f und g^{-1} die Umkehrfunktion zu g . Bei einer konformen Abbildung $z = f(\zeta)$ wird der Tangentenvektor einer jeden Kurve durch ζ_0 um den Winkel $\beta = \arg \dot{f}(\zeta_0)$ gedreht, was bedeutet, daß der Winkel γ , der von zwei von ζ_0 ausgehenden Kurven C_1' und C_2' gebildet wird, zwischen den zugehörigen von z_0 ausgehenden transformierten Kurven C_1 und C_2 wiederzufinden ist. Insbesondere bedeutet dies, daß orthogonale Raster in andere orthogonale Raster überführt werden. Es läßt sich also mit Hilfe von konformen Abbildungen eine Vielzahl von orthogonalen krummlinigen Koordinatensystemen gewinnen.

Für einen Punkt ζ_0 , bei dem

$$\dot{f}(\zeta_0) = 0
\tag{10.3}$$

gilt, ist die Konformität gestört.

Anzumerken ist noch, daß $f(\zeta)$ und $g(z)$ zunächst mehrdeutige Funktionen sein können, die sich jedoch durch Einschränken ihres Definitionsbereiches eindeutig machen lassen.

Bei den vorliegenden Problemstellungen ist das Gebiet in der z -Ebene gegeben, und zu einem geometrisch "einfacheren" Bild in der ζ -Ebene sind die Transformationen (10.1) und (10.2) gesucht. Ist eine der beiden Beziehungen bekannt, so läßt sich die andere mittels der inversen Funktion daraus ermitteln. Der Zweck einer konformen Abbildung ist in der Regel, eine der Problembehandlung nicht zugängliche Randform auf eine einfacher zu behandelnde Randkurve wie zum Beispiel den Einheitskreis oder eine Achsengerade zu transformieren.

10.2 Besondere Beziehungen, die man sich bei konformer Abbildung auf eine Halbebene oder auf das Innere bzw. Äußere eines Einheitskreises zur Behandlung von Randbedingungen zu Nutze machen kann

10.2.1 Abbildung auf die obere oder untere Halbebene

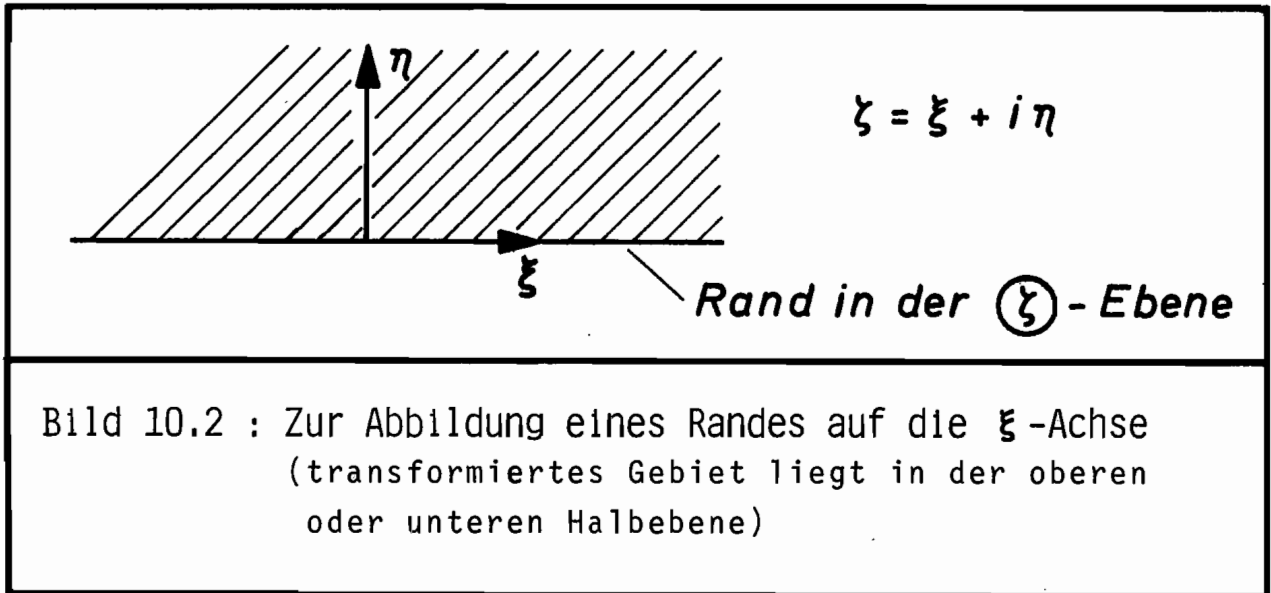


Bild 10.2 : Zur Abbildung eines Randes auf die ξ -Achse (transformiertes Gebiet liegt in der oberen oder unteren Halbebene)

Auf der ξ -Achse (s. Bild 10.2) gilt mit $\eta = 0$

$$\zeta = \xi \tag{10.4}$$

und

$$\bar{\zeta} = \xi \tag{10.5}$$

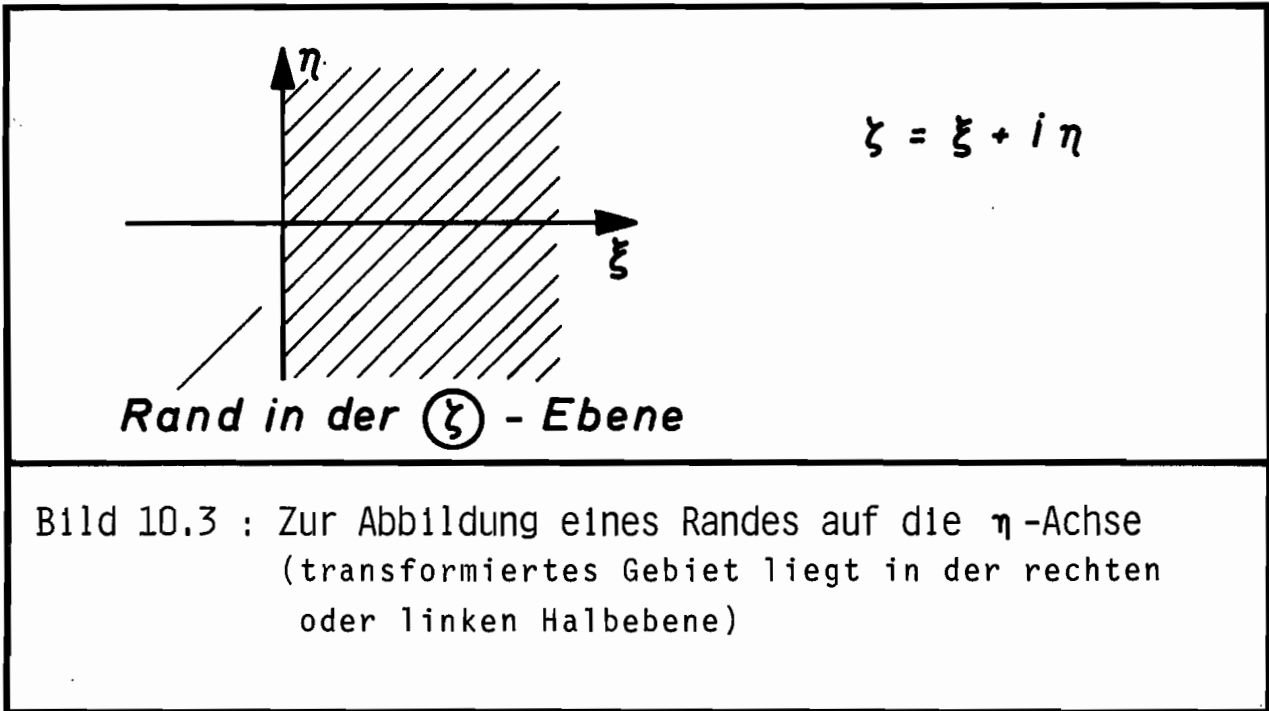
Somit läßt sich zur Behandlung von Randbedingungen in der ζ -Ebene die Beziehung

$$\bar{\zeta} = \zeta \quad \text{auf der } \xi\text{-Achse} \tag{10.6}$$

ausnutzen. Weiterhin gilt für ganzzahlige Exponenten j

$$\overline{\zeta^j} = \zeta^j \quad \text{auf der } \xi\text{-Achse} \tag{10.7}$$

10.2.2 Abbildung auf die rechte oder linke Halbebene



Auf der η -Achse (s. Bild 10.3) gilt mit $\xi = 0$

$$\zeta = i\eta \tag{10.8}$$

und

$$\bar{\zeta} = -i\eta \tag{10.9}$$

Bei der Behandlung von Randbedingungen in der ζ -Ebene steht einem also die Beziehung

$$\bar{\zeta} = -\zeta \quad \text{auf der } \eta\text{-Achse} \tag{10.10}$$

zur Verfügung. Für ganzzahlige gerade und ungerade Potenzen lassen sich die beiden Beziehungen

$$\overline{\zeta^j} = \zeta^j \quad \begin{array}{l} \text{auf der } \eta\text{-Achse} \\ \text{für gerades } j \end{array} \tag{10.11}$$

und

$$\overline{\zeta^j} = -\zeta^j \quad \begin{array}{l} \text{auf der } \eta\text{-Achse} \\ \text{für ungerades } j \end{array} \tag{10.12}$$

zu der Gleichung

$$\overline{\zeta^j} = (-1)^j \zeta^j \quad \text{auf der } \eta\text{-Achse} \tag{10.13}$$

zusammenfassen.

10.2.3 Abbildung auf das Innere oder Äußere eines Einheitskreises

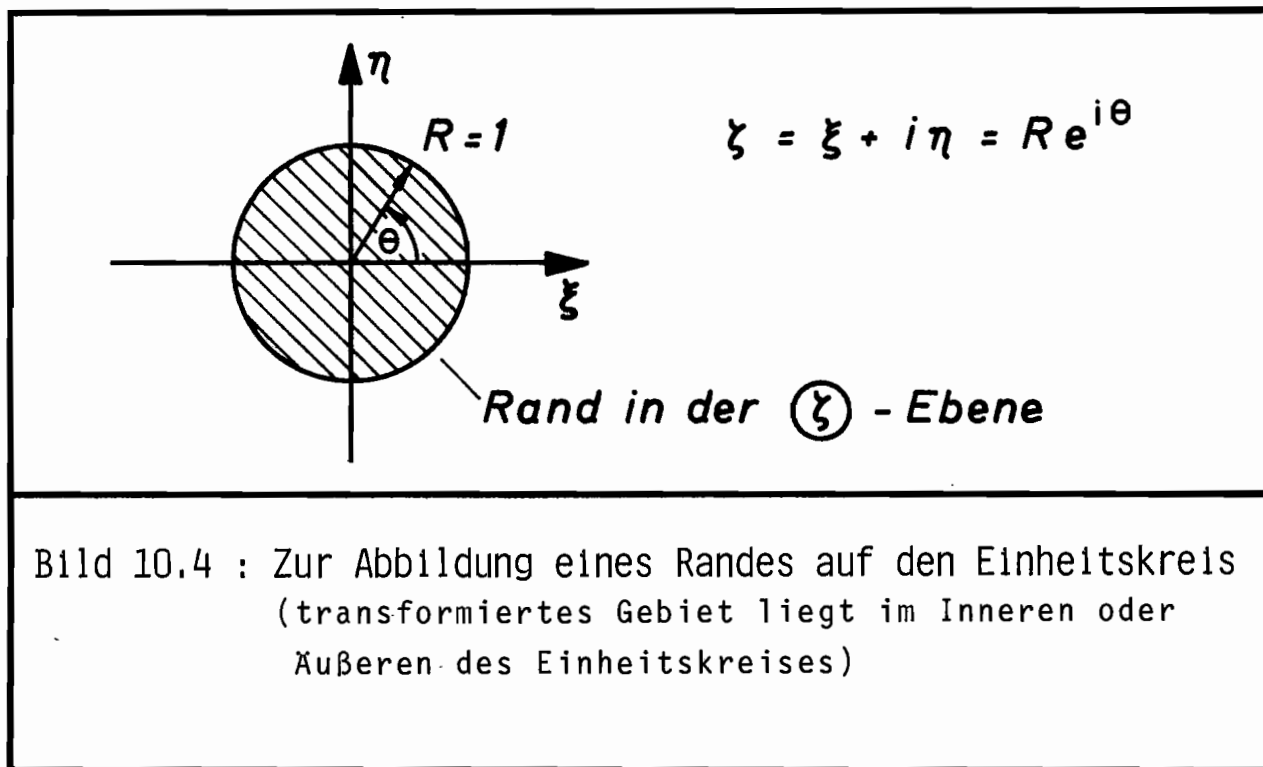


Bild 10.4 : Zur Abbildung eines Randes auf den Einheitskreis (transformiertes Gebiet liegt im Inneren oder Äußeren des Einheitskreises)

Ein wesentlicher Vorteil, der sich bei der Abbildung auf einen Einheitskreis (s. Bild 10.4) ergibt, ist, daß alle reellen Potenzen von R gleich "Eins" werden und der Ausdruck

$$\zeta^a = e^{ia\theta} \quad \text{auf dem Einheitskreis} \quad (10.14)$$

$$(|\zeta| = R = 1)$$

nur vom Winkel θ abhängig ist. Für die konjugiert komplexe Größe $\bar{\zeta}$ ergibt sich

$$\bar{\zeta} = \zeta^{-1} \quad \text{auf dem Einheitskreis } |\zeta| = 1 \quad (10.15)$$

und für ganzzahlige Exponenten j

$$\bar{\zeta}^j = \zeta^{-j} \quad \text{auf dem Einheitskreis } |\zeta| = 1, \quad (10.16)$$

sowie für nicht ganzzahlige, aber reelle Exponenten a

$$\bar{\zeta}^a = \zeta^{-a} \quad \text{auf dem Einheitskreis } |\zeta| = 1. \quad (10.17)$$

10.3 Verschiebungs-, Spannungs- und Randbedingungsbeziehungen bei konformer Abbildung

Werden nun die komplexen Funktionen Φ und X bzw. Ψ nicht in der als Originalebene betrachteten z -Ebene sondern im transformierten Gebiet angesetzt, welches in der ζ -Ebene liegt, so muß dies natürlich bei der Bildung von Ableitungen berücksichtigt werden. Formal müssen nun Funktionen, die direkt von z abhängig sind, von denen unterschieden werden, die direkt von ζ abhängig sind. Um im Endergebnis Indizierungen zu vermeiden, seien nun die in Kapitel 9.2 verwendeten Funktionen $\Phi(z)$, $X(z)$, $\Psi(z)$ in $\Phi_1(z)$, $X_1(z)$, $\Psi_1(z)$ umbenannt, und es werden die folgenden Beziehungen hergestellt:

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1(z) = \Phi_1(f(\zeta)) \quad (10.18)$$

$$X(\zeta) = X_1(z) = X_1(f(\zeta)) \quad (10.19)$$

$$\Psi(\zeta) = \Psi_1(z) = \Psi_1(f(\zeta)) \quad (10.20)$$

Für die ersten beiden komplexen Ableitungen der Funktion $\Phi(\zeta)$ nach z mit der Abbildungsbeziehung

$$z = f(\zeta) \quad (10.21)$$

und deren komplexen Ableitung

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{df(\zeta)}{d\zeta} = \dot{f}(\zeta) \quad (10.22)$$

gilt dann:

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{d\Phi(\zeta)}{dz} = \frac{d\Phi(\zeta(z))}{dz} = \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \\ &= \frac{d\Phi(\zeta)}{d\zeta} \frac{1}{\frac{dz}{d\zeta}} = \frac{\dot{\Phi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} \end{aligned} \quad (10.23)$$

$$\begin{aligned} \Phi'' &= \frac{d^2 \Phi(z)}{dz^2} = \frac{d^2 \Phi}{d\zeta^2} \frac{1}{\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^2} - \frac{d\Phi}{d\zeta} \frac{\frac{d^2 z}{d\zeta^2}}{\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)^3} \\ &= \frac{\ddot{\Phi}(\zeta)}{\dot{f}^2(\zeta)} - \dot{\Phi}(\zeta) \frac{\ddot{f}(\zeta)}{\dot{f}^3(\zeta)} \end{aligned} \quad (10.24)$$

Die Verschiebungs- und Spannungsgrößen, in Termen mit $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$ ausgedrückt, lauten nun:

$$2\mu(u + iv) = \kappa \Phi - f \frac{\overline{\dot{\Phi}}}{\dot{f}} - \overline{\Psi} \quad (10.25)$$

$$\sigma_{xx} - i\tau_{xy} = \frac{\overline{\dot{\Phi}}}{\dot{f}} + \frac{\dot{\Phi}}{\dot{f}} - \overline{f} \left(\frac{\ddot{\Phi}}{\dot{f}^2} - \dot{\Phi} \frac{\ddot{f}}{\dot{f}^3} \right) - \frac{\dot{\Psi}}{\dot{f}} \quad (10.26)$$

$$\sigma_{yy} + i\tau_{xy} = \frac{\overline{\dot{\Phi}}}{\dot{f}} + \frac{\dot{\Phi}}{\dot{f}} + \overline{f} \left(\frac{\ddot{\Phi}}{\dot{f}^2} - \dot{\Phi} \frac{\ddot{f}}{\dot{f}^3} \right) + \frac{\dot{\Psi}}{\dot{f}} \quad (10.27)$$

Die (9.56) entsprechende Randbedingung erhält nun folgendes Aussehen:

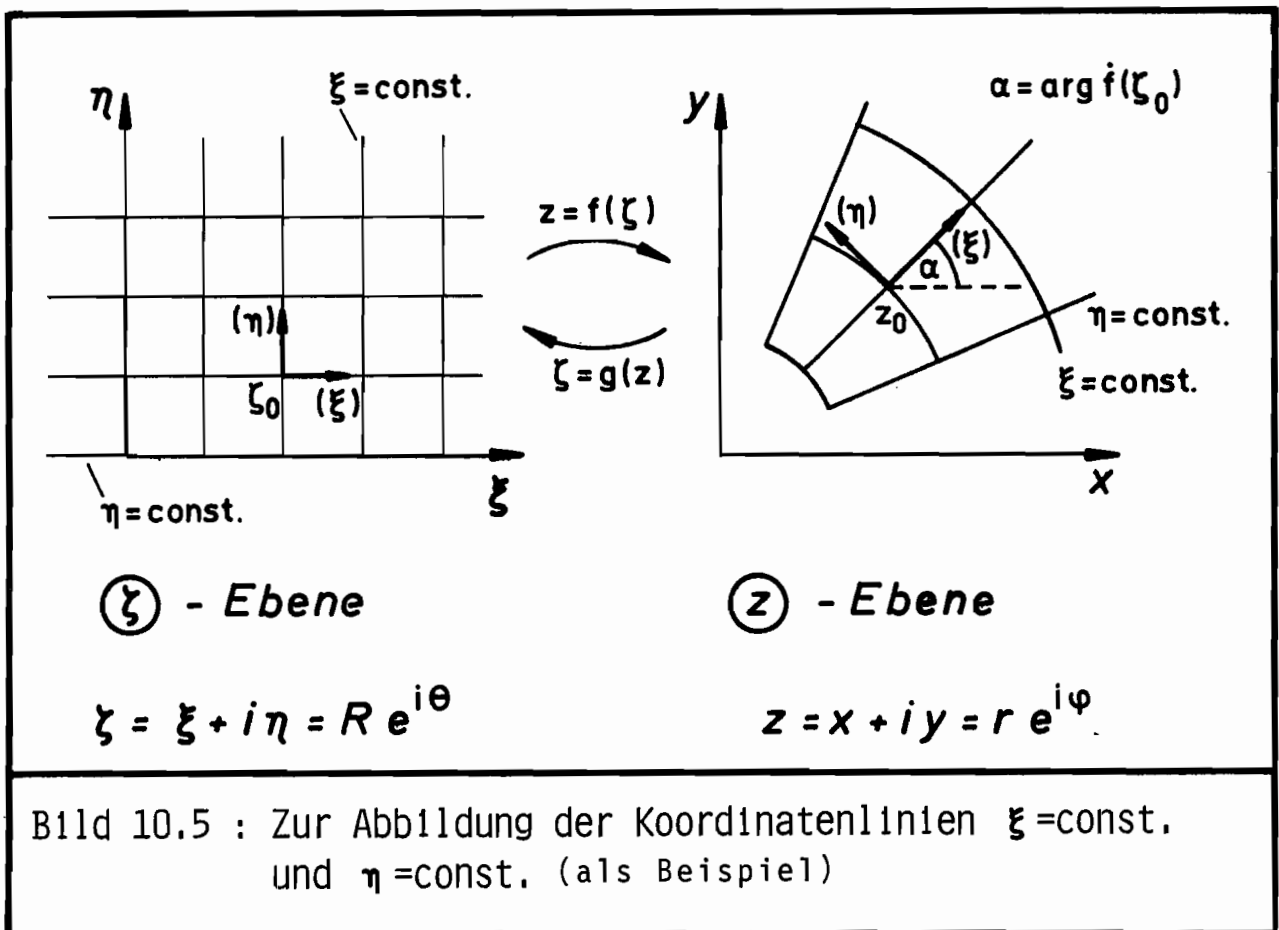
$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) + f(\zeta) \frac{\overline{\dot{\Phi}}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} + \overline{\Psi}(\zeta) &= \\ &= \Phi + f \frac{\overline{\dot{\Phi}}}{\dot{f}} + \frac{\overline{X}}{\dot{f}} = i \int_{\textcircled{A}}^{\zeta(z)} (\overline{T}_x + i\overline{T}_y) ds \\ &= f_1^* + if_2^* + \text{const.} \quad \text{auf } \Gamma_2' \end{aligned} \quad (10.28)$$

Der Ausdruck $(f_1^* + if_2^*)$ ist hier als Funktion des auf der transformierten Randkurve Γ_2' liegenden Punktes ζ zu verstehen.

10.4 Spezielle Formeln bei konformer Abbildung auf eine Halbebene

Das Gebiet der z -Ebene sei in den Bereich einer zur ζ -Ebene gehörenden Halbebene (rechte, linke, obere oder untere Halbebene) abgebildet.

Hierbei wird ein Teil einer Randkurve aus der z -Ebene auf die ξ - bzw. auf die η -Achse abgebildet, und es erweist sich als nützlich, die Verschiebungs- und Spannungsgrößen auf das ξ - η -System bezogen vorliegen zu haben.



Die durch den Punkt ζ_0 gehenden Tangenten (ξ) , (η) an die Kurven $\xi = \text{const.}$ und $\eta = \text{const.}$ erscheinen nach einer konformen Abbildung in die z -Ebene

als senkrecht aufeinanderstehende Achsen durch den Punkt z_0 (s. Bild 10.5). Die (ξ) -Achse bildet mit der x-Achse den Winkel α , der sich zu

$$\alpha = \arg \dot{f}(z_0) \quad (10.29)$$

ergibt. Im allgemeinen ist α ungleich φ , wenn φ der Winkel aus der Polarkoordinatendarstellung

$$z = r e^{i\varphi} \quad (10.30)$$

ist. Sollen nun die Verschiebungs- und Spannungsgrößen nicht auf das x-y-System sondern auf das ξ - η -System bezogen werden, so benötigt man für $e^{i\alpha}$ und $e^{2i\alpha}$ geeignete Darstellungen durch die Abbildungsfunktion. Diese lauten nun

$$e^{i\alpha} = \frac{\dot{f}}{|\dot{f}|} \quad (10.31)$$

bzw.

$$e^{-i\alpha} = \frac{\overline{\dot{f}}}{|\dot{f}|} \quad (10.32)$$

und

$$e^{2i\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = \frac{\dot{f}}{\overline{\dot{f}}} \quad (10.33)$$

Mit diesen Beziehungen lassen sich aus

$$u_{(\xi)} + i v_{(\eta)} = e^{-i\alpha} (u + i v), \quad (10.34)$$

$(u_{(\xi)}, v_{(\eta)})$: Verschiebungskomponenten in ξ - und η -Richtung)

$$\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \quad (10.35)$$

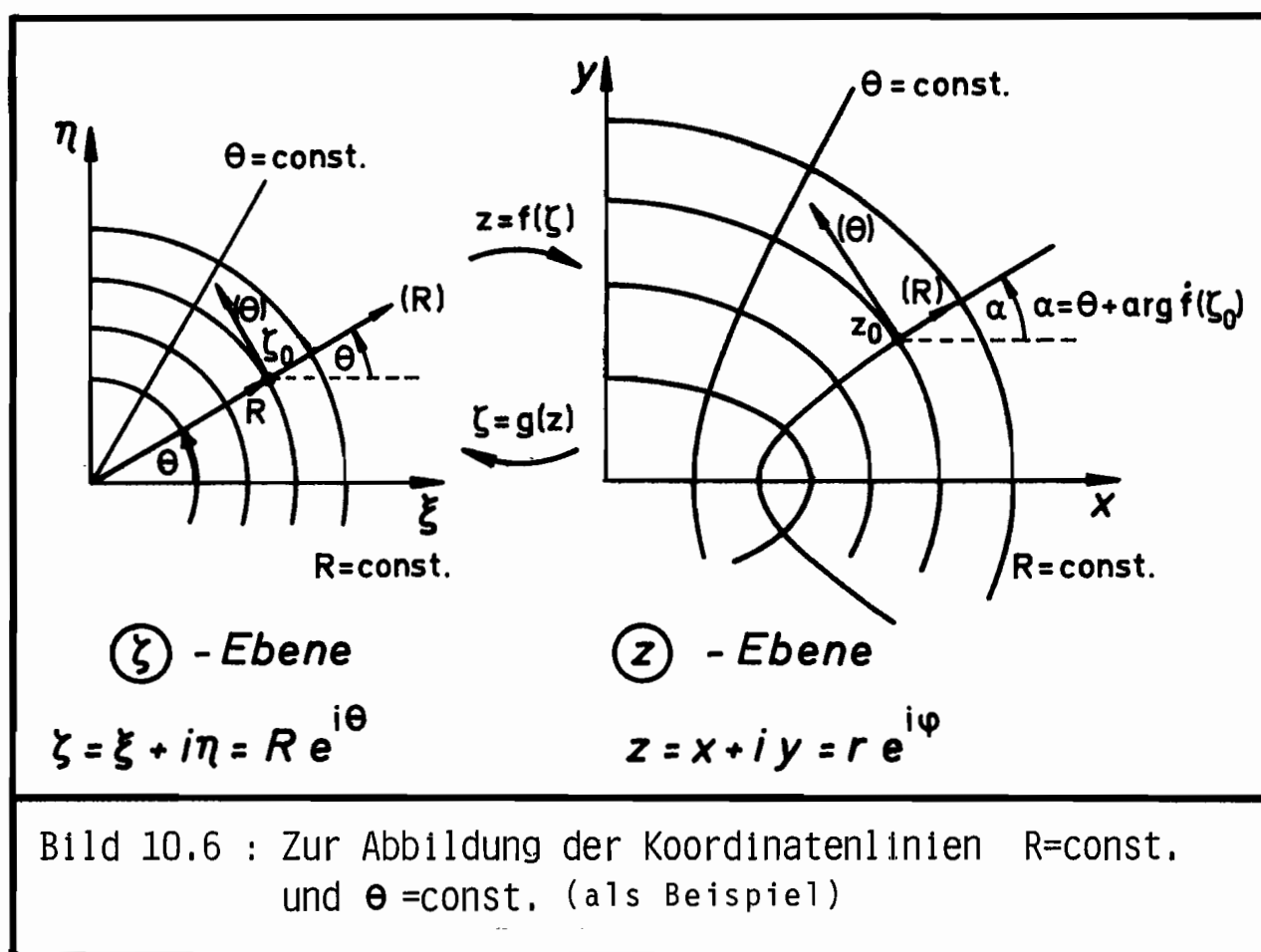
und

$$\sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\xi\xi} + 2i\tau_{\xi\eta} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy}) e^{2i\alpha} \quad (10.36)$$

unter Berücksichtigung von (9.49), (9.35) und (9.37) die gewünschten Größen angeben.

10.5 Spezielle Formeln bei konformer Abbildung auf ein Kreisgebiet

Das Gebiet der z -Ebene sei nun auf das Innere oder Äußere eines Kreises in der ζ -Ebene abgebildet. Hierbei wird ein Teil einer Randkurve aus der z -Ebene auf einen Kreisbogen in der ζ -Ebene abgebildet. So erweist es sich als sinnvoll, die Verschiebungs- und Spannungsfunktionen auf das R - Θ -System bezogen vorliegen zu haben.



Die durch den Punkt ζ_0 gehenden Tangenten $(R), (\Theta)$ an die Kurven $\Theta = \text{const.}$ und $R = \text{const.}$ erscheinen nach einer konformen Abbildung in der z -Ebene als senkrecht aufeinanderstehende Achsen durch den Punkt z_0 (s. Bild 10.6). Die (R) -Achse bildet mit der x -Achse einen Winkel α , der sich hier zu

$$\alpha = \theta + \arg \dot{f}(\zeta_0) \quad (10.38)$$

ergibt, wobei Θ der Winkel aus der Polarkoordinatendarstellung

$$\zeta = R e^{i\Theta} \tag{10.39}$$

ist. Die zur Darstellung der Verschiebungs- und Spannungsgrößen in einem (R)-(Θ)-System benötigten Größen $e^{i\alpha}$ bzw. $e^{-i\alpha}$ und $e^{2i\alpha}$ erhält man hier zu

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= e^{i(\Theta + \arg f(\zeta_0))} = e^{i\Theta} e^{i \arg f(\zeta_0)} \\ &= \frac{\zeta}{R} \frac{\dot{f}}{|\dot{f}|} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{\dot{f}}{|\dot{f}|} \end{aligned} \tag{10.40}$$

$$e^{-i\alpha} = \frac{\bar{\zeta}}{R} \frac{\bar{\dot{f}}}{|\dot{f}|} = \frac{\bar{\zeta}}{|\zeta|} \frac{\bar{\dot{f}}}{|\dot{f}|} \tag{10.41}$$

und

$$e^{2i\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = \frac{\zeta}{\bar{\zeta}} \frac{\dot{f}}{\bar{\dot{f}}} \tag{10.42}$$

Hiermit lassen sich aus

$$u_{(R)} + i v_{(\Theta)} = e^{-i\alpha} (u + i v) \tag{10.43}$$

($u_{(R)}$, $v_{(\Theta)}$: Verschiebungskomponenten in R- und Θ -Richtung)

$$\sigma_{RR} + \sigma_{\Theta\Theta} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} \tag{10.44}$$

und

$$\sigma_{\Theta\Theta} - \sigma_{RR} + 2i\tau_{R\Theta} = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy}) e^{2i\alpha} \tag{10.45}$$

unter Berücksichtigung von (9.49), (9.35) und (9.37) die gewünschten Größen angeben.

10.6 Formeln, bezogen auf Polarkoordinaten

Die Darstellung der Verschiebungen und Spannungen in Polarkoordinaten durch Terme mit $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$ sei an dieser Stelle noch explizit angegeben.

Mit

$$z = r e^{i\varphi} = f(\zeta) \tag{10.46}$$

erhält man

$$2\mu (u_{(r)} + i v_{(\varphi)}) = \underbrace{\frac{\bar{f}}{|f|}}_{= e^{-i\varphi}} \left[\chi \Phi - f \frac{\bar{\Phi}}{\bar{f}} - \bar{\Psi} \right], \tag{10.47}$$

($u_{(r)}$, $v_{(\varphi)}$: Verschiebungskomponenten in r - und φ -Richtung)

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} = 2 \left[\frac{\dot{\Phi}}{\dot{f}} + \frac{\bar{\dot{\Phi}}}{\bar{\dot{f}}} \right] \tag{10.48}$$

und

$$\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} + 2i\tau_{r\varphi} = 2 \left[\bar{f} \left(\frac{\ddot{\Phi}}{\dot{f}^2} - \dot{\Phi} \frac{\ddot{f}}{\dot{f}^3} \right) + \frac{\dot{\Psi}}{\dot{f}} \right] \underbrace{\frac{f}{\bar{f}}}_{= e^{2i\varphi}} \tag{10.49}$$

Aus (10.48) und (10.49) lassen sich die nützlichen Kombinationen

$$\sigma_{rr} - i\tau_{r\varphi} = \frac{\dot{\Phi}}{\dot{f}} + \frac{\bar{\dot{\Phi}}}{\bar{\dot{f}}} - \left[\bar{f} \left(\frac{\ddot{\Phi}}{\dot{f}^2} - \dot{\Phi} \frac{\ddot{f}}{\dot{f}^3} \right) + \frac{\dot{\Psi}}{\dot{f}} \right] \frac{f}{\bar{f}} \tag{10.50}$$

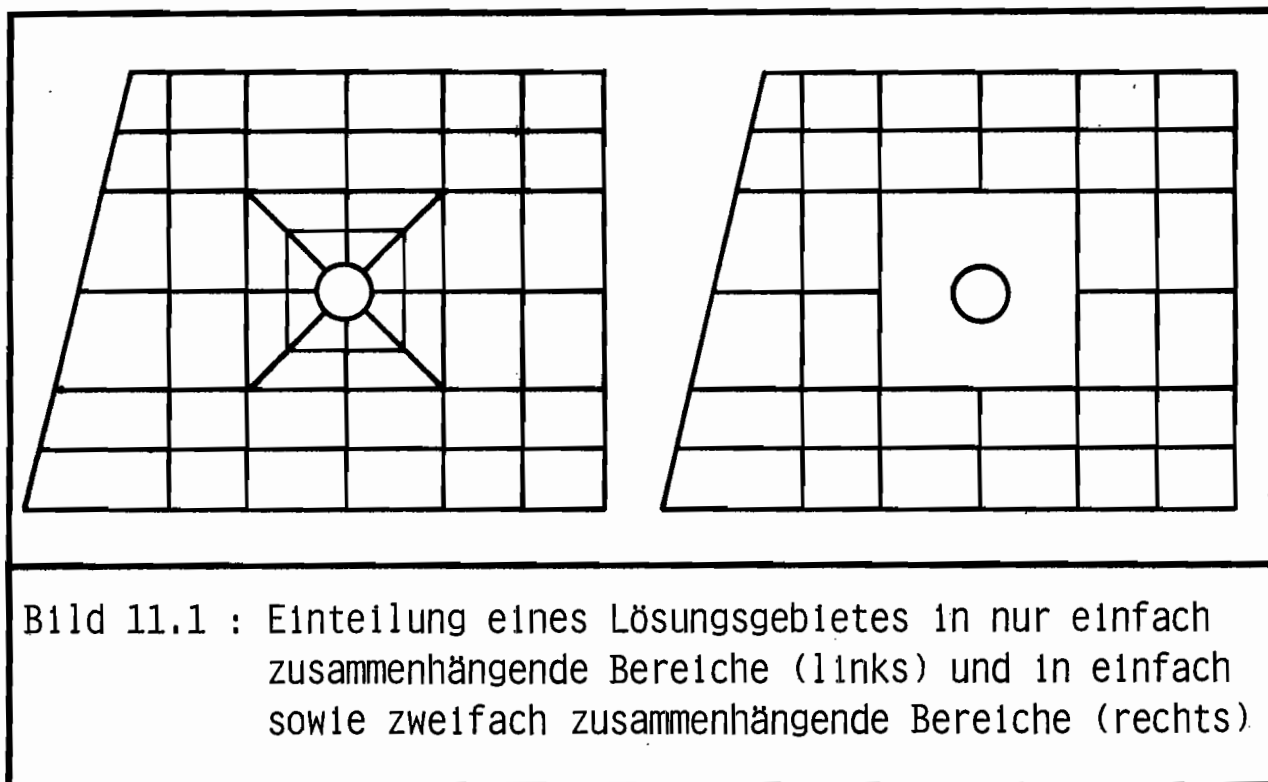
und

$$\sigma_{\varphi\varphi} + i\tau_{r\varphi} = \frac{\dot{\Phi}}{\dot{f}} + \frac{\bar{\dot{\Phi}}}{\bar{\dot{f}}} + \left[\bar{f} \left(\frac{\ddot{\Phi}}{\dot{f}^2} - \dot{\Phi} \frac{\ddot{f}}{\dot{f}^3} \right) + \frac{\dot{\Psi}}{\dot{f}} \right] \frac{f}{\bar{f}} \tag{10.51}$$

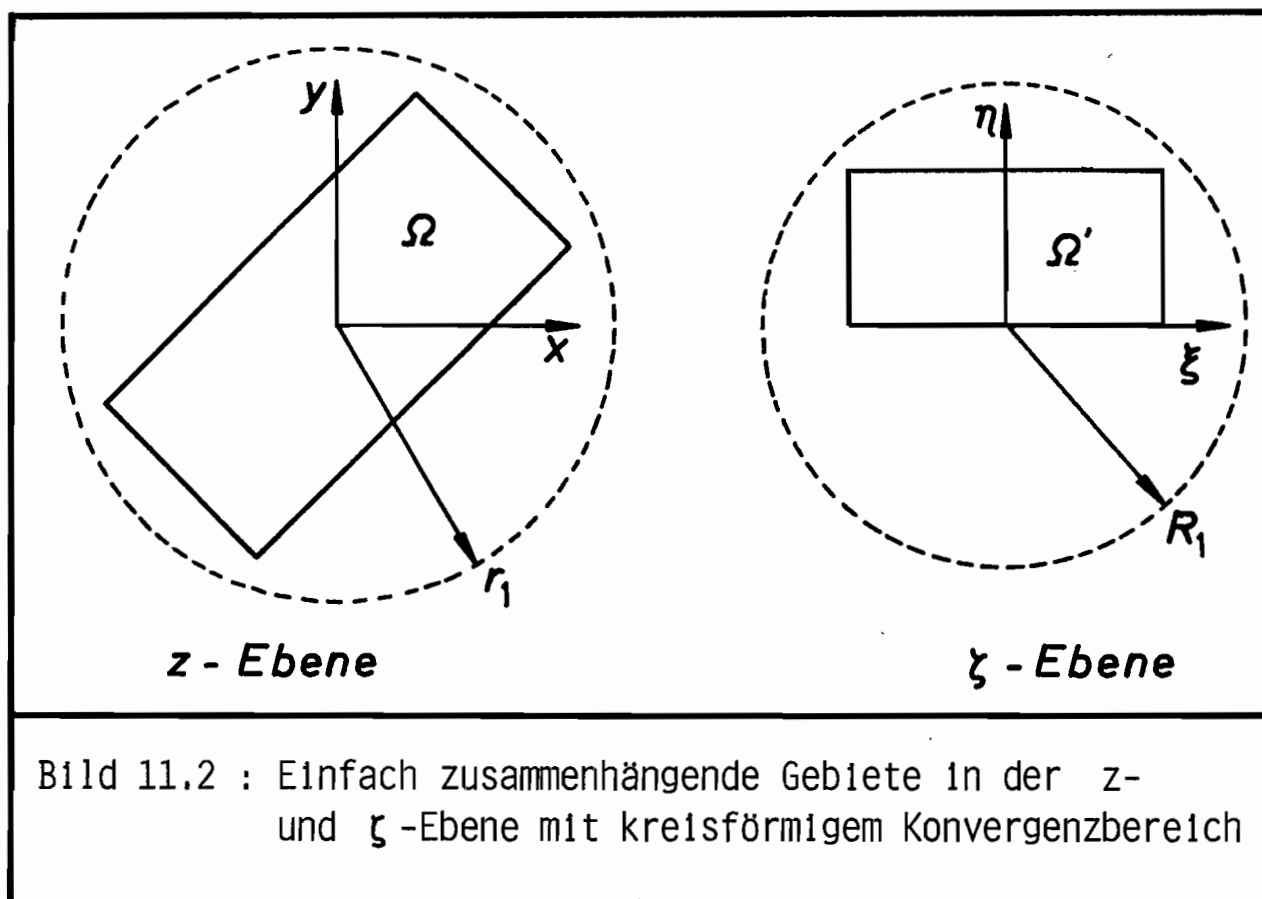
bilden.

11 Die Struktur der komplexen Funktionen ϕ und ψ

Hier sollen die Funktionen ϕ und ψ unter dem Gesichtspunkt gesehen werden, daß sie quasi als Ansatzfunktionen für wohldefinierte Elementbereiche benutzt werden. Die Struktur der Funktionen ϕ und ψ hängt wesentlich von der Form des betrachteten Teillösungsgebietes ab bzw. von dem zugehörigen transformierten Gebiet, wenn die Funktionen dort angesetzt werden. Unter "Form" ist hier zu verstehen, ob nun das betrachtete Gebiet ein einfach oder ein mehrfach zusammenhängender Bereich ist. Durch eine Einteilung in finite Elemente gelingt es, die Betrachtungen auf einfach und zweifach zusammenhängende Bereiche zu beschränken. Im Prinzip wäre natürlich eine Einteilung des Lösungsgebietes in nur einfach zusammenhängende Bereiche möglich, wie es mit den Standardelementen durchgeführt wird, aber es wird hier ein gewisser Vorteil darin gesehen, um jedes Loch ein zweifach zusammenhängendes Gebiet zu definieren und als solches zu behandeln (s. Bild 11.1).



In einem einfach zusammenhängenden Bereich, der sich in der \mathbb{Z} -Ebene oder in der mit \mathbb{C} bezeichneten Bildebene befinden kann (s. Bild 11.2), müssen die Funktionen ϕ und ψ auf jedenfall eindeutig und komplex differenzierbar sein.



Der Koordinatenursprung liege innerhalb des betrachteten Gebietes oder auf seinem Rand. Φ und Ψ können hiermit als Funktionen behandelt werden, die innerhalb des zu untersuchenden Bereiches keine Polstellen aufweisen. Somit können für Φ und Ψ Potenzreihenentwicklungen der Form

$$\Phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \tag{11.1}$$

bzw.

$$\Phi(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \zeta^j \tag{11.2}$$

und

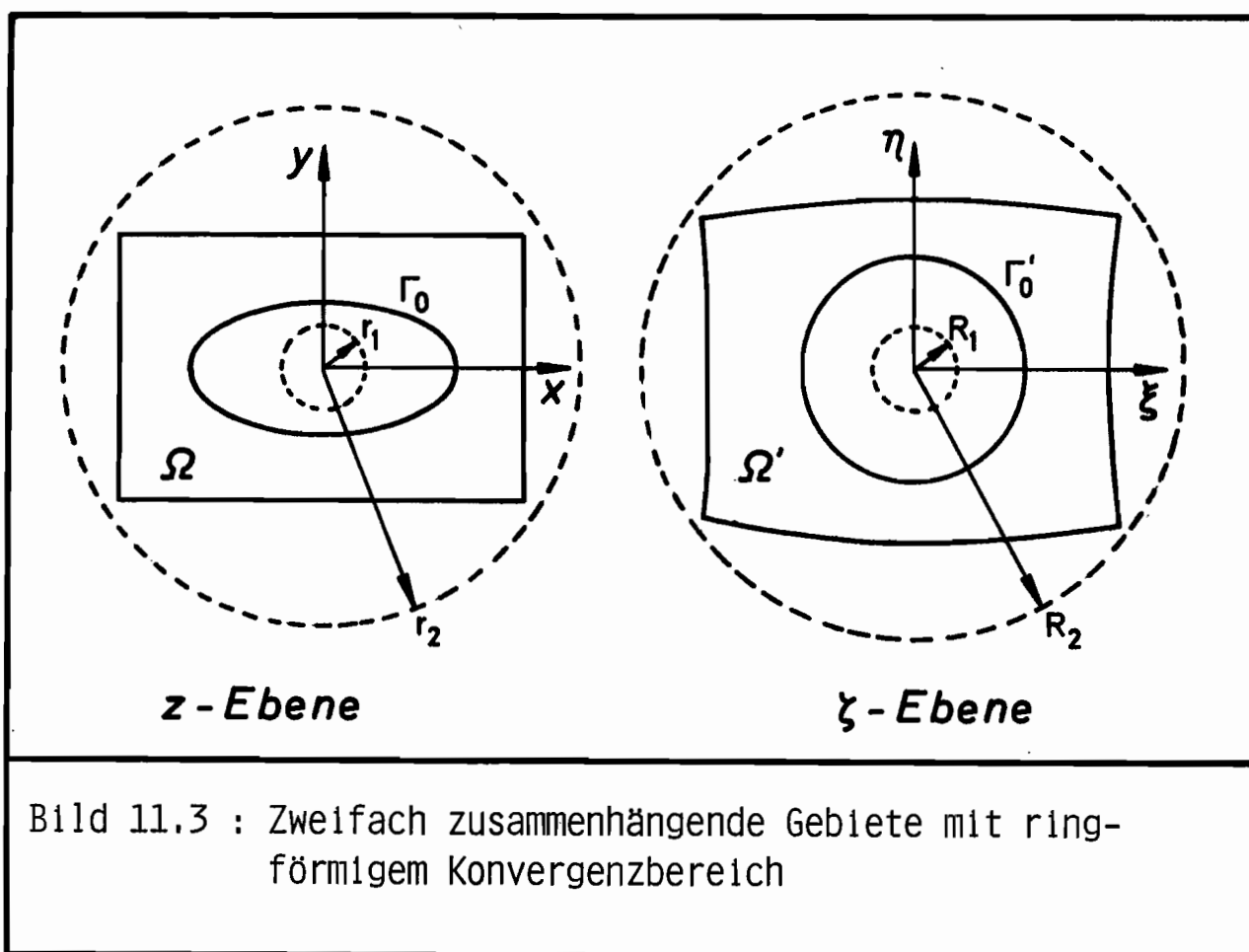
$$\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j \tag{11.3}$$

bzw.

$$\Psi(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \zeta^j \tag{11.4}$$

mit den komplexen Koeffizienten a_j, b_j gemacht werden. Weiterhin liege das betrachtete Gebiet innerhalb eines kreisförmigen Konvergenzgebietes mit dem Konvergenzradius r_1 bzw. R_1 .

Bei einem zweifach zusammenhängenden Bereich mit einem im Inneren des Loches liegenden Nullpunkt der komplexen z - bzw. ζ -Ebene (s. Bild 11.3) dürfen die komplex differenzierbaren Funktionen Φ und Ψ Pole innerhalb des Lochbereiches aufweisen und Funktionsanteile enthalten, die nicht eindeutig sind, ohne daß dabei die Spannungs- und Verschiebungsgrößen mehrdeutig würden.



Für die eindeutigen Funktionsanteile, die hier mit ϕ_0 und ψ_0 bezeichnet seien, können Potenzreihenentwicklungen in Form von Laurentreihen gemacht werden:

$$\phi_0(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j \tag{11.5}$$

bzw.

$$\phi_0(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \zeta^j \quad (11.6)$$

$$\psi_0(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j z^j \quad (11.7)$$

bzw.

$$\psi_0(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \zeta^j \quad (11.8)$$

Das betrachtete Gebiet liege innerhalb eines ringförmigen Konvergenzgebietes mit den Konvergenzradien r_1, r_2 bzw. R_1, R_2 (s. Bild 11.3).

Im folgenden werden nur die in der z -Ebene gültigen Funktionen verwendet. Die Ergebnisse werden dann später auf die Funktionen in der ζ -Ebene übertragen.

Die in Frage kommenden mehrdeutigen Funktionsanteile lassen sich aus der Logarithmusfunktion

$$\ln z = \ln r e^{i\varphi} = \ln r + i\varphi \quad (11.9)$$

herleiten, die ja bei einem einmaligen Umfahren einer geschlossenen Kurve einen Zuwachs von 2π erhält. Die Logarithmusfunktion läßt sich nur durch entsprechende Wahl des Definitionsbereiches (z.B. $0 \leq \varphi < 2\pi$ oder $-\pi \leq \varphi < \pi$ etc.) eindeutig machen, d. h. durch Definition eines Verzweigungsschnittes. Damit ist sie aber nicht mehr für ein zweifach zusammenhängendes Gebiet zu gebrauchen, sondern nur noch für ein Ringgebiet, das bei irgendeinem $\varphi = \text{const.}$ aufgeschlitzt ist. Das besondere an der Logarithmusfunktion ist, daß sie selbst ohne Definitionseinschränkung mehrdeutig ist, aber ihre sämtlichen komplexen Ableitungen eindeutig sind. Durch die erste Ableitung

$$\frac{d}{dz} [\ln z] = \frac{1}{z} \quad (11.10)$$

und die zweite Ableitung

$$\frac{d^2}{dz^2} [\ln z] = -\frac{1}{z^2} \quad (11.11)$$

kommen die Terme z^{-1} und z^{-2} , welche beim Differenzieren der Laurentreihen (11.5) und (11.6) verlorengehen, wieder in die Spannungs- und Verschiebungsbeziehungen hinein.

Betrachtet man nun zunächst die Beziehungen für die Spannungen (9.35) und (9.37), so ergeben sich aus der Bedingung, daß die Spannungsgrößen eindeutig sein sollen, nacheinander die Forderungen, daß $\operatorname{Re}[\phi']$, $\operatorname{Re}[\phi'']$, $\operatorname{Im}[\phi'']$, $\operatorname{Re}[\psi']$ und $\operatorname{Im}[\psi']$ eindeutig sein müssen. Hieraus folgt: ψ' und ϕ'' können die Logarithmusfunktion nicht enthalten, wohl aber kann der Term $\ln z$ mit einem reellen Koeffizienten versehen in ϕ' vorkommen, da der Realteil von $\ln z$ eindeutig ist. So erhält man mit den eindeutigen Funktionen ϕ_0 und ψ_0 folgendes Schema:

$$\phi(z) = \phi_0(z) + A z \ln z + B \ln z \quad (\text{mehrdeutig}) \quad (11.12)$$

$$\phi'(z) = \phi_0'(z) + A \ln z + A + B z^{-1} \quad (\text{mehrdeutig, aber} \quad (11.13) \\ \text{eindeutiger Realteil})$$

$$\phi''(z) = \phi_0''(z) + A z^{-1} - B z^{-2} \quad (\text{eindeutig}) \quad (11.14)$$

$$\psi(z) = \psi_0(z) + C \ln z \quad (\text{mehrdeutig}) \quad (11.15)$$

$$\psi'(z) = \psi_0'(z) + C z^{-1} \quad (\text{eindeutig}) \quad (11.16)$$

Hierbei sind B und C komplexe Koeffizienten, und A ist rein reell.

Zur Erfüllung der Forderung nach eindeutigen Verschiebungsfunktionen gewinnt man zunächst mit (9.49) nach dem Umfahren einer geschlossenen Kurve vom Punkt $z_0(r_0, \varphi_0)$ aus die Differenz

$$\begin{aligned}
 & 2\mu \left[u(r_0, \varphi_0 + 2\pi) + iv(r_0, \varphi_0 + 2\pi) \right] - 2\mu \left[u(r_0, \varphi_0) + iv(r_0, \varphi_0) \right] = \\
 & = \chi r_0 e^{i\varphi_0} A(\ln r + i\varphi_0 + i2\pi) + \chi B(\ln r + i\varphi_0 + i2\pi) + \\
 & - r_0 e^{i\varphi_0} A(\ln r - i\varphi_0 - i2\pi) - \bar{C}(\ln r - i\varphi_0 - i2\pi) + \\
 & - \left[\chi r_0 e^{i\varphi_0} A(\ln r + i\varphi_0) + \chi B(\ln r + i\varphi_0) \right] + \\
 & - r_0 e^{i\varphi_0} A(\ln r - i\varphi_0) - \bar{C}(\ln r - i\varphi_0) \Big] \\
 & = 2\pi i \left[(\chi + 1) A z_0 + \chi B + \bar{C} \right] \tag{11.17}
 \end{aligned}$$

Dieser Differenzausdruck muß für beliebige Punkte z_0 gleich Null werden. So erhält man:

$$A = 0 \tag{11.18}$$

und

$$\bar{C} = -\chi B \tag{11.19}$$

Für eindeutige Verschiebungs- und Spannungsfunktionen in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet müssen somit die Funktionen Φ und Ψ die Form

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + B \ln z \tag{11.20}$$

bzw.

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) - \chi \bar{B} \ln z \tag{11.21}$$

annehmen. Der Wert des Koeffizienten B läßt sich sogar explizit in allgemeiner Form angeben, wenn man beachtet, daß man mit (9.54) durch Integration im Uhrzeigersinn auf der geschlossenen Kurve Γ_0 , die das Loch des zweifach zusammenhängenden Bereichs begrenzt, die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} (\bar{T}_x + i \bar{T}_y) t ds &= \int_{\Gamma_0} (T_x + i T_y) t ds && \text{(mit } \Gamma_0 \subset \Gamma_2) \\ &= -i [\Phi(z) + z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}]_{\Gamma_0} t \\ &= -i [-i 2\pi B - i 2\pi \kappa B] t \\ &= -2\pi(1 + \kappa) B t \end{aligned} \tag{11.22}$$

erhält. Hieraus ergibt sich für B der Wert

$$B = - \frac{1}{2\pi(1 + \kappa)} \int_{\Gamma_0} (\bar{T}_x + i \bar{T}_y) ds \tag{11.23}$$

Somit beinhaltet der Ausdruck $(-2\pi[1 + \kappa] B t)$ mit seinem Real- und Imaginärteil die Komponenten der auf Γ_0 wirkenden resultierenden Kraft.

Die für zweifach zusammenhängende Bereiche in der ζ -Ebene geltenden Funktionen zur Erzielung von eindeutigen Verschiebungs- und Spannungsgrößen haben eine den Gleichungen (11.20) und (11.21) entsprechende Gestalt:

$$\Phi(\zeta) = \Phi_0(\zeta) + B \ln \zeta \tag{11.24}$$

$$\Psi(\zeta) = \Psi_0(\zeta) - \kappa \bar{B} \ln \zeta \tag{11.25}$$

Auch die Beziehung für B gemäß Gleichung (11.23) bleibt hier gültig wie aus

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_0} (\bar{T}_x + i \bar{T}_y) t \, ds &= \int_{\Gamma_0} (T_x + i T_y) t \, ds \\
 &= -i \left[\Phi(\zeta) + f(\zeta) \frac{\overline{\dot{\Phi}(\zeta)}}{\dot{f}(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} \right]_{\Gamma_0} t \\
 &= -2\pi(1+\kappa) B t
 \end{aligned}
 \tag{11.26}$$

zu ersehen ist.

Eine andere Betrachtungsweise der Problematik der mehr- und eindeutigen Funktionen bei zweifach zusammenhängenden Gebieten ist die folgende: Es wird wiederum von den die Spannungsgrößen beschreibenden Gleichungen ausgegangen und die Eindeutigkeit verlangt. Da in diesen Beziehungen nur Ableitungen der Funktionen Φ und Ψ vorkommen und Φ' sowie Ψ' bzw. $\dot{\Phi}$ sowie $\dot{\Psi}$ die niedrigsten Ableitungen sind, kann man annehmen, daß diese Funktionen selbst bzw. deren eindeutigen Anteile durch vollständige Laurentreihen dargestellt werden können. Betrachtet man wiederum nur die direkt von z abhängigen Funktionen und berücksichtigt, daß nur der Realteil von $\Phi'(z)$ eindeutig zu sein braucht, so kommt man zu den Darstellungen

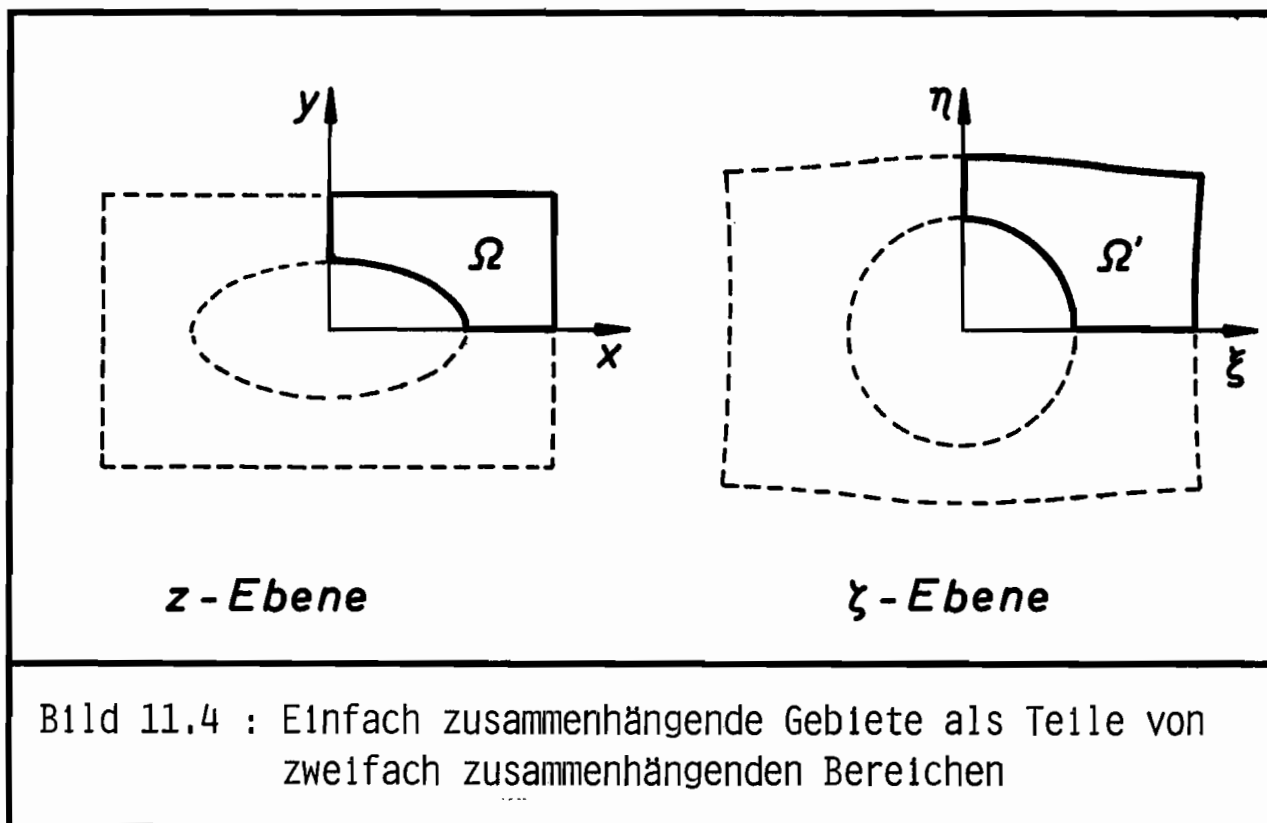
$$\Phi'(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^* z^j + A^* \ln z
 \tag{11.27}$$

und

$$\Psi'(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j^* z^j
 \tag{11.28}$$

Die Integration von Φ' und Ψ' führt durch die in den Laurentreihen enthaltenen Terme mit z^{-1} zu weiteren Logarithmustermen. Schließlich liefert eine Eindeutigkeitsbetrachtung bezüglich der Verschiebungen Beziehungen, die den Gleichungen (11.20) und (11.21) unter Berücksichtigung von (11.5) und (11.7) äquivalent sind.

Es sei noch kurz auf den Fall eingegangen, daß das betrachtete Gebiet nur ein Teil eines zweifach zusammenhängenden Bereiches ist (s. Bild 11.4).

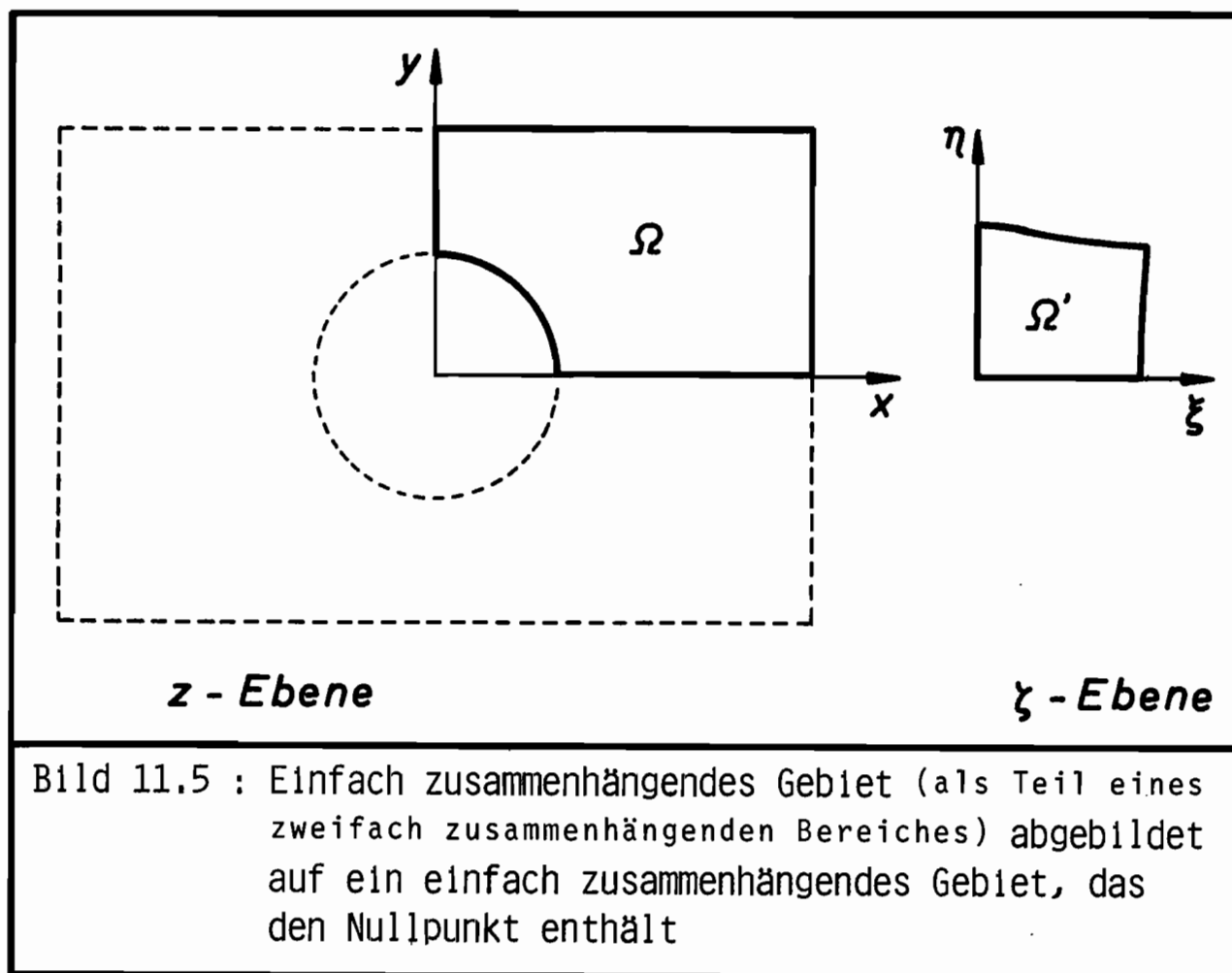


In diesem Falle können Laurentreihen sowie Logarithmusfunktionen verwendet werden, welche sich hier durch entsprechende Festlegung des Definitionsbereiches eindeutig machen lassen, so daß man beispielsweise für $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$ die folgenden Ansätze mit den komplexwertigen Koeffizienten a_j, b_j, A, B, C machen kann:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \zeta^j + A \zeta \ln \zeta + B \ln \zeta \tag{11.29}$$

$$\Psi(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \zeta^j + C \ln \zeta \tag{11.30}$$

Eine weitere Bemerkung zur Struktur der Funktionen ϕ und ψ sei noch angeschlossen: Wird ein Bereich der z -Ebene gemäß Bild 11.5, welcher als Teil eines zweifach zusammenhängenden Bereiches verstanden werden kann, jedoch einfach zusammenhängend ist, auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet abgebildet, das den Nullpunkt enthält, so sind für $\phi(\zeta)$ und $\psi(\zeta)$ bei einer Potenzreihenentwicklung nur positive Potenzen möglich und Logarithmusterme dürfen nicht erscheinen.



Wie das Beispiel mit dem eine Ecke beinhaltenden Bereich (s. Kap.17) zeigen wird, ist es nicht immer möglich, mit Potenzreihen, die nur ganze Exponenten aufweisen, die Randbedingungen zu erfüllen. So kann es unter Umständen geeignet sein, auch allgemeine komplexe Exponenten in einer Potenzreihe zuzulassen. Da nun die exakte Erfüllung von Teilrandbedingungen nicht immer möglich sein wird unter der Annahme, daß sowohl ϕ als auch ψ im ganzen betrachteten Bereich gültige Potenzreihenentwicklungen besitzen, kann unter

Umständen folgender Weg zum Ziel führen: Neben einem Potenzreihenansatz für $\phi(\zeta)$ wird für $\dot{X}(\zeta)$ anstelle von $\Psi(\zeta)$ ein Ansatz gemäß

$$\dot{X}(\zeta) = \sum_j b_j \zeta^j \tag{11.31}$$

gemacht. Entsprechend der Substitution (9.32), nämlich ausführlich beschrieben durch

$$\Psi(\zeta) = X'(\zeta) = \frac{\dot{X}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} \tag{11.32}$$

bedeutet dies, daß eine Funktion $1/\dot{f}$ bei der Darstellung von Ψ ausgeklammert wird laut

$$\Psi(\zeta) = \frac{1}{\dot{f}(\zeta)} \sum_j b_j \zeta^j \tag{11.33}$$

was sich als günstig erweist, wenn das tatsächliche Ψ den Charakter einer gebrochenen Funktion mit dem Nenner \dot{f} infolge der vorgegebenen Teilrandbedingung aufweist. Dann braucht also nur die Zählerfunktion von Ψ (also \dot{X}) in eine Potenzreihe dargestellt zu werden. Die Eindeutigkeit wird nicht betroffen, da Zähler- und Nennerfunktion eindeutig sind.

12 Funktionen Φ und Ψ , welche Starrkörperanteile repräsentieren

Die Funktionen

$$\begin{aligned}\Phi &= a_0 + i\beta_1 z \\ &= \alpha_0 + i\beta_0 + i\beta_1 z\end{aligned}\tag{12.1}$$

und

$$\begin{aligned}\Psi &= b_0 \\ &= \gamma_0 + i\delta_0\end{aligned}\tag{12.2}$$

führen zu verschwindenden Spannungsgrößen. Hierbei bewirken die Funktionsanteile mit a_0 und b_0 Starrkörperverschiebungen in x - und in y -Richtung, und der Term $i\beta_1 z$ stellt einen Rotationsanteil dar, wie aus

$$\begin{aligned}2\mu u &= \operatorname{Re} [\kappa \Phi - z \bar{\Phi}' - \bar{\Psi}] \\ &= (\kappa \alpha_0 - \gamma_0) - (1 + \kappa) \beta_1 y\end{aligned}\tag{12.3}$$

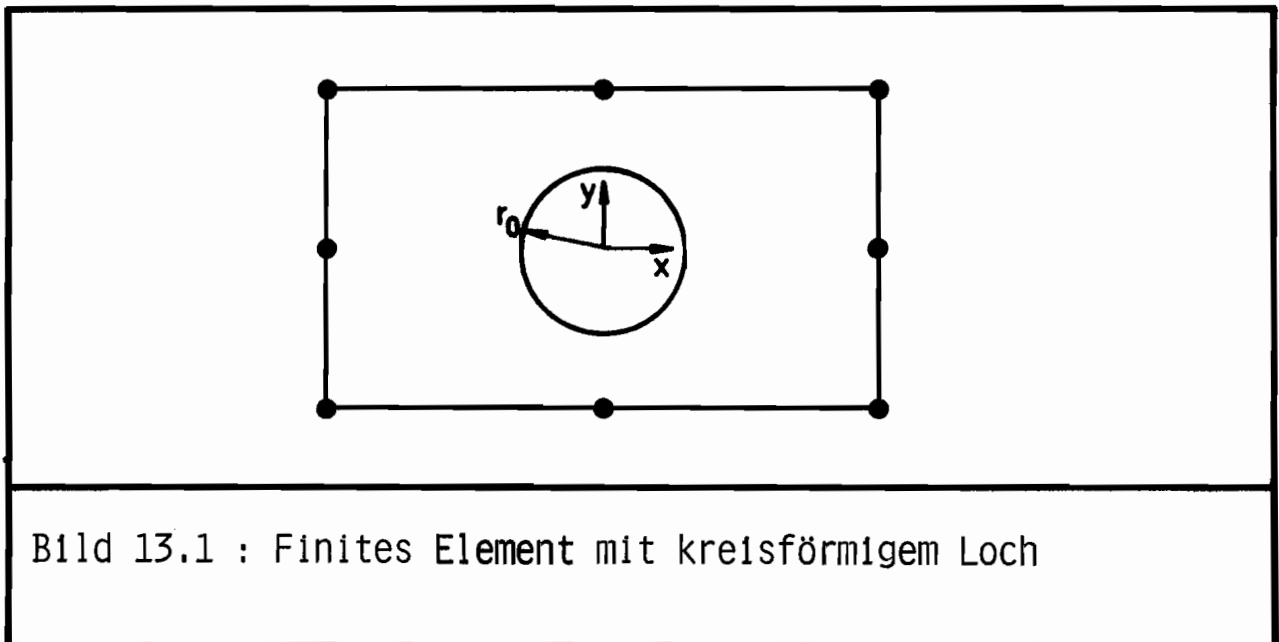
und

$$\begin{aligned}2\mu v &= \operatorname{Im} [\kappa \Phi - z \bar{\Phi}' - \bar{\Psi}] \\ &= (\kappa \beta_0 + \delta_0) + (1 + \kappa) \beta_1 x\end{aligned}\tag{12.4}$$

zu ersehen ist. Die Größen $(\kappa \alpha_0 - \gamma_0)$ sowie $(\kappa \beta_0 + \delta_0)$ werden jeweils zu einem Freiwert zusammengefaßt.

13 Finite Elemente mit kreisförmigem Loch

Für finite Elemente, die ein kreisförmiges Loch enthalten (s. Bild 13.1 als Beispiel), sollen nun komplexe Ansatzfunktionen so konstruiert werden, daß auf dem Kreisrand die vorgegebenen Randbedingungen exakt erfüllt sind. Zunächst sei hier der Fall des unbelasteten Kreisrandes behandelt, und hier-nach werden die Fälle konstanter radialer Belastung und gleichmäßig verteilter Schubspannung betrachtet. Der erste Fall ist insofern von besonderer Bedeutung, als die erhaltenen Funktionen, die freie Parameter enthalten, eine Überlagerung mit jedem beliebigen Lastfall gestatten. Bei einer konkreten nicht homogenen Belastung hingegen weisen die speziellen Lösungsanteile keine Freiwerte auf.



13.1 Konstruktion der Ansatzfunktionen bei unbelastetem Kreisrand

Die einzuhaltenden Randbedingungen lauten hier:

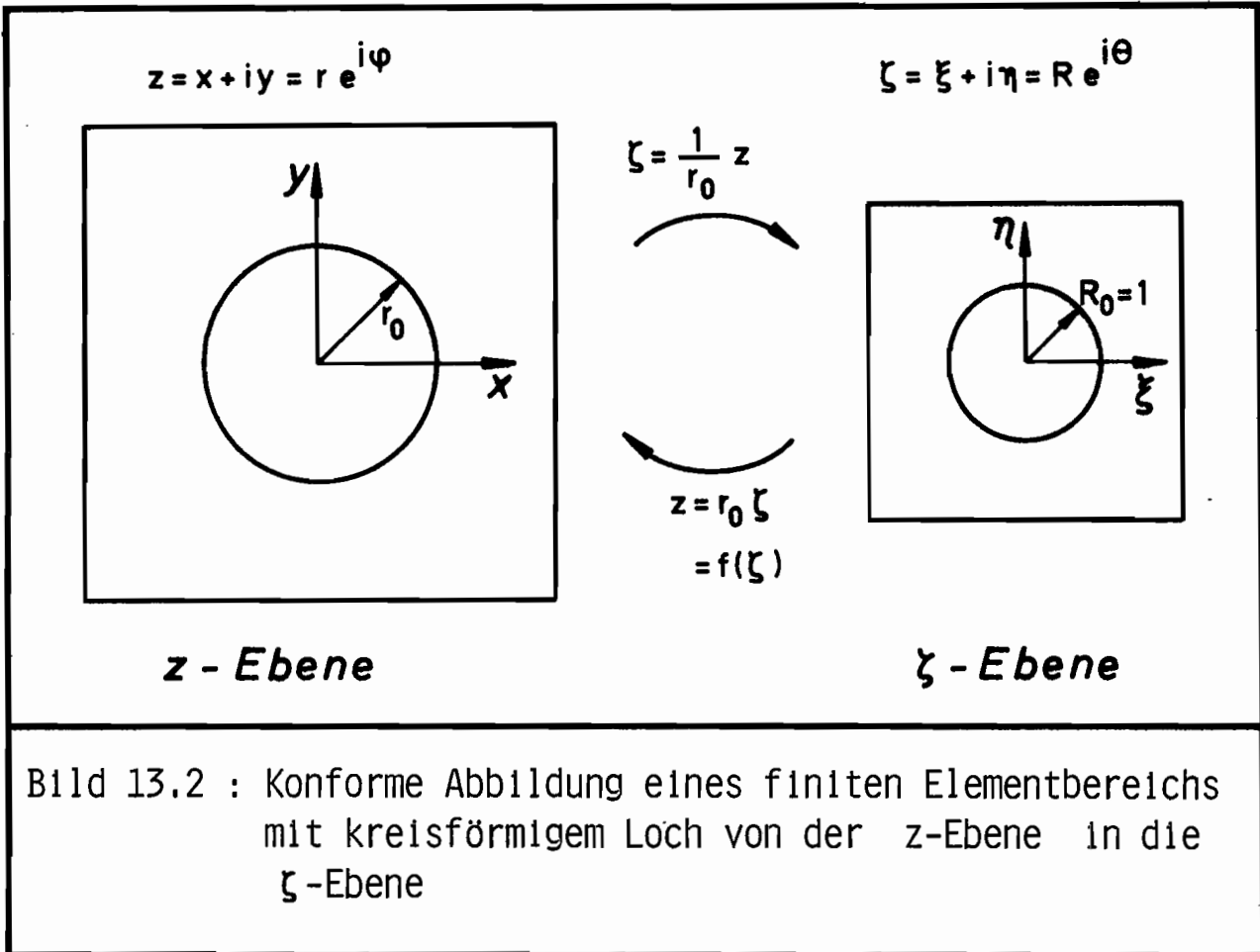
$$\sigma_{rr} = 0 \quad \text{auf dem Kreisrand} \quad r = r_0 \quad (13.1)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad \text{auf dem Kreisrand} \quad r = r_0 \quad (13.2)$$

Es werden drei Wege aufgezeigt, die zu den gewünschten Funktionen führen. Zu-vor ist als erster Schritt eine geeignete konforme Abbildung anzugeben, die es erlaubt, das Teilrandwertproblem in allgemeiner Weise zu behandeln.

13.1.1 Konforme Abbildung

Ein Kreis als Randkurve erscheint zwar schon sehr angenehm für eine Rechnung, aber der allgemeine Radius r_0 wirkt noch störend. Deshalb wird zunächst eine konforme Abbildung vorgenommen, die einen transformierten Kreisrand mit dem Radius $R_0 = 1$ erzeugt (s. Bild 13.2).



Die Abbildungsfunktion $f(\zeta)$ und deren ersten beiden Ableitungen lauten hier:

$$z = f(\zeta) = r_0 \zeta = r_0 R e^{i\theta} \tag{13.3}$$

$$\dot{f}(\zeta) = r_0 \tag{13.4}$$

$$\ddot{f}(\zeta) = 0 \tag{13.5}$$

Sehr leicht ist die benötigte Umkehrfunktion anzugeben mit

$$\zeta = g(z) = \frac{1}{r_0} z \quad (13.6)$$

Sie stellt sich sofort als eindeutig heraus und braucht nicht weiter diskutiert zu werden.

13.1.2 Ansätze für ϕ und ψ in der ζ -Ebene

Da der Kreisrand unbelastet ist, werden für den vorliegenden zweifach zusammenhängenden Bereich die Funktionen $\phi(\zeta)$ und $\psi(\zeta)$ in der Form

$$\phi(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \zeta^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j R^j e^{ij\theta} \quad (13.7)$$

und

$$\psi(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \zeta^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j R^j e^{ij\theta} \quad (13.8)$$

angesetzt. Es ist nun klar, daß bei Auferlegung von Randbedingungen die Koeffizienten a_j und b_j nicht vollkommen unabhängig voneinander sein können, sondern es muß eine gewisse Beziehung zwischen ϕ und ψ vorliegen. Das allgemeine Vorgehen wird nun sein: Die Funktion ϕ wird mit ihren Koeffizienten a_j zunächst als vorgegeben betrachtet, und ψ ist in Abhängigkeit von ϕ so zu ermitteln, daß die Randbedingungen zu erfüllen sind.

13.1.2.1 Ermittlung von Ψ in Abhängigkeit von Φ zur Erfüllung der Randbedingungen

13.1.2.1.1 Verwendung der Randbedingungsform $\sigma_{rr} - i\tau_{r\varphi} = 0$ und Durchführung eines Koeffizientenvergleichs

Für die komplexe Kombination $(\sigma_{rr} - i\tau_{r\varphi})$ erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} - i\tau_{r\varphi} &= \frac{\dot{\Phi}}{\dot{f}} + \frac{\overline{\dot{\Phi}}}{\overline{\dot{f}}} - \left[\overline{f} \left(\frac{\ddot{\Phi}}{\dot{f}^2} - \dot{\Phi} \frac{\ddot{f}}{\dot{f}^3} \right) + \frac{\dot{\Psi}}{\dot{f}} \right] \frac{f}{\overline{f}} \\ &= \frac{\dot{\Phi}}{r_0} + \frac{\overline{\dot{\Phi}}}{r_0} - \left[r_0 R e^{-i\theta} \left(\frac{\ddot{\Phi}}{r_0^2} - 0 \right) + \frac{\dot{\Psi}}{r_0} \right] e^{2i\theta} \\ &= \frac{1}{r_0} \left[\dot{\Phi} + \overline{\dot{\Phi}} - R e^{i\theta} \ddot{\Phi} - e^{2i\theta} \dot{\Psi} \right] \quad , \end{aligned} \quad (13.9)$$

welcher zur Erfüllung der Randbedingungen auf dem Kreis $R=1$ gleich Null sein muß. Mit den allgemeinen Ausdrücken für die Ableitungen, nämlich

$$\dot{\Phi}(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j \zeta^{j-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j R^{j-1} e^{i(j-1)\theta} \quad , \quad (13.10)$$

$$\ddot{\Phi}(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j(j-1) a_j \zeta^{j-2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j(j-1) a_j R^{j-2} e^{i(j-2)\theta} \quad (13.11)$$

und

$$\dot{\Psi}(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j b_j \zeta^{j-1} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j b_j R^{j-1} e^{i(j-1)\theta} \quad (13.12)$$

gewinnt man durch Einsetzen der Werte auf dem Einheitskreis aus (13.9) die

Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned}
 & \dot{\Phi}(R=1, \theta) + \overline{\dot{\Phi}(R=1, \theta)} - e^{i\theta} \ddot{\Phi}(R=1, \theta) - e^{2i\theta} \dot{\Psi}(R=1, \theta) \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j e^{i(j-1)\theta} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} j \bar{a}_j e^{-i(j-1)\theta} + \\
 & \quad - \sum_{j=-\infty}^{\infty} j(j-1) a_j e^{i(j-1)\theta} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} j b_j e^{i(j+1)\theta} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+1) a_{k+1} e^{ik\theta} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1-k) \bar{a}_{1-k} e^{ik\theta} + \\
 & \quad - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k+1)k a_{k+1} e^{ik\theta} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-1) b_{k-1} e^{ik\theta} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[(1-k^2) a_{k+1} + (1-k) \bar{a}_{1-k} - (k-1) b_{k-1} \right] e^{ik\theta} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1-k) \left[(1+k) a_{k+1} + \bar{a}_{1-k} + b_{k-1} \right] e^{ik\theta} \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-j) \left[(j+2) a_{j+2} + \bar{a}_{-j} + b_j \right] e^{i(j+1)\theta} \\
 & \stackrel{!}{=} 0 \tag{13.13}
 \end{aligned}$$

Da (13.13) für alle möglichen Werte von θ erfüllt sein soll, muß also gelten:

$$(-j) \left[(j+2) a_{j+2} + \bar{a}_{-j} + b_j \right] = 0 \tag{13.14}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Koeffizienten b_j von der Laurentreihe Ψ nach (13.8) durch

$$b_j = -(j+2) a_{j+2} - \bar{a}_{-j} \quad (\text{mit } -\infty < j < \infty) \tag{13.15}$$

angeben. Weil Gleichung (13.14) mit $j=0$ für beliebige Werte von b_0 erfüllt ist, kann b_0 auch entsprechend Beziehung (13.15) gewählt werden, um den Schematismus nicht zu stören.

Somit muß man also zu der Funktion Φ gemäß (13.7) die Funktion Ψ durch

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta) &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} [(j+2) a_{j+2} + \bar{a}_{-j}] \zeta^j \\ &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j \zeta^{j-2} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_j \zeta^{-j} \end{aligned} \tag{13.16}$$

wählen, um die Randbedingungen (13.1) und (13.2) zu erfüllen.

13.1.2.1.2 Verwendung der Randbedingungsform $\Phi + f \frac{\bar{\Phi}}{f} + \bar{\Psi} = 0$
und Durchführung eines Koeffizientenvergleichs

Eine andere Möglichkeit die Funktion Ψ in Abhängigkeit von einer vorgegebenen Funktion Φ so zu ermitteln, daß die Randbedingungen erfüllt werden, ist die Verwendung der durch (13.7) und (13.8) definierten Laurentreihen in der Randbedingungsform (10.28). Da keine äußeren Spannungsgrößen vorgegeben sind, lautet die Randbedingung

$$\Phi(\zeta) + f(\zeta) \frac{\overline{\dot{\Phi}(\zeta)}}{\dot{f}(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} = 0 \quad \text{auf } |\zeta| = R = 1 \tag{13.17}$$

Einsetzen der benötigten Größen in die zu (13.17) konjugiert komplexe Gleichung liefert nun mit dem Wert $R=1$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Phi} + \bar{f} \frac{\dot{\Phi}}{f} + \Psi &= \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_j e^{-ij\theta} + r_0 e^{-i\theta} \frac{1}{r_0} \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j e^{i(j-1)\theta} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e^{ij\theta} \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_j e^{-ij\theta} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j e^{i(j-2)\theta} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e^{ij\theta} \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_{-j} e^{ij\theta} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} (j+2) a_{j+2} e^{ij\theta} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e^{ij\theta} \\
 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\bar{a}_{-j} + (j+2) a_{j+2} + b_j] e^{ij\theta} \stackrel{!}{=} 0 \tag{13.18}
 \end{aligned}$$

Hieraus gewinnt man wiederum die Beziehung für die Koeffizienten b_j entsprechend Gleichung (13.15).

Die hier verwendete Randbedingungsform bietet vor allem bei komplizierteren Abbildungsfunktionen $f(\zeta)$ gegenüber der Verwendung der Kombination $(\sigma_{rr} - i\tau_{r\varphi})$ den Vorteil, daß weniger und niedrigerere Ableitungsterme vorkommen.

13.1.2.1.3 Verwendung der Randbedingungsform $\Psi = -\bar{\Phi} - \bar{f} \frac{\dot{\Phi}}{f}$
und Umgehung eines Koeffizientenvergleichs

Da es Fälle gibt, bei denen die oben beschriebenen Wege zur Ermittlung von solchen Funktionen Φ und Ψ , welche eine Erfüllung der Randbedingungen gewährleisten, nicht gehbar sind, sei am Beispiel des Kreisloches eine weitere Möglichkeit beschrieben.

Ausgangspunkt bei den oben geschilderten Wegen war die Annahme der Funktionen Φ und Ψ als Potenzreihen, und durch Koeffizientenvergleich in einer der möglichen Randbedingungsformen sollten dann die Koeffizienten der Funktion Ψ in Abhängigkeit der Koeffizienten von Φ zur Befriedigung der Randbedingungen ermittelt werden. Durch die Vorgabe von Φ und Ψ in allgemeiner Form war von vornherein sichergestellt, daß diese Funktionen analytisch, d.h. komplex differenzierbar sind.

Anders stellt sich das Problem der Erfüllung der Randbedingungen nur dar, wenn zunächst nur Φ als Potenzreihe angenommen wird und in der Auflösung von (13.17) nach Ψ gemäß

$$\Psi(\zeta) = - \overline{\Phi(\zeta)} - \overline{f(\zeta)} \frac{\dot{\Phi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} \quad \text{auf } |\zeta| = R = 1 \quad (13.19)$$

überprüft wird, ob die auf der rechten Seite stehenden konjugiert komplexen Funktionen, welche im allgemeinen nicht analytisch sind, auf dem betrachteten transformierten Rand identisch sind mit anderen, jedoch differenzierbaren Funktionen. Wenn dies der Fall ist, so hat man Ψ ermittelt.

In dem konkreten Falle läßt sich nun $\overline{\Phi(\zeta)}$ mit $|\zeta| = R = 1$ in folgender Weise mittels (10.16) umformen:

$$\overline{\Phi(\zeta)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_j \bar{\zeta}^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_j \zeta^{-j} \quad \text{auf } |\zeta| = R = 1 \quad (13.20)$$

Entsprechend läßt sich auch $\overline{f(\zeta)}$ auf dem Rande des Einheitskreises umformen:

$$\overline{f(\zeta)} = r_0 \bar{\zeta} = r_0 \zeta^{-1} \quad \text{auf } |\zeta| = R = 1 \quad (13.21)$$

Durch Einsetzen von (13.20) und (13.21) in (13.19) erhält man

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta) &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_j \zeta^{-j} - r_0 \zeta^{-1} \frac{1}{r_0} \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j \zeta^{j-1} \\ &= - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_j \zeta^{-j} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j \zeta^{j-2} \quad , \end{aligned} \quad (13.22)$$

was eine analytische Funktion darstellt, die auf dem Rand sowie im transformierten Gebiet gültig ist, und natürlich mit dem Ergebnis (13.16) übereinstimmt.

13.1.3 Die Funktionen Φ, Ψ sowie $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ und τ_{xy} für eine Finite-Element-Lösung

Für die Finite-Element-Lösung können natürlich nicht unendlich viele Reihenglieder verwendet werden, sondern es muß mit endlichen oberen und unteren Summationsgrenzen gearbeitet werden. Mit den dem jeweiligen Anwendungsfall angemessen gewählten Größen N und M lassen sich nun die Funktionen Φ und Ψ darstellen als

$$\Phi(\zeta) = \sum_{j=-N}^M a_j \zeta^j \quad (13.23)$$

und

$$\Psi(\zeta) = - \sum_{j=-N}^M j a_j \zeta^{j-2} - \sum_{j=-N}^M \bar{a}_j \zeta^{-j} \quad (13.24)$$

Die komplexen Koeffizienten a_j stellen hier die Freiwerte dar, welche durch eine Finite-Element-Rechnung ermittelt werden können. Im Endeffekt werden nun aber die rein reellen Funktionen $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ und τ_{xy} benötigt, was bedeutet, daß in der komplexen Darstellung dieser Größen durch (10.25), (10.26) und (10.27) komplexe Multiplikationen in allgemeiner Form durchgeführt werden müssen, und anschließend sind Realteil- und Imaginärteilmfunktionen zu sortieren. Die Aufspaltung des Koeffizienten a_j in Real- und Imaginärteil erfolgt durch

$$a_j = \alpha_j + i\beta_j \quad , \quad (13.25)$$

und die Aufteilung der Potenzfunktion ζ^j wird durch die Schreibweise

$$\zeta^j = \operatorname{Re} [\zeta^j] + i \operatorname{Im} [\zeta^j] \quad (13.26)$$

vermittelt, wobei

$$\operatorname{Re} [\zeta^j] = R^j \cos j \theta \quad (13.27)$$

und

$$\operatorname{Im} [\zeta^j] = R^j \sin j \theta \quad (13.28)$$

gelten.

Die Durchführung des Einsetzens der benötigten Größen in die Definitionsgleichungen der Verschiebungs- und Spannungsgrößen sowie die Ausführung der einzelnen Operationen ist vom Schreibumfang her etwas aufwendig, da eine allgemein gehaltene Multiplikation von zwei komplexen Ausdrücken immerhin zwei Realteilterme und zwei Imaginärteilterme liefert. Infolge der komplexen Arithmetik hat man besonders auf Vorzeichen zu achten, weil sich diesbezügliche Fehler leicht einschleichen können. Hier können programmtechnische Überprüfungen der erhaltenen und programmierten Funktionen auf ihre Richtigkeit hin sehr hilfreich sein (s. Kap. 19).

Die Verwendung der Funktionen Φ und Ψ nach (13.23) bzw. nach (13.24) liefert die im folgenden aufgeführten Verschiebungs- und Spannungsfunktionen:

$$\begin{aligned} 2\mu u &= \operatorname{Re} \left[x \Phi - z \bar{\Phi}' - \bar{\Psi} \right] = \operatorname{Re} \left[x \Phi - f \frac{\bar{\Phi}}{f} - \bar{\Psi} \right] \\ &= \sum_{j=-N}^M \left\{ \left[x \operatorname{Re} [\zeta^j] - j \left(\operatorname{Re} [\zeta^{j-1}] \operatorname{Re} [\zeta] + \operatorname{Im} [\zeta^{j-1}] \operatorname{Im} [\zeta] \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Re} [\zeta^{-j}] + j \operatorname{Re} [\zeta^{j-2}] \right] \alpha_j + \right. \\ &\quad \left. + \left[-x \operatorname{Im} [\zeta^j] + j \left(\operatorname{Im} [\zeta^{j-1}] \operatorname{Re} [\zeta] - \operatorname{Re} [\zeta^{j-1}] \operatorname{Im} [\zeta] \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{Im} [\zeta^{-j}] - j \operatorname{Im} [\zeta^{j-2}] \right] \beta_j \right\} \quad (13.29) \end{aligned}$$

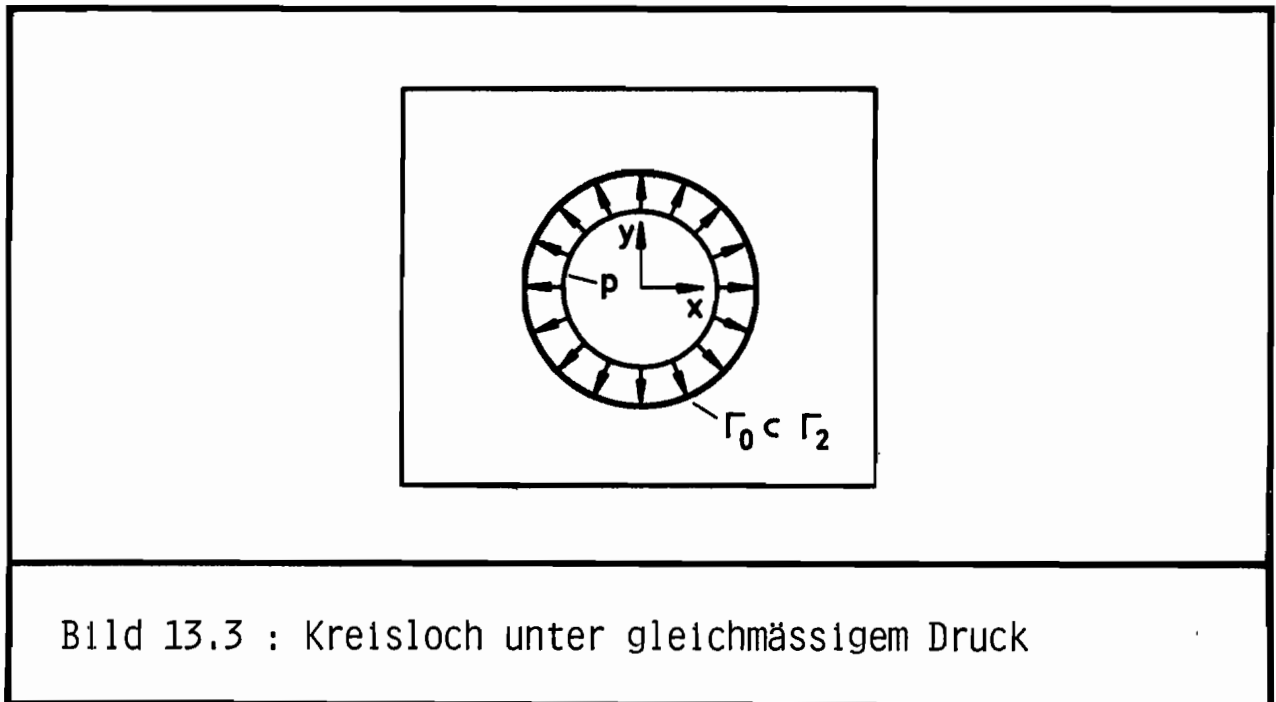
$$\begin{aligned}
 2\mu\nu &= \text{Im} \left[x\Phi - z\bar{\Phi}' - \bar{\Psi} \right] = \text{Im} \left[x\Phi - f \frac{\bar{\Phi}}{f} - \bar{\Psi} \right] \\
 &= \sum_{j=-N}^M \left\{ \left[x \text{Im} [\zeta^j] + j (\text{Im} [\zeta^{j-1}] \text{Re} [\zeta] - \text{Re} [\zeta^{j-1}] \text{Im} [\zeta]) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \text{Im} [\zeta^{-j}] - j \text{Im} [\zeta^{j-2}] \right] \alpha_j + \right. \\
 &\quad \left. + \left[x \text{Re} [\zeta^j] + j (\text{Re} [\zeta^{j-1}] \text{Re} [\zeta] + \text{Im} [\zeta^{j-1}] \text{Im} [\zeta]) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \text{Re} [\zeta^{-j}] - j \text{Re} [\zeta^{j-2}] \right] \beta_j \right\} \tag{13.30}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \text{Re} \left[\Phi' + \bar{\Phi} - z\bar{\Phi}'' - \bar{\Psi}' \right] \\
 &= 2\text{Re} [\Phi'] - \text{Re} [\bar{z}\Phi''] - \text{Re} [\Psi'] \\
 &= \sum_{j=-N}^M \frac{1}{r_0} \left\{ j \left[2\text{Re} [\zeta^{j-1}] - (j-1) (\text{Re} [\zeta^{j-2}] \text{Re} [\zeta] + \text{Im} [\zeta^{j-2}] \text{Im} [\zeta]) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \text{Re} [\zeta^{-j-1}] + (j-2) \text{Re} [\zeta^{j-3}] \right] \alpha_j + \right. \\
 &\quad \left. + j \left[-2\text{Im} [\zeta^{j-1}] - (j-1) (-\text{Im} [\zeta^{j-2}] \text{Re} [\zeta] + \text{Re} [\zeta^{j-2}] \text{Im} [\zeta]) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \text{Im} [\zeta^{-j-1}] - (j-2) \text{Im} [\zeta^{j-3}] \right] \beta_j \right\} \tag{13.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} [\Phi' + \bar{\Phi}' + z \bar{\Phi}'' + \bar{\Psi}'] \\
 &= 2 \operatorname{Re} [\Phi'] + \operatorname{Re} [\bar{z} \Phi''] + \operatorname{Re} [\Psi'] \\
 &= \sum_{j=-N}^M \frac{1}{r_0} \{ j [2 \operatorname{Re} [\zeta^{j-1}] + (j-1) (\operatorname{Re} [\zeta^{j-2}] \operatorname{Re} [\zeta] + \operatorname{Im} [\zeta^{j-2}] \operatorname{Im} [\zeta]) + \\
 &\quad + \operatorname{Re} [\zeta^{-j-1}] - (j-2) \operatorname{Re} [\zeta^{j-3}]] \alpha_j + \\
 &\quad + j [-2 \operatorname{Im} [\zeta^{j-1}] + (j-1) (-\operatorname{Im} [\zeta^{j-2}] \operatorname{Re} [\zeta] + \operatorname{Re} [\zeta^{j-2}] \operatorname{Im} [\zeta]) + \\
 &\quad + \operatorname{Im} [\zeta^{-j-1}] + (j-2) \operatorname{Im} [\zeta^{j-3}]] \beta_j \} \tag{13.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy} &= \operatorname{Im} [\bar{z} \Phi'' + \Psi'] \\
 &= \sum_{j=-N}^M \frac{1}{r_0} \{ j [(j-1) (\operatorname{Im} [\zeta^{j-2}] \operatorname{Re} [\zeta] - \operatorname{Re} [\zeta^{j-2}] \operatorname{Im} [\zeta]) + \\
 &\quad + \operatorname{Im} [\zeta^{-j-1}] - (j-2) \operatorname{Im} [\zeta^{j-3}]] \alpha_j + \\
 &\quad + j [(j-1) (\operatorname{Re} [\zeta^{j-2}] \operatorname{Re} [\zeta] + \operatorname{Im} [\zeta^{j-2}] \operatorname{Im} [\zeta]) + \\
 &\quad - \operatorname{Re} [\zeta^{-j-1}] - (j-2) \operatorname{Re} [\zeta^{j-3}]] \beta_j \} \tag{13.33}
 \end{aligned}$$

13.2 Spezielle Ansatzterme bei konstanter radialer Belastung ($\sigma_{rr} = \text{const.}$)



Zu der Randbedingung

$$\sigma_{rr} = -p \quad \text{auf dem Kreisrand } \Gamma_0 \quad (\text{s. Bild 13.3}) \quad (13.34)$$

Lassen sich die Komponenten der auf einem Randstück ds mit der Dicke t wirkenden Kraft durch

$$\bar{T}_x t ds = -p \frac{dy}{ds} t ds = -p t dy \quad (13.35)$$

und

$$\bar{T}_y t ds = -p \frac{-dx}{ds} t ds = p t dx \quad (13.36)$$

angeben. Hiermit läßt sich der folgende Ausdruck bilden:

$$\begin{aligned} i \int (\bar{T}_x + i \bar{T}_y) t ds &= i \int (-p t dy + i p t dx) \\ &= i \int p t i (i dy + dx) \\ &= -p t \int dz \\ &= -p t z = -p t r_0 \zeta \end{aligned} \quad (13.37)$$

In (13.37) wurde von der konformen Abbildung auf den Einheitskreis durch $z = f(\zeta) = r_0 \zeta$ Gebrauch gemacht. Die Verwendung von (10.28) liefert nun

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) + f(\zeta) \frac{\overline{\dot{\Phi}(\zeta)}}{\dot{f}(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} &= i \int (\overline{T}_x + i \overline{T}_y) ds \\ &= -p r_0 \zeta \quad \text{auf dem Einheitskreis,} \\ &\quad (|\zeta| = 1) \end{aligned} \quad (13.38)$$

und hieraus folgt die konjugiert komplexe Gleichung

$$\overline{\Phi} + \overline{f} \frac{\dot{\overline{\Phi}}}{\dot{\overline{f}}} + \overline{\Psi} = -p r_0 \overline{\zeta} \quad \text{auf } |\zeta| = 1 \quad (13.39)$$

Da aber laut (10.15) auf dem Einheitskreis $\overline{\zeta} = \zeta^{-1}$ gilt, erhält man schließlich

$$\overline{\Phi} + \overline{f} \frac{\dot{\overline{\Phi}}}{\dot{\overline{f}}} + \overline{\Psi} = -p r_0 \zeta^{-1} \quad \text{auf } |\zeta| = 1, \quad (13.40)$$

woraus leicht abzulesen ist, daß mit

$$\Phi(\zeta) = 0 \quad (13.41)$$

und

$$\Psi(\zeta) = -p r_0 \zeta^{-1} \quad (13.42)$$

die Gleichung (13.40) erfüllt wird.

Die entsprechenden speziellen Verschiebungs- und Spannungsgrößen ergeben sich mit (10.25), (10.26) und (10.27) zu

$$2\mu u = p r_0 \operatorname{Re} [\zeta^{-1}] \quad (13.43)$$

$$2\mu v = -p r_0 \operatorname{Im} [\zeta^{-1}] \quad (13.44)$$

$$\sigma_{xx} = -p \operatorname{Re} [\zeta^{-2}] \quad (13.45)$$

$$\sigma_{yy} = p \operatorname{Re} [\zeta^{-2}] \quad (13.46)$$

$$\tau_{xy} = p \operatorname{Im} [\zeta^{-2}] \quad (13.47)$$

Es sei noch bemerkt, daß die angegebene Lösung nicht die einzig mögliche ist, sondern die "einfachste" unter beliebig vielen Lösungsmöglichkeiten. Wenn man sich die Bedingungsgleichung (13.40) genauer ansieht, so stellt man fest, daß nach einer Wahl von $\Phi(\zeta)$ durch eine Potenzfunktion der Form

$$\Phi(\zeta) = \rho r_0 \zeta^j \quad (13.48)$$

und Ersetzen der konjugiert komplexen Ausdrücke $\bar{\Phi}$ sowie \bar{f} durch die analytischen Funktionen

$$\overline{\Phi(\zeta)} = \rho r_0 \zeta^{-j} \quad \text{auf } |\zeta| = 1 \quad (13.49)$$

und

$$\bar{f}(\zeta) = r_0 \zeta^{-1} \quad \text{auf } |\zeta| = 1 \quad (13.50)$$

sich immer eine analytische Funktion $\Psi(\zeta)$ ermitteln läßt, so daß (13.40) erfüllt ist.

13.3 Spezielle Ansatzterme für ein Kreisloch unter gleichmäßig verteilter Schubspannung

Für den Fall einer konstanten Schubbelastung

$$\tau_{r\varphi} = q \quad \text{auf dem Kreisrand } \Gamma_0 \quad (13.51)$$

erhält man mit

$$\bar{T}_x ds = q dx \quad (13.52)$$

und

$$\bar{T}_y ds = q dy \quad (13.53)$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned} i \int (\bar{T}_x + i \bar{T}_y) ds &= i q \int dz \\ &= i q z = i q r_0 \zeta, \end{aligned} \quad (13.54)$$

welcher der Beziehung (13.37) sehr ähnelt, so daß die weitere Rechnung so verläuft, wie in Kapitel 13.2 angegeben. Man erhält hier als einfachste Lösungsmöglichkeit

$$\Phi(\zeta) = 0 \tag{13.55}$$

und

$$\Psi(\zeta) = -i q r_0 \zeta^{-1} \tag{13.56}$$

woraus sich mittels (10.25), (10.26) und (10.27) folgende Verschiebungs- und Spannungsgrößen ergeben:

$$2\mu u = q r_0 \operatorname{Im} [\zeta^{-1}] \tag{13.57}$$

$$2\mu v = -q r_0 \operatorname{Re} [\zeta^{-1}] \tag{13.58}$$

$$\sigma_{xx} = q \operatorname{Im} [\zeta^{-2}] \tag{13.59}$$

$$\sigma_{yy} = -q \operatorname{Im} [\zeta^{-2}] \tag{13.60}$$

$$\tau_{xy} = q \operatorname{Re} [\zeta^{-2}] \tag{13.61}$$

13.4 Kurzbeschreibung einiger finiter Elemente mit kreisförmigem Loch

Zur Beschreibung der erstellten Elemente dienen hier und in den folgenden Kapiteln einzelne Bilder, in denen zu der jeweiligen Elementfigur charakteristische Kenngrößen angeführt sind.

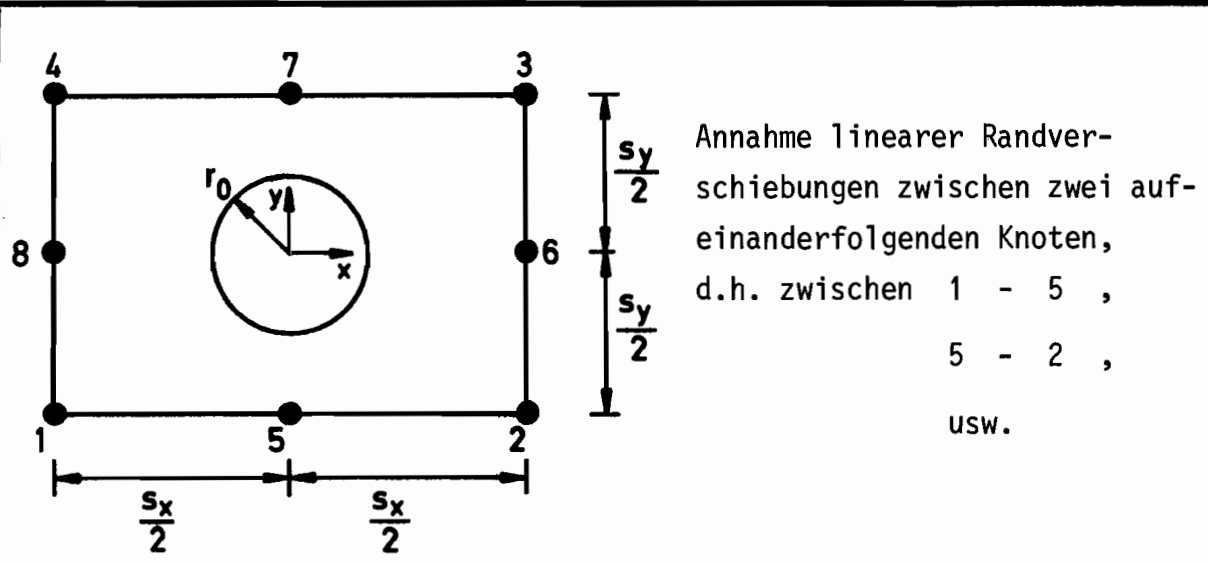
Die in den Bildern 13.4 und 13.5 verwendeten Bezeichnungen $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ sowie Funktional I und II haben folgende Bedeutungen:

$\underline{\alpha}$: Vektor der Realteilmomente α_j (aus $a_j = \alpha_j + i\beta_j$)

$\underline{\beta}$: Vektor der Imaginärteilmomente β_j

Funktional I : nicht erweitertes Funktional mit Vorabminimierung der Randverschiebungsdifferenzen (s. Kap. 8.1) (Starrkörperanteile berücksichtigt)

Funktional II : erweitertes Funktional (s. Kap. 8.2) (Starrkörperanteile weggelassen)



Anzahl der Knoten: 8

untere Summationsgrenze in $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$: $-N = -4$

obere Summationsgrenze in $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$: $M = 4$

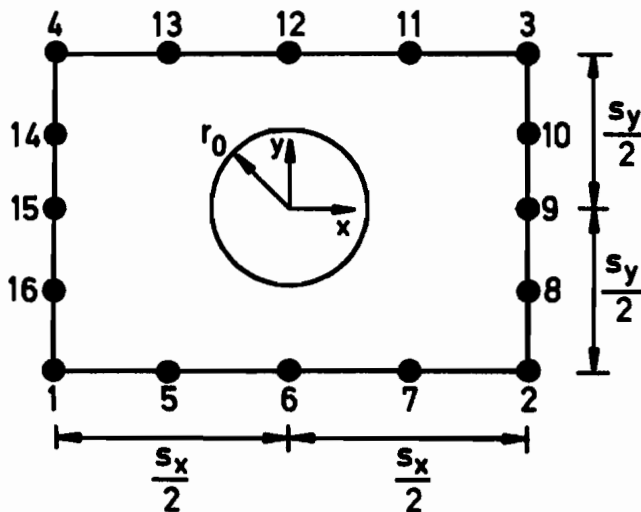
Anzahl der Knotenverschiebungsgrößen: 16

Anzahl der Freiwerte in $\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 18=2N+2M+2 \text{ für Funktional I} \\ \quad \text{(hiervon 9 Werte in } \underline{\alpha} \\ \quad \quad \text{und 9 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \\ 15=2N+2M-1 \text{ für Funktional II} \\ \quad \text{(hiervon 8 Werte in } \underline{\alpha} \\ \quad \quad \text{und 7 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \end{array} \right.$$

Integration: zwischen den Knoten 1 - 5 - 2 - 6..... 8 - 1
 oder bei Ausnutzung von Symmetrie- und Antimetrieigenschaften (z.B.) nur zwischen 8 - 1 - 5 - 2 - 6
 oder zum Beispiel gar nur zwischen 8 - 1 - 5

Bild 13.4 : Charakteristische Daten für ein rechteckiges Element mit kreisförmigem Loch unter Annahme von bereichsweise linearen Randverschiebungen



Annahme quadratischer Randverschiebungen zwischen drei aufeinanderfolgenden Knoten,
 d.h. zwischen 1 - 5 - 6 ,
 6 - 7 - 2 ,
 usw.

Anzahl der Knoten: 16

untere Summationsgrenze in $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$: $-N = -8$

obere Summationsgrenze in $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$: $M = 8$

Anzahl der Knotenverschiebungsgrößen: 32

Anzahl der Freiwerte in $\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 34=2N+2M+2 \text{ für Funktional I} \\ \text{(hiervon 17 Werte in } \underline{\alpha} \\ \text{und 17 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \\ 31=2N+2M-1 \text{ für Funktional II} \\ \text{(hiervon 16 Werte in } \underline{\alpha} \\ \text{und 15 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \end{array} \right.$$

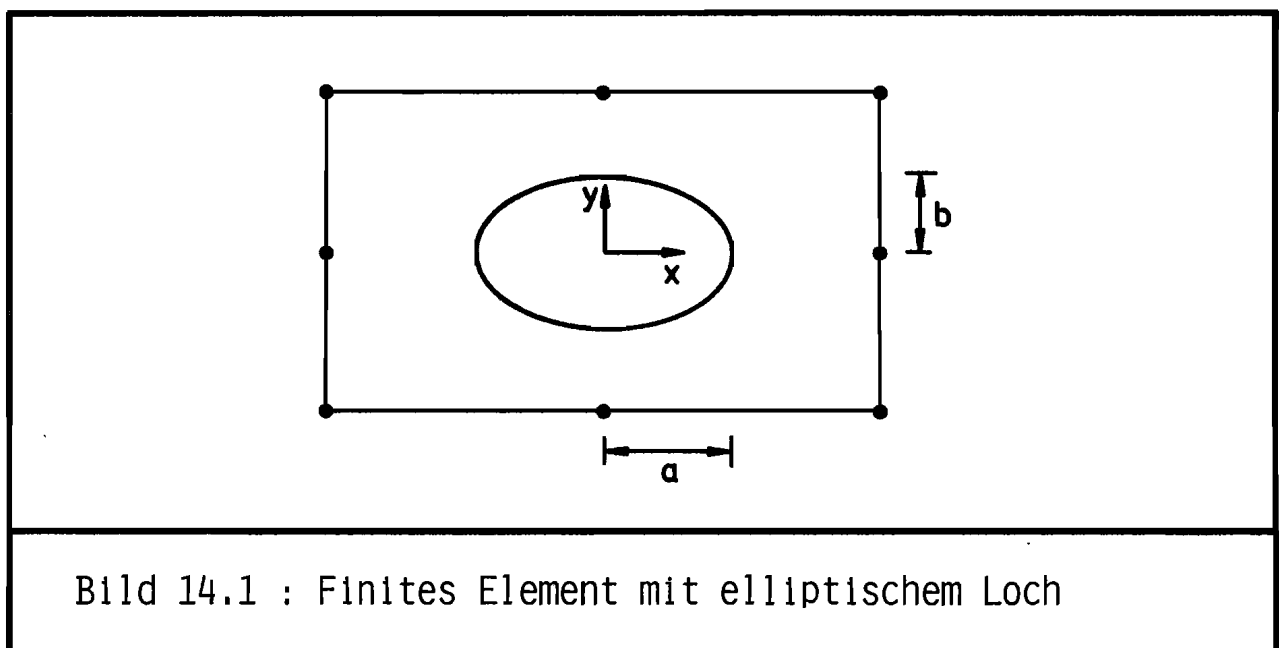
Integration: zwischen den Knoten 1 - 5 - 6..... 15 - 16 - 1
 oder bei Ausnutzung von Symmetrie- und Antimetrieigenschaften (z.B.) nur zwischen 15 - 16 - 1... 8 - 9
 oder z.B. gar nur zwischen 15 - 16 - 1 - 5 - 6

Bild 13.5 : Charakteristische Daten für ein rechteckiges Element mit kreisförmigem Loch unter Annahme von bereichsweise quadratischen Randverschiebungen

14 Finite Elemente mit elliptischem Loch

Ein wesentlicher Schritt zur Erstellung von finiten Elementen, die ein elliptisches Loch enthalten (s. Bild 14.1 als Beispiel), ist wiederum die Bereitstellung geeigneter komplexer Ansatzfunktionen, durch welche nun die Erfüllung von Bedingungen auf dem elliptischen Rand sichergestellt werden soll. Betrachtet werden die folgenden Fälle:

lastfreier Rand,
gleichmäßig verteilte Druckbeanspruchung,
gleichmäßig verteilte Schubspannung.



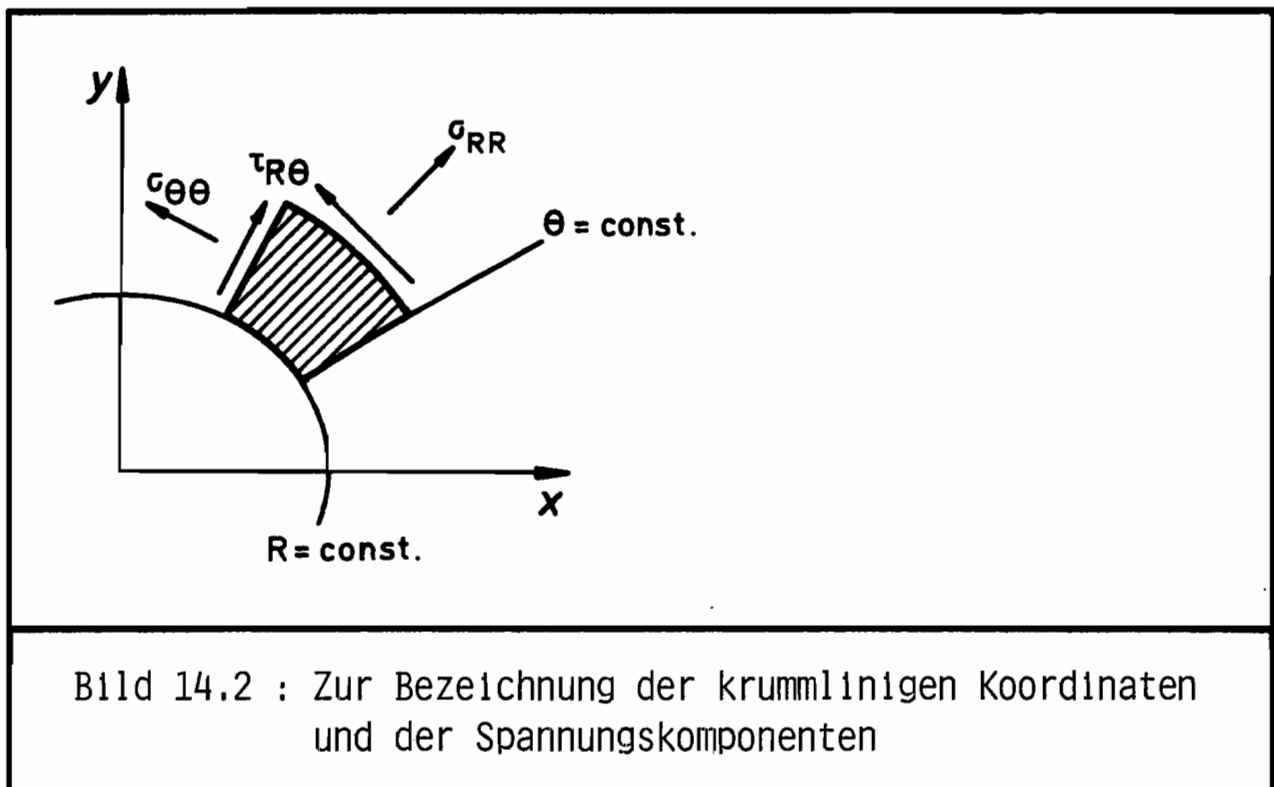
14.1 Konstruktion der Ansatzfunktionen bei unbelastetem elliptischen Rand

Die Randbedingungen werden in diesem Falle mit Hilfe krummliniger Koordinaten definiert (s. Bild 14.2), und zwar werden sich hier R und Θ als Polarkoordinaten in der ζ -Ebene herausstellen (s. Bilder 14.3 u. 14.4). Einzuhalten sind

$$\sigma_{RR} = 0 \quad \text{auf dem Ellipsenrand (entspricht } R=1) \quad (14.1)$$

und

$$\tau_{R\Theta} = 0 \quad \text{auf dem Ellipsenrand (entspricht } R=1). \quad (14.2)$$



Es erweist sich aber als vorteilhafter, nicht mit einer Randbedingungsformulierung zu arbeiten, die diese Größen σ_{RR} und $\tau_{R\theta}$ direkt beinhaltet, sondern mit der für belastungsfreie Ränder gültigen Randbedingungsform

$$\overline{\Phi(\zeta)} + \overline{f(\zeta)} \frac{\dot{\Phi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} + \Psi(\zeta) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{auf dem transformierten} \\ \text{Rand in der } \zeta\text{-Ebene} \end{array} \quad (14.3)$$

bzw. mit

$$\overline{\Phi(\zeta)} + \overline{f(\zeta)} \frac{\dot{\Phi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} + \frac{\dot{\chi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{auf dem transformierten} \\ \text{Rand in der } \zeta\text{-Ebene} \end{array} \quad (14.4)$$

welche aus (10.28) als konjugiert komplexe Gleichungen hervorgehen.

14.1.1 Konforme Abbildung

Zur Problembehandlung besonders geeignet erscheint hier eine konforme Abbildung, die den elliptischen Rand auf einen Kreisrand mit dem Radius $R=1$ abbildet. In der umgekehrten Betrachtungsweise ist eine Abbildung gesucht, welche das Äußere eines Einheitskreises auf das Äußere einer Ellipse abbildet. Die Abbildung (s.Bild 14.3), die dieses leistet, lautet

$$z = f(\zeta) = c \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right) = c \left(R e^{i\theta} + m R^{-1} e^{-i\theta} \right) \quad (14.5)$$

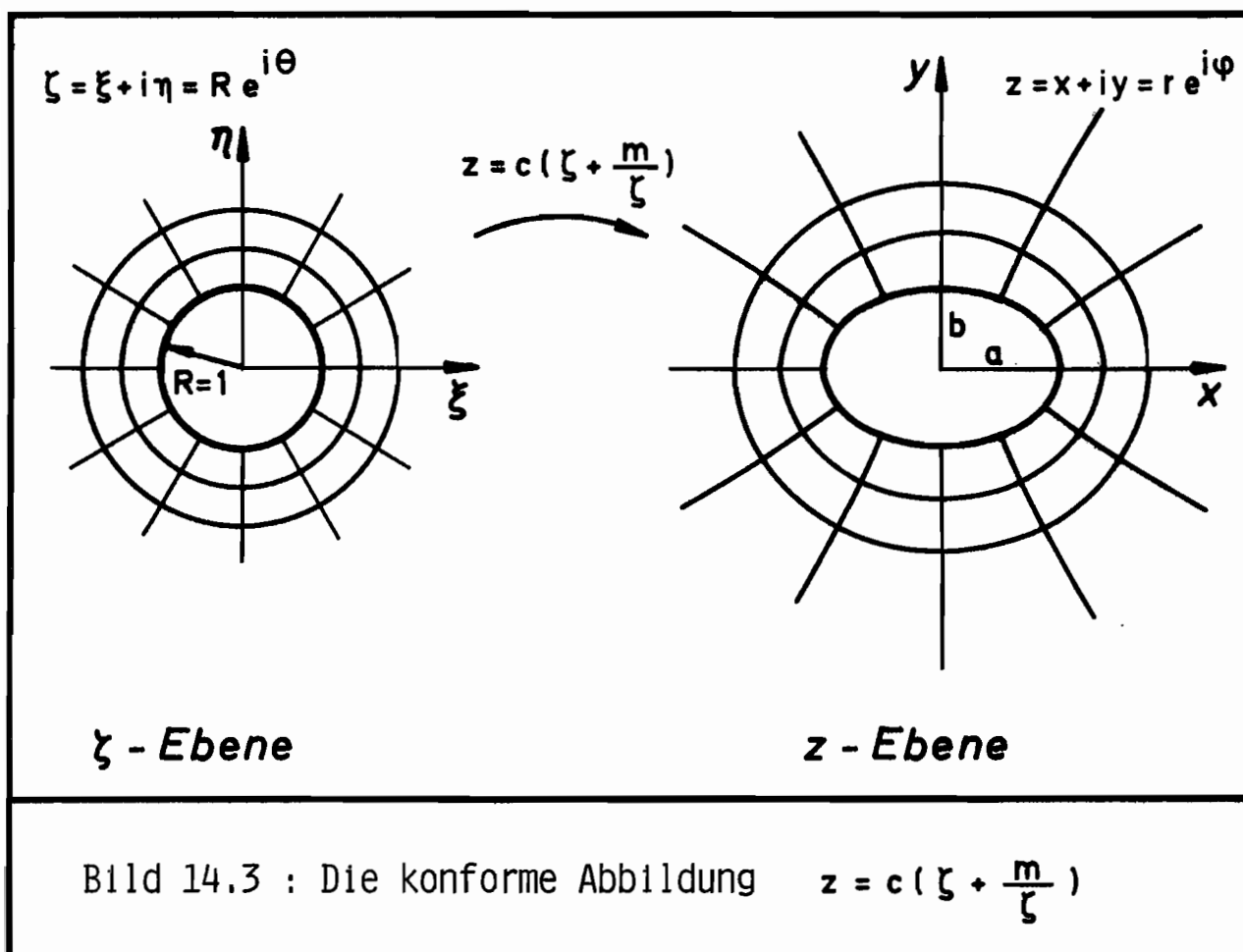
mit

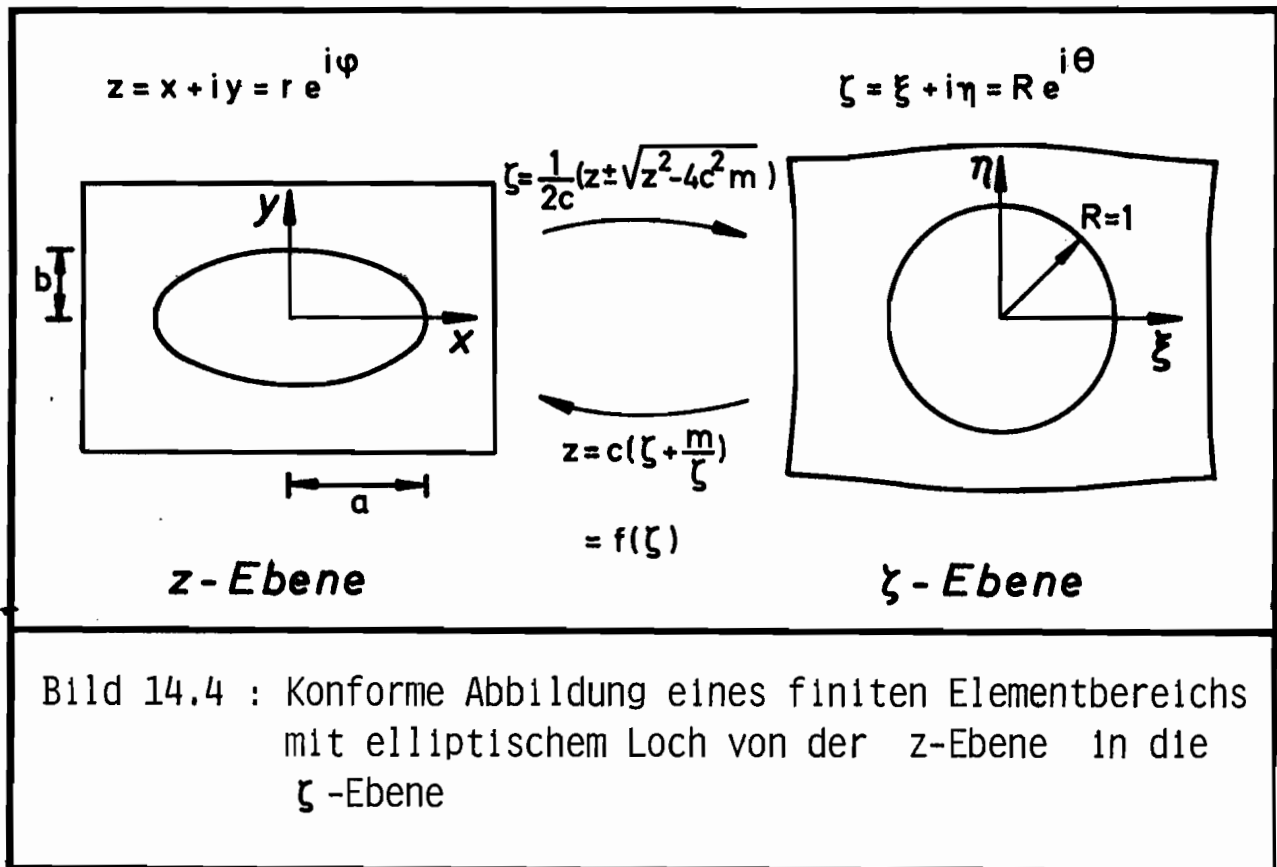
$$c = \frac{a+b}{2} \quad (14.6)$$

und

$$m = \frac{a-b}{a+b} \quad (14.7)$$

Hierbei gibt a den Wert der großen und b den Wert der kleinen Halbachse der Ellipse an.





Die benötigten ersten beiden Ableitungen von $f(\zeta)$ lauten

$$\dot{f}(\zeta) = c \left[1 - \frac{m}{\zeta^2} \right] = c \left[1 - m R^{-2} e^{-2i\theta} \right] \quad (14.8)$$

$$\ddot{f}(\zeta) = \frac{2cm}{\zeta^3} = 2cm R^{-3} e^{-3i\theta} \quad (14.9)$$

Die Auflösung der Gleichung (14.5) nach ζ liefert den mehrdeutigen Ausdruck

$$\zeta = \frac{z}{2c} \pm \sqrt{\frac{z^2}{4c^2} - m} \quad (14.10)$$

Somit muß für eine eindeutige Umkehrfunktion der Wertebereich für ζ eingeschränkt werden.

Vergleicht man nun gemäß Beziehung (14.5) die Ausdrücke $f(\zeta)$ und $f\left(\frac{m}{\zeta}\right)$, so stellt man die Identität

$$f(\zeta) = f\left(\frac{m}{\zeta}\right) \quad (14.11)$$

fest. Das bedeutet also, daß die verschiedenen Punkte ζ und $\frac{m}{\zeta}$ auf denselben Punkt z in der z -Ebene durch (14.5) abgebildet werden (s. Bild 14.5), und umgekehrt gibt es laut (14.10) zu jedem Punkt z zwei mögliche Punkte in

der ζ -Ebene. ζ muß daher so gewählt werden, daß $\frac{m}{\zeta}$ und ζ nicht beide zum Definitionsbereich von f gehören. Da hier das Äußere eines Einheitskreises in der ζ -Ebene auf das Äußere einer Ellipse in der z -Ebene abgebildet werden soll, ist die Wahl von

$$|\zeta| \geq 1 \tag{14.12}$$

naheliegender.

Die Punkte $\frac{m}{\zeta}$ liegen dann innerhalb des Einheitskreises (s. Bild 14.5), da mit (14.12) und

$$0 \leq |m| \leq 1 \tag{14.13}$$

die Beziehung

$$\left| \frac{m}{\zeta} \right| = \frac{|m|}{|\zeta|} \leq 1 \tag{14.14}$$

gilt.

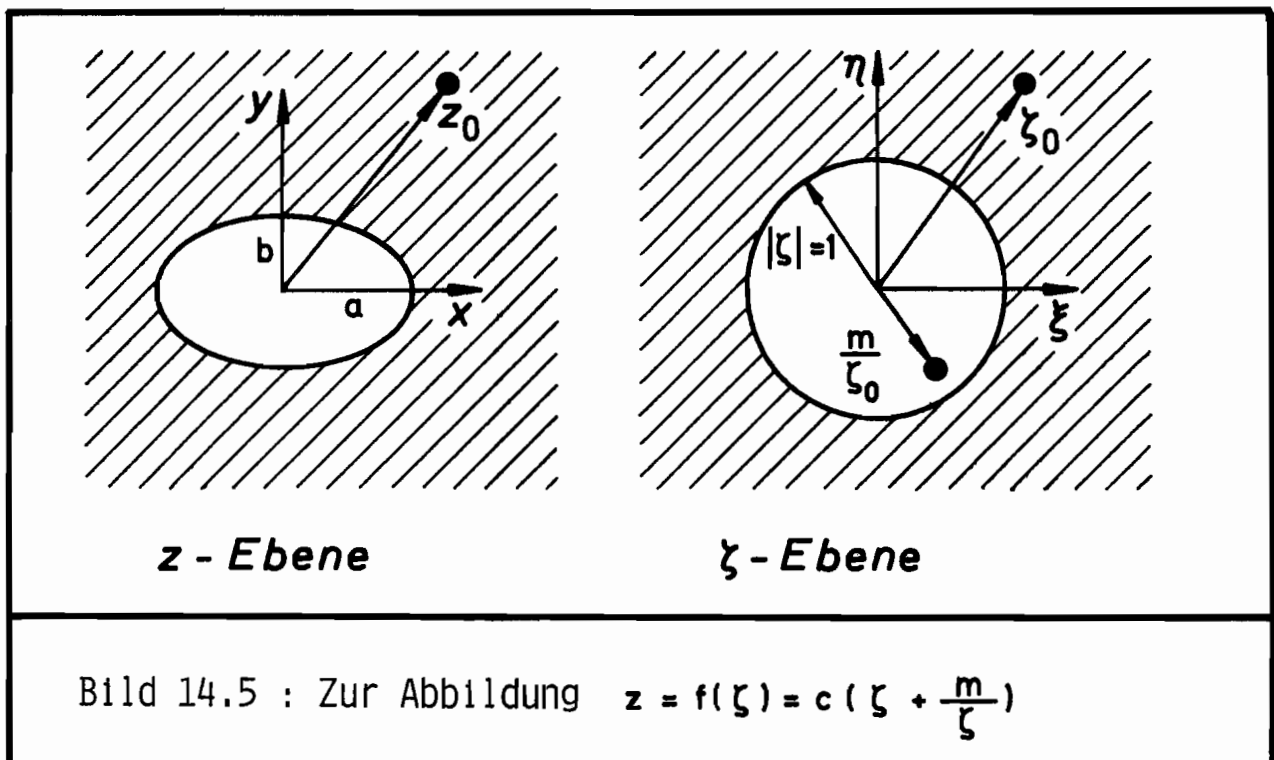
Eine eindeutige Umkehrfunktion $\zeta = g(z)$ läßt sich nunmehr in folgender Weise definieren:

$$\zeta = g(z) = \frac{1}{2c} \left[z \pm \sqrt{z^2 + 4c^2 m} \right] \tag{14.15}$$

mit einer Wahl des Wurzelzeichens derart, daß

$$|\zeta| \geq 1 \tag{14.16}$$

gilt.



14.1.2 Ansätze für Φ und Ψ bzw. \dot{X} in der ζ -Ebene

Da es sich bei der vorliegenden Problematik um ein zweifach zusammenhängendes Gebiet mit unbelastetem inneren Rand handelt, liegt es nahe, wie in Kapitel 13.1.2 mit den Laurentreihen für Φ und Ψ gemäß (13.7) und (13.8) zu arbeiten. Aber aus der nach (14.3) gültigen Randbedingungsgleichung für Ψ gemäß

$$\Psi(\zeta) = - \overline{\Phi(\zeta) - f(\zeta)} \frac{\dot{\Phi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} \quad \text{auf } |\zeta| = 1 \quad (14.17)$$

kann ersehen werden, daß infolge des Nennerausdruckes \dot{f} , definiert in Gleichung (14.8), sich die Funktion Ψ nicht direkt als Laurentreihe in der Form (13.8) ergeben kann, wenn Φ eine Laurentreihe darstellt. Somit würde ein Koeffizientenvergleich fehlschlagen. Prinzipiell ließe sich aus (14.17) hier eine Funktion Ψ ermitteln, die die Erfüllung der Randbedingungen in Verbindung mit Φ ermöglicht. Aber im Hinblick auf eine einfache Handhabung der Ableitungsausdrücke ist es zweckmäßig mit der Substitution $\Psi = \dot{X} / \dot{f} = X'$ nach (9.32) zu arbeiten. Dies liefert also mit (14.17) die Gleichung für \dot{X} , nämlich

$$\dot{X}(\zeta) = - \dot{f}(\zeta) \overline{\Phi(\zeta) - f(\zeta)} - \overline{\dot{f}(\zeta)} \dot{\Phi}(\zeta) \quad \text{auf } |\zeta| = 1, \quad (14.18)$$

welche keine lästigen Nennerausdrücke mehr enthält.

Bei Vorgabe von Φ als Laurentreihe ergeben sich hier mit der speziellen Abbildungsfunktion $f(\zeta)$ auf der rechten Seite von (14.18) nur Produkte von Potenzausdrücken. Wird \dot{X} nun als Potenzreihe in der Form

$$\dot{X}(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \zeta^j \quad (14.19)$$

gewählt und Φ wiederum durch

$$\Phi(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \zeta^j \quad (14.20)$$

vorgegeben, so wird die Durchführung eines Koeffizientenvergleichs in (14.18) möglich, und die Koeffizienten b_j lassen sich in Abhängigkeit der Koeffizienten a_j ausdrücken.

Die Funktion Ψ möge jedoch hier durch die weniger aufwendige Methode ermittelt werden, auf der rechten Seite von (14.18) die konjugiert komplexen Funktionen in nicht konjugiert komplexe Ausdrücke (d.h. in analytische Funktionen) umzuformen, was in dem vorliegenden Falle auf dem Einheitskreis $|\zeta|=1$ möglich ist.

14.1.2.1 Ermittlung von \dot{X} und Ψ in Abhängigkeit von Φ zur Erfüllung der Randbedingungen unter Verwendung der Randbedingungsform $\dot{X} = -\dot{f} \bar{\Phi} - \bar{f} \dot{\Phi}$ und Umgehung eines Koeffizientenvergleiches

Auf dem Rande des Einheitskreises in der ζ -Ebene gelten nun folgende Umformungen:

$$\overline{\Phi(\zeta)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_j \bar{\zeta}^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_j \zeta^{-j} \quad \text{auf } |\zeta| = R = 1 \quad (14.21)$$

$$\overline{f(\zeta)} = c \left(\bar{\zeta} + \frac{m}{\zeta} \right) = c \left(\frac{1}{\zeta} + m \zeta \right) \quad \text{auf } |\zeta| = R = 1 \quad (14.22)$$

Durch Einsetzen der entsprechenden Größen aus (14.8), (14.21), (14.22) und (14.20) in Gleichung (14.18) erhält man

$$\begin{aligned} \dot{X}(\zeta) &= -c \left[1 - \frac{m}{\zeta^2} \right] \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_j \zeta^{-j} + \\ &\quad - c \left[\frac{1}{\zeta} + m \zeta \right] \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j \zeta^{j-1} \\ &= -c \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_j \zeta^{-j} + c m \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{a}_j \zeta^{-j-2} + \\ &\quad - c \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j \zeta^{j-2} - c m \sum_{j=-\infty}^{\infty} j a_j \zeta^j \end{aligned} \quad (14.23)$$

Die Funktion $\Psi(\zeta)$ läßt sich nun explizit mit Hilfe von

$$\Psi(\zeta) = X'(\zeta) = \frac{\dot{X}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} \quad (14.24)$$

angeben, wenn die Beziehungen (14.23) für \dot{X} und (14.8) für \dot{f} beachtet werden.

14.1.3 Die Funktionen Φ, Ψ, \dot{X} sowie $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ und τ_{xy} für eine Finite-Element-Lösung

Für eine Finite-Element-Lösung dienen nun die komplexen Funktionen Φ und \dot{X} mit den endlichen Summationsgrenzen $-N$ und M als Grundlage. Mit den komplexen Koeffizienten

$$a_j = \alpha_j + i \beta_j \quad (14.25)$$

lauten sie

$$\Phi(\zeta) = \sum_{j=-N}^M a_j \zeta^j \quad (14.26)$$

und

$$\begin{aligned} \dot{X}(\zeta) = & -c \sum_{j=-N}^M \bar{a}_j \zeta^{-j} + c m \sum_{j=-N}^M \bar{a}_j \zeta^{-j-2} + \\ & -c \sum_{j=-N}^M j a_j \zeta^{j-2} - c m \sum_{j=-N}^M j a_j \zeta^j \end{aligned} \quad (14.27)$$

Zur Schreibvereinfachung seien nun die komplexen Funktionen F_1, F_2, F_3 , sowie H_1, H_2 und H_3 eingeführt und folgendermaßen definiert:

$$F_1 = \frac{1}{\dot{f}(\zeta)} = \frac{1}{c \left[1 - \frac{m}{\zeta^2} \right]} \quad (14.28)$$

$$F_2 = \frac{1}{\dot{f}^2} = \frac{1}{c^2 \left[1 - \frac{m}{\zeta^2} \right]^2} \quad (14.29)$$

$$F_3 = -\frac{\ddot{f}}{\dot{f}^3} = -\frac{\frac{2m}{\zeta^3}}{c^2 \left[1 - \frac{m}{\zeta^2} \right]^3} \quad (14.30)$$

$$H_1 = \frac{1}{1 - \frac{m}{\zeta^2}} \quad (14.31)$$

$$H_2 = \frac{1}{\left[1 - \frac{m}{\zeta^2}\right]^2} \quad (14.32)$$

$$H_3 = -\frac{\frac{2m}{\zeta^3}}{\left[1 - \frac{m}{\zeta^2}\right]^3} \quad (14.33)$$

Die Formulierung der benötigten Ableitungsgrößen von Φ und Ψ mit Hilfe dieser Funktionen lautet nun:

$$\Phi' = \dot{\Phi} \frac{1}{\dot{f}} = \dot{\Phi} F_1 \quad (14.34)$$

$$\begin{aligned} \Phi'' &= \ddot{\Phi} \frac{1}{\dot{f}^2} - \dot{\Phi} \frac{\ddot{f}}{\dot{f}^3} \\ &= \ddot{\Phi} F_2 + \dot{\Phi} F_3 \end{aligned} \quad (14.35)$$

$$\begin{aligned} \Psi = X' &= \dot{X} \frac{1}{\dot{f}} = \dot{X} F_1 \\ &= \dot{X} \frac{1}{c} H_1 \end{aligned} \quad (14.36)$$

$$\begin{aligned} \Psi' = X'' &= \ddot{X} \frac{1}{\dot{f}^2} - \dot{X} \frac{\ddot{f}}{\dot{f}^3} \\ &= \ddot{X} F_2 + \dot{X} F_3 \\ &= \ddot{X} \frac{1}{c^2} H_2 + \dot{X} \frac{1}{c^2} H_3 \end{aligned} \quad (14.37)$$

Die Verschiebungs- und Spannungsfunktionen ergeben sich hier im einzelnen zu :

$$\begin{aligned}
 2\mu u &= \operatorname{Re} [x \Phi - z \bar{\Phi}' - \bar{\Psi}] \\
 &= \operatorname{Re} [x \Phi] - \operatorname{Re} [z \bar{\Phi}'] - \operatorname{Re} [\Psi] \\
 &= \sum_{j=-N}^M \left\{ [x \operatorname{Re} [\zeta^j] - j(x [\operatorname{Re} [\zeta^{j-1}] \operatorname{Re} [F_1] - \operatorname{Im} [\zeta^{j-1}] \operatorname{Im} [F_1])] + \right. \\
 &\quad \left. + y [\operatorname{Im} [\zeta^{j-1}] \operatorname{Re} [F_1] + \operatorname{Re} [\zeta^{j-1}] \operatorname{Im} [F_1]])] + \right. \\
 &\quad + \operatorname{Re} [\zeta^{-j}] \operatorname{Re} [H_1] - \operatorname{Im} [\zeta^{-j}] \operatorname{Im} [H_1] + \\
 &\quad + j(\operatorname{Re} [\zeta^{j-2}] \operatorname{Re} [H_1] - \operatorname{Im} [\zeta^{j-2}] \operatorname{Im} [H_1]) + \\
 &\quad - m(\operatorname{Re} [\zeta^{-j-2}] \operatorname{Re} [H_1] - \operatorname{Im} [\zeta^{-j-2}] \operatorname{Im} [H_1]) + \\
 &\quad \left. + m j(\operatorname{Re} [\zeta^j] \operatorname{Re} [H_1] - \operatorname{Im} [\zeta^j] \operatorname{Im} [H_1]) \right] \alpha_j + \\
 &\quad + [-x \operatorname{Im} [\zeta^j] - j(-x [\operatorname{Im} [\zeta^{j-1}] \operatorname{Re} [F_1] + \operatorname{Re} [\zeta^{j-1}] \operatorname{Im} [F_1]] + \\
 &\quad \quad + y [\operatorname{Re} [\zeta^{j-1}] \operatorname{Re} [F_1] - \operatorname{Im} [\zeta^{j-1}] \operatorname{Im} [F_1]])] + \\
 &\quad + \operatorname{Im} [\zeta^{-j}] \operatorname{Re} [H_1] + \operatorname{Re} [\zeta^{-j}] \operatorname{Im} [H_1] + \\
 &\quad - j(\operatorname{Im} [\zeta^{j-2}] \operatorname{Re} [H_1] + \operatorname{Re} [\zeta^{j-2}] \operatorname{Im} [H_1]) + \\
 &\quad - m(\operatorname{Im} [\zeta^{-j-2}] \operatorname{Re} [H_1] + \operatorname{Re} [\zeta^{-j-2}] \operatorname{Im} [H_1]) + \\
 &\quad \left. - m j(\operatorname{Im} [\zeta^j] \operatorname{Re} [H_1] + \operatorname{Re} [\zeta^j] \operatorname{Im} [H_1]) \right] \beta_j \} \tag{14.38}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2\mu\nu &= \text{Im} [x \Phi - z \bar{\Phi}' - \bar{\Psi}] \\
 &= \text{Im} [x \Phi] - \text{Im} [z \bar{\Phi}'] + \text{Im} [\Psi] \\
 &= \sum_{j=-N}^M \left\{ [x \text{Im} [\zeta^j] - j (-x [\text{Im} [\zeta^{j-1}] \text{Re} [F_1] + \text{Re} [\zeta^{j-1}] \text{Im} [F_1]] + \right. \\
 &\quad \left. + y [\text{Re} [\zeta^{j-1}] \text{Re} [F_1] - \text{Im} [\zeta^{j-1}] \text{Im} F_1]) + \right. \\
 &\quad - (\text{Im} [\zeta^{-j}] \text{Re} [H_1] + \text{Re} [\zeta^{-j}] \text{Im} [H_1]) + \\
 &\quad - j (\text{Im} [\zeta^{j-2}] \text{Re} [H_1] + \text{Re} [\zeta^{j-2}] \text{Im} [H_1]) + \\
 &\quad + m (\text{Im} [\zeta^{-j-2}] \text{Re} [H_1] + \text{Re} [\zeta^{-j-2}] \text{Im} [H_1]) + \\
 &\quad \left. - m j (\text{Im} [\zeta^j] \text{Re} [H_1] + \text{Re} [\zeta^j] \text{Im} [H_1]) \right] \alpha_j + \\
 &+ [x \text{Re} [\zeta^j] - j (-x [\text{Re} [\zeta^{j-1}] \text{Re} [F_1] - \text{Im} [\zeta^{j-1}] \text{Im} [F_1]] + \\
 &\quad - y [\text{Im} [\zeta^{j-1}] \text{Re} [F_1] + \text{Re} [\zeta^{j-1}] \text{Im} [F_1]]) + \\
 &\quad + \text{Re} [\zeta^{-j}] \text{Re} [H_1] - \text{Im} [\zeta^{-j}] \text{Im} [H_1] + \\
 &\quad - j (\text{Re} [\zeta^{j-2}] \text{Re} [H_1] - \text{Im} [\zeta^{j-2}] \text{Im} [H_1]) + \\
 &\quad - m (\text{Re} [\zeta^{-j-2}] \text{Re} [H_1] - \text{Im} [\zeta^{-j-2}] \text{Im} [H_1]) + \\
 &\quad \left. - m j (\text{Re} [\zeta^j] \text{Re} [H_1] - \text{Im} [\zeta^j] \text{Im} [H_1]) \right] \beta_j \} \quad (14.39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \operatorname{Re}[\Phi' + \overline{\Phi'} - z \overline{\Phi''} - \overline{\Psi'}] = \\
 &= 2 \operatorname{Re}[\Phi'] - \operatorname{Re}[\overline{z} \Phi''] - \operatorname{Re}[\Psi'] = \\
 &= \sum_{j=-N}^M \left\{ [2j (\operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[F_1] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[F_1]) + \right. \\
 &\quad -j(j-1) (x [\operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[F_2] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[F_2]] + \\
 &\quad \left. + y [\operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[F_2] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[F_2]]) \right\} + \\
 &\quad -j (x [\operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[F_3] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[F_3]] + \\
 &\quad \left. + y [\operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[F_3] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[F_3]]) \right\} + \\
 &\quad -j \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[H_2] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[H_2]) + \\
 &\quad + \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^j] \operatorname{Re}[H_3] - \operatorname{Im}[\zeta^j] \operatorname{Im}[H_3]) + \\
 &\quad + j(j-2) \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Re}[H_2] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Im}[H_2]) + \\
 &\quad + j \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[H_3] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[H_3]) + \\
 &\quad + m(j+2) \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Re}[H_2] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Im}[H_2]) + \\
 &\quad - m \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[H_3] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[H_3]) + \\
 &\quad + m j^2 \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[H_2] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[H_2]) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +mj \frac{1}{c} \left(\operatorname{Re}[\zeta^j] \operatorname{Re}[H_3] - \operatorname{Im}[\zeta^j] \operatorname{Im}[H_3] \right) \alpha_j + \\
& + \left[-2j \left(\operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[F_1] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[F_1] \right) + \right. \\
& \quad -j(j-1) \left(-x \left[\operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[F_2] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[F_2] \right] + \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + y \left[\operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[F_2] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[F_2] \right] \right) \right] + \\
& -j \left(-x \left[\operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[F_3] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[F_3] \right] + \right. \\
& \quad \left. + y \left[\operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[F_3] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[F_3] \right] \right) + \\
& -j \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[H_2] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[H_2] \right) + \\
& + \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{-j}] \operatorname{Re}[H_3] + \operatorname{Re}[\zeta^{-j}] \operatorname{Im}[H_3] \right) + \\
& -j(j-2) \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Re}[H_2] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Im}[H_2] \right) + \\
& -j \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[H_3] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[H_3] \right) + \\
& + m(j+2) \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{-j-3}] \operatorname{Re}[H_2] + \operatorname{Re}[\zeta^{-j-3}] \operatorname{Im}[H_2] \right) + \\
& -m \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{-j-2}] \operatorname{Re}[H_3] + \operatorname{Re}[\zeta^{-j-2}] \operatorname{Im}[H_3] \right) + \\
& -mj^2 \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[H_2] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[H_2] \right) + \\
& -mj \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^j] \operatorname{Re}[H_3] + \operatorname{Re}[\zeta^j] \operatorname{Im}[H_3] \right) \beta_j \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} &= \text{Re}[\phi' + \bar{\phi}' + z \bar{\phi}'' + \bar{\psi}'] \\
 &= 2 \text{Re}[\phi'] + \text{Re}[\bar{z} \phi''] + \text{Re}[\bar{\psi}'] \\
 &= \sum_{j=-N}^M \left\{ [2j(\text{Re}[\zeta^{j-1}] \text{Re}[F_1] - \text{Im}[\zeta^{j-1}] \text{Im}[F_1])] + \right. \\
 &\quad + j(j-1) \left(x [\text{Re}[\zeta^{j-2}] \text{Re}[F_2] - \text{Im}[\zeta^{j-2}] \text{Im}[F_2]] + \right. \\
 &\quad \quad \left. + y [\text{Im}[\zeta^{j-2}] \text{Re}[F_2] + \text{Re}[\zeta^{j-2}] \text{Im}[F_2]] \right) + \\
 &\quad + j \left(x [\text{Re}[\zeta^{j-1}] \text{Re}[F_3] - \text{Im}[\zeta^{j-1}] \text{Im}[F_3]] + \right. \\
 &\quad \quad \left. + y [\text{Im}[\zeta^{j-1}] \text{Re}[F_3] + \text{Re}[\zeta^{j-1}] \text{Im}[F_3]] \right) + \\
 &\quad + j \frac{1}{c} (\text{Re}[\zeta^{j-1}] \text{Re}[H_2] - \text{Im}[\zeta^{j-1}] \text{Im}[H_2]) + \\
 &\quad - \frac{1}{c} (\text{Re}[\zeta^{-j}] \text{Re}[H_3] - \text{Im}[\zeta^{-j}] \text{Im}[H_3]) + \\
 &\quad - j(j-2) \frac{1}{c} (\text{Re}[\zeta^{j-3}] \text{Re}[H_2] - \text{Im}[\zeta^{j-3}] \text{Im}[H_2]) + \\
 &\quad - j \frac{1}{c} (\text{Re}[\zeta^{j-2}] \text{Re}[H_3] - \text{Im}[\zeta^{j-2}] \text{Im}[H_3]) + \\
 &\quad - m(j+2) \frac{1}{c} (\text{Re}[\zeta^{-j-3}] \text{Re}[H_2] - \text{Im}[\zeta^{-j-3}] \text{Im}[H_2]) + \\
 &\quad + m \frac{1}{c} (\text{Re}[\zeta^{-j-2}] \text{Re}[H_3] - \text{Im}[\zeta^{-j-2}] \text{Im}[H_3]) + \\
 &\quad - m j^2 \frac{1}{c} (\text{Re}[\zeta^{j-1}] \text{Re}[H_2] - \text{Im}[\zeta^{j-1}] \text{Im}[H_2]) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -mj \frac{1}{c} \left(\operatorname{Re}[\zeta^j] \operatorname{Re}[H_3] - \operatorname{Im}[\zeta^j] \operatorname{Im}[H_3] \right) \alpha_j + \\
& + \left[-2j \left(\operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[F_1] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[F_1] \right) + \right. \\
& \quad + j(j-1) \left(-x \left[\operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[F_2] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[F_2] \right] + \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + y \left[\operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[F_2] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[F_2] \right] \right) \right] + \\
& \quad + j \left(-x \left[\operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[F_3] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[F_3] \right] + \right. \\
& \quad \quad \left. + y \left[\operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[F_3] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[F_3] \right] \right) + \\
& \quad + j \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[H_2] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[H_2] \right) + \\
& \quad - \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^j] \operatorname{Re}[H_3] + \operatorname{Re}[\zeta^j] \operatorname{Im}[H_3] \right) + \\
& \quad + j(j-2) \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Re}[H_2] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Im}[H_2] \right) + \\
& \quad + j \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[H_3] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[H_3] \right) + \\
& \quad - m(j+2) \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Re}[H_2] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Im}[H_2] \right) + \\
& \quad + m \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[H_3] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[H_3] \right) + \\
& \quad + mj^2 \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[H_2] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[H_2] \right) + \\
& \quad + mj \frac{1}{c} \left(\operatorname{Im}[\zeta^j] \operatorname{Re}[H_3] + \operatorname{Re}[\zeta^j] \operatorname{Im}[H_3] \right) \beta_j \}
\end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \text{Im} [\bar{z} \phi'' + \psi']$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=-N}^M \left\{ [j(j-1) (x [\text{Im}[\zeta^{j-2}] \text{Re}[F_2] + \text{Re}[\zeta^{j-2}] \text{Im}[F_2]] + \right. \\
 &\quad \left. - y [\text{Re}[\zeta^{j-2}] \text{Re}[F_2] - \text{Im}[\zeta^{j-2}] \text{Im}[F_2]]) + \right. \\
 &\quad \left. + j (x [\text{Im}[\zeta^{j-1}] \text{Re}[F_3] + \text{Re}[\zeta^{j-1}] \text{Im}[F_3]] + \right. \\
 &\quad \left. - y [\text{Re}[\zeta^{j-1}] \text{Re}[F_3] - \text{Im}[\zeta^{j-1}] \text{Im}[F_3]]) + \right. \\
 &\quad \left. + j \frac{1}{c} (\text{Im}[\zeta^{-j-1}] \text{Re}[H_2] + \text{Re}[\zeta^{-j-1}] \text{Im}[H_2]) + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{c} (\text{Im}[\zeta^{-j}] \text{Re}[H_3] + \text{Re}[\zeta^{-j}] \text{Im}[H_3]) + \right. \\
 &\quad \left. - j(j-2) \frac{1}{c} (\text{Im}[\zeta^{j-3}] \text{Re}[H_2] + \text{Re}[\zeta^{j-3}] \text{Im}[H_2]) + \right. \\
 &\quad \left. - j \frac{1}{c} (\text{Im}[\zeta^{j-2}] \text{Re}[H_3] + \text{Re}[\zeta^{j-2}] \text{Im}[H_3]) + \right. \\
 &\quad \left. - m(j+2) \frac{1}{c} (\text{Im}[\zeta^{-j-3}] \text{Re}[H_2] + \text{Re}[\zeta^{-j-3}] \text{Im}[H_2]) + \right. \\
 &\quad \left. + m \frac{1}{c} (\text{Im}[\zeta^{-j-2}] \text{Re}[H_3] + \text{Re}[\zeta^{-j-2}] \text{Im}[H_3]) + \right. \\
 &\quad \left. - m j^2 \frac{1}{c} (\text{Im}[\zeta^{j-1}] \text{Re}[H_2] + \text{Re}[\zeta^{j-1}] \text{Im}[H_2]) + \right. \\
 &\quad \left. - m j \frac{1}{c} (\text{Im}[\zeta^j] \text{Re}[H_3] + \text{Re}[\zeta^j] \text{Im}[H_3]) \right] \alpha_j +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + [j(j-1) (x [\operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[F_2] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[F_2]] + \\
 & \quad + y [\operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[F_2] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[F_2]]) + \\
 & + j (x [\operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[F_3] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[F_3]] + \\
 & \quad + y [\operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[F_3] + \operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[F_3]]) + \\
 & - j \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[H_2] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[H_2]) + \\
 & + \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^j] \operatorname{Re}[H_3] - \operatorname{Im}[\zeta^j] \operatorname{Im}[H_3]) + \\
 & - j(j-2) \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Re}[H_2] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Im}[H_2]) + \\
 & - j \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[H_3] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[H_3]) + \\
 & + m(j+2) \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Re}[H_2] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-3}] \operatorname{Im}[H_2]) + \\
 & - m \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Re}[H_3] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \operatorname{Im}[H_3]) + \\
 & - m j^2 \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Re}[H_2] - \operatorname{Im}[\zeta^{j-1}] \operatorname{Im}[H_2]) + \\
 & - m j \frac{1}{c} (\operatorname{Re}[\zeta^j] \operatorname{Re}[H_3] - \operatorname{Im}[\zeta^j] \operatorname{Im}[H_3])] \beta_j \}
 \end{aligned}$$

In Hinblick auf eine Programmierung wurde für x und y hier nicht $\operatorname{Re}[f(\zeta)]$ und $\operatorname{Im}[f(\zeta)]$ geschrieben, da innerhalb der Rechnung x und y vorgegeben werden, ζ hieraus ermittelt wird und die Berechnung der Größen x, y durch Einsetzen des entsprechenden ζ -wertes in die Abbildungsfunktion $f(\zeta)$ natürlich überflüssig ist.

14.1.4 Identifizierung von Starrkörperanteilen

Je nach dem, was für ein Funktional man verwendet, sind Starrkörperanteile mitzubersichtigen oder wegzulassen. Daher ist es wichtig, sie lokalisieren zu können (s. Kapitel 12). In dem vorliegenden Fall sind die Starrkörperanteile in den Funktionen Φ und Ψ nicht ohne weiteres sofort ersichtlich.

Mit

$$\Phi = a_0 \quad (14.43)$$

und

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\dot{\chi}}{\dot{f}} = \frac{-c \bar{a}_0 + c m \bar{a}_0 \zeta^{-2}}{c [1 - m \zeta^{-2}]} = \frac{-c \bar{a}_0 [1 - m \zeta^{-2}]}{c [1 - m \zeta^{-2}]} \\ &= -\bar{a}_0 \end{aligned} \quad (14.44)$$

bestätigt sich das Vorhandensein der Starrkörperverschiebungsanteile, welche in den Verschiebungsfunktionen dann als

$$u = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Re}[(x+1)a_0] = \frac{1}{2\mu} (x+1)\alpha_0 \quad (14.45)$$

und

$$v = \frac{1}{2\mu} \operatorname{Im}[(x+1)a_0] = \frac{1}{2\mu} (x+1)\beta_0 \quad (14.46)$$

erscheinen. Da nun im allgemeinen Bildungsschema der Ansatzfunktionen in jedem Fall eine funktionale Abhängigkeit von ζ besteht, wie (14.44) zeigt,

erscheint es angebracht, für die Starrkörperverschiebungsanteile und die zugehörigen verschwundenen Spannungsgrößen gesonderte Zuweisungen in einem Programm vorzusehen.

Der Rotationsanteil $\Phi = i\beta_1 z$ hätte in der ζ -Ebene mit (14.5) das folgende Aussehen:

$$\Phi(\zeta) = ic \left[\zeta + \frac{m}{\zeta} \right] \beta_1 = i \left[\zeta + \frac{m}{\zeta} \right] \beta_1^* \quad (14.47)$$

Dieser Term Φ und der zugehörige Anteil der Funktion Ψ , nämlich $\Psi = 0 \beta_1$, lassen sich aber in den tatsächlich vorhandenen, in Frage kommenden Anteilen

$$\Phi(\zeta) = i\beta_1 \zeta + i\beta_{-1} \zeta^{-1} \quad (14.48)$$

und

$$\Psi(\zeta) = \underbrace{\frac{-imc[\zeta + \zeta^{-3}]}{c[1 - m\zeta^{-2}]} \beta_1 + \frac{ic[\zeta + \zeta^{-3}]}{c[1 - m\zeta^{-2}]} \beta_{-1}}_{\text{linear abhängige Terme}} \quad (14.49)$$

nicht erkennen. So hat es den Anschein, als würde der Rotationsanteil fehlen. Bedient man sich aber des mathematischen Trickes, in (14.48) den Term $im\beta_1 \zeta^{-1}$ dazuzuaddieren und anschließend wieder abzuziehen, so bekommt man den Ausdruck

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= i\beta_1 \zeta + i\beta_{-1} \zeta^{-1} + im\beta_1 \zeta^{-1} - im\beta_1 \zeta^{-1} \\ &= \underbrace{i \left[\zeta + m\zeta^{-1} \right] \beta_1}_{\text{Rotationsteil}} + \underbrace{i\beta_{-1} \zeta^{-1} - im\beta_1 \zeta^{-1}}_{\text{linear abhängige Terme}} \end{aligned} \quad (14.50)$$

Somit lassen sich hier die Funktionsterme mit dem Koeffizienten β_1 folgendermaßen interpretieren: Zusätzlich zu den Rotationsanteilen

$$\Phi = i \left[\zeta + m\zeta^{-1} \right] \beta_1 \quad \text{und} \quad \Psi = 0$$

sind in Φ ein Term mit ζ^{-1} und in Ψ ein Term mit

$$\frac{[\zeta + \zeta^{-3}]}{[1 - m\zeta^{-2}]}$$

überlagert. Diese Zusatzterme sind aber an sich überflüssig, da sie mit dem Koeffizienten β_{-1} schon berücksichtigt wurden.

Es ist also möglich, anstelle von (14.48) und (14.49) die betrachteten Funktionsanteile von Φ und Ψ zu

$$\Phi(\zeta) = i \left[\zeta + m \zeta^{-1} \right] \beta_1 + i \beta_{-1} \zeta^{-1} \quad (14.51)$$

und

$$\Psi(\zeta) = 0 + i \frac{c [\zeta + \zeta^{-3}]}{c [1 + m \zeta^{-2}]} \beta_{-1} \quad (14.52)$$

zu vereinfachen. Die Vereinfachung betrifft hier nur die zu β_1 gehörigen Funktionsterme, alle anderen Terme bleiben unverändert. Die zu β_1 gehörigen Spannungsterme werden nun natürlich Null, wogegen das vor der Vereinfachung nicht der Fall war.

14.2 Spezielle Ansatzterme für ein elliptisches Loch unter gleichmäßigem Druck p

Das Vorgehen zur Konstruktion einer Lösung ist im Prinzip das gleiche wie in Kapitel 13.2 beschrieben. Hier erhält man nun mit

$$i \int (\bar{T}_x + i \bar{T}_y) ds = -p z = -p c \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right) \quad (14.53)$$

die Bedingungsgleichung

$$\bar{\Phi} + \bar{f} \frac{\dot{\Phi}}{\dot{f}} + \Psi = -p c \overline{\left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right)} \quad \text{auf } |\zeta| = 1 \quad (14.54)$$

welche nach Einsetzen von \dot{f} sowie \bar{f} und anschließendem Ersetzen der konjugiert komplexen Terme \bar{f} und $\overline{\left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right)}$ durch analytische Funktionen sich zu

$$\overline{\Phi(\zeta)} + \frac{\zeta^2 \left(\frac{1}{\zeta} + m \zeta \right)}{\zeta^2 - m} \dot{\Phi}(\zeta) + \Psi(\zeta) = -p c \left(\frac{1}{\zeta} + m \zeta \right) \quad (14.55)$$

$$\text{auf } |\zeta| = 1$$

ergibt. Hieraus lassen sich wiederum beliebig viele Lösungen konstruieren, wenn man beispielsweise Φ in der Form $\Phi = (\pm) p c m \zeta^j$ (mit beliebigem j) wählt. Die einfachste Lösung ist jedoch

$$\Phi(\zeta) = 0 \quad (14.56)$$

und

$$\Psi(\zeta) = -p c \left(\frac{1}{\zeta} + m \zeta \right) \quad (14.57)$$

Eine andere, für die die Spannungen im Unendlichen übrigens verschwinden, lautet

$$\Phi(\zeta) = -p c m \zeta^{-1} \quad (14.58)$$

und

$$\Psi(\zeta) = -p c \zeta^{-1} - \frac{p c m (1 + m \zeta^2)}{\zeta (\zeta^2 - m)} \quad (14.59)$$

14.3 Spezielle Ansatzterme für ein elliptisches Loch unter gleichmäßig verteilter Schubspannung q

Der Fall konstanter Schubbelastung längs des elliptischen Lochrandes führt mit

$$i \int (\bar{T}_x + i \bar{T}_y) ds = i q z = i q c \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right) \quad (14.60)$$

auf ähnliche Lösungen wie in Kapitel 14.2 angegeben. Man erhält hier beispielsweise

$$\Phi(\zeta) = 0 \quad (14.61)$$

und

$$\Psi(\zeta) = -i q c \left(\frac{1}{\zeta} + m \zeta \right) \quad (14.62)$$

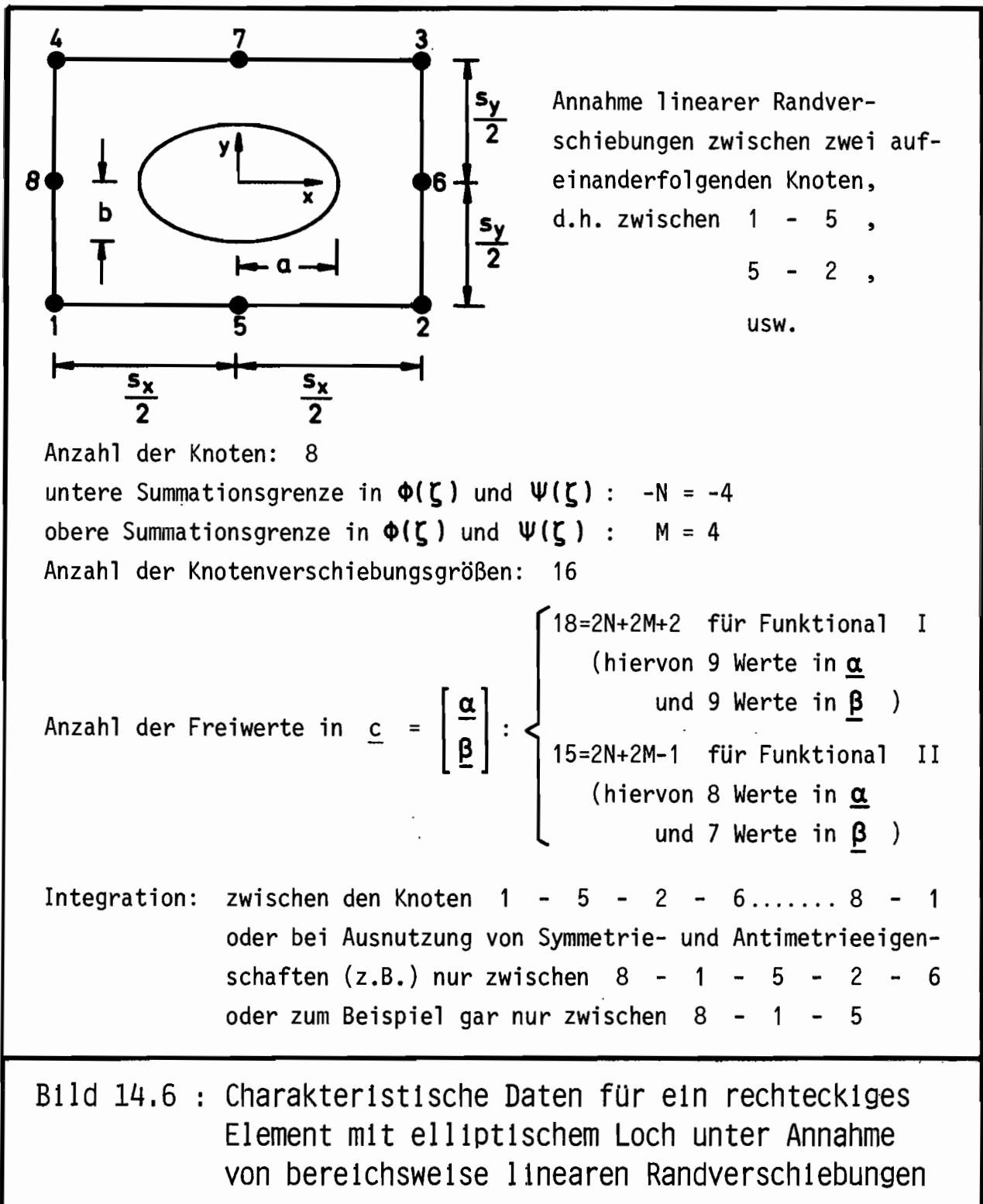
oder

$$\Phi(\zeta) = i q c m \zeta^{-1} \quad (14.63)$$

und

$$\Psi(\zeta) = -i q c \zeta^{-1} + i \frac{q c m (1 + m \zeta^2)}{\zeta (\zeta^2 - m)} \quad (14.64)$$

14.4 Kurzbeschreibung einiger finiter Elemente mit elliptischem Loch



Die in den Bildern 14.6 und 14.7 verwendeten Bezeichnungen $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ sowie Funktional I und II haben folgende Bedeutungen:

- $\underline{\alpha}$: Vektor der Realteilmomente α_j (aus $\alpha_j = \alpha_j + i\beta_j$)
- $\underline{\beta}$: Vektor der Imaginärteilmomente β_j

Funktional I : nicht erweitertes Funktional mit Vorabminimierung der Randverschiebungsdifferenzen (s. Kap. 8.1) (Starrkörperanteile berücksichtigt)

Funktional II : erweitertes Funktional (s. Kap. 8.2) (Starrkörperanteile weggelassen)

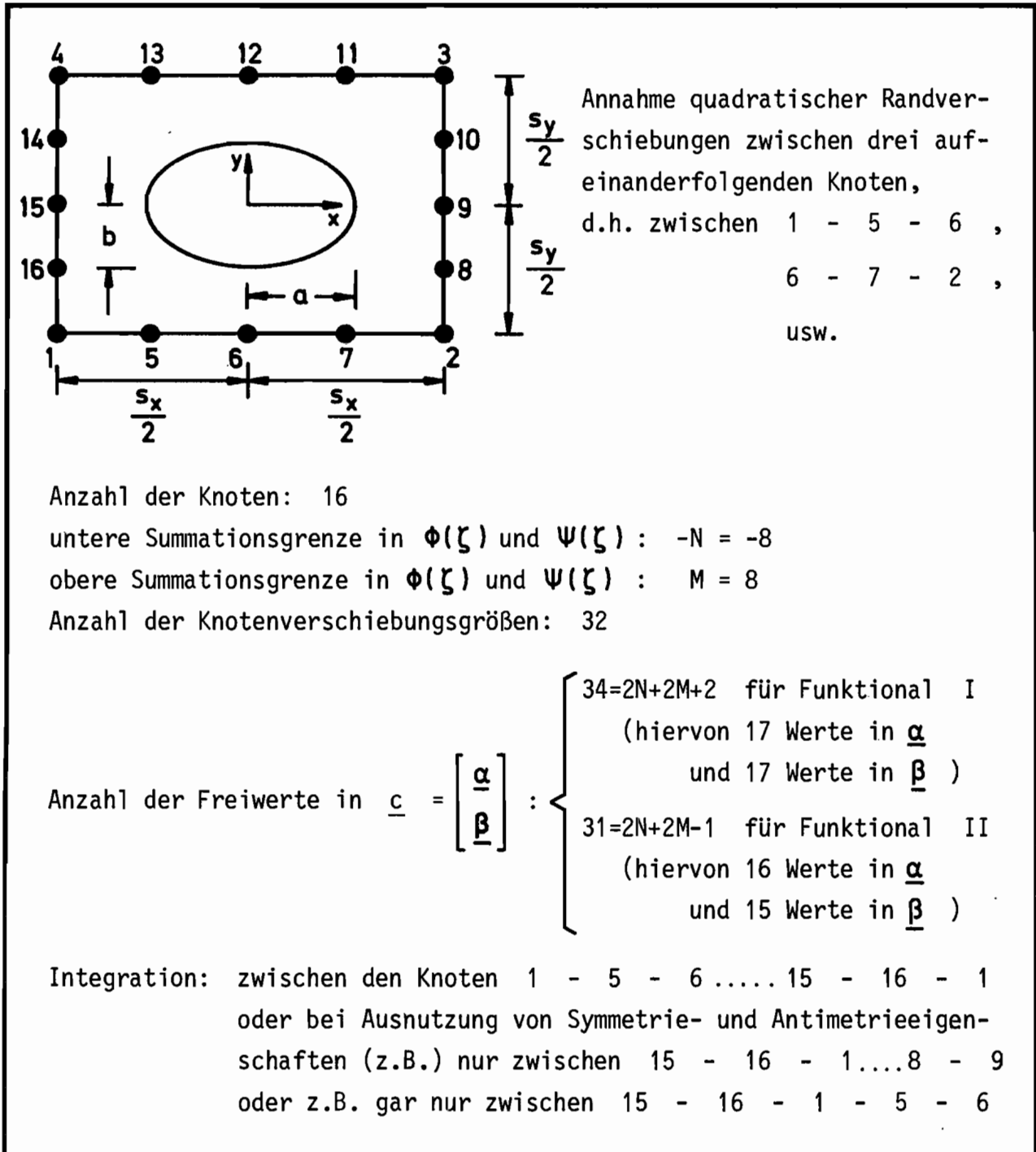
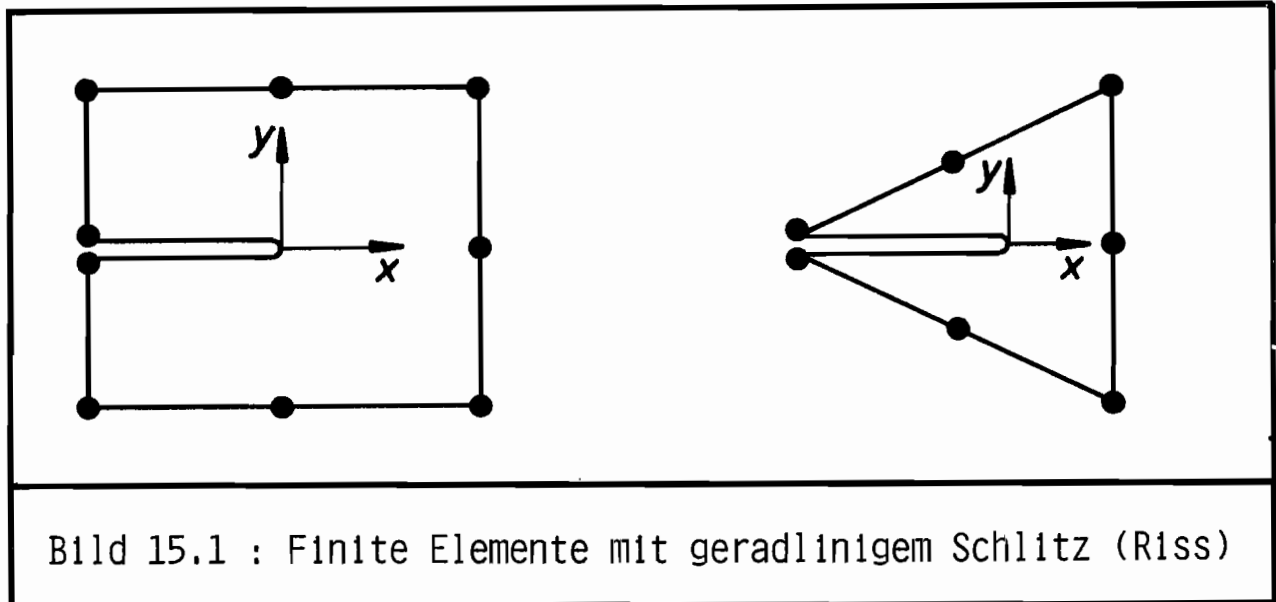


Bild 14.7 : Charakteristische Daten für ein rechteckiges Element mit elliptischem Loch unter Annahme von bereichsweise quadratischen Randverschiebungen

15 Finite Elemente mit Außenriß (geradliniger Schlitz)

Nun gilt es für finite Elemente, die einen geradlinigen Schlitz enthalten (s. Bild 15.1), geeignete komplexe Ansatzfunktionen zu konstruieren, welche vorgegebenen homogenen Spannungsrandbedingungen auf den Schlitzrändern (Rißufer) gerecht werden.



15.1 Konstruktion der Ansatzfunktionen bei unbelasteten Rißufern

Die zu erfüllenden Randbedingungen lauten hier

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{yy} = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{auf den Rißufern} \quad (15.1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{yy} = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (y = +0, x < 0) \\ (y = -0, x < 0) \end{array} \quad (15.2)$$

Diese Randbedingungen gelten unter der Voraussetzung, daß die beiden Rißufer unter der vorgegebenen Belastung nicht aufeinandergedrückt werden. Um eine "saubere" Trennung der beiden Rißufer zu erreichen, wird wiederum eine konforme Abbildung benutzt. In der transformierten Ebene wird es gelingen, Funktionen zu ermitteln, welche eine Erfüllung der Randbedingungen ermöglichen. In komplexer Form mit den Funktionen ϕ und ψ lassen sich hier

die Bedingungen für einen unbelasteten Rand ($T_x = \bar{T}_x = 0$, $T_y = \bar{T}_y = 0$) nach Beziehung (10.28) durch

$$\overline{\phi(\zeta)} + \overline{f(\zeta)} \frac{\dot{\phi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} + \psi(\zeta) = 0 \quad \text{auf dem trans-} \quad (15.3)$$

formierten Rand
in der ζ -Ebene

beschreiben.

15.1.1 Konforme Abbildung

Die besondere Problematik des Schlitzes ist, daß zwei Randteile unendlich dicht beieinander liegen. Als konforme Abbildung ist eine solche Abbildung geeignet, die die gegenüberliegenden Schlitzränder voneinander trennt und auf eine Gerade abbildet. Als Geraden kommen hier die ξ - und die η -Achse in der ζ -Ebene in Frage. Man muß sich nun entscheiden auf welche Halbebene abgebildet werden soll. Hier sei die rechte Halbebene gewählt. Die Abbildung welche den Forderungen der inversen Aufgabe gerecht wird und die rechte ζ -Halbebene auf die geschlitzte z -Volllebene abgebildet (s. Bild 15.2 und Bild 15.3), lautet

$$z = f(\zeta) = \zeta^2$$

$$= R^2 e^{i2\theta} = (\xi^2 - \eta^2) + i2\xi\eta \quad (15.4)$$

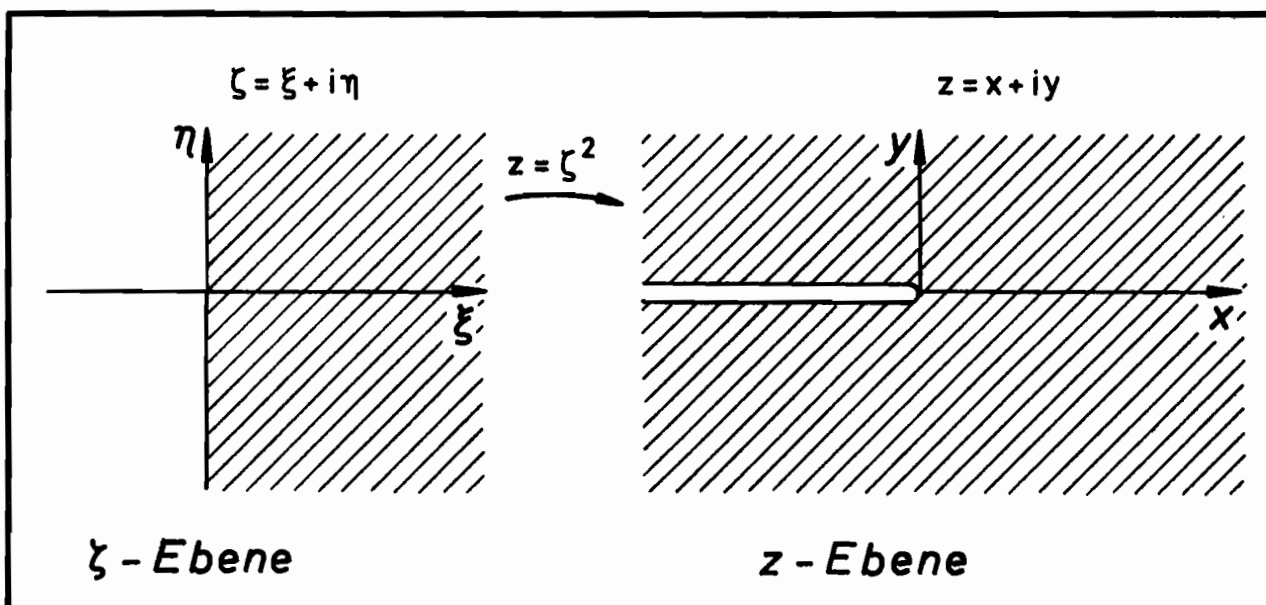
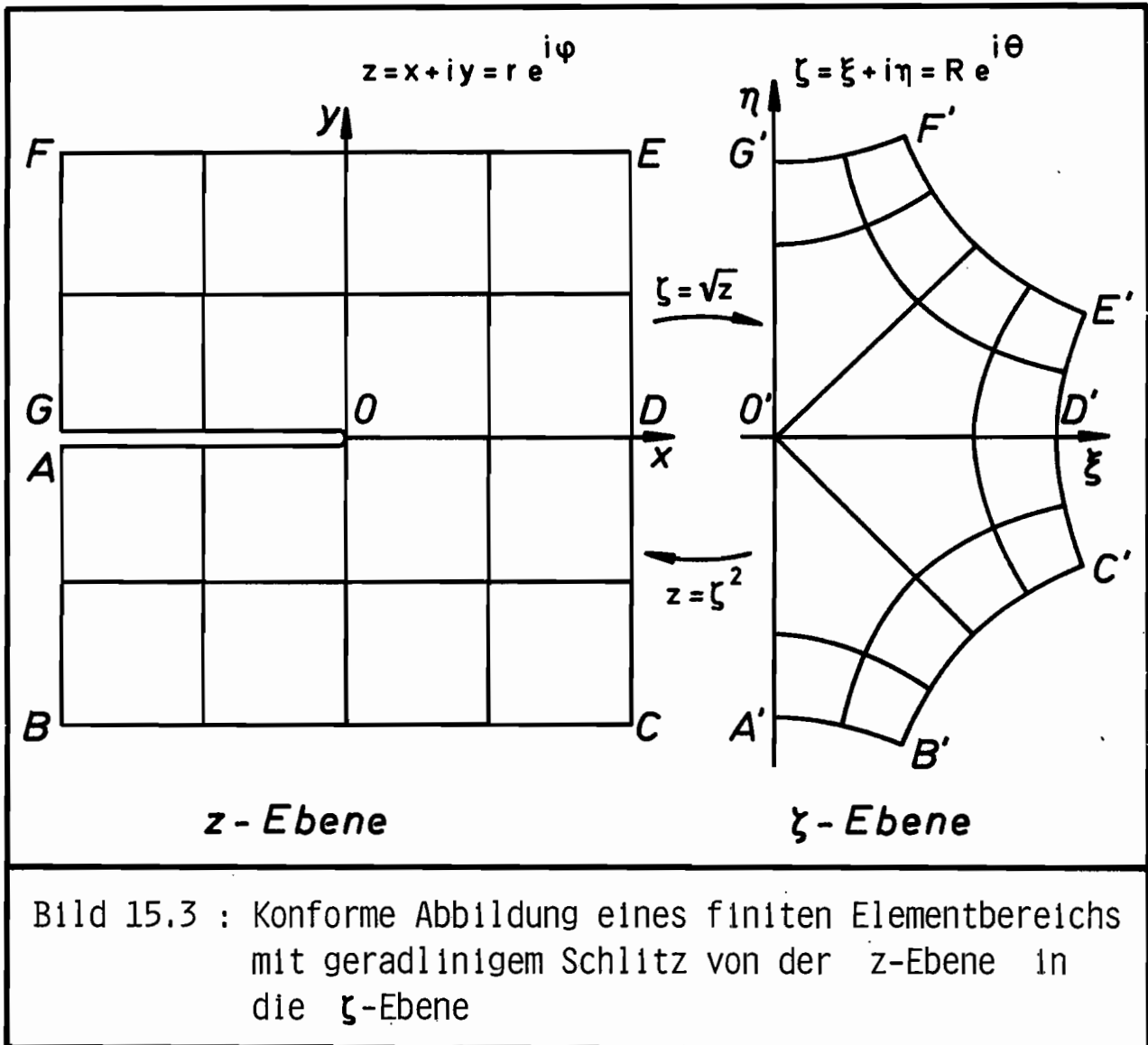


Bild 15.2 : Die konforme Abbildung $z = \zeta^2$
(hier: Abbildung der rechten ζ -Halbebene
auf die geschlitzte z -Volllebene)



Die ersten beiden Ableitungen von $f(\zeta)$ ergeben sich zu

$$\dot{f}(\zeta) = 2\zeta \tag{15.5}$$

und

$$\ddot{f}(\zeta) = 2 \tag{15.6}$$

Da $\dot{f}(\zeta=0) = 0$ gilt, ist die Konformität der Abbildungsfunktion $f(\zeta)$ in dem Punkt $\zeta = 0$ gestört. Für die vorliegende Aufgabenstellung ist dies keine negative Eigenschaft, da hierdurch der spezielle Lösungscharakter, nämlich das Auftreten singulärer Spannungsgrößen in dem Nullpunkt, in Erscheinung treten wird.

Die Auflösung von (15.4) liefert mit

$$\zeta = \pm \sqrt{z} = \pm r^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\varphi}{2}} \tag{15.7}$$

eine mehrdeutige Beziehung. Die Eindeutigkeit wird durch die Nebenbedingung gewährleistet, daß von den beiden möglichen Lösungen aus (15.7) nur die gesucht ist, welche in der rechten ζ -Halbebene liegt, für die also gilt

$$\operatorname{Re}[\zeta] = \xi \geq 0 \tag{15.8}$$

Beschränkt man sich auf die Hauptwerte des Wurzelausdruckes in (15.7), das heißt, auf Werte, für die

$$-\pi \leq \varphi < \pi \tag{15.9}$$

gilt, so läßt sich die gesuchte Umkehrfunktion durch

$$\begin{aligned} \zeta = g(z) &= \sqrt{z} && \left(\begin{array}{l} \text{mit } \sqrt{z} : \text{Hauptwert} \\ \text{d.h.: } -\pi \leq \varphi < \pi \end{array} \right) \\ &= r^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\varphi}{2}} \\ &= \sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2} + i \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \tag{15.10}$$

angeben, da der Realteil $\xi = \sqrt{r} \cos \varphi/2$ in dem betrachteten Bereich die Bedingung (15.8) erfüllt.

15.1.2 Ansätze für Φ und Ψ in der ζ -Ebene

Für den einfach zusammenhängenden Bereich in der ζ -Ebene kommen die folgenden Potenzreihenansätze in Frage:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \zeta^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j R^j e^{ij\theta} \tag{15.11}$$

und

$$\Psi(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \zeta^j = \sum_{j=0}^{\infty} b_j R^j e^{ij\theta} \tag{15.12}$$

Die Methode des Koeffizientenvergleichs zur Erfüllung der Randbedingungen führt mit diesen Ansätzen zum Ziel, die Koeffizienten b_j durch die Koeffizienten a_j ausdrücken zu können. Hier sei die Funktion Ψ jedoch wiederum in Abhängigkeit von Φ durch den einfacheren Weg ermittelt, bei dem der Koeffizientenvergleich umgangen wird.

15.1.2.1 Ermittlung von Ψ in Abhängigkeit von Φ
 zur Erfüllung der Randbedingungen unter Verwendung
 der Randbedingungsform $\Psi = -\overline{\Phi} - \overline{f} \dot{\Phi} / \dot{f}$
 und Umgehung eines Koeffizientenvergleiches

Nach der Randbedingungsgleichung (15.3) ist nun die nach Ψ aufgelöste Beziehung

$$\Psi(\zeta) = -\overline{\Phi(\zeta)} - \overline{f(\zeta)} \frac{\dot{\Phi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} \quad \begin{array}{l} \text{auf der } \eta\text{-Achse} \\ (\xi = 0, \text{ d.h. } \zeta = i\eta) \end{array} \quad (15.13)$$

zu betrachten. Auf der η -Achse sind gemäß der Beziehung (10.13) in Kapitel 10.2 folgende Umformungen erlaubt:

$$\overline{\Phi(\zeta)} = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} \overline{\zeta^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} (-1)^j \zeta^j \quad \text{auf } \zeta = i\eta \quad (15.14)$$

$$\overline{f(\zeta)} = \overline{\zeta^2} = \zeta^2 \quad \text{auf } \zeta = i\eta \quad (15.15)$$

Einsetzen der entsprechenden Größen aus (15.14), (15.15), (15.11) und (15.5) in (15.13) liefert nun

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta) &= -\sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} (-1)^j \zeta^j - \zeta^2 \frac{1}{2\zeta} \sum_{j=0}^{\infty} j a_j \zeta^{j-1} \\ &= -\sum_{j=0}^{\infty} \left[\overline{a_j} (-1)^j + \frac{j}{2} a_j \right] \zeta^j \end{aligned} \quad (15.16)$$

15.1.3 Die Funktionen Φ , Ψ sowie $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$
und τ_{xy} für eine Finite-Element-Lösung

Mit einer dem jeweiligen Element angepaßten oberen Summationsgrenze N lauten die Funktionen Φ und Ψ nun

$$\Phi(\zeta) = \sum_{j=0}^N a_j \zeta^j \quad (15.17)$$

und

$$\Psi(\zeta) = - \sum_{j=0}^N \left[\bar{a}_j (-1)^j + \frac{j}{2} a_j \right] \zeta^j, \quad (15.18)$$

wobei

$$a_j = \alpha_j + i \beta_j \quad (15.19)$$

gilt. Hiermit und den die Abbildungsfunktion betreffenden Beziehungen (15.4), (15.5) und (15.6) erhält man die im folgenden aufgeführten Verschiebungs- und Spannungsfunktionen:

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{2\mu} \sum_{j=0}^N \left\{ \left[x \operatorname{Re}[\zeta^j] + \frac{j+2(-1)^j}{2} \operatorname{Re}[\zeta^j] + \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{j}{2} \left(\operatorname{Re}[\zeta^2] \operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] + \operatorname{Im}[\zeta^2] \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \right) \right] \alpha_j \right. \\ & \left. + \left[-x \operatorname{Im}[\zeta^j] - \frac{j-2(-1)^j}{2} \operatorname{Im}[\zeta^j] + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{j}{2} \left(\operatorname{Re}[\zeta^2] \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] - \operatorname{Im}[\zeta^2] \operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \right) \right] \beta_j \right\} \end{aligned}$$

(15.20)

$$\begin{aligned}
 v = & \frac{1}{2\mu} \sum_{j=0}^N \left\{ \left[x \operatorname{Im}[\zeta^j] - \frac{j+2(-1)^j}{2} \operatorname{Im}[\zeta^j] + \right. \right. \\
 & + \frac{j}{2} \left(\operatorname{Re}[\zeta^2] \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] - \operatorname{Im}[\zeta^2] \operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] \right) \left. \right] \alpha_j \\
 & + \left[x \operatorname{Re}[\zeta^j] - \frac{j-2(-1)^j}{2} \operatorname{Re}[\zeta^j] + \right. \\
 & \left. + \frac{j}{2} \left(\operatorname{Re}[\zeta^2] \operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] + \operatorname{Im}[\zeta^2] \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] \right) \right] \beta_j \left. \right\}
 \end{aligned}$$

(15.21)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} = & \sum_{j=0}^N \left\{ \left[j \left(1 + \frac{j+2(-1)^j}{4} \right) \operatorname{Re}[\zeta^{j-2}] + \right. \right. \\
 & - \frac{j(j-2)}{4} \left(\operatorname{Re}[\zeta^2] \operatorname{Re}[\zeta^{j-4}] + \operatorname{Im}[\zeta^2] \operatorname{Im}[\zeta^{j-4}] \right) \left. \right] \alpha_j \\
 & + \left[-j \left(1 + \frac{j-2(-1)^j}{4} \right) \operatorname{Im}[\zeta^{j-2}] + \right. \\
 & \left. + \frac{j(j-2)}{4} \left(\operatorname{Re}[\zeta^2] \operatorname{Im}[\zeta^{j-4}] - \operatorname{Im}[\zeta^2] \operatorname{Re}[\zeta^{j-4}] \right) \right] \beta_j \left. \right\}
 \end{aligned}$$

(15.22)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} = & \sum_{j=0}^N \left\{ \left[j \left(1 - \frac{j+2(-1)^j}{4} \right) \operatorname{Re} [\zeta^{j-2}] + \right. \right. \\
 & + \frac{j(j-2)}{4} \left(\operatorname{Re} [\zeta^2] \operatorname{Re} [\zeta^{j-4}] + \operatorname{Im} [\zeta^2] \operatorname{Im} [\zeta^{j-4}] \right) \left. \right] \alpha_j \\
 & + \left[-j \left(1 - \frac{j-2(-1)^j}{4} \right) \operatorname{Im} [\zeta^{j-2}] + \right. \\
 & \left. \left. - \frac{j(j-2)}{4} \left(\operatorname{Re} [\zeta^2] \operatorname{Im} [\zeta^{j-4}] - \operatorname{Im} [\zeta^2] \operatorname{Re} [\zeta^{j-4}] \right) \right] \beta_j \right\}
 \end{aligned}$$

(15.23)

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy} = & \sum_{j=0}^N \left\{ \left[\frac{j(j-2)}{4} \left(\operatorname{Re} [\zeta^2] \operatorname{Im} [\zeta^{j-4}] - \operatorname{Im} [\zeta^2] \operatorname{Re} [\zeta^{j-4}] \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{j(j+2(-1)^j)}{4} \operatorname{Im} [\zeta^{j-2}] \right] \alpha_j \right. \\
 & + \left[\frac{j(j-2)}{4} \left(\operatorname{Re} [\zeta^2] \operatorname{Re} [\zeta^{j-4}] + \operatorname{Im} [\zeta^2] \operatorname{Im} [\zeta^{j-4}] \right) + \right. \\
 & \left. \left. - \frac{j(j-2(-j)^j)}{4} \operatorname{Re} [\zeta^{j-2}] \right] \beta_j \right\}
 \end{aligned}$$

(15.24)

15.1.4 Singuläre Spannungsgrößen für $z = 0$ bzw. $\zeta = 0$
und Spannungsintensitätsfaktoren

Mit dem Summationsindex $j=1$ ergeben sich in den Beziehungen (15.22), (15.23) und (15.24) für $\zeta = 0$ singuläre Spannungsgrößen. Die betreffenden Terme seien im folgenden angegeben:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = R^{-1} & \left[\frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \cos 3\theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \sin 3\theta \right] \alpha_1 + \\ & + R^{-1} \left[\frac{7}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \sin 3\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \cos 3\theta \right] \beta_1 \end{aligned} \quad (15.25)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = R^{-1} & \left[\frac{5}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 2\theta \cos 3\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \sin 3\theta \right] \alpha_1 + \\ & + R^{-1} \left[\frac{1}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \cos 2\theta \sin 3\theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \cos 3\theta \right] \beta_1 \end{aligned} \quad (15.26)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = R^{-1} & \left[-\frac{1}{4} \sin \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \sin 3\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \cos 3\theta \right] \alpha_1 + \\ & + R^{-1} \left[-\frac{3}{4} \cos \theta - \frac{1}{4} \cos 2\theta \cos 3\theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \sin 3\theta \right] \beta_1 \end{aligned} \quad (15.27)$$

Geht man nun von den Polarkoordinaten der ζ -Ebene auf die Polarkoordinaten der z -Ebene mit Hilfe von

$$R = r^{\frac{1}{2}} \quad (15.28)$$

und

$$\theta = \frac{\varphi}{2} \quad (15.29)$$

über und verwendet anschließend einige trigonometrische Umformungen, so gewinnt man nacheinander:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = & r^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3}{2} \varphi \right] \alpha_1 + \\ & + r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \left[2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3}{2} \varphi \right] \beta_1 \end{aligned} \tag{15.30}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = & r^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3}{2} \varphi \right] \alpha_1 + \\ & - r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3}{2} \varphi \beta_1 \end{aligned} \tag{15.31}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = & r^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3}{2} \varphi \alpha_1 + \\ & - r^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3}{2} \varphi \right] \beta_1 \end{aligned} \tag{15.32}$$

In der Nähe des Nullpunktes ($r \rightarrow 0$) oder anders ausgedrückt, in der nächsten Umgebung einer Rißspitze bilden die in (15.30), (15.31) und (15.32) aufgeführten Glieder die führenden Terme und alle anderen Reihenglieder können demgegenüber vernachlässigt werden. Um trotz der singulären Spannungen ein Maß für die Intensität der Spannungen in Nullpunktnähe bei vorgegebener Belastung angeben zu können, bietet es sich an, als Kenngrößen die Koeffizienten der für $r=0$ singulär werdenden Funktionsterme zu verwenden. Dies wären hier also die Faktoren α_1 und β_1 , die sich als Spannungsintensitätsfaktoren definieren ließen. Die ursprüngliche Definition der Spannungsintensitätsfaktoren K_1 und K_2 enthält noch einen Faktor, und zwar erscheinen dort die Koeffizienten als

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} K_1 \tag{15.33}$$

und

$$\beta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} K_2 \quad (15.34)$$

Die Beziehung zwischen den hier verwendeten Koeffizienten α_1, β_1 und den als Spannungsintensitätsfaktoren bezeichneten Werten K_1, K_2 ist hier also mit

$$K_1 = \sqrt{2} \alpha_1 \quad (15.35)$$

und

$$K_2 = -\sqrt{2} \beta_1 \quad (15.36)$$

gegeben. Die nützliche komplexe Kombination

$$K_1 - iK_2 = \sqrt{2} \alpha_1 + i\sqrt{2} \beta_1 = \sqrt{2} [\alpha_1 + i\beta_1] = \sqrt{2} a_1 \quad (15.37)$$

liefert für den komplexen Koeffizienten a_1 den Ausdruck

$$a_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} (K_1 - iK_2) . \quad (15.38)$$

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß in der Literatur [11] auch noch eine andere Definition der Spannungsintensitätsfaktoren zu finden ist, und zwar

$$K_1 = \sqrt{2\pi} \alpha_1 \quad (15.39)$$

$$K_2 = -\sqrt{2\pi} \beta_1 \quad (15.40)$$

Im folgenden seien aber nicht diese Zuweisungen verwendet, sondern die Gleichungen (15.35) und (15.36) als Grundlage für die Spannungsintensitätsfaktoren herangezogen.

15.1.5 Rißuferverformungen bei singulären Spannungen im Nullpunkt

Die zu den im Koordinatenursprung singulär werdenden Spannungsgrößen
gehörenden Verschiebungen lassen sich nach Ausnutzung von trigonome-
trischen Beziehungen durch

$$u = \frac{1}{2\mu} r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[x - 1 + 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} K_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\mu} r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \left[x + 1 + 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} K_2 \quad (15.41)$$

und

$$v = \frac{1}{2\mu} r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi}{2} \left[x + 1 - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} K_1 +$$

$$- \frac{1}{2\mu} r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[x - 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right] \frac{1}{\sqrt{2}} K_2 \quad (15.42)$$

ausdrücken.

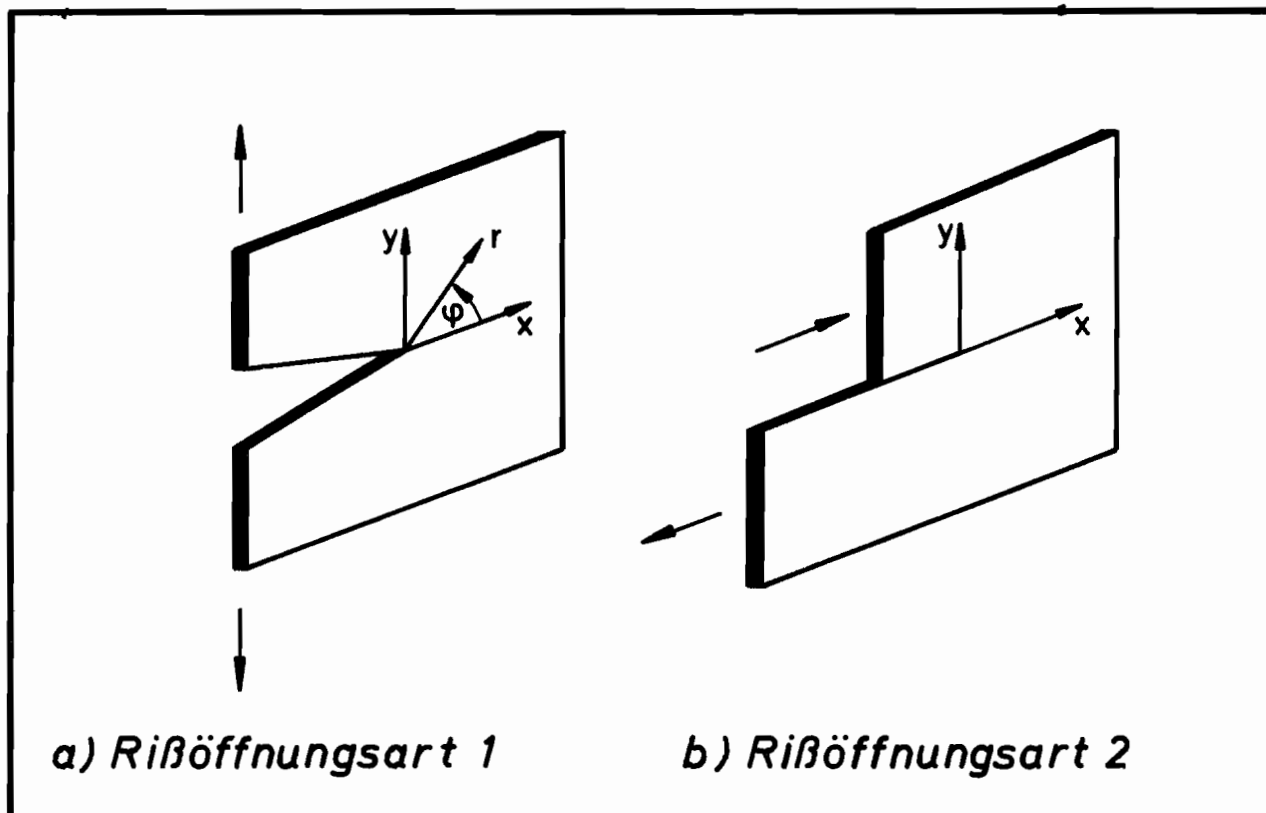


Bild 15.4 : Rissverformungsarten zu den mit K_1 und K_2
behafteten Verschiebungstermen
(schematisch dargestellt)

Auf den Rißuferen ist $\varphi = \pm \pi$, so daß sich mit $\cos(\pm \pi/2) = 0$ durch den Funktionsanteil mit K_1 eine Rißöffnung gemäß Bild 15.4a einstellt und durch den Funktionsanteil mit K_2 eine Rißverformung gemäß Bild 15.4b hervorgerufen wird.

K_1 bezieht sich also auf eine eventuell kritisch ausfallende Zugbelastung senkrecht zur x-Achse (senkrecht zu den unverformten Rißuferen), und K_2 bezieht sich auf eine Scherbeanspruchung parallel zur x-Achse.

15.2 Nutzung von Spannungsintensitätsfaktoren

Um mit Hilfe von Spannungsintensitätsfaktoren zu Aussagen über die Gefährlichkeit eines Risses unter konkreter Beanspruchung kommen zu können, sind für verschiedene Werkstoffe an Standardproben der ASTM (American Society for Testing and Materials) kritische Spannungsintensitätsfaktoren experimentell ermittelt worden, bei denen sich die Risse derart ausbreiten, daß ohne Laststeigerung Bruch eintritt [1,2,11]. Diese kritischen Intensitätsfaktoren können gewissermaßen als Werkstoffkenngrößen aufgefaßt werden und werden im englischen Sprachgebrauch mit "fracture toughness" (Rißzähigkeit) bezeichnet. Nach Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren für einen Riß in einer Scheibe unter konkreter Belastung können diese ermittelten Werte mit den kritischen Intensitätsfaktoren verglichen werden und entscheiden helfen, ob ein kritischer Zustand erreicht ist oder noch eine Laststeigerung möglich ist.

Natürlich gibt es Grenzen, in dieser Art Rißprobleme zu behandeln, da mit den linearen Problemgleichungen nicht alle wirklich auftretenden physikalischen Vorgänge wie die Ausbildung von plastischen Zonen miteingefaßt werden und beispielsweise auch die Annahme eines geradlinigen Rißabschnittes eine starke Modellvereinfachung darstellt.

Der Gebrauch von Spannungsintensitätsfaktoren, der ja unter dem Gesichtspunkt zu sehen ist, mit relativ einfachen Problemgleichungen zu einer ungefähren Beurteilung der physikalischen Gegebenheiten zu kommen, sei hier nicht näher diskutiert, da es hier nur um die möglichst genaue numerische Ermittlung von Lösungen der vorgegebenen linearen partiellen Differentialaufgaben geht.

15.3 Gewinnung der Spannungsintensitätsfaktoren aus der Funktion $\phi'(z)$ bzw. aus $\phi'(\zeta)$

Um für Rißprobleme in anderer Form (s. Kapitel 16) Spannungsintensitätsfaktoren auf einfache Art angeben zu können, ist es sinnvoll zu versuchen, diese Faktoren direkt mit Hilfe der Funktionen ϕ und/oder ψ anzugeben. Als geeigneter Ausdruck erscheint hier die Summe der Normalspannungskomponenten $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$, welche ja invariant gegenüber Koordinatentransformationen ist, d.h. für ein anderes Koordinatensystem x', y' gilt

$$\sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} [\phi'(z)] \tag{15.43}$$

Hieraus scheint ϕ' die geeignete Funktion zu sein, die Spannungsintensitätsfaktoren zu ermitteln. Verwendet man nun in Gleichung (15.43) für ϕ' die Funktion

$$\phi_s(z) = a_1 z^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} (K_1 - iK_2) z^{\frac{1}{2}}, \tag{15.44}$$

deren Ableitung

$$\phi'_s(z) = \frac{a_1}{2 z^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4} \sqrt{2} (K_1 - iK_2) z^{-\frac{1}{2}} \tag{15.45}$$

lautet und für $z=0$ singularär wird, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} [4 \phi'_s(z)] \\ &= \operatorname{Re} [\sqrt{2} (K_1 - iK_2) z^{-\frac{1}{2}}] \\ &= \sqrt{2} K_1 \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \frac{\varphi}{2} - \sqrt{2} K_2 \frac{1}{\sqrt{r}} \sin \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \tag{15.46}$$

Die Verwendung der vollständigen Reihe für $\phi'(z)$ gemäß

$$\begin{aligned} \phi'(z) &= \sum_{j=0}^N \frac{j}{2} a_j z^{\frac{j}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2} a_1 z^{-\frac{1}{2}} + a_2 + \frac{3}{2} a_3 z^{\frac{1}{2}} + 2 a_4 z + \dots \end{aligned} \tag{15.47}$$

in der Kombination $(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ nach (15.43) liefert

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \operatorname{Re} [4 \phi'(z)] \quad (15.48)$$

$$= \operatorname{Re} [2a_1 z^{-\frac{1}{2}} + 4a_2 + 6a_3 z^{\frac{1}{2}} + 8a_4 z + \dots]$$

In den Beziehungen (15.46) und (15.48) sind die Glieder mit $z^{-\frac{1}{2}}$ für $z \rightarrow 0$ die führenden Terme, und in (15.48) sind dann alle anderen Terme klein und vernachlässigbar gegenüber dem mit $z^{-1/2}$ behafteten Funktionsanteil. Daher können die in eckigen Klammern stehenden Terme aus (15.46) und (15.48) für $z \rightarrow 0$ gleichgesetzt werden, gemäß

$$\sqrt{2}(K_1 - iK_2)z^{-\frac{1}{2}} = 2a_1 z^{-\frac{1}{2}} + 4a_2 + 6a_3 z^{\frac{1}{2}} + 8a_4 z + \dots \quad (15.49)$$

für $z \rightarrow 0$.

Multiplikation der Gleichung (15.49) mit $1/\sqrt{2} \cdot z^{\frac{1}{2}}$ und Grenzwertbildung auf beiden Seiten ergibt zunächst

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{2}(K_1 - iK_2) z^{\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2a_1}{z^{\frac{1}{2}}} z^{\frac{1}{2}} + 4a_2 z^{\frac{1}{2}} + 6a_3 z + \dots \right) \right]$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{4\phi'_s(z) \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{4\phi'(z) \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}} \quad (15.50)$$

und hieraus folgt

$$K_1 - iK_2 = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2a_1}{z^{\frac{1}{2}}} z^{\frac{1}{2}} + 4a_2 z^{\frac{1}{2}} + 6a_3 z + \dots \right) \right]$$

$$= \sqrt{2} a_1 \quad (15.51)$$

Diese Gleichung steht natürlich in Einklang mit (15.37). Somit ist es also möglich, allein aus Kenntnis von ϕ' die Spannungsintensitätsfaktoren K_1 und K_2 zu ermitteln. Der Zusammenhang zwischen ϕ' und den Intensitätsfaktoren

für den Fall, daß das Koordinatensystem mit seinem Nullpunkt an der Rißspitze liegt und sich der Schlitz auf der negativen x-Achse befindet, lautet (15.50) und (15.51) zufolge

$$K_1 - iK_2 = 2\sqrt{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\phi'(z) z^{\frac{1}{2}} \right] \quad (15.52)$$

Wird nicht mit einer direkt von z abhängigen Funktion $\phi'(z)$ sondern mit einer Funktion $\phi'(\zeta)$ gearbeitet, so lautet mit $z = f(\zeta)$ die (15.52) entsprechende Beziehung

$$K_1 - iK_2 = 2\sqrt{2} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \left[\frac{\dot{\phi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} f(\zeta)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (15.53)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, daß der Punkt $z=0$ dem Punkte $\zeta=0$ entspricht. Der Term $\dot{\phi}(\zeta)/\dot{f}(\zeta)$ in (15.53) entsteht, wenn in Gleichung (15.52) zur Unterscheidung der direkt von z und der von ζ abhängigen Funktionen $\phi'(z)$ in $\phi'_1(z)$ umbenannt und sodann $\phi'_1(z) = \phi'(\zeta) = \dot{\phi}(\zeta)/\dot{f}(\zeta)$ gesetzt wird.

15.4 Verwendung eines Skalierungsfaktors in der Abbildungsfunktion aus numerischen Gründen

Um bei der numerischen Durchführung der Integrationen auf dem Elementrand den durchlaufenen Zahlenbereich zu begrenzen, kann mit einem Skalierungsfaktor gearbeitet werden. Eine Skalierung würde man beispielsweise vornehmen, wenn die Elementlängen zahlenmäßig als besonders groß erscheinen. Der Skalierungsfaktor (Streckungs- bzw. Stauchungsfaktor), hier mit c bezeichnet, erscheint dann explizit in der Abbildungsfunktion $f(\zeta)$ in der Form

$$z = f(\zeta) = c \zeta^2 \quad (15.54)$$

und in der inversen Abbildung gemäß

$$\zeta = g(z) = \sqrt{\frac{z}{c}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \sqrt{z} \quad \left(\begin{array}{l} \text{mit } \sqrt{z}: \text{Hauptwert} \\ \text{d.h. } -\pi \leq \varphi < \pi \end{array} \right) \quad (15.55)$$

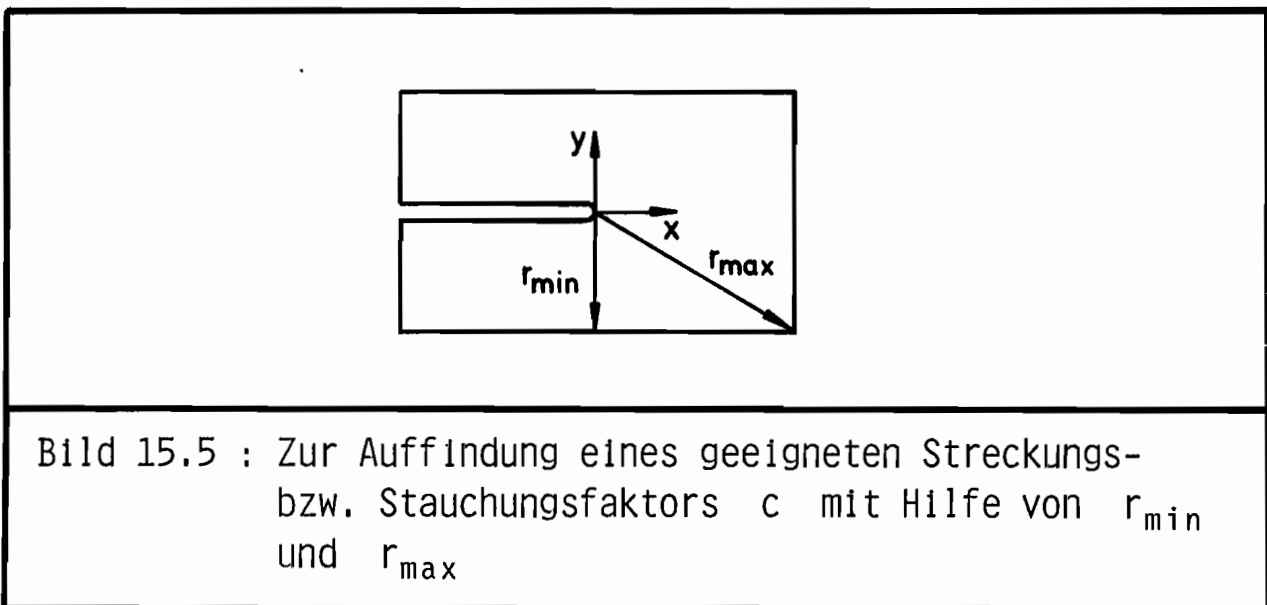
Durch geeignete Wahl des reellen Wertes c , wie zum Beispiel durch

$$c = |z_{\max}| = r_{\max} \quad (15.56)$$

oder durch

$$c = \frac{|z_{\max}| + |z_{\min}|}{2} = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} \quad (15.57)$$

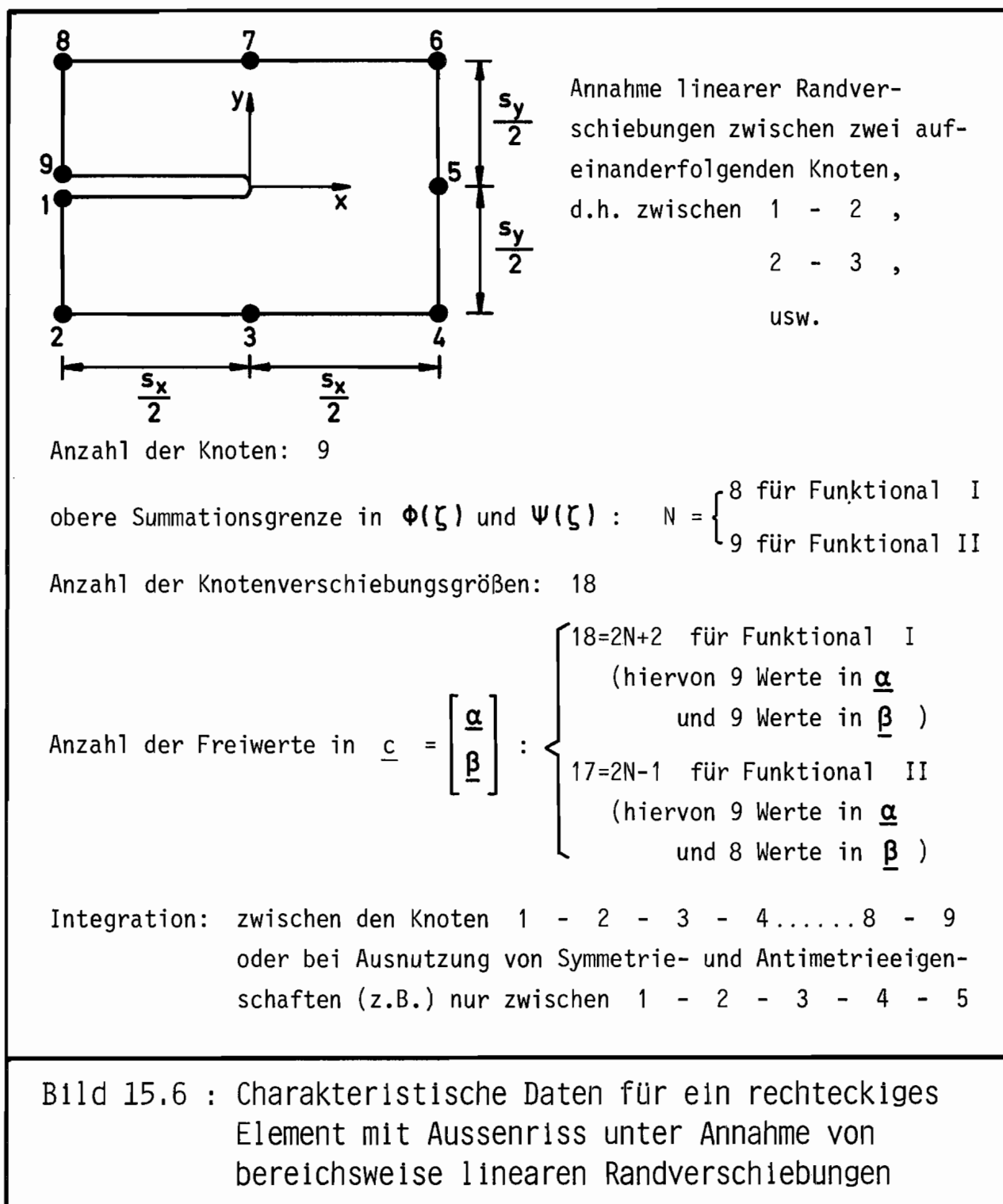
lassen sich der Betrag von ζ ($|\zeta| = R$) und damit auch die vorkommenden Potenzen von R gezielt auf einen Zahlenbereich um "1" begrenzen. r_{\max} und r_{\min} sollen hierbei den maximalen bzw. minimalen, an den Rand des Elementes reichenden Radius r in der z -Ebene kennzeichnen (s. Bild 15.5).



Außer der Änderung, daß ζ sich jetzt nach Gleichung (15.55) berechnet, müssen nur die Spannungsfunktionen in (15.22), (15.23) und (15.24) jeweils auf der rechten Seite noch mit dem Faktor $1/c$ versehen werden. Die Formeln für die Verschiebungsgrößen (15.20) und (15.21) behalten ihre Gültigkeit, ebenso die Gleichung (15.53) für die Spannungsintensitätsfaktoren, da dort (in (15.53)) mit $f(\zeta)$ und $\dot{f}(\zeta)$ der Skalierungsfaktor Berücksichtigung findet.

Es sei noch erwähnt, daß bei allen mit den Ribelementen durchgeführten Beispielrechnungen, bei denen sich auch zufriedenstellende Ergebnisse ergaben, auf die Verwendung eines expliziten Skalierungsfaktors verzichtet wurde, d.h. er war dort also durchweg $c=1$.

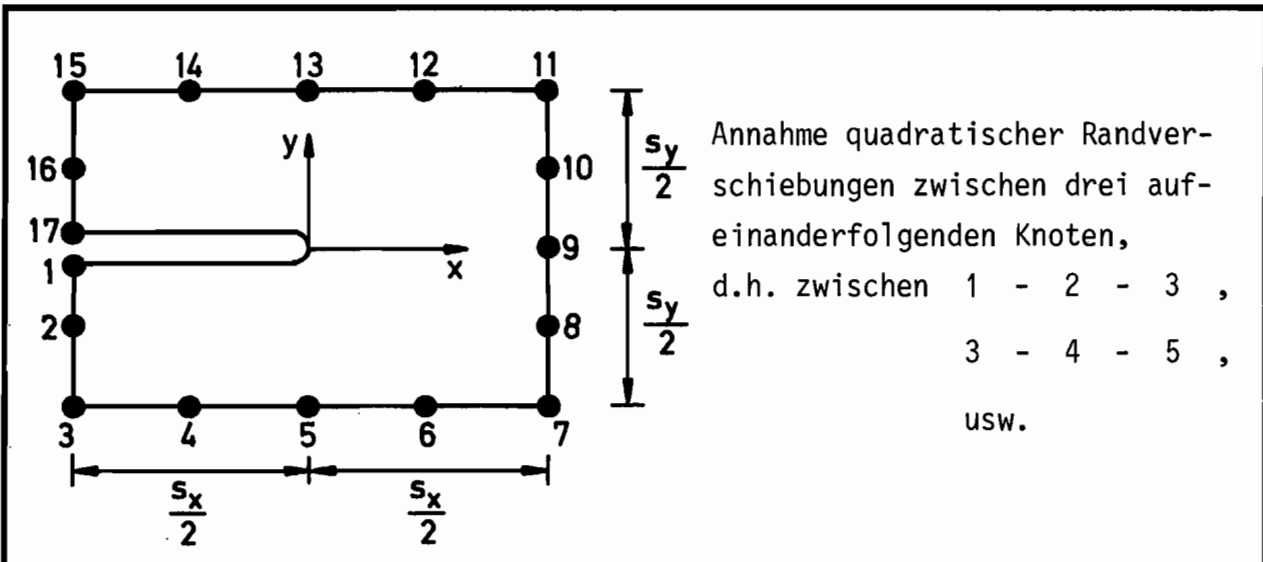
15.5 Kurzbeschreibung einiger finiter Elemente mit Außenriß



Die in den Bildern 15.6 bis 15.9 verwendeten Bezeichnungen $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ sowie Funktional I und II haben folgende Bedeutungen:

- $\underline{\alpha}$: Vektor der Realteilmomente α_j (aus $a_j = \alpha_j + i\beta_j$)
- $\underline{\beta}$: Vektor der Imaginärteilmomente β_j

- Funktional I : nicht erweitertes Funktional mit Vorabminimierung der Randverschiebungsdifferenzen (s. Kap. 8.1) (Starrkörperanteile berücksichtigt)
- Funktional II : erweitertes Funktional (s. Kap. 8.2) (Starrkörperanteile weggelassen)



Anzahl der Knoten: 17

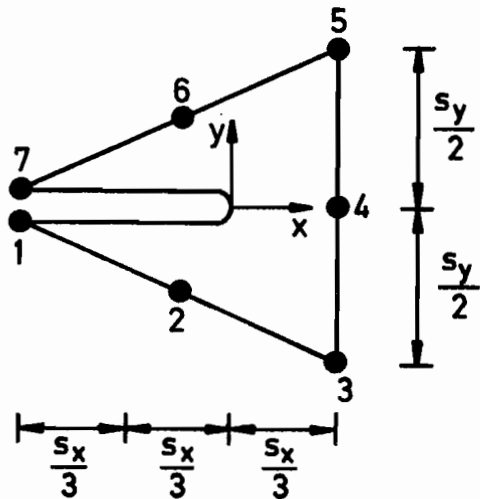
obere Summationsgrenze in $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$: $N = \begin{cases} 16 & \text{für Funktional I} \\ 17 & \text{für Funktional II} \end{cases}$

Anzahl der Knotenverschiebungsgrößen: 34

Anzahl der Freiwerte in $\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix}$: $\begin{cases} 34=2N+2 & \text{für Funktional I} \\ & \text{(hiervon 17 Werte in } \underline{\alpha} \\ & \text{und 17 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \\ 33=2N-1 & \text{für Funktional II} \\ & \text{(hiervon 17 Werte in } \underline{\alpha} \\ & \text{und 16 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \end{cases}$

Integration: zwischen den Knoten 1 - 2 - 3 - 4 16 - 17 oder bei Ausnutzung von Symmetrie- und Antimetrieigenschaften (z.B.) nur zwischen 1 - 2 8 - 9

Bild 15.7 : Charakteristische Daten für ein rechteckiges Element mit Aussenriss unter Annahme von bereichsweise quadratischen Randverschiebungen



Annahme linearer Randverschiebungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten,
d.h. zwischen 1 - 2 ,
2 - 3 ,
usw.

Anzahl der Knoten: 7

obere Summationsgrenze in $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$: $N = \begin{cases} 6 & \text{für Funktional I} \\ 7 & \text{für Funktional II} \end{cases}$

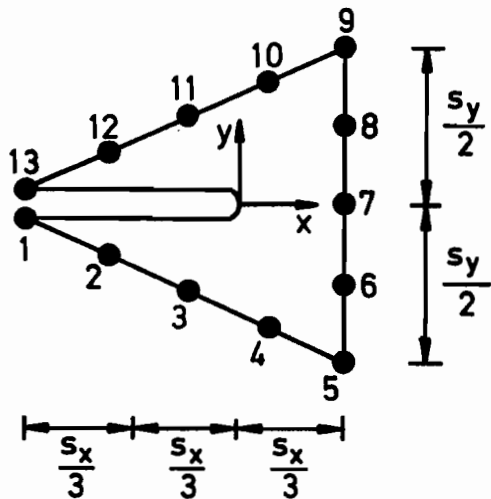
Anzahl der Knotenverschiebungsgrößen: 14

Anzahl der Freiwerte in $\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} 14=2N+2 & \text{für Funktional I} \\ & \text{(hiervon 7 Werte in } \underline{\alpha} \\ & \text{und 7 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \\ 13=2N-1 & \text{für Funktional II} \\ & \text{(hiervon 7 Werte in } \underline{\alpha} \\ & \text{und 6 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \end{cases}$$

Integration: zwischen den Knoten 1 - 2 - 3 6 - 7
oder bei Ausnutzung von Symmetrie- und Antimetrieigenschaften (z.B.) nur zwischen 1 - 2 - 3 - 4

Bild 15.8 : Charakteristische Daten für ein dreieckiges Element mit Aussenriss unter Annahme von bereichsweise linearen Randverschiebungen



Annahme quadratischer Randverschiebungen zwischen drei aufeinanderfolgenden Knoten,
 d.h. zwischen 1 - 2 - 3 ,
 3 - 4 - 5 ,
 usw.

Anzahl der Knoten: 13

obere Summationsgrenze in $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$: $N = \begin{cases} 12 \text{ für Funktional I} \\ 13 \text{ für Funktional II} \end{cases}$

Anzahl der Knotenverschiebungsgrößen: 26

Anzahl der Freiwerte in $\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix}$: $\begin{cases} 26=2N+2 \text{ für Funktional I} \\ \text{(hiervon 13 Werte in } \underline{\alpha} \\ \text{und 13 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \\ 25=2N-1 \text{ für Funktional II} \\ \text{(hiervon 13 Werte in } \underline{\alpha} \\ \text{und 12 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \end{cases}$

Integration: zwischen den Knoten 1 - 2 - 3 12 - 13
 oder bei Ausnutzung von Symmetrie- und Antimetrieigenschaften (z.B.) nur zwischen 1 - 2 6 - 7

Bild 15.9 : Charakteristische Daten für ein dreieckiges Element mit Aussenriss unter Annahme von bereichsweise quadratischen Randverschiebungen

16 Finite Elemente mit Innenriß (eingeschlossener geradliniger Schlitz)

Die finiten Elemente mit eingeschlossenem Schlitz (s. Bild 16.1) lassen sich als Elemente mit elliptischem Loch auffassen, das den Sonderfall einer verschwindenden Halbachse $b=0$ aufweist.

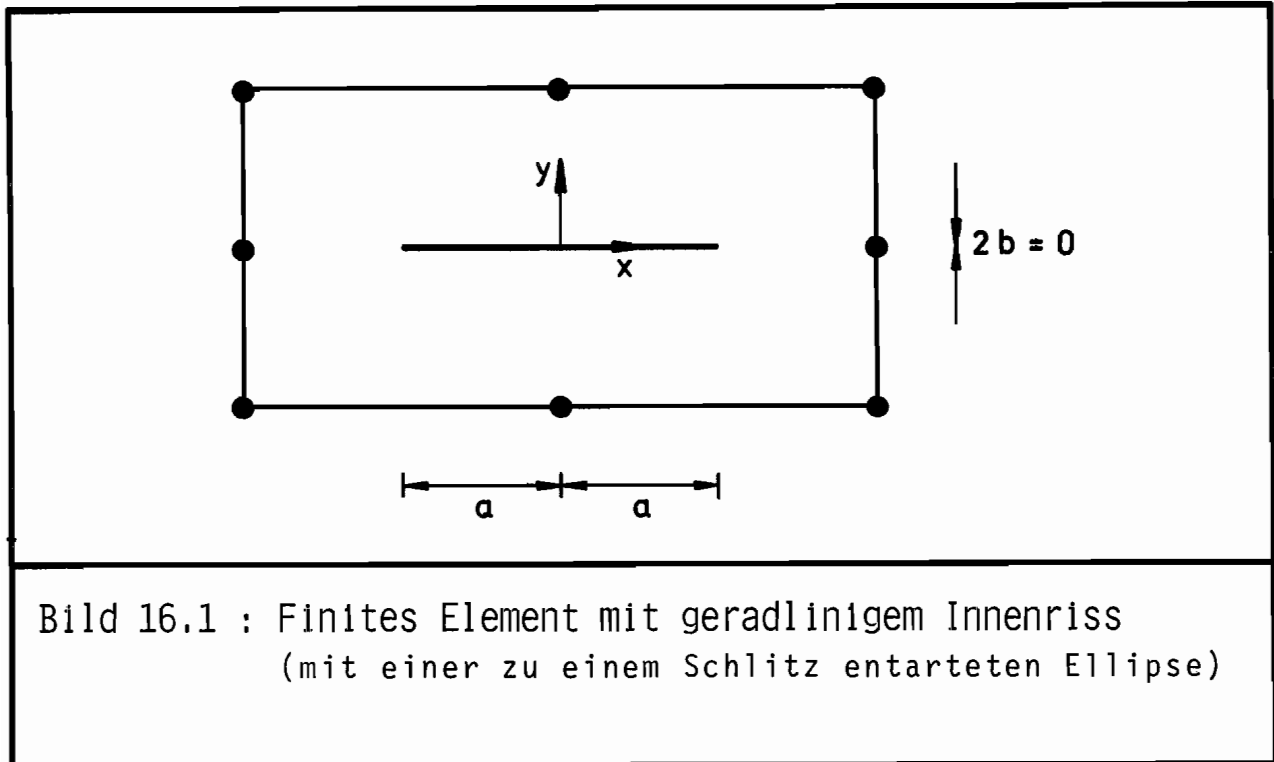


Bild 16.1 : Finites Element mit geradlinigem Innenriß
(mit einer zu einem Schlitz entarteten Ellipse)

Die speziellen Parameter $c = \frac{a}{2}$ und $m = 1$ führen hier nach (14.5) auf die konforme Abbildung

$$z = f(\zeta) = \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \quad (16.1)$$

mit der ersten Ableitung

$$\dot{f}(\zeta) = \frac{a}{2} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \quad , \quad (16.2)$$

die für die Punkte $\zeta = 1$ und $\zeta = -1$, welche den Rißspitzen entsprechen, verschwindet. Da nun \dot{f} an den genannten Punkten gleich Null ist, wird die Konformität dort gestört, und zudem ergeben sich dort singuläre Spannungsgrößen.

Weiterhin ist nicht sofort ersichtlich, daß die Verschiebungsfunktionen u und v an den betreffenden Punkten endlich bleiben, da sie den Ausdruck $\dot{f}(\zeta)$ im Nenner enthalten. Hier ist also zu überprüfen, ob etwaige Grenzwerte existieren.

Zur Behandlung von Spannungsintensitätsfaktoren müssen hier zwei Dinge berücksichtigt werden: Zum einen handelt es sich bei der vorliegenden Problematik um zwei Rißspitzen, und zum anderen liegt das ursprüngliche Koordinatensystem der z -Ebene, das durch die Abbildungsfunktion $z = f(\zeta)$ in Verbindung mit dem Koordinatensystem in der ζ -Ebene gebracht ist, mit seinem Nullpunkt in keiner der beiden Rißspitzen. Es sind also Formeln für die Spannungsintensitätsfaktoren herzuleiten, die es erlauben die Problematik in anderen Koordinatensystemen zu behandeln. Nach Herleitung einer allgemeingültigen Formel für Intensitätsfaktoren wird diese für die zwei speziellen Rißspitzen angewendet.

16.1 Spannungsintensitätsfaktoren bei Betrachtung in einem nicht an der Rißspitze liegenden Koordinatensystem

Nun sei der Fall betrachtet, daß für ein Rißproblem unter einer bestimmten vorgegebenen Belastung die Funktion Φ' nicht in einem Koordinatensystem vorliegt, das an der Rißspitze mit seinem Nullpunkt liegt und auf deren negativen reellen Achse sich die Rißufer befinden, sondern in einem transformierten System. Zunächst sei eine Achsendrehung und -verschiebung untersucht.

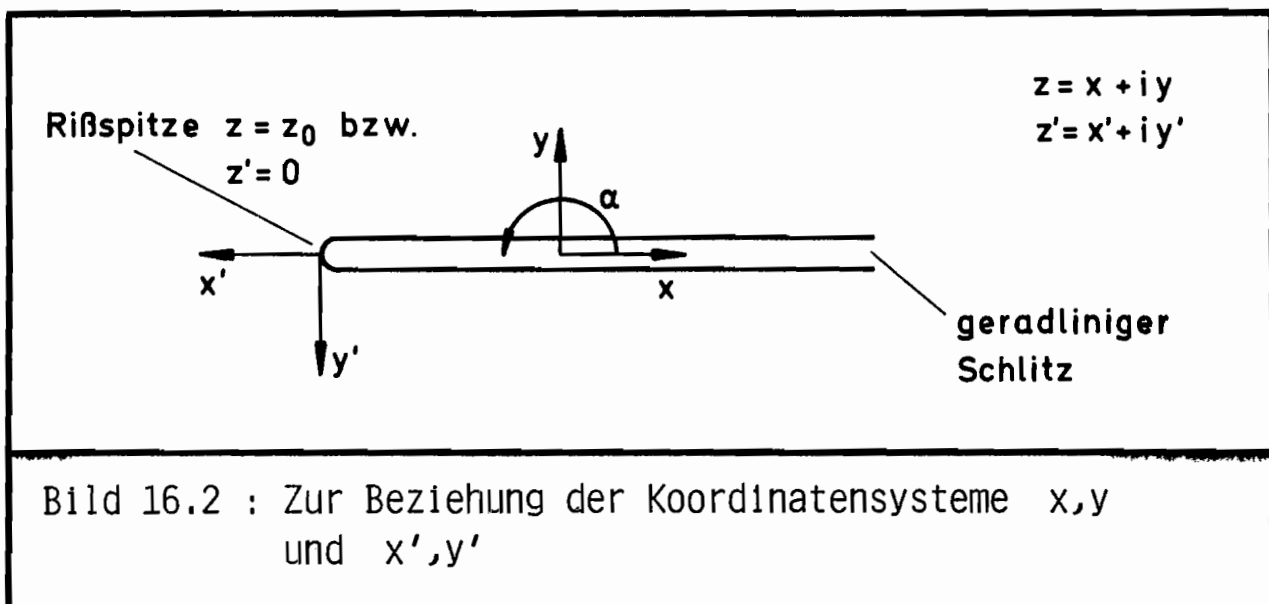


Bild 16.2 : Zur Beziehung der Koordinatensysteme x, y und x', y'

Gemäß Bild 16.2 sei das Koordinatensystem an der Rißspitze nun mit x' , y' bezeichnet. Zwischen den komplexen Variablen $z=x+iy$ und $z'=x'+iy'$ besteht folgende Beziehung

$$z = z' e^{i\alpha} + z_0 \quad (16.3)$$

bzw.

$$z' = (z - z_0) e^{-i\alpha} \quad , \quad (16.4)$$

mit dem Winkel α , um den die x' -Achse gegenüber der x -Achse gedreht ist, und dem Translationsvektor z_0 .

Die Funktion ϕ' liege vor als $\phi' = \phi'(z)$.

Wegen der Koordinateninvarianz der Normalspannungssumme auf der linken Seite von (15.43) kann auf die Invarianz der rechten Seite bezüglich einer Koordinatentransformation geschlossen werden. Dies bedeutet nun, wenn die Funktion $\phi'(z)$ vorübergehend mit $\phi_1(z)$ bezeichnet sei, daß man eine Funktion $\phi_2(z')$ in dem neuen Koordinatensystem einfach erhält durch

$$\phi'(z) = \phi_1(z) = \phi_1(z' e^{i\alpha} + z_0) = \phi_2(z') \quad (16.5)$$

Damit wird aus (15.43) nun

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} = \text{Re}[\phi_2(z')] \quad (16.6)$$

Es liegt nun gewissermaßen der Standardfall des Kapitels 15 (speziell Kapitel 15.3) vor, bei dem das Koordinatensystem an der Rißspitze liegt und die Rißufer sich auf der negativen reellen Achse befinden. Für $z' = 0$ weist somit die Funktion $\phi_2(z')$ eine Singularität der Form $z'^{-1/2}$ auf. Die Spannungsintensitätsfaktoren ließen sich hier also gemäß (15.52) durch

$$K_1 - iK_2 = 2 \sqrt{2} \lim_{z' \rightarrow 0} \left[\phi_2(z') z'^{\frac{1}{2}} \right] \quad (16.7)$$

angeben. Berücksichtigt man nun, daß der Punkt $z' = 0$ dem Punkt $z = z_0$ entspricht und nimmt die Beziehung (16.4) sowie (16.5) hinzu, so erhält man aus (16.7) die Gleichung für die Spannungsintensitätsfaktoren bezüglich einer bei $z = z_0$ befindlichen Rißspitze gemäß

$$K_1 - iK_2 = 2 \sqrt{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\phi'(z) \left\{ (z - z_0) e^{-i\alpha} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (16.8)$$

Bei einer reinen Verschiebung des Koordinatensystems erhält man aus (16.8) mit $\alpha = 0$ den Ausdruck

$$K_1 - iK_2 = 2 \sqrt{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\phi'(z) (z - z_0)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (16.9)$$

Nun soll aus (16.8) eine Formel hergeleitet werden, bei der die Intensitätsfaktoren mit Hilfe einer in der ζ -Ebene gültigen Funktion $\phi(\zeta)$ angegeben werden. Zur Unterscheidung der direkt von ζ abhängigen Funktion $\phi(\zeta)$ von einer entsprechenden direkt von z abhängigen Funktion sei in (16.8) $\phi(z)$ in $\phi_1(z)$ umbenannt, so daß nun von der Beziehung

$$K_1 - iK_2 = 2 \sqrt{2} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\phi_1'(z) \left\{ (z - z_0) e^{-i\alpha} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (16.10)$$

ausgegangen wird. Verwendet man nun die Abbildungsfunktion $z = f(\zeta)$, berücksichtigt, daß der Punkt $z = z_0$ einem Punkte $\zeta = \zeta_0$ entspricht und setzt

$$\phi_1(z) = \phi_1(z(\zeta)) = \phi(\zeta) \quad , \quad (16.11)$$

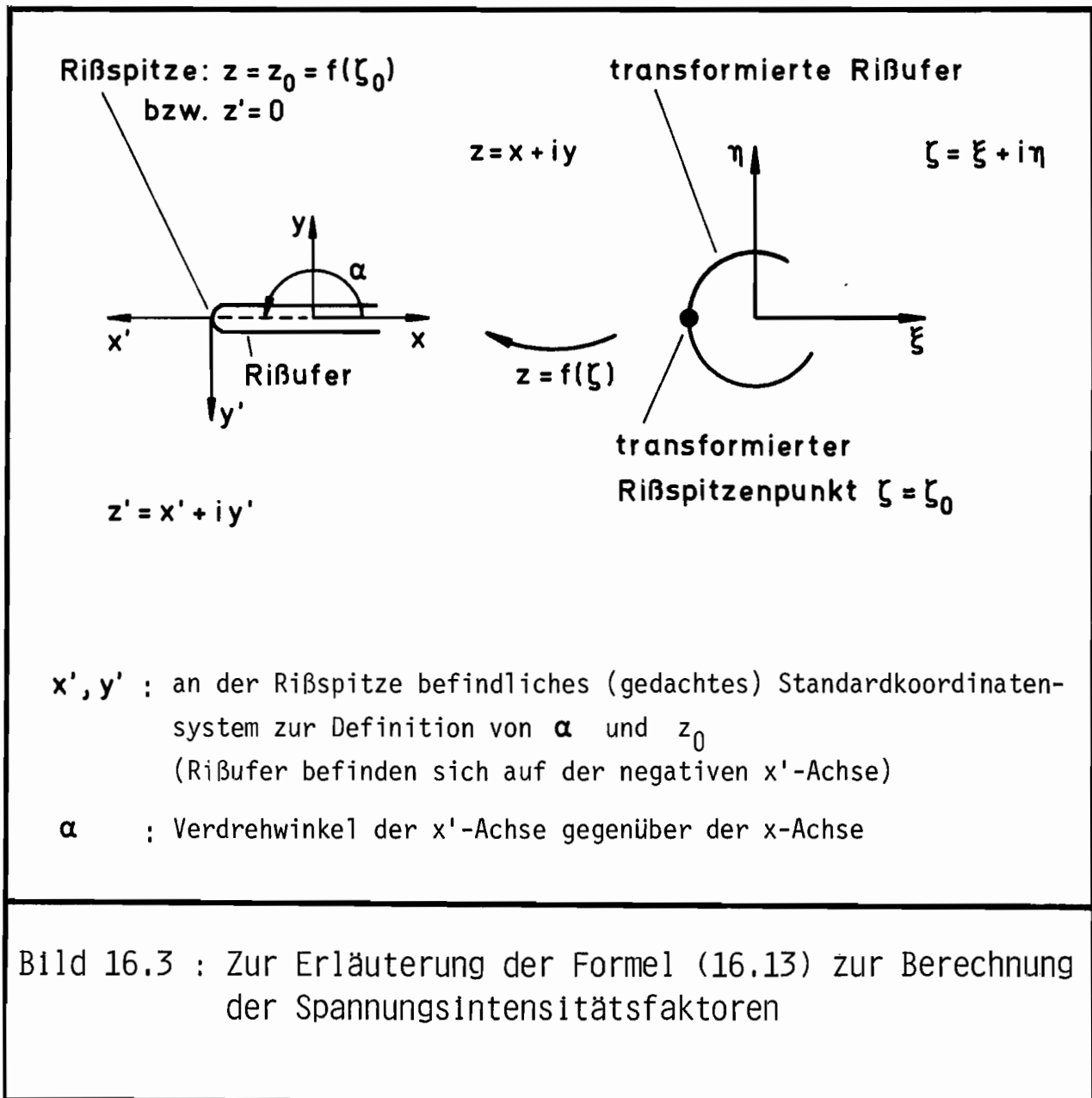
so erhält man aus (16.10) mit

$$\phi_1'(z) = \phi'(\zeta) = \frac{\dot{\phi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} \quad (16.12)$$

den Ausdruck

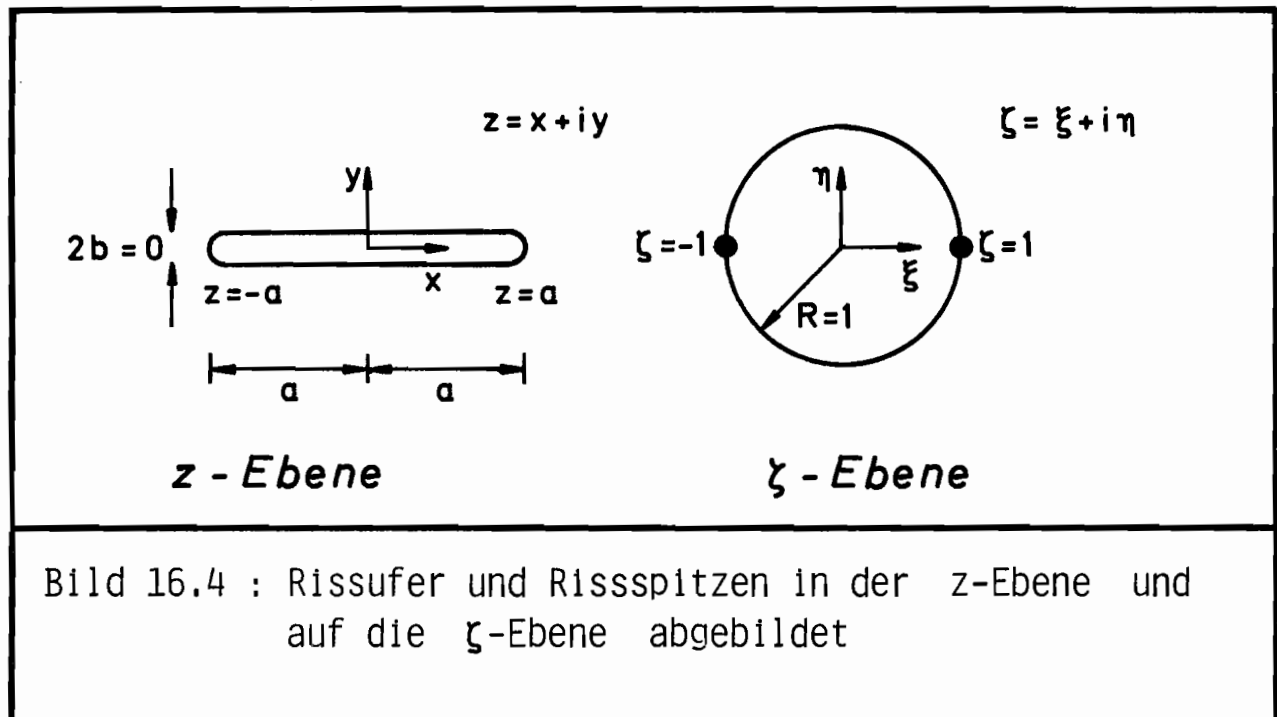
$$K_1 - iK_2 = 2 \sqrt{2} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \left[\frac{\dot{\phi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} \left\{ \underbrace{(f(\zeta) - f(\zeta_0))}_{z_0} e^{-i\alpha} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (16.13)$$

Um die einzelnen Größen in dieser Beziehung zu verdeutlichen, sei das Bild 16.3 herangezogen.



Die Verwendung der Formel (16.13), die ja aus Betrachtungen an einem Außenriß (also an einem Riß mit nur einer Rißspitze) hervorgegangen ist, für die zwei Rißspitzen eines Innenrisses erfolgt unter der Annahme, daß die Spannungen an den Rißspitzen wiederum eine Singularität der Form $z'^{-1/2}$ aufweisen, wenn der Koordinatenursprung der z' -Ebene in die jeweils betrachtete Rißspitze gelegt wird. Bei Richtigkeit der Annahme müßte der jeweilige Grenzwert existieren. Für die Rißspitzen einer zu einem Schlitz entarteten Ellipse wird sich die Existenz der Grenzwertausdrücke für die Spannungsintensitätsfaktoren herausstellen, woraus die Richtigkeit der Annahme über die Art der Spannungssingularitäten bestätigt wird.

16.1.1 Spannungsintensitätsfaktoren für die Rißspitze bei $z = a$ bzw. $\zeta = 1$



Die Anwendung der Formel (16.13) für eine bei $z_0 = a$ liegende Rißspitze (s. Bild 16.4) liefert mit $\zeta_0 = 1$, $\alpha = 0$ und (16.1) sowie (16.2) die Beziehung

$$\begin{aligned}
 K_1 - iK_2 &= 2\sqrt{2} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \left[\frac{\dot{\Phi}(\zeta)}{\frac{a}{2}(1-\zeta^{-2})} \left\{ \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - a \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= 2\sqrt{2} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \left[\frac{\dot{\Phi}(\zeta)}{\frac{a}{2}(1-\zeta^{-2})} \left\{ \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= \frac{4}{\sqrt{a}} \dot{\Phi}(\zeta = 1) \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \zeta^{-2}}
 \end{aligned} \tag{16.14}$$

Für den verbleibenden Grenzwert ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \zeta^{-2}} &= \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\frac{\zeta(\zeta-2)}{\zeta} + \frac{1}{\zeta}}}{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2}} \\
 &= \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\frac{(\zeta-1)^2}{\zeta}} \sqrt{\zeta^4}}{(\zeta-1)(\zeta+1)} \\
 &= \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(\zeta-1)^2} \zeta^3}{(\zeta-1)(\zeta+1)} \\
 &= \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\zeta^3}}{\zeta+1} \\
 &= \frac{1}{2} \tag{16.15}
 \end{aligned}$$

Mit diesem Grenzwert erhält man nun aus (16.14)

$$K_1 - iK_2 = \frac{2}{\sqrt{a}} \dot{\Phi}(\zeta=1) \tag{16.16}$$

16.1.2 Spannungsintensitätsfaktoren für eine Rißspitze bei
 $z = -a$ bzw. $\zeta = -1$

Zur Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren nach der allgemeinen Formel (16.13) für den speziellen Fall einer bei $z = -a$ liegenden Rißspitze seien die Bilder 16.3 und 16.4 herangezogen. Mit $\alpha = \pi$, $\zeta_0 = -1$, sowie den Beziehungen (16.1) und (16.2) ergibt sich hier

$$\begin{aligned}
 K_1 - iK_2 &= 2\sqrt{2} \lim_{\zeta \rightarrow -1} \left[\frac{\dot{\Phi}(\zeta)}{\frac{a}{2}(1-\zeta^{-2})} \left\{ \left(\frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + a \right) (-1) \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= 2\sqrt{2} \lim_{\zeta \rightarrow -1} \left[\frac{\dot{\Phi}(\zeta)}{\frac{a}{2}(1-\zeta^{-2})} \left\{ \frac{a}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} + 2 \right) (-1) \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &= i \frac{4}{\sqrt{a}} \dot{\Phi}(\zeta = -1) \lim_{\zeta \rightarrow -1} \frac{\left(\zeta + \frac{1}{\zeta} + 2 \right)^{\frac{1}{2}}}{1-\zeta^{-2}} \quad (16.17)
 \end{aligned}$$

Der Grenzwert in (16.17) ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 \lim_{\zeta \rightarrow -1} \frac{\left(\zeta + \frac{1}{\zeta} + 2 \right)^{\frac{1}{2}}}{1-\zeta^{-2}} &= \lim_{\zeta \rightarrow -1} \frac{\sqrt{(\zeta+1)^2 \zeta^3}}{(\zeta-1)(\zeta+1)} \\
 &= \lim_{\zeta \rightarrow -1} \frac{\sqrt{\zeta^3}}{\zeta-1} \\
 &= -\frac{i}{2} \quad (16.18)
 \end{aligned}$$

Aus (16.17) erhält man bei Berücksichtigung des Grenzwertes (16.18) die Spannungsintensitätsfaktoren für eine bei $z = -a$ liegende Rißspitze gemäß

$$K_1 - iK_2 = \frac{2}{\sqrt{a}} \dot{\Phi}(\zeta = -1) \quad (16.19)$$

16.2 Nachweis von endlichen Verschiebungsgrößen für die
 Rißspitzen bei $z = \pm a$ bzw. $\zeta = \pm 1$

Da die Funktion $\dot{f}(\zeta)$ nach Gleichung (16.2) bei $\zeta = 1$ und $\zeta = -1$, was den Rißspitzenpunkten $z = \pm a$ entspricht, Nullstellen besitzt, muß für die Verschiebungsgrößen u und v , die sich aus

$$2\mu(u + iv) = \kappa \Phi(\zeta) - f(\zeta) \frac{\overline{\dot{\Phi}(\zeta)}}{\dot{f}(\zeta)} - \frac{\overline{\dot{X}(\zeta)}}{\dot{f}(\zeta)} \quad (16.20)$$

ergeben, die Existenz der Grenzwerte nachgewiesen werden. Da die betreffenden Punkte sich auf der Randkurve befinden, auf der die Randbedingungen durch entsprechende Konstruktion der Funktionen Φ und \dot{X} erfüllt werden, kann die Randbedingungsform (14.4) hier zu Hilfe genommen werden. Aus der zu (14.4) konjugiert komplexen homogenen Randbedingung

$$\Phi(\zeta) + f(\zeta) \frac{\overline{\dot{\Phi}(\zeta)}}{\dot{f}(\zeta)} + \frac{\overline{\dot{X}(\zeta)}}{\dot{f}(\zeta)} = 0 \quad \text{auf } |\zeta| = 1 \quad (16.21)$$

ist bei Berücksichtigung von $\dot{f}(\zeta) = 0$ für $\zeta = \pm 1$ nach der Umformung

$$\underbrace{\overline{\dot{f}}}_{=0} \Phi + \underbrace{f \overline{\dot{\Phi}} + \overline{\dot{X}}}_{=0} = 0 \quad \text{für } \zeta = \pm 1 \quad (16.22)$$

zu erkennen, daß sich mit

$$\frac{f(\zeta) \overline{\dot{\Phi}(\zeta)} + \overline{\dot{X}(\zeta)}}{\overline{\dot{f}(\zeta)}} = -\Phi(\zeta) \quad \text{für } |\zeta| = 1 \quad (16.23)$$

eine Beziehung ergibt, welche auf der linken Seite für die beiden kritischen Punkte $\zeta = \pm 1$ einen unbestimmten Ausdruck der Form $0/0$ aufweist und auf der rechten Seite einen endlichen Wert. Wenn der Grenzwert auf der linken Seite von (16.23) für $\zeta \rightarrow 1$ bzw. $\zeta \rightarrow -1$ existiert, muß er also gleich der rechten Seite von (16.23) sein, nämlich $\Phi(\zeta = 1)$ bzw. $\Phi(\zeta = -1)$.

Zur Berechnung der Grenzwerte

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{f \overline{\dot{\Phi}} + \overline{\dot{X}}}{\overline{\dot{f}}} \quad (16.24)$$

für $\zeta_0 = \pm 1$, kann nicht direkt die Regel von l'Hospital bezüglich der komplexen Variablen ζ herangezogen werden, da der Ausdruck (16.24) auch konjugiert komplexe Werte von ζ enthält und die komplexen Ableitungen dadurch nicht existieren. So wird hier die Variable ζ durch

$$\zeta = R e^{i\theta} \tag{16.25}$$

ausgedrückt, und man erhält somit die Aufgabe, für einen Ausdruck, der von zwei Variablen abhängig ist, die Grenzwerte zu ermitteln.

Da es für einen Grenzwert egal sein muß, aus welcher Koordinatenrichtung man sich zuerst dem betrachtenden Punkt nähert, ist hier also zu überprüfen, ob die notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \left[\lim_{R \rightarrow 1} \frac{f(R, \theta) \overline{\dot{\phi}(R, \theta)} + \overline{\dot{\chi}(R, \theta)}}{\overline{\dot{f}(R, \theta)}} \right] &= \\ &= \lim_{R \rightarrow 1} \left[\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{f(R, \theta) \overline{\dot{\phi}(R, \theta)} + \overline{\dot{\chi}(R, \theta)}}{\overline{\dot{f}(R, \theta)}} \right] \\ &= -\phi(R=1, \theta = \theta_0) \quad \text{mit } \theta_0 = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \pi \end{array} \right. \end{aligned} \tag{16.26}$$

erfüllt ist.

Einsetzen der benötigten Ausdrücke, die man aus (14.26), (14.27), (16.1), (16.2) und (16.25) erhält, in die fraglichen Terme von (16.26) liefert nun zum einen

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \left[\lim_{R \rightarrow 1} \frac{f(R, \theta) \overline{\dot{\phi}(R, \theta)} + \overline{\dot{\chi}(R, \theta)}}{\overline{\dot{f}(R, \theta)}} \right] \\ = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{-\frac{a}{2} [1 - e^{-2i\theta}] \sum_{j=-N}^M a_j e^{ij\theta}}{\frac{a}{2} [1 - e^{-2i\theta}]} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{1 - e^{-2i\theta}}{1 - e^{-2i\theta}} \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \sum_{j=-N}^M a_j e^{ij\theta} \\
 &= - \sum_{j=-N}^M a_j e^{ij\theta_0} = - \Phi(R=1, \theta = \theta_0) \quad \text{mit } \theta_0 = \left\{ \frac{0}{\pi} \right.
 \end{aligned}
 \tag{16.27}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned}
 &\lim_{R \rightarrow 1} \left[\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{f(R, \theta) \overline{\dot{\phi}(R, \theta)} + \overline{\dot{\chi}(R, \theta)}}{\dot{f}(R, \theta)} \right] \\
 &= \lim_{R \rightarrow 1} \frac{-\frac{a}{2} [1 - R^{-2}] \sum_{j=-N}^M a_j R^{-j} e^{ij\theta_0}}{\frac{a}{2} [1 - R^{-2}]}
 \end{aligned}
 \tag{16.28}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \lim_{R \rightarrow 1} \frac{1 - R^{-2}}{1 - R^{-2}} \lim_{R \rightarrow 1} \sum_{j=-N}^M a_j R^{-j} e^{ij\theta_0} \\
 &= - \sum_{j=-N}^M a_j e^{ij\theta_0} = - \Phi(R=1, \theta = \theta_0) \quad \text{mit } \theta_0 = \left\{ \frac{0}{\pi} \right.
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse zeigen, daß die notwendige Minimalbedingung (16.26) für die kritischen Punkte erfüllt ist.

Nun kann aber aus der Gleichheit von (16.27) und (16.28) noch nicht die Existenz der Grenzwerte (16.24) gefolgert werden, da für jede Annäherung an einen kritischen Punkt aus einer beliebigen Richtung sich der gleiche Wert ergeben muß. Zur Konstruktion eines möglicherweise vorhandenen Gegenbeispiels wird

eine Annäherungsrichtung gesucht, die einen anderen als in (16.27) und (16.28) ermittelten Wert liefert. Hierzu wird nun anstelle des Grenzwertausdruckes (16.24) der konjugiert komplexe Ausdruck betrachtet, für den sich bei Existenz eines Grenzwertes nach (16.23)

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\overline{f(\zeta)} \dot{\phi}(\zeta) + \dot{X}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} = - \overline{\phi(\zeta_0)} \quad \text{mit } \zeta_0 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad (16.29)$$

ergeben muß. Die linke Seite von (16.29) liefert nun nach Einsetzen der entsprechenden Größen

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\bar{f} \dot{\phi} + \dot{X}}{\dot{f}} &= \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{c \left(\bar{\zeta} + \frac{1}{\zeta} \right) \sum_{j=-N}^M j a_j \zeta^{j-1} - c \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \sum_{j=-N}^M \bar{a}_j \zeta^{-j} - c \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right) \sum_{j=-N}^M j a_j \zeta^{j-1}}{c \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\left(\bar{\zeta} + \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta} - \zeta \right) \sum_{j=-N}^M j a_j \zeta^{j-1} - \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \sum_{j=-N}^M \bar{a}_j \zeta^{-j}}{\left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)} \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\bar{\zeta} + \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta} - \zeta}{1 - \frac{1}{\zeta^2}} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \sum_{j=-N}^M j a_j \zeta^{j-1} - \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{1 - \frac{1}{\zeta^2}}{1 - \frac{1}{\zeta^2}} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \sum_{j=-N}^M \bar{a}_j \zeta^{-j} \end{aligned} \quad (16.30)$$

Der letzte Term in (16.30), bei dem nur Grenzwerte analytischer Funktionen mit der Variablen ζ zu bilden sind, kann sofort hingeschrieben werden, und zwar ergibt sich mit Hilfe der Regel von l'Hospital

$$\begin{aligned}
 & -\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{1 - \frac{1}{\zeta^2}}{1 - \frac{1}{\zeta^2}} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \sum_{j=-N}^M \overline{a_j} \zeta^{-j} = -\sum_{j=-N}^M \overline{a_j} \zeta_0^{-j} \\
 & = -\sum_{j=-N}^M \overline{a_j} e^{-ij\theta_0} = -\overline{\Phi(R=1, \theta = \theta_0)} \quad (16.31) \\
 & = -\overline{\Phi(\zeta_0)} \quad \text{mit } \zeta_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \text{bzw. } \theta_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pi \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Zu untersuchen bliebe in (16.30) nur noch der Grenzwertausdruck, der sowohl ζ als auch $\bar{\zeta}$ enthält und der zur Bestätigung von (16.29) gleich Null werden müßte. Dieser Ausdruck enthält eine Realteil- sowie eine Imaginärteilmfunktion, welche beide von ξ und η abhängig sind, da $\zeta = \xi + i\eta$ gilt. Für eine Annäherung an den Punkt $\zeta=1$ auf einer Geraden $\eta = m_1(\xi - 1)$ mit der Steigung m_1 wird nun

$$\zeta = \xi + i m_1 (\xi - 1) \quad (16.32)$$

gesetzt und entsprechend für eine Annäherung an den Punkt $\zeta = -1$

$$\zeta = \xi + i m_2 (\xi + 1) \quad (16.33)$$

Unter Anwendung der Regel von l'Hospital bezüglich der reellen Variablen ξ erhält man

$$\begin{aligned}
 \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{\bar{\zeta} + \frac{1}{\bar{\zeta}} - \frac{1}{\zeta} - \zeta}{1 - \frac{1}{\zeta^2}} &= \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{-2im_1(\xi-1) + \frac{1}{\xi - im_1(\xi-1)} - \frac{1}{\xi + im_1(\xi-1)}}{1 - \frac{1}{[\xi + im_1(\xi-1)]^2}} \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{-2im_1 - \frac{1 - im_1}{[\xi - im_1(\xi-1)]^2} + \frac{1 + im_1}{[\xi + im_1(\xi-1)]^2}}{2[1 + im_1]} \\
 &\quad - \frac{1}{[\xi + im_1(\xi-1)]^3} \\
 &= \frac{-2im_1 + 2im_1}{-2(1 + im_1)} = 0 \quad (16.34)
 \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich bei Annäherung an den Punkt $\zeta = -1$

$$\lim_{\zeta \rightarrow -1} \frac{\bar{\zeta} + \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta} - \zeta}{1 - \frac{1}{\zeta^2}} = \frac{-2im_2 + 2im_2}{2(1+im_2)} = 0 \quad (16.35)$$

Somit sind die Ergebnisse von der jeweiligen Annäherungsrichtung unabhängig und mit (16.30), (16.31), (16.34) und (16.35) ist die Gültigkeit von (16.24) gezeigt.

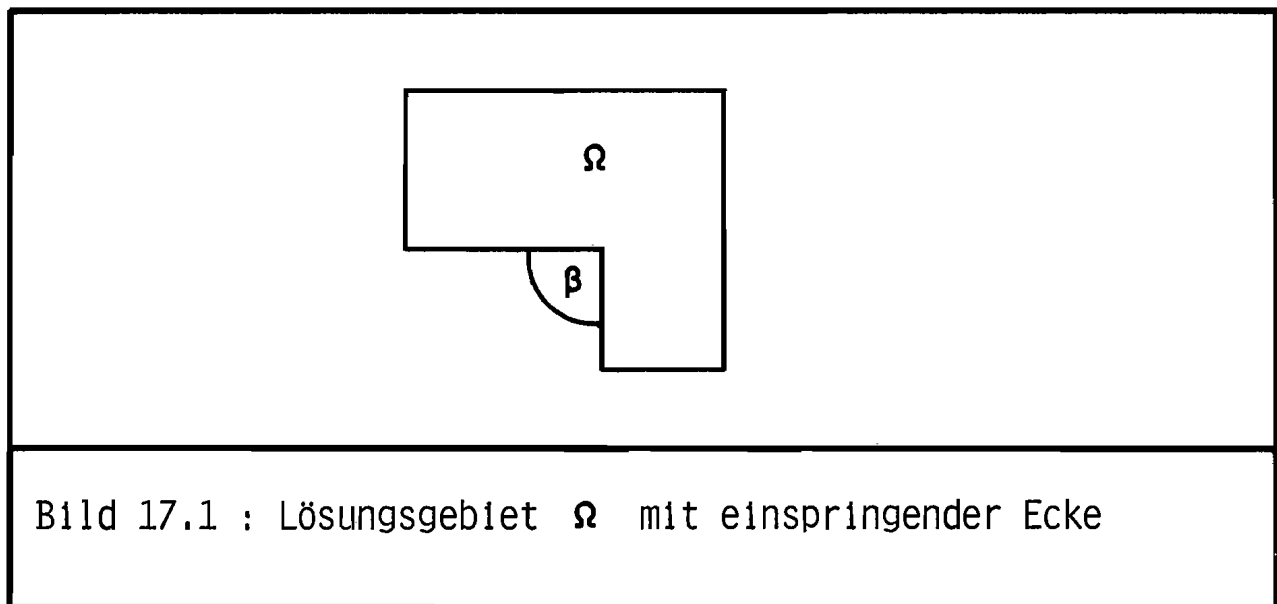
Mit der Existenz der Grenzwerte für die kritischen Punkte ergibt sich, daß Beziehung (16.23) tatsächlich für den gesamten Rand $|\zeta| = 1$ einschließlich der Punkte $\zeta = 1$ und $\zeta = -1$ gültig ist, und somit lassen sich die Verschiebungen nach Einsetzen von (16.23) in (16.20) durch

$$2\mu(u + iv) = \chi \Phi(\zeta) + \Phi(\zeta) = (\chi + 1) \Phi(\zeta) \quad \text{auf } |\zeta| = 1 \quad (16.36)$$

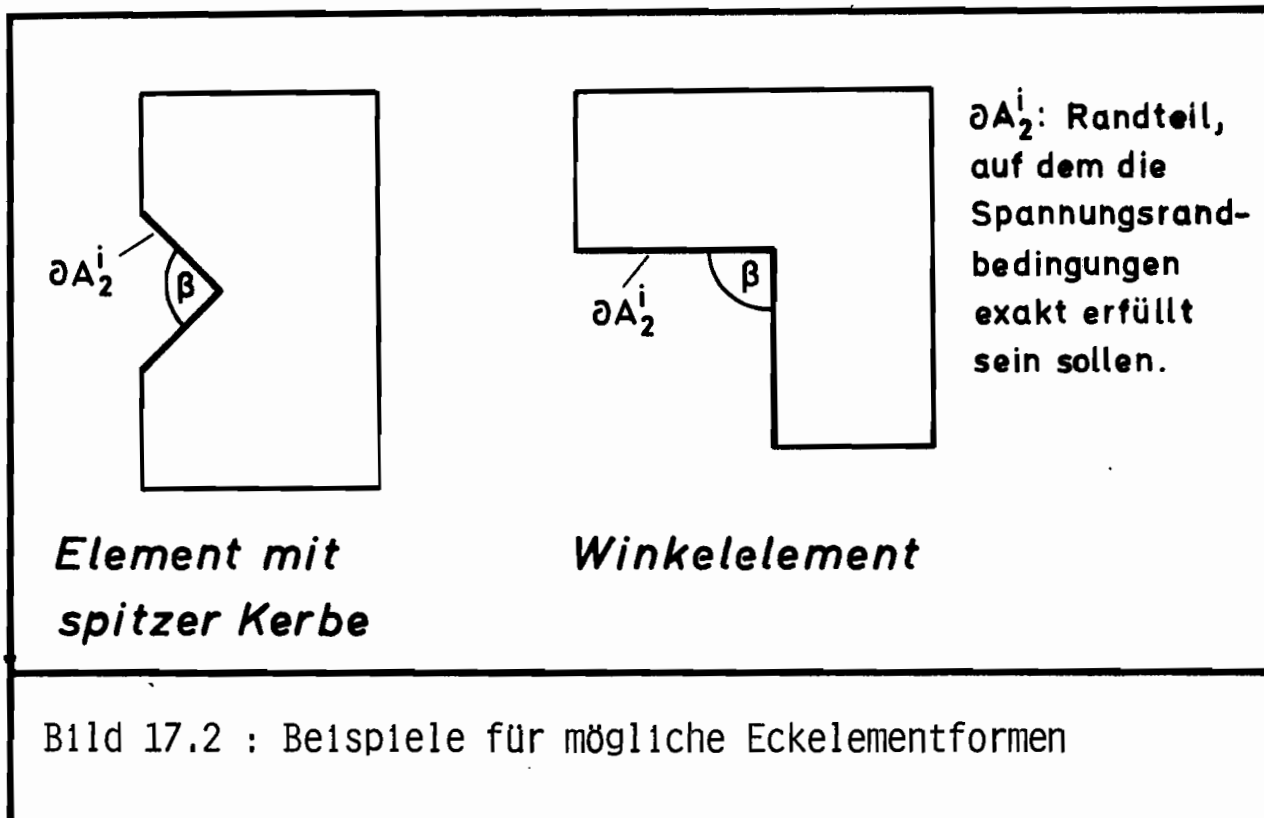
darstellen.

17 Finite Elemente, die das besondere Lösungsverhalten an einer Ecke berücksichtigen

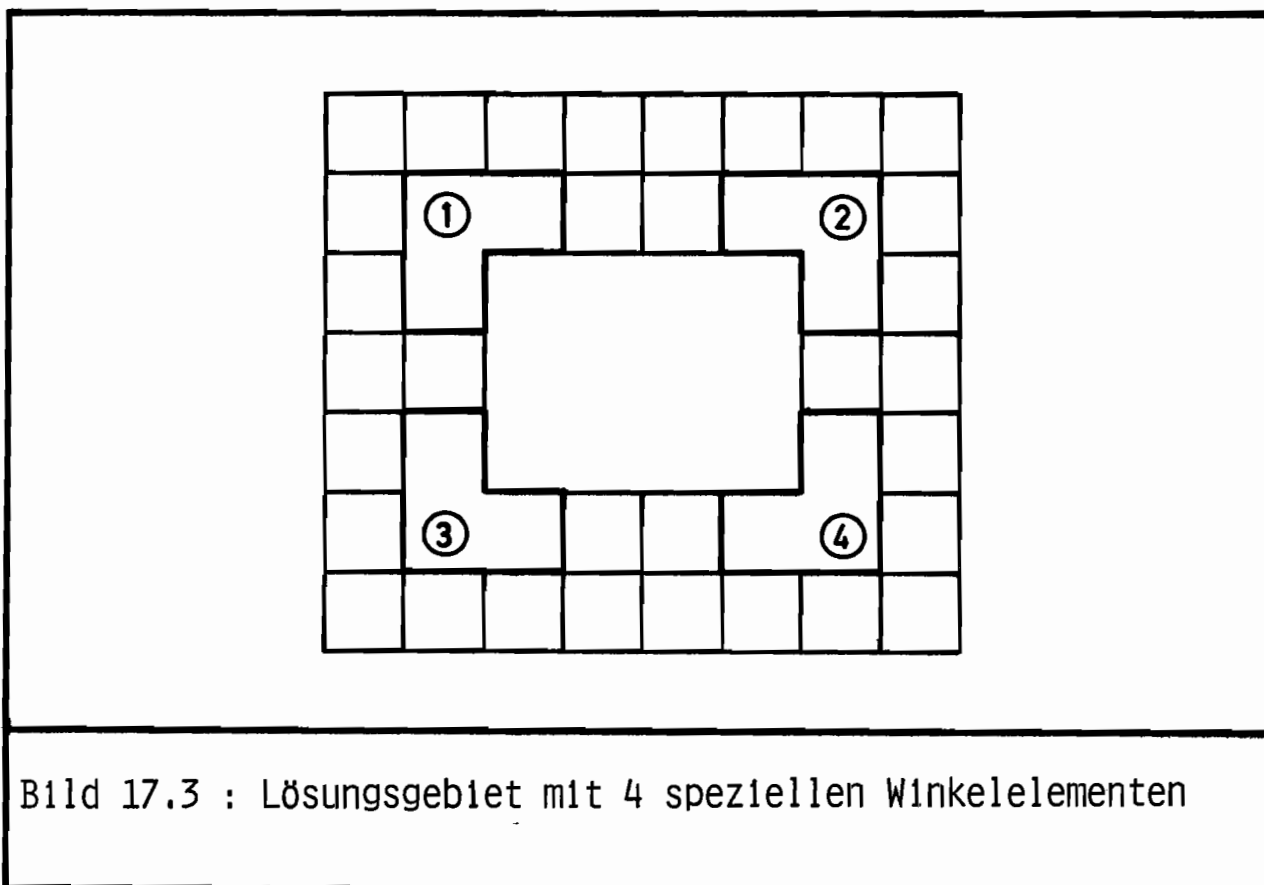
Enthält ein Lösungsgebiet eine Ecke mit einem Winkel β , der kleiner ist als 180° (s. Bild 17.1), so ergeben sich für den Eckpunkt singuläre Spannungsgrößen.



Mit Standard-Finite-Elementen wird im Eckbereich der singuläre Lösungscharakter nicht erfaßt. Sollen nun trotz der vorhandenen Spannungssingularitäten Aussagen über einen Spannungszustand unter konkreter Belastung und Vergleiche bei unterschiedlichen Belastungszuständen möglich sein, so ist es erforderlich, die Art der singulären Funktionen zu analysieren und die problemangepaßten Funktionen mit in die Finite-Element-Rechnung aufzunehmen. Die Koeffizienten dieser singulären Funktionsterme können als Spannungsintensitätsfaktoren verwendet werden. Beispiele für mögliche spezielle Ekelementformen sind in Bild 17.2 aufgeführt.



Mit Hilfe von Winkelementen ist beispielsweise auch die Untersuchung von Gebieten mit polygonzugartig begrenzten Löchern möglich. (s. Bild 17.3).



Zur Konstruktion von geeigneten Ansatzfunktionen geht man von einem Gebiet gemäß Bild 17.4 aus, in das sich der jeweils ausgewählte Elementbereich hineinlegen läßt.

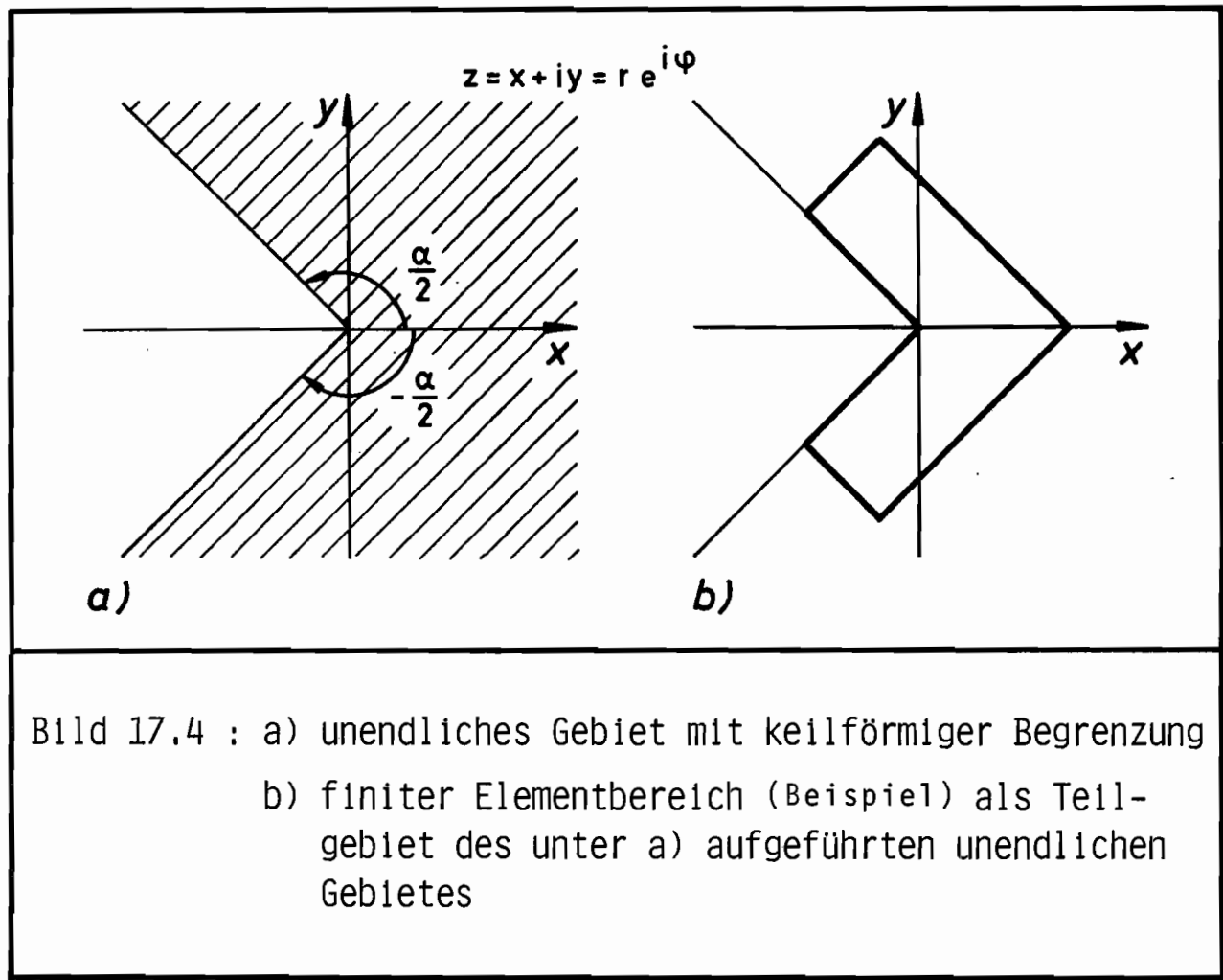


Bild 17.4 : a) unendliches Gebiet mit keilförmiger Begrenzung
 b) finiter Elementbereich (Beispiel) als Teilgebiet des unter a) aufgeführten unendlichen Gebietes

Die einzuhaltenden Randbedingungen lauten hier:

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{auf} \quad \varphi = \pm \frac{\alpha}{2} \quad (17.1)$$

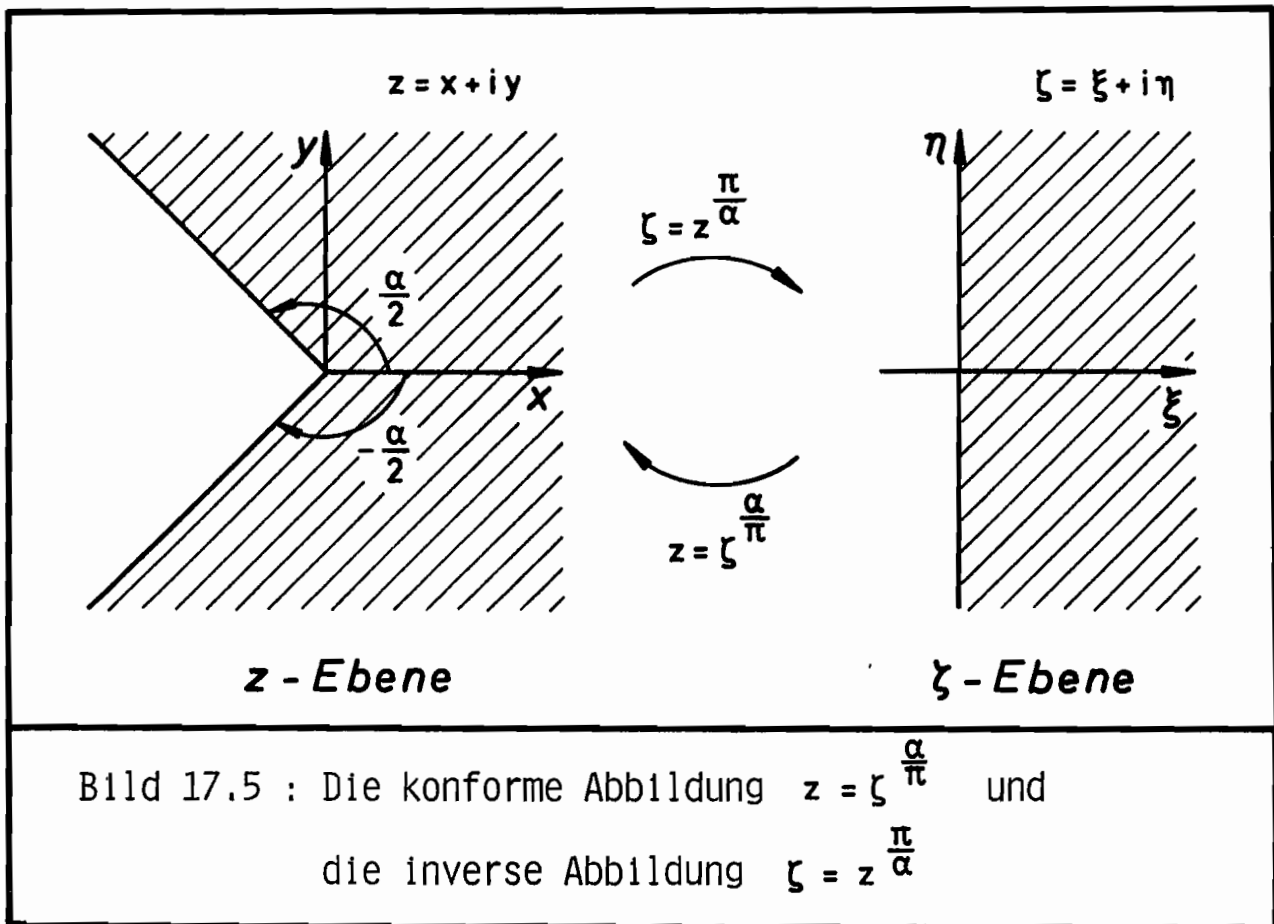
$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad \text{auf} \quad \varphi = \pm \frac{\alpha}{2} \quad (17.2)$$

17.1 Schwierigkeiten bezüglich der Gewinnung von Ansatzfunktionen bei konformer Abbildung auf die rechte Halbebene

Durch die konforme Abbildung

$$z = f(\zeta) = \zeta^{\frac{\alpha}{\pi}} \tag{17.3}$$

wird die rechte ζ -Halbebene auf das unendliche Gebiet mit keilförmiger Begrenzung in der z -Ebene abgebildet. (s. Bild 17.5)



Geht man von der Randbedingungsgleichung (10.28) für einen unbelasteten Rand ($T_x = \bar{T}_x = 0, T_y = \bar{T}_y = 0$) aus, so erhält man die nach Ψ aufgelöste Beziehung

$$\Psi(\zeta) = -\overline{\Phi(\zeta)} - \overline{f(\zeta)} \frac{\dot{\Phi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} \quad \text{auf } \zeta = i\eta \tag{17.4}$$

(auf der η -Achse)

Bei einer Potenzreihenentwicklung der Form

$$\Phi(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \zeta^j \quad (17.5)$$

kann zwar $\overline{\Phi(\zeta)}$ gemäß (10.13) durch

$$\overline{\Phi(\zeta)} = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} \overline{\zeta^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{a_j} (-1)^j \zeta^j \quad \text{auf } \zeta = i\eta \quad (17.6)$$

ausgedrückt werden, jedoch findet sich zu der verbleibenden konjugiert komplexen Größe

$$\overline{f(\zeta)} = \zeta^{\frac{\alpha}{\pi}}$$

auf der rechten Seite von (17.4) für allgemeine Werte von α keine analytische Funktion, die auf der η -Achse identisch ist mit $\overline{f(\zeta)}$. Dies liegt daran, daß außer für $\alpha = 2\pi$ (geschlitzte Ebene) und $\alpha = \pi$ (Halbebene) keine ganzzahligen Exponenten in $\zeta^{\alpha/\pi}$ erscheinen, und somit die Beziehung (10.13) nicht ausgenutzt werden kann. Somit läßt sich unter der Annahme, daß Φ eine Potenzreihe der Form (17.5) darstellt, keine analytische Funktion $\Psi(\zeta)$ für allgemeine Werte von α finden. Bis auf die zwei Ausnahmewinkel gibt es in der ζ -Ebene keine unendlichen Potenzreihen mit ganzzahligen Exponenten für Φ und Ψ derart, daß die geforderten Randbedingungen exakt erfüllt würden.

Möglich sind jedoch unendliche Potenzreihen, deren Exponenten reelle oder komplexe Größen darstellen. Um die Randbedingungen erfüllen zu können, müssen diese Exponenten zunächst ermittelt werden. Da es keine besonderen Vorteile mit sich bringt, weiter in der rechten ζ -Halbebene zu arbeiten, werden die Randbedingungenbetrachtungen in der z -Ebene durchgeführt.

17.2 Konstruktion der Ansatzfunktionen bei unbelasteter Ecke

17.2.1 Potenzansätze für Φ und Ψ in der z -Ebene mit reellen Exponenten

Die komplexen Funktionen Φ und Ψ werden in folgender Weise angesetzt:

$$\Phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{\lambda_j} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{\lambda_j} e^{i\lambda_j\varphi}, \quad (17.7)$$

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^{\lambda_j} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^{\lambda_j} e^{i\lambda_j \varphi} \tag{17.8}$$

Mit λ_j sind hier die zu den Randbedingungen passend zu ermittelnden Exponenten von z bezeichnet.

17.2.1.1 Ermittlung der Beziehung zwischen Φ und Ψ zur Erfüllung der Randbedingungen unter Annahme von nur reellen Exponenten

Mit (17.7), (17.8) sowie der ersten Ableitung von Φ nach z gemäß

$$\Phi'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j z^{\lambda_j-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j r^{\lambda_j-1} e^{i(\lambda_j-1)\varphi} \tag{17.9}$$

gestaltet sich die homogene Randbedingung nach (9.56) nun zu

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(z)} + \bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z) &= \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_j r^{\lambda_j} e^{-i\lambda_j \varphi} + r e^{-i\varphi} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j a_j r^{\lambda_j-1} e^{i(\lambda_j-1)\varphi} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^{\lambda_j} e^{i\lambda_j \varphi} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} r^{\lambda_j} e^{i\lambda_j \varphi} [\bar{a}_j e^{-2i\lambda_j \varphi} + a_j \lambda_j e^{-2i\varphi} + b_j] \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{17.10}$$

$$\text{auf } \varphi = \pm \frac{\alpha}{2}$$

Hierbei stellt α den Winkel nach Bild 17.4 dar.

Zum Erfüllen der Gleichung (17.10) ist es notwendig, daß der Ausdruck in den eckigen Klammern für die beiden angegebenen Winkelwerte von φ verschwindet. Hieraus folgen für $\varphi = \alpha/2$ und $\varphi = -\alpha/2$ die beiden Gleichungen:

$$\bar{a}_j e^{-i\lambda_j\alpha} + a_j \lambda_j e^{-i\alpha} + b_j = 0 \quad (17.11)$$

und

$$\bar{a}_j e^{i\lambda_j\alpha} + a_j \lambda_j e^{i\alpha} + b_j = 0 \quad (17.12)$$

Um nun die komplexen Koeffizienten b_j durch a_j und \bar{a}_j ausdrücken zu können, müßten die beiden Gleichungen (17.11) und (17.12) linear abhängig sein, was sie aber für allgemeine Werte von α und λ_j nicht sind. Die Werte λ_j müssen nun also so ermittelt werden, daß die genannten Gleichungen linear abhängig werden. Hierzu werden die komplexen Koeffizienten durch

$$a_j = \alpha_j + i\beta_j \quad (17.13)$$

und

$$b_j = \gamma_j + i\delta_j \quad (17.14)$$

explizit mit Real- und Imaginärenteilen dargestellt. Dies liefert nun die beiden Gleichungen

$$\left[e^{-i\lambda_j\alpha} + \lambda_j e^{-i\alpha} \right] \alpha_j - i \left[e^{-i\lambda_j\alpha} - \lambda_j e^{-i\alpha} \right] \beta_j + \gamma_j + i\delta_j = 0 \quad (17.15)$$

und

$$\left[e^{i\lambda_j\alpha} + \lambda_j e^{i\alpha} \right] \alpha_j - i \left[e^{i\lambda_j\alpha} - \lambda_j e^{i\alpha} \right] \beta_j + \gamma_j + i\delta_j = 0 \quad (17.16)$$

Es wird jetzt zunächst angenommen, daß die Größen λ_j reelle Werte sind. Mit dieser Annahme erhält man nach Aufteilung von (17.15) und (17.16) in reelle und imaginäre Terme vier Gleichungen, welche sich in Matrizenform darstellen durch

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_2 & 1 & 0 \\ -K_3 & -K_4 & 0 & 1 \\ K_1 & K_2 & 1 & 0 \\ K_3 & -K_4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \\ \gamma_j \\ \delta_j \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (17.17)$$

mit den Abkürzungen:

$$K_1 = \cos \alpha \lambda_j + \lambda_j \cos \alpha \quad (17.18)$$

$$K_2 = \sin \alpha \lambda_j - \lambda_j \sin \alpha \quad (17.19)$$

$$K_3 = \sin \alpha \lambda_j + \lambda_j \sin \alpha \quad (17.20)$$

$$K_4 = \cos \alpha \lambda_j - \lambda_j \cos \alpha \quad (17.21)$$

Nichttriviale Lösungen des homogenen Gleichungssystems (17.17) erhält man aus der Forderung, daß die Determinante der Koeffizientenmatrix gleich Null wird. Der Wert der Determinante ergibt sich zu

$$\det \begin{bmatrix} K_1 & -K_2 & 1 & 0 \\ -K_3 & -K_4 & 0 & 1 \\ K_1 & K_2 & 1 & 0 \\ K_3 & -K_4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2 K_2 K_3 \quad (17.22)$$

Die Bedingung für das Verschwinden der Determinante liefert aus

$$-2 K_2 K_3 \stackrel{!}{=} 0 \quad (17.23)$$

mit den Beziehungen (17.19) für K_2 und (17.20) für K_3 die zwei Nullstellengleichungen für die Werte λ_j in Form von

$$\sin \alpha \lambda_j - \lambda_j \sin \alpha = 0 \quad (17.24)$$

und

$$\sin \alpha \lambda_j + \lambda_j \sin \alpha = 0 \quad (17.25)$$

Jede dieser Gleichungen hat unendlich viele Nullstellen. Als rein reell stellen sich allerdings (außer in den Fällen $\alpha = 2\pi$ und $\alpha = \pi$) nur wenige Werte λ_j heraus. Da die Gleichungen (17.24) und (17.25) aber unter der Annahme entstanden sind, daß alle λ_j reelle Werte darstellen, sind die komplexen Lösungen noch auf ihre Brauchbarkeit hin zu untersuchen. Zunächst seien jedoch die Lösungen mit reellen Exponenten näher untersucht.

17.2.1.1.1 Fall 1: Lösungen, die aus $\sin \alpha \lambda_j - \lambda_j \sin \alpha = 0$
hervorgehen

Es ist nun günstig für die erwähnte Untersuchung die Nullstellengleichung (17.24) in komplexer Schreibweise zu formulieren. Gleichung (17.24) ist dann äquivalent mit

$$e^{-i\alpha\lambda_j} - e^{i\alpha\lambda_j} - \lambda_j (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) = 0 \quad (17.26)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die Beziehung

$$e^{-i\alpha\lambda_j} - \lambda_j e^{-i\alpha} = e^{i\alpha\lambda_j} - \lambda_j e^{i\alpha} \quad (17.27)$$

Wenn nun auf beiden Seiten der Gleichung (17.27) der Term $2\lambda_j e^{-i\alpha}$ dazu-addiert wird, so erhält man

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{-i\alpha} &= e^{i\alpha\lambda_j} - \lambda_j e^{i\alpha} + 2\lambda_j e^{-i\alpha} \\ &= e^{i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{i\alpha} - 2\lambda_j (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \\ &= e^{i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{i\alpha} - 4i\lambda_j \sin \alpha, \end{aligned} \quad (17.28)$$

woraus ersehen werden kann, daß bis auf die Sonderfälle $\alpha = 2\pi$ und $\alpha = \pi$ ($\alpha = 0$ hat für die Problemstellung keine Bedeutung) die Ungleichung

$$e^{-i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{-i\alpha} \neq e^{i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{i\alpha} \quad (17.29)$$

gilt. Die Gleichungen (17.15) und (17.16) seien nun in neuer Form zum Vergleichen untereinander geschrieben, wobei $\gamma_j + i\delta_j = b_j$ gesetzt ist und die Beziehungen (17.27) und (17.28) ausgenutzt wurden:

$$\left[e^{i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{i\alpha} - 4i\lambda_j \sin \alpha \right] \alpha_j - i \left[e^{i\alpha\lambda_j} - \lambda_j e^{i\alpha} \right] \beta_j + b_j = 0 \quad (17.30)$$

$$(17.31)$$

$$\left[e^{i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{i\alpha} \right] \alpha_j - i \left[e^{i\alpha\lambda_j} - \lambda_j e^{i\alpha} \right] \beta_j + b_j = 0$$

Die Lösungen λ_j der Nullstellengleichung (17.24) bewirken also, daß die Koeffizienten von β_j in den beiden Gleichungen (17.30) und (17.31) gleich

werden, während die Koeffizienten von α_j im allgemeinen (bis auf die Fälle $\alpha = 2\pi$ und $\alpha = \pi$) verschieden sind. Werden nun (17.30) und (17.31) als Bestimmungsgleichungen für b_j aufgefaßt, so sind nichttriviale Lösungen möglich wenn

$$\alpha_j = 0 \quad (17.32)$$

gilt. Die komplexen Koeffizienten b_j aus der Funktion $\Psi(z)$ ergeben sich dann aus

$$b_j = i \left[e^{i\alpha\lambda_j} - \lambda_j e^{i\alpha} \right] \beta_j . \quad (17.33)$$

Die entwickelten Funktionen Φ und Ψ lauten nun für den 1. Fall:

$$\Phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} i \beta_j z^{\lambda_j} , \quad (17.34)$$

$$\Psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} i \left[e^{i\alpha\lambda_j} - \lambda_j e^{i\alpha} \right] \beta_j z^{\lambda_j} \quad (17.35)$$

mit reellen Koeffizienten β_j

17.2.1.1.2 Fall 2: Lösungen, die aus $\sin\alpha \lambda_j + \lambda_j \sin\alpha = 0$ hervorgehen

Die Umformulierung der Nullstellengleichung (17.25) führt zu der Darstellung

$$e^{-i\alpha\lambda_j} - e^{i\alpha\lambda_j} + \lambda_j (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) = 0 , \quad (17.36)$$

woraus sich die Beziehung

$$e^{-i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{-i\alpha} = e^{i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{i\alpha} \quad (17.37)$$

ergibt. Subtraktion des Termes $2\lambda_j e^{-i\alpha}$ auf beiden Seiten von (17.37) führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned} e^{-i\alpha\lambda_j} - \lambda_j e^{-i\alpha} &= e^{i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{i\alpha} - 2\lambda_j e^{-i\alpha} \\ &= e^{i\alpha\lambda_j} - \lambda_j e^{i\alpha} + 2\lambda_j (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \\ &= e^{i\alpha\lambda_j} - \lambda_j e^{i\alpha} + 4i\lambda_j \sin\alpha , \end{aligned} \quad (17.38)$$

17.2.1.1.3 Zusammenstellung der Lösungen mit reellen Exponenten

Da sich herausstellte, daß es zwei Lösungsscharen für die Exponenten von z gibt, seien die Lösungen der Nullstellengleichung (17.25) zur Unterscheidung von den übrigen Lösungen in ω_j umbenannt. Die Funktionen Φ und Ψ mit ausschließlich reellen Exponenten lassen sich in folgender Weise schreiben:

$$\Phi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^{\lambda_j} + \sum_{j=0}^{\infty} i \beta_j^* z^{\omega_j} \quad (17.46)$$

$$\begin{aligned} \Psi(z) = & - \sum_{j=0}^{\infty} [e^{i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{i\alpha}] \alpha_j z^{\lambda_j} + \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} i [e^{i\alpha\omega_j} - \omega_j e^{i\alpha}] \beta_j^* z^{\omega_j} \end{aligned} \quad (17.47)$$

mit den reellen Koeffizienten α_j und β_j^* sowie λ_j und ω_j als reelle Lösungen von

$$\sin \alpha \lambda_j + \lambda_j \sin \alpha = 0 \quad (17.48)$$

und

$$\sin \alpha \omega_j - \omega_j \sin \alpha = 0 \quad (17.49)$$

17.2.2 Potenzansätze für Φ und Ψ in der z -Ebene mit komplexwertigen Exponenten

Nachdem sich mit den Bestimmungsgleichungen (17.48) und (17.49) zur Ermittlung der Exponenten in den Potenzansätzen für Φ und Ψ herausstellte, daß neben den reellen Lösungen auch komplexe Werte die genannten Gleichungen befriedigen, ist die Brauchbarkeit dieser komplexen Ergebnisse als Exponenten zu überprüfen. Nützlich ist hierbei die Information, daß die Lösungen λ_j und ω_j konjugiert komplex auftreten, wie aus der konjugiert

komplexen Darstellung der Nullstellengleichung $[\sin \alpha \lambda_j + \lambda_j \sin \alpha = 0]$

gemäß

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[e^{-i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{-i\alpha} \right] - \left[e^{i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{i\alpha} \right]} \\ & \qquad \qquad \qquad = 0 \\ & \overline{\left[e^{-i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{-i\alpha} \right] - \left[e^{i\alpha\lambda_j} + \lambda_j e^{i\alpha} \right]} \\ & = \left[e^{i\alpha\bar{\lambda}_j} + \bar{\lambda}_j e^{i\alpha} \right] - \left[e^{-i\alpha\bar{\lambda}_j} + \bar{\lambda}_j e^{-i\alpha} \right] \\ & = \left[e^{-i\alpha\bar{\lambda}_j} + \bar{\lambda}_j e^{-i\alpha} \right] - \left[e^{i\alpha\bar{\lambda}_j} + \bar{\lambda}_j e^{i\alpha} \right] = 0 \end{aligned} \tag{17.50}$$

und der entsprechenden Darstellung der Bestimmungsgleichung

$[\sin \alpha \omega_j - \omega_j \sin \alpha = 0]$ gemäß

$$\begin{aligned} & \left[e^{-i\alpha\omega_j} - \omega_j e^{-i\alpha} \right] - \left[e^{i\alpha\omega_j} - \omega_j e^{i\alpha} \right] \\ & = \left[e^{-i\alpha\bar{\omega}_j} - \bar{\omega}_j e^{-i\alpha} \right] - \left[e^{i\alpha\bar{\omega}_j} - \bar{\omega}_j e^{i\alpha} \right] = 0 \end{aligned} \tag{17.51}$$

zu ersehen ist. Mit den Lösungen λ_j , $\bar{\lambda}_j$, ω_j , $\bar{\omega}_j$ der angegebenen Nullstellengleichungen werden nun die folgenden Ansätze für Φ und Ψ gemacht:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{\lambda_j} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^{\bar{\lambda}_j} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} a_j^* z^{\omega_j} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j^* z^{\bar{\omega}_j} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{\lambda_j} e^{i\lambda_j\varphi} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^{\bar{\lambda}_j} e^{i\bar{\lambda}_j\varphi} \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} a_j^* r^{\omega_j} e^{i\omega_j\varphi} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j^* r^{\bar{\omega}_j} e^{i\bar{\omega}_j\varphi} \end{aligned} \tag{17.52}$$

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^{\lambda_j} + \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^{\bar{\lambda}_j} \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} c_j^* z^{\omega_j} + \sum_{j=0}^{\infty} d_j^* z^{\bar{\omega}_j} \end{aligned} \quad (17.53)$$

17.2.2.1 Ermittlung der Beziehung zwischen Φ und Ψ zur Erfüllung der Randbedingungen

Zur Ermittlung der Beziehungen der einzelnen Ansatzkoeffizienten untereinander, um die Randbedingungen zu erfüllen, können die Funktionsanteile mit λ_j und ω_j getrennt untersucht werden. Für die Anteile von Φ und Ψ , welche λ_j sowie $\bar{\lambda}_j$ als Exponenten enthalten, ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \Phi'(z) = & \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda_j z^{\lambda_j-1} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \bar{\lambda}_j z^{\bar{\lambda}_j-1} \\ = & \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda_j r^{\lambda_j-1} e^{i(\lambda-1)\varphi} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \bar{\lambda}_j r^{\bar{\lambda}_j-1} e^{i(\bar{\lambda}-1)\varphi} \end{aligned} \quad (17.54)$$

und

$$\bar{\Phi} = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_j r^{\bar{\lambda}_j} e^{-i\bar{\lambda}_j\varphi} + \sum_{j=0}^{\infty} \bar{b}_j r^{\lambda_j} e^{-i\lambda_j\varphi} \quad (17.55)$$

die Randbedingungsgleichung in der Form

$$\begin{aligned}
 \overline{\Phi(z)} + \bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z) &= \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_j r^{\bar{\lambda}_j} e^{-i\bar{\lambda}_j \varphi} + \sum_{j=0}^{\infty} \bar{b}_j r^{\lambda_j} e^{-i\lambda_j \varphi} + \\
 &+ \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda_j r^{\lambda_j} e^{i(\lambda_j-2)\varphi} + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \bar{\lambda}_j r^{\bar{\lambda}_j} e^{i(\bar{\lambda}_j-2)\varphi} + \\
 &+ \sum_{j=0}^{\infty} c_j r^{\lambda_j} e^{i\lambda_j \varphi} + \sum_{j=0}^{\infty} d_j r^{\bar{\lambda}_j} e^{i\bar{\lambda}_j \varphi} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ r^{\bar{\lambda}_j} e^{i\bar{\lambda}_j \varphi} \left[\bar{a}_j e^{-i2\bar{\lambda}_j \varphi} + b_j \bar{\lambda}_j e^{-i2\varphi} + d_j \right] + \right. \\
 &\left. + r^{\lambda_j} e^{i\lambda_j \varphi} \left[\bar{b}_j e^{-i2\lambda_j \varphi} + a_j \lambda_j e^{-i2\varphi} + c_j \right] \right\} \stackrel{!}{=} 0
 \end{aligned}$$

(17.56)

$$\text{auf } \varphi = \pm \frac{\alpha}{2}$$

Zur Erfüllung dieser Bedingungsgleichung ist es notwendig, daß die beiden Ausdrücke in den eckigen Klammern für $\varphi = \pm \alpha/2$ gleich Null werden. Somit ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\bar{a}_j e^{-i\bar{\lambda}_j \alpha} + b_j \bar{\lambda}_j e^{-i\alpha} + d_j = 0 \quad (17.57)$$

$$\bar{a}_j e^{i\bar{\lambda}_j \alpha} + b_j \bar{\lambda}_j e^{i\alpha} + d_j = 0 \quad (17.58)$$

$$\bar{b}_j e^{-i\lambda_j \alpha} + a_j \lambda_j e^{-i\alpha} + c_j = 0 \quad (17.59)$$

$$\bar{b}_j e^{i\lambda_j \alpha} + a_j \lambda_j e^{i\alpha} + c_j = 0 \quad (17.60)$$

Nichttriviale Lösungen erhält man mit

$$b_j = \bar{a}_j \quad (17.61)$$

da aus den umgeformten Gleichungen (17.57) bis (17.60) gemäß

$$\left[e^{-i\bar{\lambda}_j \alpha} + \bar{\lambda}_j e^{-i\alpha} \right] \bar{a}_j + d_j = 0 \quad (17.62)$$

$$\underbrace{\left[e^{i\bar{\lambda}_j \alpha} + \bar{\lambda}_j e^{i\alpha} \right]} \bar{a}_j + d_j = 0 \quad (17.63)$$

$$\left(e^{-i\bar{\lambda}_j \alpha} + \bar{\lambda}_j e^{-i\alpha} \right)$$

$$\left[e^{-i\lambda_j \alpha} + \lambda_j e^{-i\alpha} \right] a_j + c_j = 0 \quad (17.64)$$

$$\underbrace{\left[e^{i\lambda_j \alpha} + \lambda_j e^{i\alpha} \right]} a_j + c_j = 0 \quad (17.65)$$

$$\left(e^{-i\lambda_j \alpha} + \lambda_j e^{-i\alpha} \right)$$

unter Berücksichtigung der Beziehung (17.50) ersehen werden kann, daß je zwei aufeinanderfolgende Gleichungen identisch werden. Die Koeffizienten c_j und d_j ergeben sich zu

$$c_j = - \left[e^{i\lambda_j \alpha} + \lambda_j e^{i\alpha} \right] a_j \quad (17.66)$$

und

$$d_j = - \left[e^{i\bar{\lambda}_j \alpha} + \bar{\lambda}_j e^{i\alpha} \right] \bar{a}_j \quad (17.67)$$

Die Funktionsanteile von Φ und Ψ , welche ω_j sowie $\bar{\omega}_j$ als Exponenten

enthalten, führen zu der Randbedingungsgleichung

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(z)} + \bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z) &= \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ r^{\bar{\omega}_j} e^{i\bar{\omega}_j\varphi} \left[\bar{a}_j^* e^{-i2\bar{\omega}_j\varphi} + b_j^* \bar{\omega}_j e^{-i2\varphi} + d_j^* \right] + \right. \\ &\quad \left. + r^{\omega_j} e^{i\omega_j\varphi} \left[\bar{b}_j^* e^{-i2\omega_j\varphi} + a_j^* \omega_j e^{-i2\varphi} + c_j^* \right] \right\} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad \text{auf } \varphi = \pm \frac{\alpha}{2} \quad (17.68)$$

Die vier Gleichungen, die aus dieser Bedingungsgleichung hervorgehen, lauten:

$$\bar{a}_j^* e^{-i\bar{\omega}_j\alpha} + b_j^* \bar{\omega}_j e^{-i\alpha} + d_j^* = 0 \quad (17.69)$$

$$\bar{a}_j^* e^{i\bar{\omega}_j\alpha} + b_j^* \bar{\omega}_j e^{i\alpha} + d_j^* = 0 \quad (17.70)$$

$$\bar{b}_j^* e^{-i\omega_j\alpha} + a_j^* \omega_j e^{-i\alpha} + c_j^* = 0 \quad (17.71)$$

$$\bar{b}_j^* e^{i\omega_j\alpha} + a_j^* \omega_j e^{i\alpha} + c_j^* = 0 \quad (17.72)$$

Aufgrund der Lösungseigenschaften der Nullstellengleichung für ω_j , welche aus (17.51) abgelesen werden können, ergeben sich für

$$b_j^* = -\bar{a}_j^* \quad (17.73)$$

nichttriviale Lösungen, wie aus den umgeformten Gleichungen (17.69) bis (17.72) gemäß

$$\left[e^{-i\omega_j \alpha} - \bar{\omega}_j e^{-i\alpha} \right] \bar{a}_j^* + d_j^* = 0 \quad (17.74)$$

$$\underbrace{\left[e^{i\bar{\omega}_j \alpha} - \bar{\omega}_j e^{i\alpha} \right]}_{(e^{-i\bar{\omega}_j \alpha} - \bar{\omega}_j e^{-i\alpha})} \bar{a}_j^* + d_j^* = 0 \quad (17.75)$$

$$(e^{-i\bar{\omega}_j \alpha} - \bar{\omega}_j e^{-i\alpha})$$

$$- \left[e^{-i\omega_j \alpha} - \omega_j e^{-i\alpha} \right] a_j^* + c_j^* = 0 \quad (17.76)$$

$$- \underbrace{\left[e^{i\omega_j \alpha} - \omega_j e^{i\alpha} \right]}_{(e^{-i\omega_j \alpha} - \omega_j e^{-i\alpha})} a_j^* + c_j^* = 0 \quad (17.77)$$

$$(e^{-i\omega_j \alpha} - \omega_j e^{-i\alpha})$$

entnommen werden kann. Die Koeffizienten c_j^* und d_j^* lassen sich durch

$$c_j^* = \left[e^{i\omega_j \alpha} - \omega_j e^{i\alpha} \right] a_j^* \quad (17.78)$$

und

$$d_j^* = - \left[e^{i\bar{\omega}_j \alpha} - \bar{\omega}_j e^{i\alpha} \right] \bar{a}_j^* \quad (17.79)$$

angeben.

Zur Erfüllung der Randbedingungen stehen einem nun folgende Funktionen Φ und Ψ zur Verfügung:

$$\begin{aligned}
 \Phi(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^{\lambda_j} + \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_j z^{\bar{\lambda}_j} \\
 &+ \sum_{j=0}^{\infty} a_j^* z^{\omega_j} - \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_j^* z^{\bar{\omega}_j} \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \alpha_j (z^{\lambda_j} + z^{\bar{\lambda}_j}) + i \frac{1}{2} \beta_j (z^{\lambda_j} - z^{\bar{\lambda}_j}) \right] + \\
 &+ \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \alpha_j^* (z^{\omega_j} - z^{\bar{\omega}_j}) + i \frac{1}{2} \beta_j^* (z^{\omega_j} + z^{\bar{\omega}_j}) \right] \tag{17.80}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi(z) &= - \sum_{j=0}^{\infty} a_j \left[e^{i\lambda_j \alpha} + \lambda_j e^{i\alpha} \right] z^{\lambda_j} - \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_j \left[e^{i\bar{\lambda}_j \alpha} + \bar{\lambda}_j e^{i\alpha} \right] z^{\bar{\lambda}_j} + \\
 &+ \sum_{j=0}^{\infty} a_j^* \left[e^{i\omega_j \alpha} - \omega_j e^{i\alpha} \right] z^{\omega_j} - \sum_{j=0}^{\infty} \bar{a}_j^* \left[e^{i\bar{\omega}_j \alpha} - \bar{\omega}_j e^{i\alpha} \right] z^{\bar{\omega}_j} \tag{17.81}
 \end{aligned}$$

mit

$$a_j = \frac{1}{2} (\alpha_j + i\beta_j) \tag{17.82}$$

$$a_j^* = \frac{1}{2} (\alpha_j^* + i\beta_j^*) \tag{17.83}$$

sowie λ_j und ω_j als reelle und komplexe Lösungen von

$$\sin \alpha \lambda_j + \lambda_j \sin \alpha = 0 \tag{17.84}$$

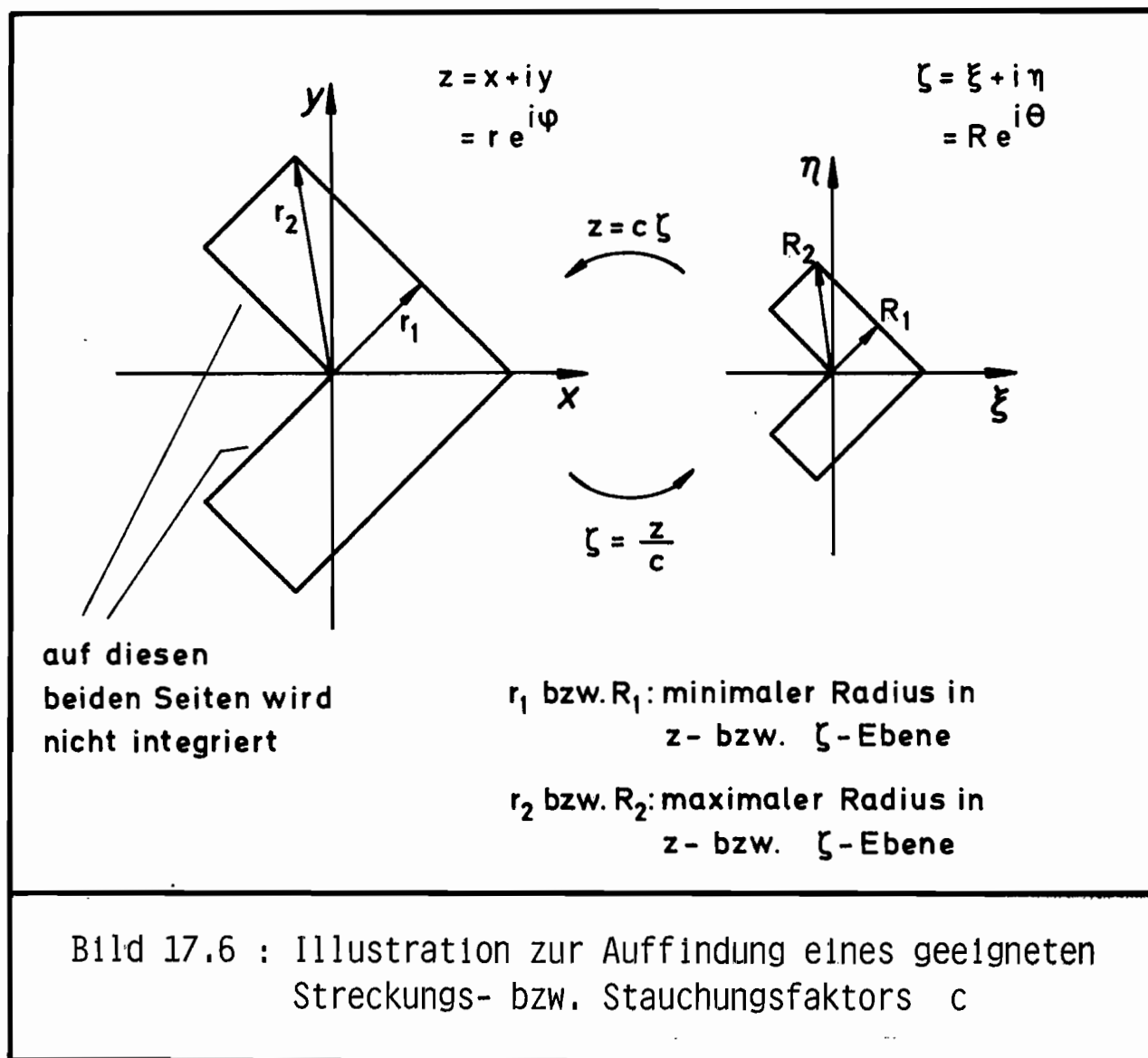
und

$$\sin \alpha \omega_j - \omega_j \sin \alpha = 0 \tag{17.85}$$

Für reelle Exponenten ergeben sich mit $\bar{\lambda}_j = \lambda_j$ und $\bar{\omega}_j = \omega_j$ aus (17.80) und (17.81) die in Kapitel 17.2.1.1.3 dargestellten speziellen Lösungsfunktionen Φ und Ψ .

17.2.3 Ansätze für ϕ und ψ in einer Ebene, die durch Streckung bzw. Stauchung aus der z-Ebene hervorgeht

Da die Funktionen ϕ und ψ als Ansätze für ein numerisches Verfahren in einem bestimmten Gebiet verwendet werden, ist es sinnvoll, auf den benutzten Zahlenbereich zu achten. Da bei den einzelnen Elementen nur Integrationen auf dem Rand durchgeführt werden, kann ein Intervall für die vorkommenden Werte von r angegeben werden, und zwar brauchen nur der maximal und minimal vorkommende Radius in der betreffenden Elementfigur gesucht zu werden. (s. Beispiel in Bild 17.6).



Hierbei ist zu berücksichtigen, daß auf den beiden Elementseiten, die auf den betrachteten Eckpunkt zulaufen, nicht integriert wird.

Bei einer numerischen Rechnung, die auf in der z-Ebene gültigen Funktionen basiert, ist darauf zu achten, daß die vorkommenden Potenzen von r weder zu groß oder zu klein werden noch sehr große Unterschiede in der Größenordnung aufweisen. Günstig wäre es natürlich, wenn die vorkommenden zu potenzierenden Zahlen in der Nähe des Wertes "1" lägen. Eine Skalierung kann einfach dadurch vorgenommen werden, daß nicht mit z sondern mit z/c als Argument in den Funktionen Φ und Ψ gearbeitet wird. Dies entspricht einem Ansetzen der Funktionen Φ und Ψ in einer ζ -Ebene die durch

$$\zeta = \frac{z}{c} \tag{17.86}$$

mit der z-Ebene in Beziehung steht. Anstelle des Intervalles

$$r_1 \leq r \leq r_2 \tag{17.87}$$

würde dann ein Bereich

$$R_1 \leq R \leq R_2 \tag{17.88}$$

treten (s. Bild 17.6), der durch eine der Geometrie des betrachteten Elementes angemessenen Wahl von c um "1" herum liegt. Beispiele für die Wahl von c mit den zugehörigen Intervallen für R in Klammern sind

$$c = r_1 \rightsquigarrow (1 \leq R \leq \frac{r_2}{r_1}) \quad , \tag{17.89}$$

$$c = r_2 \rightsquigarrow (\frac{r_1}{r_2} \leq R \leq 1) \tag{17.90}$$

oder

$$c = \frac{r_1 + r_2}{2} \rightsquigarrow \left(\left[1 - \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \right] \leq R \leq \left[1 + \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} \right] \right) \tag{17.91}$$

Sollen die benötigten Funktionen nun in der ζ -Ebene angesetzt werden, so braucht in den Formeln (17.80) und (17.81) für Φ bzw. Ψ nur z durch ζ ersetzt zu werden. Diese von ζ abhängigen Funktionen erfüllen ebenfalls die Randbedingungen, da der Faktor c keinen Einfluß auf die prinzipielle

Form der Randbedingungsgleichung hat, in welche die Abbildungsfunktion

$$z = f(\zeta) = c \zeta \tag{17.92}$$

und deren Ableitung

$$\dot{f}(\zeta) = c \tag{17.93}$$

nur durch den Faktor

$$\frac{\overline{f(\zeta)}}{\dot{f}(\zeta)} = \frac{c \bar{\zeta}}{c} = \bar{\zeta} \tag{17.94}$$

eingehen und c infolge Kürzens herausfällt. Die Randbedingung

$$\begin{aligned} \overline{\phi(\zeta)} + \overline{f(\zeta)} \frac{\dot{\phi}(\zeta)}{\dot{f}(\zeta)} + \psi(\zeta) &= \\ &= \overline{\phi(\zeta)} + \bar{\zeta} \dot{\phi}(\zeta) + \psi(\zeta) = 0 \end{aligned} \tag{17.95}$$

ist also von der Form her identisch mit der bisher verwendeten Gleichung

$$\overline{\phi(z)} + \bar{z} \phi'(z) + \psi(z) = 0 \tag{17.96}$$

17.2.4 Die Exponentenfolgen λ_j , ω_j und Auswahl zulässiger Werte

Als Beispielfolgen sind für den Winkel $\alpha = 3/2 \pi$ in den Tabellen 17.1 und 17.2 einige Werte λ_j und ω_j nach der Größe ihrer Realteile geordnet. Die Indizierung von λ_j und ω_j ist so gewählt, daß alle Werte mit positiven Realteilen positive und alle Werte mit negativen Realteilen negative Indizes erhalten. Die konjugiert komplexen Werte $\bar{\lambda}_j$ und $\bar{\omega}_j$, welche ja ebenfalls Lösungen der betreffenden Nullstellengleichungen darstellen, sind als Folgen mit der gleichen Indizierung in den Tabellen enthalten.

j	$\lambda_j, (\bar{\lambda}_j)$
	⋮
-4	-4.31037729154121 ± i 0.45549357908679
-3	-2.97184377315928 ± i 0.37393120541641
-2	-1.62925737675957 ± i 0.23125054711511
-1	-0.54448373678246
0	0
1	0.54448373678246
2	1.62925737675957 ± i 0.23125054711511
3	2.97184377315928 ± i 0.37393120541641
4	4.31037729154121 ± i 0.45549357908679
5	5.64711177366080 ± i 0.51368381202418
6	6.98287044150660 ± i 0.55910826196299
7	8.31803368781652 ± i 0.59641942712571
8	9.65280394915790 ± i 0.62809935979624
9	10.98729978336188 ± i 0.65563545682684
10	12.32159563549198 ± i 0.67999171741576
	⋮

Tabelle 17.1 : Nullstellen $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ von $\sin \alpha \lambda_j + \lambda_j \sin \alpha = 0$ mit $\alpha = 3/2 \pi \hat{=} 270^\circ$

j	$\omega_j, (\bar{\omega}_j)$
-4	$-3.64142009772159 \pm i 0.41878670205671$
-3	$-2.30132706071440 \pm i 0.31583674552509$
-2	-1
-1	-0.90852918984610
0	0
1	0.90852918984610
2	1
3	$2.30132706071440 \pm i 0.31583674552509$
4	$3.64142009772159 \pm i 0.41878670205671$
5	$4.97890219894980 \pm i 0.48662546812265$
6	$6.31508337763178 \pm i 0.53762738728742$
7	$7.65051117299749 \pm i 0.57859114200853$
8	$8.98545917844731 \pm i 0.61285433817006$
9	$10.32008076682346 \pm i 0.64231617951684$
10	$11.65446918131276 \pm i 0.66816431966449$

Tabelle 17.2 : Nullstellen $\omega_j, \bar{\omega}_j$ von $\sin \alpha \omega_j - \omega_j \sin \alpha = 0$
mit $\alpha = 3/2 \pi \hat{=} 270^\circ$

Es bleibt noch zu überprüfen, welche von den unendlich vielen Lösungswerten λ_j und ω_j aus (17.84) bzw. (17.85) für eine Problemlösung zulässig sind und in Frage kommen. Hierzu wird zunächst die allgemeine komplexe Potenz ζ^a mit

$$\zeta = R e^{i\theta} \tag{17.97}$$

und

$$a = a_r + i a_i \tag{17.98}$$

zwecks einer Untersuchung in einer geeigneten Form dargestellt, und zwar

gilt:

$$\begin{aligned}
 \zeta^a &= e^{a \ln \zeta} = e^{(a_r + ia_i)(\ln R + i\theta)} \\
 &= e^{a_r \ln R - a_i \theta + ia_r \theta + ia_i \ln R} \\
 &= R^{a_r} e^{-a_i \theta} e^{ia_r \theta} e^{ia_i \ln R} \\
 &= R^{a_r} \left[\cos a_i \ln R + i \sin a_i \ln R \right] e^{-a_i \theta} \underline{e^{ia_r \theta}} \\
 &\qquad\qquad\qquad (\cos a_r \theta + i \sin a_r \theta)
 \end{aligned}
 \tag{17.99}$$

Der Term $e^{-a_i \theta} e^{ia_r \theta}$ bleibt für endliche Werte von a_i beschränkt, während der von R abhängige Teil in (17.99) bezüglich des Verhaltens für $R \rightarrow 0$ zu untersuchen ist.

Zunächst sei der Fall $a_r > 0$ betrachtet. Die Sinus- und Cosinusfunktionen sind für alle reellen Argumentwerte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ definiert und liegen zwischen -1 und $+1$. Es kann also von den Ungleichungen

$$-1 \leq \cos a_i \ln R \leq 1 \tag{17.100}$$

und

$$-1 \leq \sin a_i \ln R \leq 1 \tag{17.101}$$

ausgegangen werden. Multiplikation von (17.100) sowie (17.101) mit R^{a_r} und Aufstellung der Grenzwerte für $R \rightarrow 0$ liefert zunächst

$$-\lim_{R \rightarrow 0} R^{a_r} \leq \lim_{R \rightarrow 0} \left[R^{a_r} \cos a_i \ln R \right] \leq \lim_{R \rightarrow 0} R^{a_r} \tag{17.102}$$

und

$$-\lim_{R \rightarrow 0} R^{a_r} \leq \lim_{R \rightarrow 0} \left[R^{a_r} \sin a_i \ln R \right] \leq \lim_{R \rightarrow 0} R^{a_r} \tag{17.103}$$

Nach der expliziten Bildung von $\lim_{R \rightarrow 0} R^{a_r}$ kann aus

$$0 \leq \lim_{R \rightarrow 0} [R^{a_r} \cos a_r \ln R] \leq 0 \quad (17.104)$$

und

$$0 \leq \lim_{R \rightarrow 0} [R^{a_r} \sin a_r \ln R] \leq 0 \quad (17.105)$$

geschlossen werden, daß

$$\lim_{R \rightarrow 0} [R^{a_r} \cos a_r \ln R] = 0 \quad (\text{mit } a_r > 0) \quad (17.106)$$

und

$$\lim_{R \rightarrow 0} [R^{a_r} \sin a_r \ln R] = 0 \quad (\text{mit } a_r > 0) \quad (17.107)$$

gelten müssen.

Für $a_r = 0$ und $a_i \neq 0$ gibt es für die verbleibenden Terme $\cos(a_i \ln R)$ und $\sin(a_i \ln R)$ keine Grenzwerte mit $R \rightarrow 0$.

Ist nun $a_r < 0$, so liefern die Ungleichungen

$$\underbrace{-\lim_{R \rightarrow 0} R^{-|a_r|}}_{\rightarrow -\infty} \leq \lim_{R \rightarrow 0} [R^{-|a_r|} \cos a_i \ln R] \leq \underbrace{\lim_{R \rightarrow 0} R^{-|a_r|}}_{\rightarrow \infty} \quad (17.108)$$

und

$$\underbrace{-\lim_{R \rightarrow 0} R^{-|a_r|}}_{\rightarrow -\infty} \leq \lim_{R \rightarrow 0} [R^{-|a_r|} \sin a_i \ln R] \leq \underbrace{\lim_{R \rightarrow 0} R^{-|a_r|}}_{\rightarrow \infty} \quad (17.109)$$

die Aussage, daß die Ausdrücke

$$R^{-|a_r|} \cos a_i \ln R \quad \text{und} \quad R^{-|a_r|} \sin a_i \ln R$$

α	$\lambda_1, (\bar{\lambda}_1)$
20°	12.07947991720516 ± i 6.38438830561358
30°	8.06296525882784 ± i 4.20286708520903
40°	6.05783091161760 ± i 3.09536590921922
50°	4.85735568851426 ± i 2.41684016628022
60°	4.05932901215137 ± i 1.95204994722751
70°	3.49140357875117 ± i 1.60849050128831
80°	3.06743447872039 ± i 1.33958617004435
90°	2.73959335632460 ± i 1.11902453434242
100°	2.47921547212980 ± i 0.93037330522173
110°	2.26809568641771 ± i 0.76211834738922
120°	2.09413910919242 ± i 0.60458500270356
130°	1.94902321226400 ± i 0.44635588346806
140°	1.82686861077354 ± i 0.26169531720800
150°	1.53386000277759
160°	1.28841389377039
170°	1.12509643539585
180°	1.0
190°	0.90004381148814
200°	0.81869585132384
210°	0.75197454540764
220°	0.69716497209720
230°	0.65226955518163
240°	0.61573105949078
250°	0.58627886495729
260°	0.56283948048168
270°	0.54448373678246
280°	0.53039571912977
290°	0.51985430311392
300°	0.51222136116051
310°	0.50693284228647
320°	0.50349048318478
330°	0.50145300871355
340°	0.50042637542606
350°	0.50005298712644
360°	0.5

Tabelle 17.3 : Nullstellenwerte λ_1 (und $\bar{\lambda}_1$) aus
 $\sin \alpha \lambda_j + \lambda_j \sin \alpha = 0$ mit kleinstem positiven
 Realteil für diskrete Werte von α

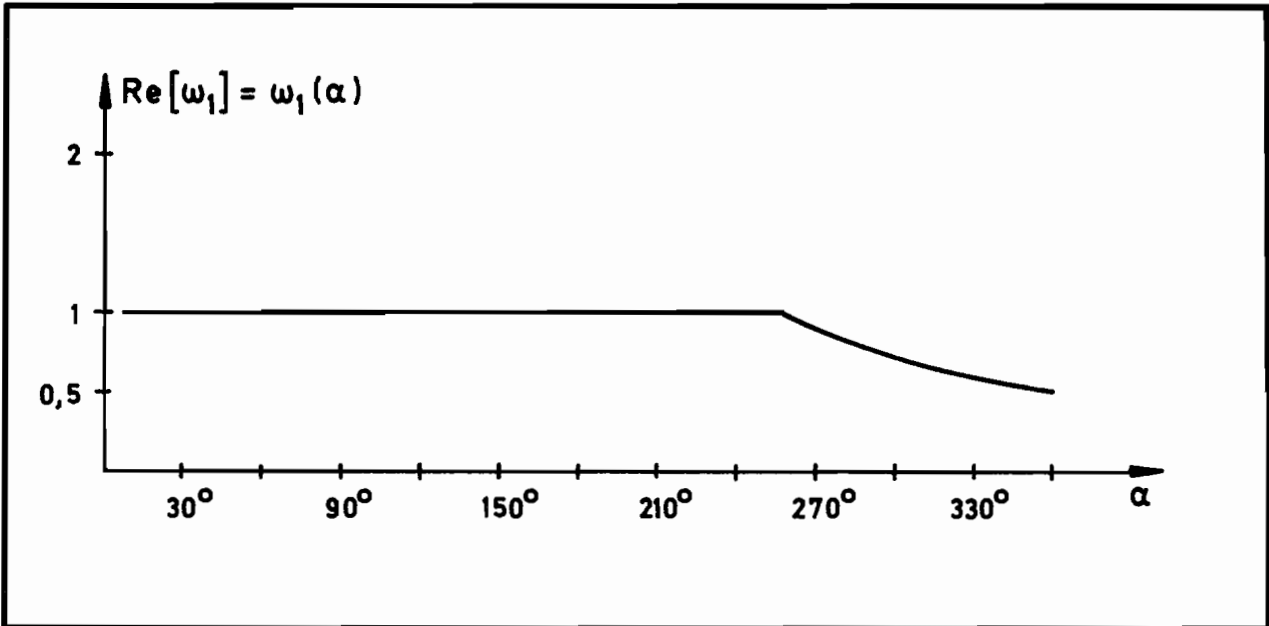


Bild 17.8 : Verlauf der kleinsten positiven Nullstellenwerte ω_1 aus $\sin\alpha\omega_j - \omega_j \sin\alpha = 0$ in Abhängigkeit von α

α	ω_1
10°	1
20°	1
⋮	⋮
250°	1
257.4°	1
258°	0.99576576628600
260°	0.98047492545310
270°	0.90852918984610
280°	0.84343956892930
290°	0.78444055297409
300°	0.73090074151295
310°	0.68229483030706
320°	0.63818247129336
330°	0.59819184961408
340°	0.56200654961948
350°	0.52935473834138
360°	0.5

Tabelle 17.4 : Kleinste positive Nullstellenwerte ω_1 aus $\sin\alpha\omega_j - \omega_j \sin\alpha = 0$ für diskrete Werte von α

Die Nullstellenfolgen λ_j und ω_j weisen folgende Eigenschaften auf:

1. Werte λ_j , deren Realteile in dem Intervall $0 < \text{Re}[\lambda_j] < 1$ liegen, sind rein reell. Entsprechendes gilt für ω_j . Werte λ_1 und ω_1 , die kleiner sind als 0.5, treten nicht auf.
Für $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ gilt: $1 \geq \lambda_1 \geq 0.5$
Für $1.43\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ gilt: $1 \geq \omega_1 \geq 0.5$
2. Für die nächsten Werte λ_2, ω_2 in den Lösungsfolgen gilt $\text{Re}[\lambda_2] \geq 1$ bzw. $\text{Re}[\omega_2] \geq 1$.
3. Der Fall $\text{Re}[\lambda_j] = 0$ und gleichzeitig $\text{Im}[\lambda_j] \neq 0$ kommt nicht vor. Die entsprechende Aussage gilt für ω_j .

Neben $\lambda_0 = 0$ und $\omega_0 = 0$ können alle aufeinanderfolgenden Werte der Nullstellenfolgen verwendet werden, für die $\text{Re}[\lambda_j] > 0$ bzw. $\text{Re}[\omega_j] > 0$ gilt. Aufgrund der angegebenen Eigenschaften sind zwar singular werdende Spannungsgrößen möglich, jedoch unendlich oft oszillierende und zusätzlich unbegrenzt anwachsende Spannungsfunktionen treten nicht auf. Die singular werdenden Spannungsfunktionsterme, welche hier auftreten, gewährleisten auch die Konvergenz der zu bildenden Integrale wie im Kapitel 18 angedeutet wird.

17.2.5 Die Funktionen ϕ, ψ sowie $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}$ und τ_{xy} für eine Finite-Element-Lösung

Für eine Finite-Element-Lösung wird eine endliche Anzahl von zulässigen Exponentenwerten λ_j und ω_j aus den Bestimmungsgleichungen (17.84) und (17.85) verwendet. Explizit ausgerechnet liegen die Exponenten für eine einspringende Ecke mit rechtem Winkel (d.h. $\alpha = 270^\circ$ gemäß Bild 17.4) in den Tabellen 17.1 und 17.2 vor.

Mit den der Knotenzahl eines jeweils betrachteten Elementes angepaßten oberen Summationsgrenzen N und M seien die Funktionen $\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}$ sowie ψ und $\dot{\psi}$ nun in folgender Form angegeben:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= \sum_{j=0}^N \left[\alpha_j A_1(\zeta, \lambda_j) + i \beta_j B_1(\zeta, \lambda_j) \right] + \\ &+ \sum_{j=0}^M \left[\alpha_j^* A_1^*(\zeta, \omega_j) + i \beta_j^* B_1^*(\zeta, \omega_j) \right] \end{aligned} \quad (17.112)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(\zeta) &= \sum_{j=0}^N \left[\alpha_j A_2(\zeta, \lambda_j) + i \beta_j B_2(\zeta, \lambda_j) \right] + \\ &+ \sum_{j=0}^M \left[\alpha_j^* A_2^*(\zeta, \omega_j) + i \beta_j^* B_2^*(\zeta, \omega_j) \right] \end{aligned} \quad (17.113)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}(\zeta) &= \sum_{j=0}^N \left[\alpha_j A_3(\zeta, \lambda_j) + i \beta_j B_3(\zeta, \lambda_j) \right] + \\ &+ \sum_{j=0}^M \left[\alpha_j^* A_3^*(\zeta, \omega_j) + i \beta_j^* B_3^*(\zeta, \omega_j) \right] \end{aligned} \quad (17.114)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta) &= \sum_{j=0}^N \left[\alpha_j A_4(\zeta, \lambda_j) + i \beta_j B_4(\zeta, \lambda_j) \right] + \\ &+ \sum_{j=0}^M \left[\alpha_j^* A_4^*(\zeta, \omega_j) + i \beta_j^* B_4^*(\zeta, \omega_j) \right] \end{aligned} \quad (17.115)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(\zeta) &= \sum_{j=0}^N \left[\alpha_j A_5(\zeta, \lambda_j) + i \beta_j B_5(\zeta, \lambda_j) \right] + \\ &+ \sum_{j=0}^M \left[\alpha_j^* A_5^*(\zeta, \omega_j) + i \beta_j^* B_5^*(\zeta, \omega_j) \right] \end{aligned} \quad (17.116)$$

mit $\zeta = \frac{z}{c}$ (c : zu wählender Normierungsfaktor) (17.117)

$$A_1(\zeta, \lambda_j) = \frac{1}{2} [\zeta^{\lambda_j} + \zeta^{\bar{\lambda}_j}] \quad (17.118)$$

$$B_1(\zeta, \lambda_j) = \frac{1}{2} [\zeta^{\lambda_j} - \zeta^{\bar{\lambda}_j}] \quad (17.119)$$

$$A_1^*(\zeta, \omega_j) = \frac{1}{2} [\zeta^{\omega_j} - \zeta^{\bar{\omega}_j}] \quad (17.120)$$

$$B_1^*(\zeta, \omega_j) = \frac{1}{2} [\zeta^{\omega_j} + \zeta^{\bar{\omega}_j}] \quad (17.121)$$

$$A_2(\zeta, \lambda_j) = \frac{1}{2} [\lambda_j \zeta^{\lambda_j-1} + \bar{\lambda}_j \zeta^{\bar{\lambda}_j-1}] \quad (17.122)$$

$$B_2(\zeta, \lambda_j) = \frac{1}{2} [\lambda_j \zeta^{\lambda_j-1} - \bar{\lambda}_j \zeta^{\bar{\lambda}_j-1}] \quad (17.123)$$

$$A_2^*(\zeta, \omega_j) = \frac{1}{2} [\omega_j \zeta^{\omega_j-1} - \bar{\omega}_j \zeta^{\bar{\omega}_j-1}] \quad (17.124)$$

$$B_2^*(\zeta, \omega_j) = \frac{1}{2} [\omega_j \zeta^{\omega_j-1} + \bar{\omega}_j \zeta^{\bar{\omega}_j-1}] \quad (17.125)$$

$$A_3(\zeta, \lambda_j) = \frac{1}{2} [\lambda_j(\lambda_j - 1) \zeta^{\lambda_j-2} + \bar{\lambda}_j(\bar{\lambda}_j - 1) \zeta^{\bar{\lambda}_j-2}] \quad (17.126)$$

$$B_3(\zeta, \lambda_j) = \frac{1}{2} [\lambda_j(\lambda_j - 1) \zeta^{\lambda_j-2} - \bar{\lambda}_j(\bar{\lambda}_j - 1) \zeta^{\bar{\lambda}_j-2}] \quad (17.127)$$

$$A_3^*(\zeta, \omega_j) = \frac{1}{2} [\omega_j(\omega_j - 1) \zeta^{\omega_j-2} - \bar{\omega}_j(\bar{\omega}_j - 1) \zeta^{\bar{\omega}_j-2}] \quad (17.128)$$

$$B_3^*(\zeta, \omega_j) = \frac{1}{2} [\omega_j(\omega_j - 1) \zeta^{\omega_j-2} + \bar{\omega}_j(\bar{\omega}_j - 1) \zeta^{\bar{\omega}_j-2}] \quad (17.129)$$

$$A_4(\zeta, \lambda_j) = \frac{1}{2} [e_1 \zeta^{\lambda_j} + e_2 \zeta^{\bar{\lambda}_j}] \quad (17.130)$$

$$B_4(\zeta, \lambda_j) = \frac{1}{2} [e_1 \zeta^{\lambda_j} - e_2 \zeta^{\bar{\lambda}_j}] \quad (17.131)$$

$$A_4^*(\zeta, \omega_j) = \frac{1}{2} [e_1^* \zeta^{\omega_j} + e_2^* \zeta^{\bar{\omega}_j}] \quad (17.132)$$

$$B_4^*(\zeta, \omega_j) = \frac{1}{2} [e_1^* \zeta^{\omega_j} - e_2^* \zeta^{\bar{\omega}_j}] \quad (17.133)$$

$$A_5(\zeta, \lambda_j) = \frac{1}{2} [\lambda_j e_1 \zeta^{\lambda_j-1} + \bar{\lambda}_j e_2 \zeta^{\bar{\lambda}_j-1}] \quad (17.134)$$

$$B_5(\zeta, \lambda_j) = \frac{1}{2} [\lambda_j e_1 \zeta^{\lambda_j-1} - \bar{\lambda}_j e_2 \zeta^{\bar{\lambda}_j-1}] \quad (17.135)$$

$$A_5^*(\zeta, \omega_j) = \frac{1}{2} [\omega_j e_1^* \zeta^{\omega_j-1} + \bar{\omega}_j e_2^* \zeta^{\bar{\omega}_j-1}] \quad (17.136)$$

$$B_5^*(\zeta, \omega_j) = \frac{1}{2} [\omega_j e_1^* \zeta^{\omega_j-1} - \bar{\omega}_j e_2^* \zeta^{\bar{\omega}_j-1}] \quad (17.137)$$

In den letzten Gleichungen wurden nachstehende Ausdrücke verwendet:

$$e_1 = e_1(\lambda_j) = - [e^{i\lambda_j\alpha} + \lambda_j e^{i\alpha}] \quad (17.138)$$

$$e_2 = e_2(\bar{\lambda}_j) = - [e^{i\bar{\lambda}_j\alpha} + \bar{\lambda}_j e^{i\alpha}] \quad (17.139)$$

$$e_1^* = e_1^*(\omega_j) = e^{i\omega_j\alpha} - \omega_j e^{i\alpha} \quad (17.140)$$

$$e_2^* = e_2^*(\bar{\omega}_j) = - [e^{i\bar{\omega}_j\alpha} - \bar{\omega}_j e^{i\alpha}] \quad (17.141)$$

Die Verschiebungs- und Spannungsfunktionen ergeben sich mit den oben angegebenen Ausdrücken im einzelnen zu:

$$\begin{aligned}
 2\mu u &= \operatorname{Re} [x \Phi - \zeta \bar{\Phi} - \bar{\Psi}] = \\
 &= \sum_{j=0}^N \left\{ \left[x \operatorname{Re}[A_1] - \left(\xi \operatorname{Re}[A_2] + \eta \operatorname{Im}[A_2] \right) - \operatorname{Re}[A_4] \right] \alpha_j + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-x \operatorname{Im}[B_1] - \left(-\xi \operatorname{Im}[B_2] + \eta \operatorname{Re}[B_2] \right) + \operatorname{Im}[B_4] \right] \beta_j \right\} + \\
 &+ \sum_{j=0}^M \left\{ \left[x \operatorname{Re}[A_1^*] - \left(\xi \operatorname{Re}[A_2^*] + \eta \operatorname{Im}[A_2^*] \right) - \operatorname{Re}[A_4^*] \right] \alpha_j^* + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-x \operatorname{Im}[B_1^*] - \left(-\xi \operatorname{Im}[B_2^*] + \eta \operatorname{Re}[B_2^*] \right) + \operatorname{Im}[B_4^*] \right] \beta_j^* \right\}
 \end{aligned}$$

(17.142)

$$\begin{aligned}
 2\mu v &= \operatorname{Im} [x \Phi - \zeta \bar{\Phi} - \bar{\Psi}] = \\
 &= \sum_{j=0}^N \left\{ \left[x \operatorname{Im}[A_1] - \left(\eta \operatorname{Re}[A_2] - \xi \operatorname{Im}[A_2] \right) + \operatorname{Im}[A_4] \right] \alpha_j + \right. \\
 &\quad \left. + \left[x \operatorname{Re}[B_1] - \left(-\eta \operatorname{Im}[B_2] - \xi \operatorname{Re}[B_2] \right) + \operatorname{Re}[B_4] \right] \beta_j \right\} + \\
 &+ \sum_{j=0}^M \left\{ \left[x \operatorname{Im}[A_1^*] - \left(\eta \operatorname{Re}[A_2^*] - \xi \operatorname{Im}[A_2^*] \right) + \operatorname{Im}[A_4^*] \right] \alpha_j^* + \right. \\
 &\quad \left. + \left[x \operatorname{Re}[B_1^*] - \left(-\eta \operatorname{Im}[B_2^*] - \xi \operatorname{Re}[B_2^*] \right) + \operatorname{Re}[B_4^*] \right] \beta_j^* \right\}
 \end{aligned}$$

(17.143)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{c} (\bar{\phi} + \dot{\phi} - \bar{\xi} \dot{\phi} - \dot{\psi}) \right] = \\
 &= \sum_{j=0}^N \frac{1}{c} \left\{ \left[2 \operatorname{Re} [A_2] - (\xi \operatorname{Re} [A_3] + \eta \operatorname{Im} [A_3]) - \operatorname{Re} [A_5] \right] \alpha_j + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-2 \operatorname{Im} [B_2] - (-\xi \operatorname{Im} [B_3] + \eta \operatorname{Re} [B_3]) + \operatorname{Im} [B_5] \right] \beta_j \right\} + \\
 &+ \sum_{j=0}^M \frac{1}{c} \left\{ \left[2 \operatorname{Re} [A_2^*] - (\xi \operatorname{Re} [A_3^*] + \eta \operatorname{Im} [A_3^*]) - \operatorname{Re} [A_5^*] \right] \alpha_j^* + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-2 \operatorname{Im} [B_2^*] - (-\xi \operatorname{Im} [B_3^*] + \eta \operatorname{Re} [B_3^*]) + \operatorname{Im} [B_5^*] \right] \beta_j^* \right\} \\
 &\hspace{20em} (17.144)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{c} (\bar{\phi} + \dot{\phi} + \bar{\xi} \dot{\phi} + \dot{\psi}) \right] = \\
 &= \sum_{j=0}^N \frac{1}{c} \left\{ \left[2 \operatorname{Re} [A_2] + (\xi \operatorname{Re} [A_3] + \eta \operatorname{Im} [A_3]) + \operatorname{Re} [A_5] \right] \alpha_j + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-2 \operatorname{Im} [B_2] + (-\xi \operatorname{Im} [B_3] + \eta \operatorname{Re} [B_3]) - \operatorname{Im} [B_5] \right] \beta_j \right\} + \\
 &+ \sum_{j=0}^M \frac{1}{c} \left\{ \left[2 \operatorname{Re} [A_2^*] + (\xi \operatorname{Re} [A_3^*] + \eta \operatorname{Im} [A_3^*]) + \operatorname{Re} [A_5^*] \right] \alpha_j^* + \right. \\
 &\quad \left. + \left[-2 \operatorname{Im} [B_2^*] + (-\xi \operatorname{Im} [B_3^*] + \eta \operatorname{Re} [B_3^*]) - \operatorname{Im} [B_5^*] \right] \beta_j^* \right\} \\
 &\hspace{20em} (17.145)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy} &= \operatorname{Im} \left[\frac{1}{c} (\bar{\zeta} \ddot{\phi} + \dot{\psi}) \right] = \\
 &= \sum_{j=0}^N \frac{1}{c} \left\{ \left[-\eta \operatorname{Re}[A_3] + \xi \operatorname{Im}[A_3] + \operatorname{Im}[A_5] \right] \alpha_j + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\eta \operatorname{Im}[B_3] + \xi \operatorname{Re}[B_3] + \operatorname{Re}[B_5] \right] \beta_j \right\} + \\
 &+ \sum_{j=0}^M \frac{1}{c} \left\{ \left[-\eta \operatorname{Re}[A_3^*] + \xi \operatorname{Im}[A_3^*] + \operatorname{Im}[A_5^*] \right] \alpha_j^* + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\eta \operatorname{Im}[B_3^*] + \xi \operatorname{Re}[B_3^*] + \operatorname{Re}[B_5^*] \right] \beta_j^* \right\} \tag{17.146}
 \end{aligned}$$

Beim Programmieren ist hier darauf zu achten, daß bei reellen Exponenten λ_j , ω_j die Funktionsterme mit den Koeffizienten α_j^* und β_j Null werden und somit wegfallen.

17.3 Spannungintensitätsfaktoren bei spitzen Ecken

Bei Ecken mit einem Winkel α nach Bild 17.4, welcher im Intervall $\pi < \alpha < 2\pi$ liegt, treten infolge der reellen Exponentenwerte λ_1 und ω_1 , die in dem Bereich $0.5 \leq \lambda_1 \leq 1$ bzw. $0.5 \leq \omega_1 \leq 1$ liegen, singuläre Spannungsgrößen im Eckpunkt auf. Als Maß der Intensität der vorhandenen singulären Funktionen können wiederum deren Koeffizienten benutzt werden. Die koordinateninvariante Normalspannungssumme mit den betreffenden Termen aus dem singulären Funktionsanteil $\dot{\phi}_s$ lautet hier

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{\dot{\phi}_s}{\dot{f}} \right] \\ &= 4 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{c} \left(\alpha_1 \lambda_1 \zeta^{\lambda_1-1} + i \beta_1^* \omega_1 \zeta^{\omega_1-1} \right) \right] \quad (17.147) \\ &= \frac{4}{c} \left[\alpha_1 \lambda_1 R^{\lambda_1-1} \cos(\lambda_1 - 1) \theta - \beta_1^* \omega_1 R^{\omega_1-1} \sin(\omega_1 - 1) \theta \right] \end{aligned}$$

Mit den Polarkoordinaten in der z-Ebene, die mit den Polarkoordinaten in der ζ -Ebene durch

$$\theta = \varphi \quad (17.148)$$

und

$$R = \frac{r}{c} \quad (17.149)$$

in Verbindung stehen, läßt sich die Normalspannungssumme durch

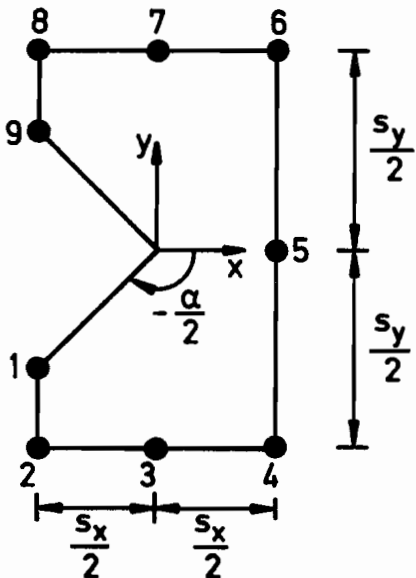
$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \left[\frac{1}{c^{\lambda_1}} \alpha_1 \lambda_1 r^{\lambda_1-1} \cos(\lambda_1 - 1) \varphi - \frac{1}{c^{\omega_1}} \beta_1^* \omega_1 r^{\omega_1-1} \sin(\omega_1 - 1) \varphi \right] \quad (17.150)$$

ausdrücken, wobei c ja einen gewählten Skalierungsfaktor darstellt. Aus der Darstellung (17.150) können nun die Faktoren

$$\left(4 \lambda_1 \alpha_1 / c^{\lambda_1} \right) \quad \text{und} \quad \left(-4 \omega_1 \beta_1^* / c^{\omega_1} \right)$$

als Spannungsintensitätsfaktoren definiert werden. Möglich ist natürlich auch eine Definition, bei der aus diesen Koeffizientenausdrücken noch jeweils ein konstanter Faktor herausgezogen wird.

17.4 Kurzbeschreibung einiger finiter Elemente mit spitzer Ecke



Annahme linearer Randverschiebungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten,
d.h. zwischen 1 - 2 ,
2 - 3 ,
usw.

Anzahl der Knoten: 9

obere Summationsgrenzen in $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$: $N=M= \begin{cases} 5 \text{ für Funktional I} \\ 6 \text{ für Funktional II} \end{cases}$

Anzahl der Knotenverschiebungsgrößen: 18

Anzahl der Freiwerte in $\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix}$: $\begin{cases} 19=2N+2M-1 \text{ für Funktional I} \\ \text{(hiervon 9 Werte in } \underline{\alpha} \text{ und 10 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \\ 20=2N+2M-4 \text{ für Funktional II} \\ \text{(hiervon 10 Werte in } \underline{\alpha} \text{ und 10 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \end{cases}$

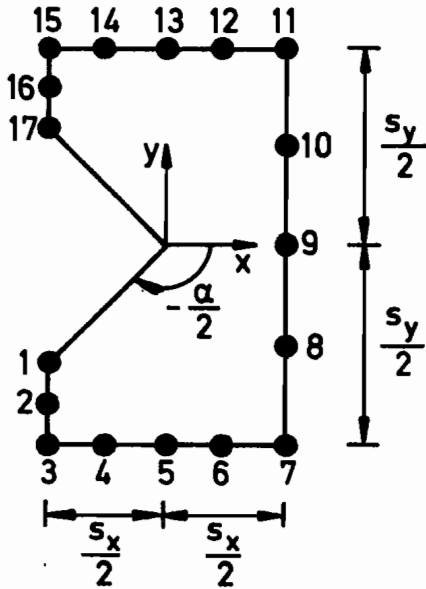
Integration: zwischen den Knoten 1 - 2 - 3 8 - 9
oder bei Ausnutzung von Symmetrie- und Antimetrieigenschaften (z.B.) nur zwischen 1 - 2 - 3 - 4 - 5

Bild 17.9 : Charakteristische Daten für ein Element mit spitzer Kerbe unter Annahme von bereichsweise linearen Randverschiebungen

Die in den Bildern 17.9 bis 17.12 verwendeten Bezeichnungen $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ sowie Funktional I und II haben folgende Bedeutungen:

- $\underline{\alpha}$: Vektor der Realteilmfreiwerte α_j , α_j^*
(aus $\alpha_j = \alpha_j + i \beta_j$ und $\alpha_j^* = \alpha_j^* + i \beta_j^*$)
- $\underline{\beta}$: Vektor der Imaginärteilmfreiwerte β_j , β_j^*

- Funktional I : nicht erweitertes Funktional mit Vorabminimierung der Randverschiebungsdifferenzen (s. Kap. 8.1) (Starrkörperanteile berücksichtigt)
- Funktional II : erweitertes Funktional (s. Kap. 8.2) (Starrkörperanteile weggelassen)



Annahme quadratischer Randverschiebungen zwischen drei aufeinanderfolgenden Knoten,
d.h. zwischen 1 - 2 - 3 ,
3 - 4 - 5 ,
usw.

Anzahl der Knoten: 17

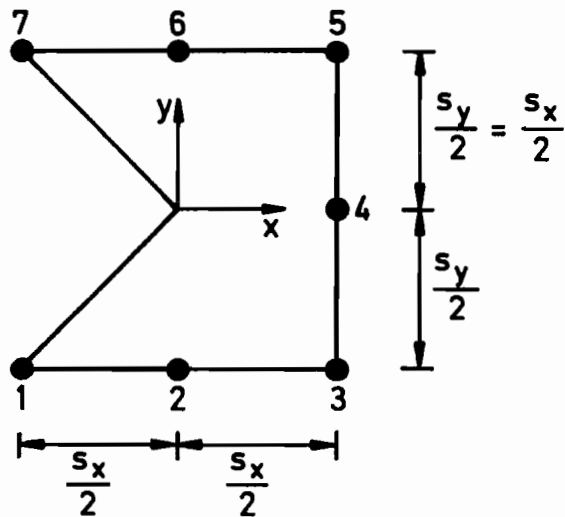
obere Summationsgrenzen in $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$: $N=M= \begin{cases} 9 & \text{für Funktional I} \\ 10 & \text{für Funktional II} \end{cases}$

Anzahl der Knotenverschiebungsgrößen: 34

Anzahl der Freiwerte in $\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix}$: $\begin{cases} 35=2N+2M-1 & \text{für Funktional I} \\ & \text{(hiervon 17 Werte in } \underline{\alpha} \\ & \text{und 18 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \\ 36=2N+2M-4 & \text{für Funktional II} \\ & \text{(hiervon 18 Werte in } \underline{\alpha} \\ & \text{und 18 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \end{cases}$

Integration: zwischen den Knoten 1 - 2 - 3 16 - 17
oder bei Ausnutzung von Symmetrie- und Antimetrieigenschaften (z.B.) nur zwischen 1 - 2 8 - 9

Bild 17.10 : Charakteristische Daten für ein Element mit spitzer Kerbe unter Annahme von bereichsweise quadratischen Randverschiebungen



Annahme linearer Randverschiebungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten, d.h. zwischen 1 - 2 , 2 - 3 , usw.

Anzahl der Knoten: 7

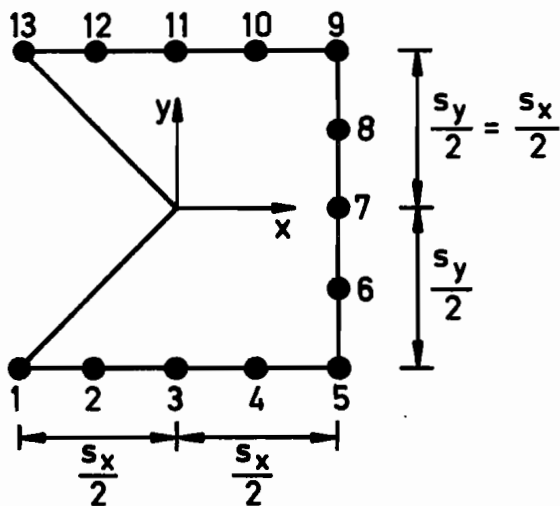
obere Summationsgrenzen in $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$: $N=M = \begin{cases} 4 \text{ für Funktional I} \\ 5 \text{ für Funktional II} \end{cases}$

Anzahl der Knotenverschiebungsgrößen: 14

Anzahl der Freiwerte in $\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix}$: $\begin{cases} 15=2N+2M-1 \text{ für Funktional I} \\ \text{(hiervon 7 Werte in } \underline{\alpha} \text{ und 8 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \\ 16=2N+2M-4 \text{ für Funktional II} \\ \text{(hiervon 8 Werte in } \underline{\alpha} \text{ und 8 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \end{cases}$

Integration: zwischen den Knoten 1 - 2 - 3 6 - 7
oder bei Ausnutzung von Symmetrie- und Antimetrieigenschaften (z.B.) nur zwischen 1 - 2 - 3 - 4

Bild 17.11 : Charakteristische Daten für ein Element mit einspringender 90°-Ecke unter Annahme von bereichsweise linearen Randverschiebungen



Annahme quadratischer Randverschiebungen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knoten,
 d.h. zwischen 1 - 2 - 3 ,
 3 - 4 - 5 ,
 usw.

Anzahl der Knoten: 13

obere Summationsgrenzen in $\Phi(\zeta)$ und $\Psi(\zeta)$: $N=M=$ $\begin{cases} 7 \text{ für Funktional I} \\ 8 \text{ für Funktional II} \end{cases}$

Anzahl der Knotenverschiebungsgrößen: 26

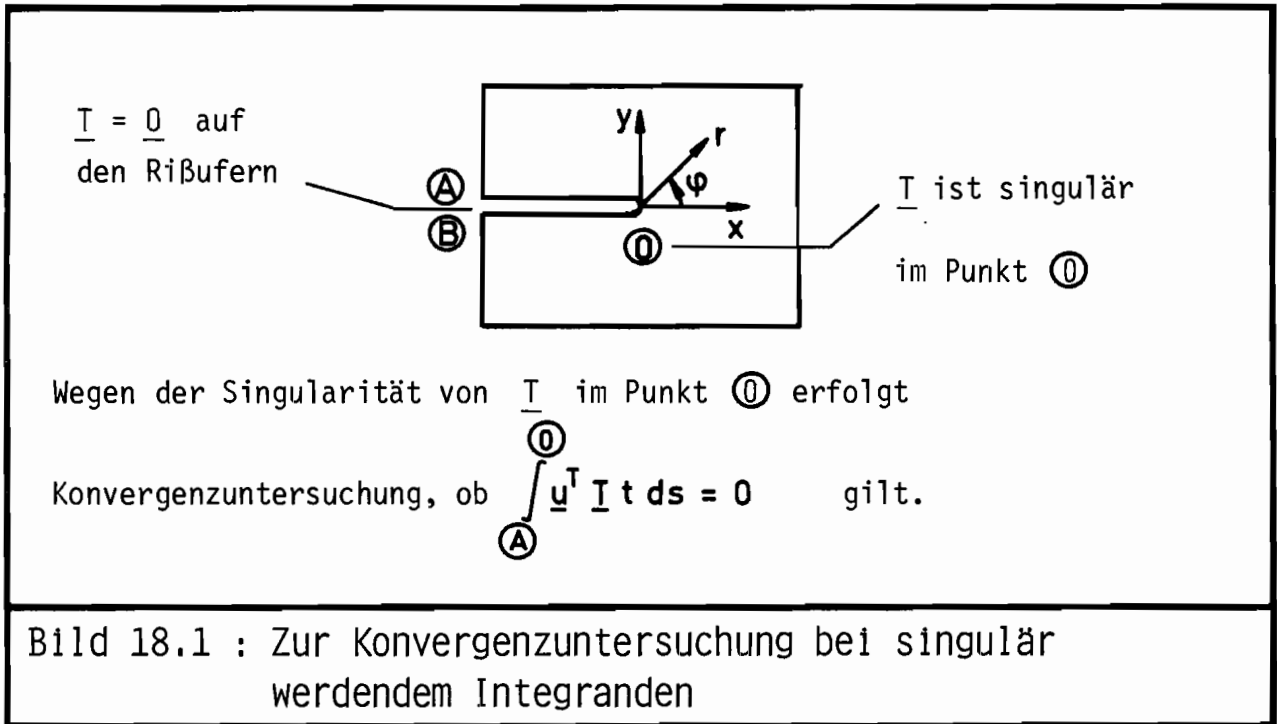
Anzahl der Freiwerte in $\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix}$: $\begin{cases} 27=2N+2M-1 \text{ für Funktional I} \\ \text{(hiervon 13 Werte in } \underline{\alpha} \\ \text{und 14 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \\ 28=2N+2M-4 \text{ für Funktional II} \\ \text{(hiervon 14 Werte in } \underline{\alpha} \\ \text{und 14 Werte in } \underline{\beta} \text{)} \end{cases}$

Integration: zwischen den Knoten 1 - 2 - 3 12 - 13
 oder bei Ausnutzung von Symmetrie- und Antimetrieigenschaften (z.B.) nur zwischen 1 - 2 6 - 7

Bild 17.12 : Charakteristische Daten für ein Element mit einspringender 90°-Ecke unter Annahme von bereichsweise quadratischen Randverschiebungen

18 Konvergenz der Integrale bei Funktionen, die in einem Randpunkt singuläre Spannungsgrößen hervorrufen

In den verwendeten Funktionalen sind Integrale der Form $\int \underline{u}^T \underline{T} t ds$ zu finden. Werden nun Funktionsanteile aus \underline{T} , worin ja die Spannungsgrößen σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} mit Richtungskosinus versehen, enthalten sind, für einen Punkt auf dem Integrationsweg singulär, so ist die Konvergenz der uneigentlichen Integrale zu zeigen. In den behandelten Beispielen mit singulärem Verhalten in einem Randpunkt, wie etwa den Elementen mit Außenriß, waren die Funktionen so konstruiert, daß die Randbedingungen auf dem den kritischen Punkt enthaltenden Teil der Randkurve erfüllt waren. Hierdurch wurde geschlossen, daß auf dem entsprechenden Randstück nicht integriert werden zu braucht (s. Bild 18.1), was aber wegen der möglichen Singularität des Integranden einer näheren Betrachtung bedarf.



Um zu entscheiden, wann nun die vorkommenden uneigentlichen Integrale existieren, ist es günstig, die Integranden als Funktionen des Radius r aufzufassen und die auftretenden Terme mit kritischen Exponenten zu betrachten. Wenn der kritische Punkt wie in Bild 18.1 bei $r=0$ liegt, sind beispielsweise Integrale der Form

$$\int_{\textcircled{A}}^0 F(r, \varphi = \pi) dr = M \int_{\textcircled{A}}^0 \frac{1}{r^p} dr \tag{18.1}$$

endlich endlich für $p < 1$

zu betrachten, welche als uneigentliche Integrale existieren, sofern

$$p < 1 \quad (18.2)$$

gilt. Der größte Wert p , der bei den Integralen für ein Element mit Außenriß auftritt ist $p = 0.5$.

Eigentlich müssen die Betrachtungen bezüglich singular werdender Integranden schon früher einsetzen, da in der Herleitung der modifizierten Funktionale die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underbrace{(\underline{u}^T \underline{D}^T)}_{\underline{\epsilon}^T} \underline{E} \underbrace{(\underline{D} \underline{u})}_{\underline{\sigma}} t \, d\Omega &= \\ &= - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{u}^T \underbrace{[\underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u}]}_{\underline{\sigma}} t \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \underline{u}^T \underbrace{\underline{n} \underline{E} \underline{D} \underline{u}}_{\underline{I}} t \, ds \end{aligned} \quad (18.3)$$

verwendet wurde, die sich auch mit

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (\underline{u}^T \underline{D}^T) \underline{E} (\underline{D} \underline{u}) t \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underbrace{(\underline{u}^T \underline{D}^T) \underline{E}}_{\underline{\sigma}^T} \underline{E}^{-1} \underbrace{\underline{E} (\underline{D} \underline{u})}_{\underline{\sigma}} t \, d\Omega \quad (18.4)$$

durch

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\sigma}^T \underline{E}^{-1} \underline{\sigma} t \, d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{u}^T [\underline{D}^T \underline{\sigma}] t \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \underline{u}^T \underline{I} t \, ds \quad (18.5)$$

ausdrücken läßt. Es ist also zu zeigen, daß das Integral auf der linken Seite von (18.5) trotz singular werdender Spannungen in $\underline{\sigma}$ einen endlichen Wert bei Verwendung der jeweils konstruierten Funktionen besitzt. Hieraus kann dann die Endlichkeit der Ausdrücke auf der rechten Seite von (18.5) gefolgert werden.

Aus der Aussage, daß Doppelintegrale der Form

$$\iint \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}^p} = \iint \frac{r \, d\varphi \, dr}{r^p} = \iint \frac{1}{r^{p-1}} \, dr \, d\varphi \quad (18.6)$$

bzw.

$$\iint \frac{dx \, dy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}^p} = \iint \frac{dx' \, dy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}^p} = \iint \frac{1}{r'^{p-1}} \, dr' \, d\varphi \quad (18.7)$$

konvergent sind, wenn die Bedingung $p < 2$ erfüllt ist, läßt sich ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz von uneigentlichen Gebietsintegralen angeben [8] : Ist $F(x,y)$ in einem betrachteten Bereich stetig, abgesehen von einem Punkt $P_0(x_0, y_0)$ auf dem Rand des Gebietes, in dem $F(x,y)$ unendlich wird, und gibt es eine feste Schranke M sowie eine positive Zahl $p < 2$, so daß im ganzen Gebiet

$$|F(x,y)| \leq \frac{M}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}^p} \quad (18.8)$$

gilt, so konvergiert das Integral $\iint F(x,y) \, dx \, dy$. Diese Aussage ergibt sich im Zusammenhang mit der Ungleichung

$$|\iint F(x,y) \, dx \, dy| \leq \iint |F(x,y)| \, dx \, dy \leq M \iint \frac{dx \, dy}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}^p} \quad (18.9)$$

Für die Elemente mit Außenriß, bei denen sich der Koordinatenursprung des x - y -Systems an der Rißspitze befindet, sind die singulären Spannungsgrößen von der Form

$$r^{-\frac{1}{2}} h_i(\varphi) \quad (\text{mit beschränktem } h_i),$$

so daß sich bei Bildung der einzelnen Terme zur Berechnung des Ausdruckes auf der linken Seite von (18.5) im ungünstigsten Fall ein Integral der Form

$$\iint \frac{1}{r} H_i(\varphi) \, dx \, dy = \iint H_i(\varphi) \, d\varphi \, dr$$

ergeben kann, wobei $H_i(\varphi)$ beschränkt ist. Hier ergibt sich also für p als größtmöglichen Wert $p = 1$. Somit konvergieren infolge $p \leq 1$ alle vorkommenden Integrale.

Bei den Eckelementen ist der ungünstigste Wert p für jeden Winkel α auf jeden Fall ≤ 1 .

Im Falle eines Elementes mit Innenriß ist für zwei kritische Punkte nämlich den Rißspitzenpunkten

$$P_1(x_1 = a, y_1 = 0) \quad \text{und} \quad P_2(x_2 = -a, y_2 = 0)$$

bzw.

$$P'_1(\xi = 1, \eta = 0), \quad P'_2(\xi = -1, \eta = 0)$$

oder

$$P'_1(R = 1, \theta = 0) \quad \text{und} \quad P'_2(R = 1, \theta = \pi)$$

die Konvergenz der Integrale zu zeigen. Das oben angeführte Kriterium kann auch hier benutzt werden, um die Konvergenz nachzuweisen, welche sich hier einstellt, da die auftretende Spannungssingularität laut Kapitel 16.1 sowie 16.1.1 und 16.1.2 über Spannungsintensitätsfaktoren von der Ordnung

$$\frac{1}{\sqrt{r'}} \left(= \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} \right)$$

ist, wobei r' den Radius um einen kritischen Punkt $P_i(x_i, y_i)$ bedeutet. Einfacher ist es in diesem Fall allerdings, die auftretenden Integrale statt in einem x - y -System in dem R - θ -System zu betrachten. Die Koordinatenbeziehungen können aus der Abbildungszuordnung (16.1) abgelesen werden und lauten

$$x = \frac{a}{2} (R + R^{-1}) \cos \theta \tag{18.10}$$

und

$$y = \frac{a}{2} (R - R^{-1}) \sin \theta \tag{18.11}$$

Die Ansatzfunktionen liegen in den Polarkoordinaten R, θ vor, so daß man

also die Integrale im x-y-System in folgender Weise ersetzen kann:

$$\begin{aligned}
 \iint_B F_i(R(x,y), \theta(x,y)) dx dy &= \\
 &= \iint_{B'} F_i(R, \theta) \left[\frac{\partial x}{\partial R} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial R} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right] dR d\theta \\
 &= \iint_{B'} F_i(R, \theta) \frac{a^2}{4} [R^2 - 2 \cos 2\theta + R^{-2}] dR d\theta
 \end{aligned} \tag{18.12}$$

Nun ist noch die Art der jeweils zu untersuchenden Integranden $F_i(R, \theta)$, die in (18.5) als einzelne Summationsterme bei Bildung von $\underline{c}^T \underline{E}^{-1} \underline{c}$ auftreten, zu betrachten. Die Spannungssingularität in den beiden Rißspitzenpunkten wird durch die Nullstellen von \dot{f} nach Gleichung (16.2) in diesen kritischen Punkten hervorgerufen, da die Spannungen als Real- bzw. Imaginärteile aus Ausdrücken der Form $G_i(R, \theta) / \dot{f}(R, \theta)$ hervorgehen, wobei $G_i(R, \theta)$ beschränkt ist. Durch geeignete Umformung von $1/\dot{f}$ erhält man mit $\zeta = R e^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\dot{f}(\zeta)} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\zeta^2}} = \frac{\zeta}{\zeta - \frac{1}{\zeta}} \\
 &= \frac{R e^{i\theta} [R e^{-i\theta} - R^{-1} e^{i\theta}]}{[R e^{i\theta} - R^{-1} e^{-i\theta}] [R e^{-i\theta} - R^{-1} e^{i\theta}]} \\
 &= \frac{R e^{i\theta} [(R - R^{-1}) \cos \theta - i(R + R^{-1}) \sin \theta]}{R^2 - 2 \cos 2\theta + R^{-2}} \\
 &= \frac{R e^{i\theta} \sqrt{R^2 - 2 \cos 2\theta + R^{-2}} e^{i \arctan \frac{-(R + R^{-1}) \sin \theta}{(R - R^{-1}) \cos \theta}}}{R^2 - 2 \cos 2\theta + R^{-2}}
 \end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{1}{f(R, \theta)} = \frac{R e^{i\theta} e^{i \arctan \frac{-(R+R^{-1})}{(R-R^{-1})} \tan \theta}}{\sqrt{R^2 - 2 \cos 2\theta + R^{-2}}} \quad (18.14)$$

Der Zähler von (18.14) bleibt für endliche Werte von R beschränkt. Die Spannungsgrößen lassen sich als Real- bzw. Imaginärteile von Funktionen der Form

$$\frac{G_i(R, \theta)}{f(R, \theta)} = \frac{H_i(R, \theta)}{\sqrt{R^2 - 2 \cos 2\theta + R^{-2}}} \quad (18.15)$$

ausdrücken, wobei $H_i(R, \theta)$ beschränkt bleibt. Bei Bildung von $\underline{c}^T \underline{E}^{-1} \underline{c}$ können die Spannungsfunktionen schlimmstenfalls einen Integranden

$$F_i(R(x, y), \theta(x, y))$$

in (18.12) bewirken, der als Nenner

$$(R^2 - 2 \cos 2\theta + R^{-2})$$

aufweist. Infolge der Multiplikation von $F_i(R, \theta)$ mit genau diesem Ausdruck

$$(R^2 - 2 \cos 2\theta + R^{-2})$$

bei Integration über $dR d\theta$ bleibt der neue Integrand

$$\frac{F_i(R, \theta) a^2 (R^2 - 2 \cos 2\theta + R^{-2})}{4}$$

beschränkt, und alle auftretenden Integrale konvergieren.

19 Testhilfen zur Überprüfung von Ansatzfunktionen für $u, v, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ und von Elementmatrizen

Um mögliche Fehler wie zum Beispiel Vorzeichenfehler beim Aufstellen der Ansatzfunktionen oder Tippfehler beim Programmieren der Funktionen finden zu können, ist es sehr hilfreich, mittels spezieller Testprogramme die Richtigkeit der Funktionen überprüfen zu können. Stichwortartig seien hier einige Tests beschrieben.

1. Da die Funktionen nach Konstruktion gewisse Randbedingungen erfüllen müssen, können für eine Reihe von Punkten auf der betreffenden Randkurve die Funktionswerte berechnet und mit den geforderten verglichen werden.
2. Ausgehend von den konstruierten Verschiebungsfunktionen u und v können die Spannungsgrößen $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ durch Bildung von Ableitungen gemäß (3.9) und (3.10) ermittelt werden. Im Programm erfolgt die Berechnung der einzelnen Ableitungen punktweise mit Hilfe von Differenzenquotienten bei doppelter Genauigkeit. Die so aus u und v berechneten Spannungswerte können punktweise mit denen der direkt programmierten Spannungsfunktionen $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ verglichen werden.
3. Ausgehend von den konstruierten Spannungsfunktionen $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ kann per Programm die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen gemäß Gleichung (3.12) punktweise überprüft werden. Die auftretenden Ableitungen werden wiederum durch Differenzenquotienten ersetzt.
4. Es wird punktweise überprüft, ob Starrkörperanteile in den Funktionen $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ vorhanden sind oder nicht.
5. Zur Überprüfung der Elementmatrizen werden für verschiedene Elementdimensionen und unterschiedliche Werte v die Eigenwerte und Eigenvektoren der jeweiligen Elementmatrix ermittelt. Jeweils 3 Eigenwerte müssen sich zu Null ergeben, und die zugehörigen Eigenformen müssen die Starrkörperverschiebungsfiguren repräsentieren können.

20 Hinweise zur numerischen Berechnung der Integralmatrizen sowie Einsparung von Rechenoperationen bei Ausnutzung von Symmetrie- und Antimetrieigenschaften

Die zu berechnenden Integralmatrizen, in denen ja nur Randintegralausdrücke auftreten, werden auf numerischem Wege mit Hilfe einer Gauß'schen Quadraturformel von zu wählender Ordnung ermittelt, wobei die benötigten Ordinaten und Wichtungskoeffizienten den in vielen Finite-Element-Büchern aufgeführten Tabellen (z.B. [37] Seite 151, [3] Seite 159) zu entnehmen sind. Da die Tabellen für ein Integrationsintervall von -1 bis +1 gelten, sind andere Integrationsgrenzen wie üblich durch eine lineare Koordinatentransformation zu berücksichtigen.

Der Bereich einer Elementrandkurve zwischen zwei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten, in dem lineare Randverschiebungen angenommen werden, und der Bereich mit drei aufeinanderfolgenden Knoten, in dem quadratische Randverschiebungen angesetzt werden, stellen das jeweils größtmögliche sinnvoll zu behandelnde Teilintegrationsintervall dar, in dem Quadraturformeln mit beispielsweise 7 oder mehr Punkten verwendet werden.

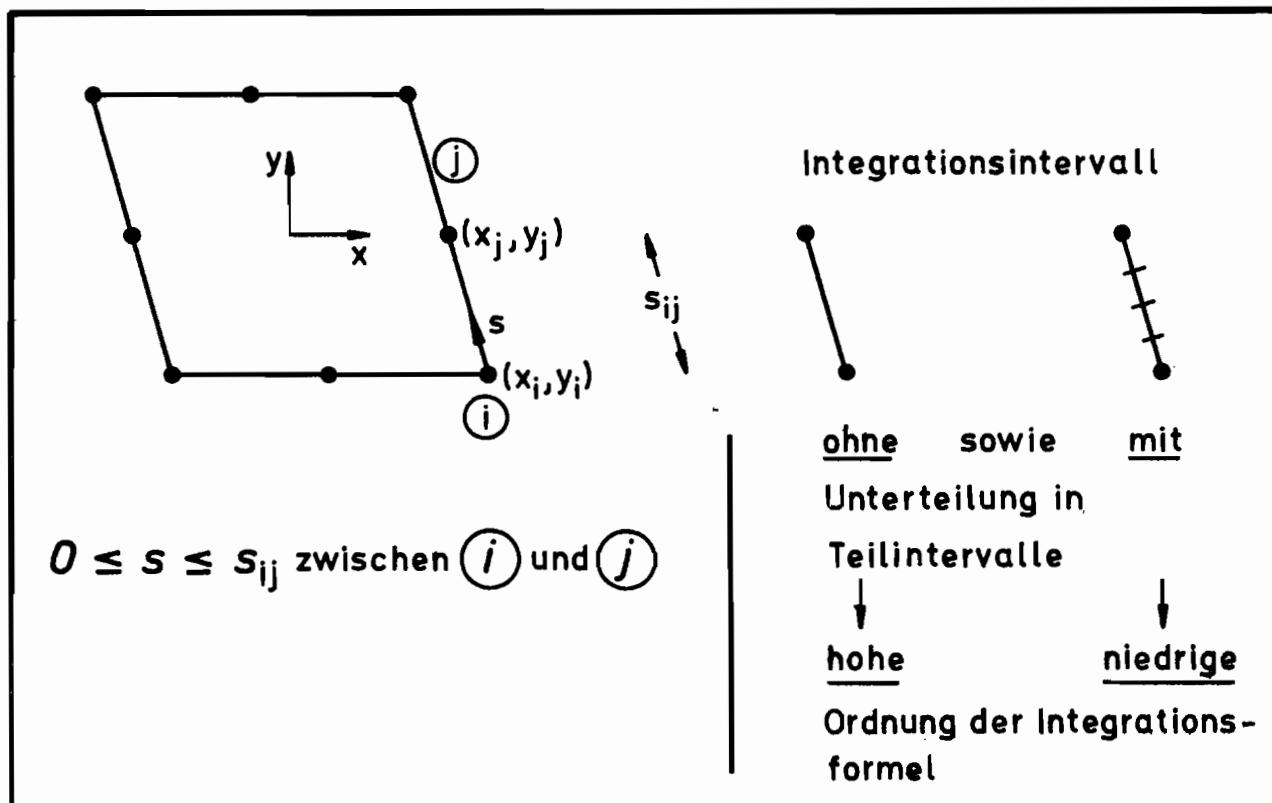


Bild 20.1 : Zur Integration zwischen den Knoten i und j

Um Quadraturformeln mit wenigen Punkten zur Anwendung bringen zu können, wird ein betrachtetes Integrationsintervall in Teilintervalle unterteilt (s. Bild 20.1), in denen dann jeweils eine Quadraturformel niedriger Ordnung Verwendung findet. Die Genauigkeit der Integrationen ist dann von der Anzahl der für praktische Fälle äquidistant gewählten Teilintervalle abhängig. Für die Beispielelemente wurde zumeist für ein betrachtetes Intervall eine Einteilung in 10 Teilintervalle vorgenommen, für die jeweils eine 3-Punkte-Quadraturformel zur Anwendung kam.

Die Grundgrößen, welche innerhalb der numerischen Integration der von s abhängigen Funktionen zwischen einem Knoten \textcircled{i} und einem Knoten \textcircled{j} längs einer Geraden gemäß Bild 20.1 stets benötigt werden, seien noch explizit angeben:

$$s_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (20.1)$$

$$n_x = \frac{y_j - y_i}{s_{ij}} \quad (20.2)$$

$$n_y = -\frac{x_j - x_i}{s_{ij}} \quad (20.3)$$

$$x = \left(1 - \frac{s}{s_{ij}}\right) x_i + \frac{s}{s_{ij}} x_j \quad (20.4)$$

$$y = \left(1 - \frac{s}{s_{ij}}\right) y_i + \frac{s}{s_{ij}} y_j \quad (20.5)$$

Für jede zu s gehörige Gaußordinate sind mit Hilfe von (20.4) und (20.5) die zugehörigen x - y -Koordinatenwerte zu ermitteln, welche unter Verwendung der jeweils für ein Element gewählten konformen Abbildung zu den diskreten ξ - η -Koordinatenwerten in der Bildebene führen. Mit diesen zuletzt erhaltenen Koordinatenpaaren werden dann die zu dem betrachteten Gaußpunkt gehörenden diskreten Verschiebungs- und Spannungsterme der speziellen Elementansätze berechnet.

Betrachtet man nun Elementfiguren, bei denen mindestens eine Koordinatenachse als Symmetrieachse anzusehen ist, so lassen sich infolge der Symmetrie- und

Antimetrieigenschaften der Ansätze Einsparungen bezüglich des erforderlichen Integrationsumfanges und weiterer Rechenoperationen sowie der benötigten Speicherplätze machen. Für die folgenden Ausführungen sei angenommen, daß die Elementfigur symmetrisch zur x-Achse liegt (siehe beispielsweise Bild 15.1).

Am geeignetsten kann die Ausnutzung der Symmetrie- und Antimetrieigenschaften bei einer Anordnung der Ansatzterme erfolgen, bei der die zu den Realteilfreiwerten α_j sowie α_j^* gehörenden Terme fortlaufend hintereinander in Vektoren für die Verschiebungs- und Spannungsgrößen angereiht werden und dahinter anschließend jeweils die zu den Imaginärteilfreiwerten β_j und β_j^* zugeordneten Terme. Mit dieser Anordnung der Ansatzterme nimmt der Vektor der Freiwerte \underline{c} in (7.3) und (7.4) nach Zusammenfassung der aus den komplexen Koeffizienten $(\alpha_j + i\beta_j)$ bzw. $(\alpha_j^* + i\beta_j^*)$ herrührenden Freiwerte α_j, α_j^* zu einem Spaltenvektor $\underline{\alpha}$ und der entsprechenden Zusammenlegung von β_j, β_j^* zu einem Vektor $\underline{\beta}$ konkret folgende Darstellung an:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix} \quad (20.6)$$

Für die weiteren Ausführungen sei die Anzahl der Freiwerte in $\underline{\alpha}$ mit N_α bezeichnet und entsprechend die Freiwerteanzahl in $\underline{\beta}$ mit N_β . Wenn nun ein Element die erwähnte Symmetrie aufweist und zu den Ansätzen ein Freiwertevektor der Form (20.6) gehört, so lassen sich in den zu berechnenden Matrizen regelmäßige Muster im Aufbau erkennen. Beispielsweise läßt sich die Matrix \underline{H} nach (8.41), worin Starrkörperanteile berücksichtigt werden, bzw. nach (8.92), worin keine Starrkörperanteile eingehen, durch zwei Hauptdiagonalmatrizen und zwei Nullmatrizen längs der Nebendiagonale darstellen gemäß

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(mit der } N_\alpha \times N_\alpha \text{-Matrix } \underline{H}_{11} \\ \text{und der } N_\beta \times N_\beta \text{-Matrix } \underline{H}_{22}) \end{array} \quad (20.7)$$

Entsprechendes gilt für die Matrix \underline{Q} , definiert durch Beziehung (8.61):

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} \underline{Q}_{11} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{Q}_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(mit der } N_\alpha \times N_\alpha \text{-Matrix } \underline{Q}_{11} \\ \text{und der } N_\beta \times N_\beta \text{-Matrix } \underline{Q}_{22}) \end{array} \quad (20.8)$$

Da man die Ergebnisse der Nebendiagonalmatrizen in (20.7) und (20.8) schon als Nullmatrizen kennt, brauchen die entsprechenden Integrationen nicht explizit durchgeführt zu werden. Weiterhin werden zur Berechnung der verbleibenden Untermatrizen \underline{H}_{11} , \underline{H}_{22} , \underline{Q}_{11} , \underline{Q}_{22} nur Integrationen oberhalb oder unterhalb der x-Achse erforderlich. Für die erstellten symmetrischen Beispiелеlemente wurde jeweils über den Teil des Elementrandes integriert, für den

$$y \leq 0$$

gilt. Nach Ausführung der Integrationen längs einer Elementrandhälfte ergeben sich die endgültigen Integralmatrizen einfach durch Multiplikation der soeben erhaltenen mit dem Faktor "2".

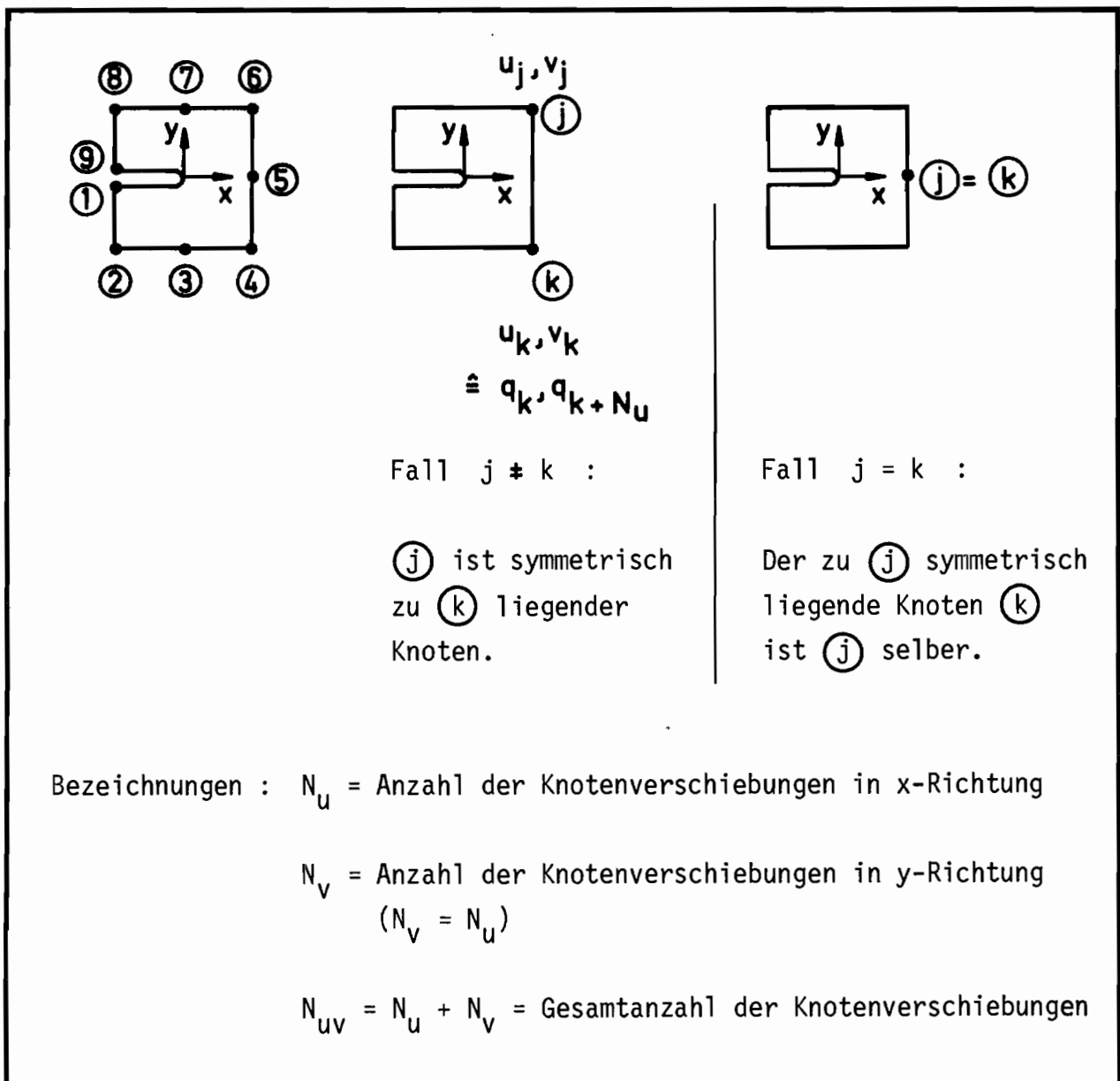


Bild 20.2 : Zur Berechnung der Matrix \underline{L} bei Ausnutzung der Symmetrie einer Elementfigur

Ebenso wird für die in den einzelnen Verfahren mit (8.62) bzw. (8.93) definierten Matrix \underline{L} nur eine Integration über die Hälfte des zu durchlaufenen Elementrandes erforderlich. Nach deren Durchführung sind zunächst nur die Spalten der $(N_\alpha + N_\beta) \times N_{uv}$ -Matrix \underline{L} mit Zahlenwerten belegt, die zu Knotenverschiebungen auf dem durchlaufenen Teil des Elementrandes gehören. Mit N_{uv} wird hier die Anzahl der Knotenverschiebungsgrößen des Elementes bezeichnet. Wie sich die endgültige Matrix \underline{L} aus den durch Integration längs des Randes der unteren Elementhälfte gewonnenen Koeffizienten nun aufbauen läßt, sei nach der nützlichen Aufspaltung von \underline{L} in zwei Untermatrizen gemäß

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \underline{L}_1 \\ \underline{L}_2 \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{mit der } N_\alpha \times N_{uv} \text{-Matrix } \underline{L}_1 \\ \text{und der } N_\beta \times N_{uv} \text{-Matrix } \underline{L}_2 \end{array} \right) \quad (20.9)$$

durch Programmzuweisungen beschrieben.

Voraussetzungen für die folgenden Angaben sind

- a) die Integration über den Teil des Elementrandes, für den $y \leq 0$ gilt, ist durchgeführt.
- b) der Elementknotenverschiebungsvektor \underline{q} , welcher multiplikativ mit \underline{L} durch $\underline{L} \underline{q}$ zu verknüpfen ist, hat folgende Form (s. Bild 20.2) :

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_j \\ \vdots \\ q_{N_u} \\ \hline q_{N_u+1} \\ \vdots \\ q_{N_u+j} \\ \vdots \\ q_{N_u+N_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_{N_u} \\ \hline v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_{N_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \hline \underline{v} \end{bmatrix} \quad (20.10)$$

Bei Berücksichtigung der Bezeichnungen in Bild 20.2 ergeben sich für ein Rechenprogramm zur Ermittlung der Spalten j und $(j + N_u)$ aus den Spalten k und $(k + N_u)$ folgende Zuweisungen:

a) für den Fall $j \neq k$:

$$\left. \begin{aligned} L_1(i, j) &= L_1(i, k) \\ L_1(i, j + N_u) &= -L_1(i, k + N_u) \end{aligned} \right\} \text{ mit } 1 \leq i \leq N_\alpha \quad (20.11)$$

(20.12)

$$\left. \begin{aligned} L_2(i, j) &= -L_2(i, k) \\ L_2(i, j + N_u) &= L_2(i, k + N_u) \end{aligned} \right\} \text{ mit } 1 \leq i \leq N_\beta \quad (20.13)$$

(20.14)

b) für den Fall $j = k$ (Knoten auf Symmetrieachse):

$$\left. \begin{aligned} L_1(i, j) &= 2 L_1(i, k) \\ L_1(i, j + N_u) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ mit } 1 \leq i \leq N_\alpha \quad (20.15)$$

(20.16)

$$\left. \begin{aligned} L_2(i, j) &= 0 \\ L_2(i, j + N_u) &= 2 L_2(i, k + N_u) \end{aligned} \right\} \text{ mit } 1 \leq i \leq N_\beta \quad (20.17)$$

(20.18)

k durchläuft hier die Knotennummern der unteren Elementhälfte und j diejenigen der oberen Hälfte.

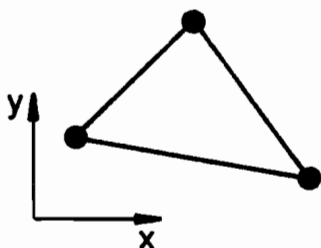
Stellt außer der x -Achse auch noch die y -Achse eine Symmetrielinie der Elementfigur dar wie etwa bei einem Rechteckelement mit Kreisloch gemäß Bild 13.1, so lassen sich zweimal hintereinander reduzierte Rechenschemen zur Ermittlung der einzelnen Matrizen anwenden. Mit Hilfe der beiden sich ähnelnden Rechenschemen wird in einem Fall von Doppelsymmetrie erreicht, daß nur Integrationen längs eines Viertels des Elementrandes ∂A_3^i numerisch durchzuführen sind.

21 Kurze Darstellung einiger koppelbarer Standardelemente

Für die erstellten speziellen Elemente wurden auf dem Rand entweder bereichsweise lineare oder bereichsweise quadratische Randverschiebungen angenommen. Einige mit den speziellen Elementen koppelbare Standardelemente seien in der folgenden Übersicht aufgeführt und kurz durch ein Knotenbild sowie durch Angabe der Ansatzterme in einem Polynomschema charakterisiert. Alle Elemente haben an ihren Knoten die Verschiebungswerte u und v als Knotengrößen.

Übersicht über einige Standardscheibenelemente mit linearen bzw. quadratischen Randverschiebungen

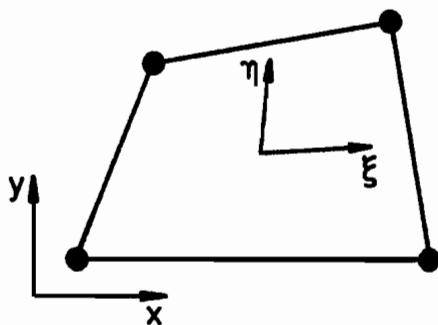
1. Dreieckiges Element mit linearen Verschiebungsansätzen
(nicht unbedingt günstig für eine Kopplung mit speziellen Elementen, da nur konstante Spannungen im Dreiecksbereich eingehen)



Polynomschema:

1	x
y	

2. Viereckiges Element mit bilinearen Verschiebungsansätzen

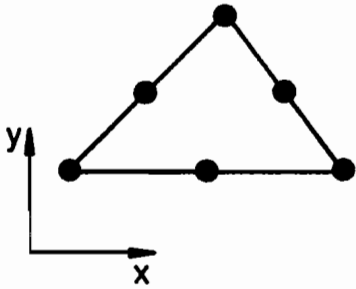


Polynomschema:

1	ξ
η	$\eta\xi$

Übersicht über einige Standardscheibenelemente mit linearen bzw. quadratischen Randverschiebungen (Fortsetzung)

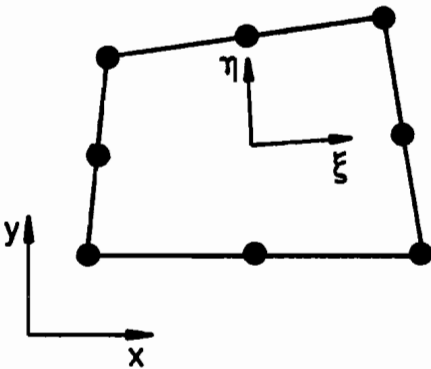
3. Dreieckiges Element mit quadratischen Verschiebungsansätzen



Polynomschema:

1	x	x^2
y	yx	
y^2		

4. Viereckiges Element mit quadratischen Verschiebungsansätzen



Polynomschema:

1	ξ	ξ^2
η	$\eta \xi$	$\eta \xi^2$
η^2	$\eta^2 \xi$	

22 Beispiele

Für die Demonstrationsbeispiele wurden im Hinblick auf die Fehlerbeurteilung Probleme herangezogen, zu denen exakte Lösungen vorliegen. Sämtliche Rechnungen wurden auf einem MODCOMP-IV-Rechner mit einer Zahlendarstellung von 32 Bits durchgeführt. (Zum Vergleich sei erwähnt, daß beispielsweise der Telefunken-Rechner TR 440 eine Zahlendarstellung von 48 Bits aufweist und der Control-Data-Rechner CD CYBER 175 gar eine von 60 Bits.) In den für die hier aufgeführten Beispiele verwendeten FORTRAN-IV-Programmen wurden ausschließlich einfach genaue Größen benutzt.

Die zum Einsatz gekommenen Standardverschiebungselemente sind in Kapitel 21 charakterisiert, während die Kurzbeschreibung eines jeden speziellen Elementes sich am Ende des jeweils betreffenden Kapitels findet. In den Kurzbeschreibungen der speziellen Elemente wird nach dem verwendeten Funktional unterschieden, und zwar ob die Elementbeziehungen aus dem erweiterten oder aus dem nicht erweiterten Funktional hervorgehen. Zu einer erfolgversprechenden Anwendung des nicht erweiterten Funktionals fiel die Entscheidung für die zweite der in Kap. 8.1 dargestellten Möglichkeiten, Verknüpfungsmatrizen zwischen freien Parametern und Knotenwerten zu ermitteln, nämlich auf die Fehlerquadratmethode in Verbindung mit Randverschiebungsansätzen.

In den Beispielrechnungen werden nun die Ergebnisse, die mit speziellen Elementen nach dem erweiterten Funktional erzielt wurden, denen gegenübergestellt, die sich bei Verwendung des nicht erweiterten Funktionals ergaben. Die zur Erstellung der speziellen Elemente dienenden Funktionale seien wiederum mit I und II bezeichnet und mit folgenden Bedeutungen versehen:

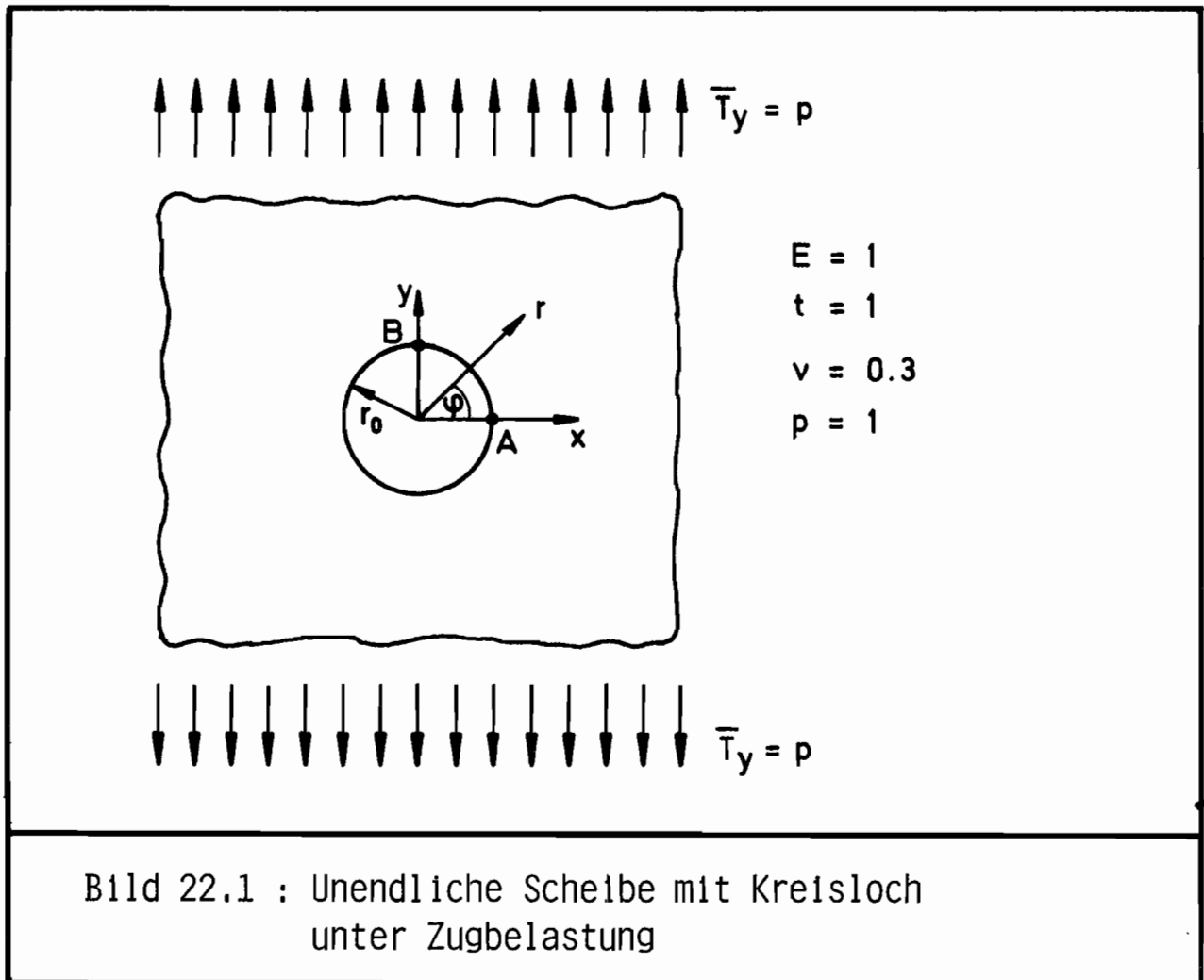
Funktional I : nicht erweitertes Funktional mit Vorabminimierung der Randverschiebungsdifferenzen mittels Fehlerquadratmethode unter Einbeziehung von Randverschiebungsansätzen (s. Kap. 8.1)

Funktional II : erweitertes Funktional unter Einbeziehung von Randverschiebungsansätzen (s. Kap. 8.2)

Es sei noch erwähnt, daß allen Beispielrechnungen ein ebener Spannungszustand zugrunde gelegt wurde.

Beispiel 1 : Unendliche Scheibe mit kreisförmigem Loch unter Zug in einer Richtung

Eine analytische Darstellung der Lösung dieses Problems findet man beispielsweise in [10] auf Seite 142, in [14] auf Seite 303 und in [16] auf Seite 195.



Für eine numerische Rechnung wird die unendliche Scheibe durch eine im Verhältnis zum Lochdurchmesser sehr große Scheibe simuliert. Das Ersatzsystem mit der Finite-Element-Einteilung ist in Bild 22.2 dargestellt.

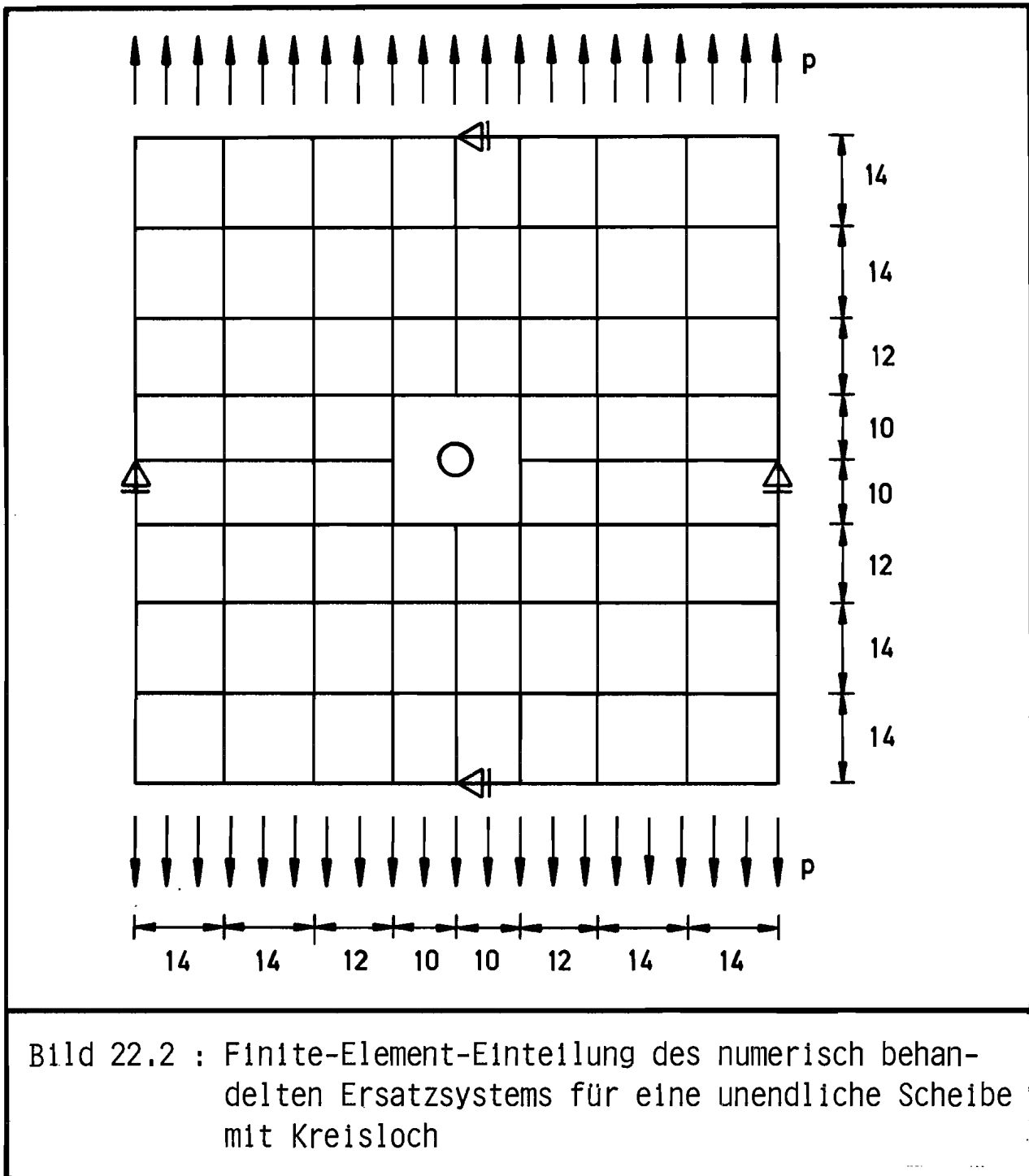


Bild 22.2 : Finite-Element-Einteilung des numerisch behandelten Ersatzsystems für eine unendliche Scheibe mit Kreisloch

Beispiel 1.1 : Ermittlung der Spannungsverläufe σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ unter Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen (Functional I).

Anzahl der Freiheitsgrade : 156

Kreisradius : $r_0 = 2$

In den Bildern 22.3 und 22.4 sind die Spannungsverläufe σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ auf der x- und der y-Achse im Bereich des speziellen Kreislochelementes dargestellt. Geplottet wurden die numerisch erhaltenen sowie die exakten Verläufe. Die Abweichungen der approximativ erhaltenen von den exakten Kurvenverläufen sind bei dem vorliegenden Maßstab kaum sichtbar. Als Spannungsspitzen

ergaben sich für $\sigma_{\varphi\varphi}$ anstelle von 3.0 der Wert 2.96 im Punkt A und anstelle von -1.0 der Wert -0.97 im Punkt B.

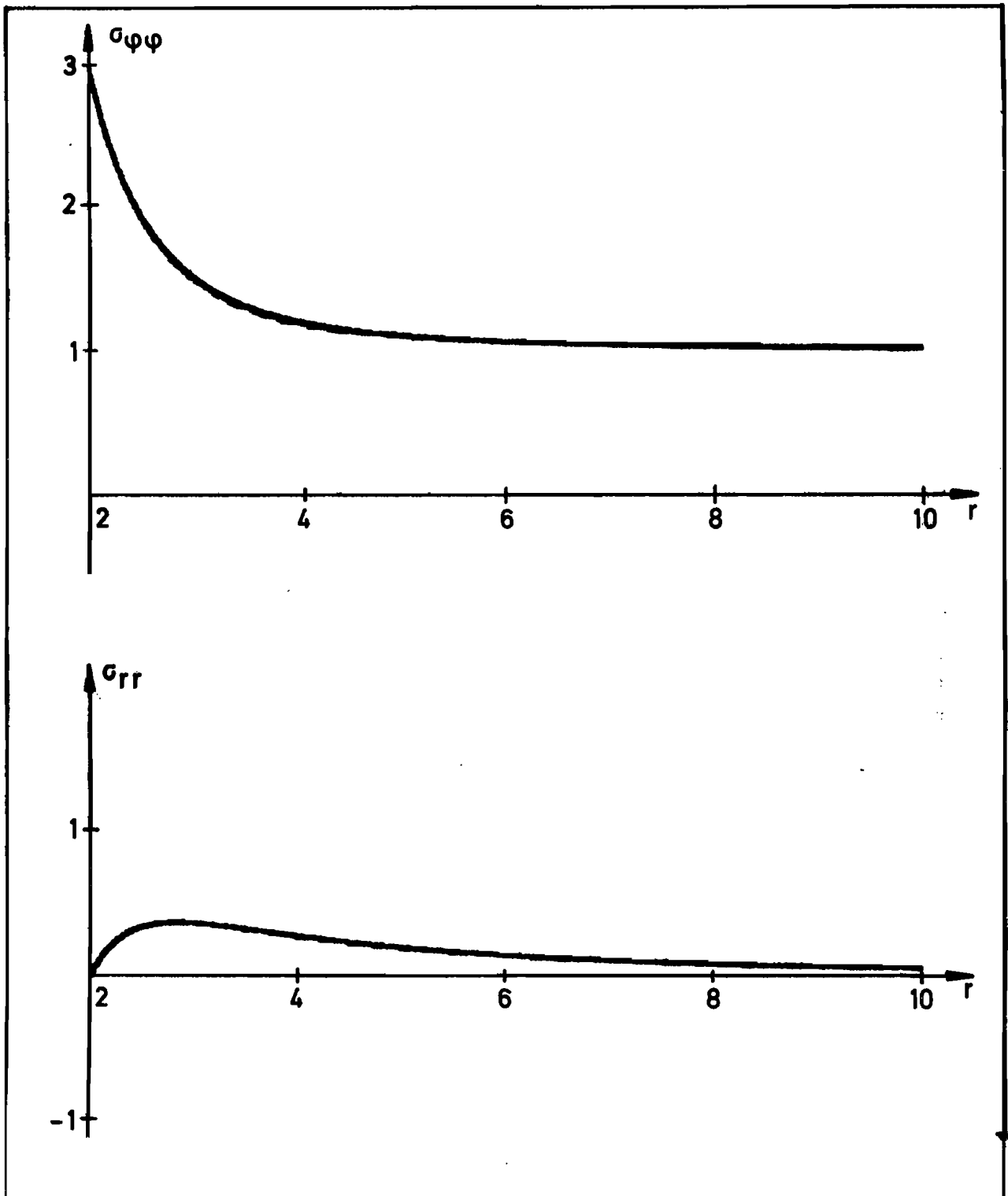


Bild 22.3 : Spannungsverläufe σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ für $\varphi = 0$
im Intervall $2 \leq r \leq 10$
(exakte und numerisch erhaltene Kurve sind jeweils in
dasselbe Achsenkreuz eingetragen)

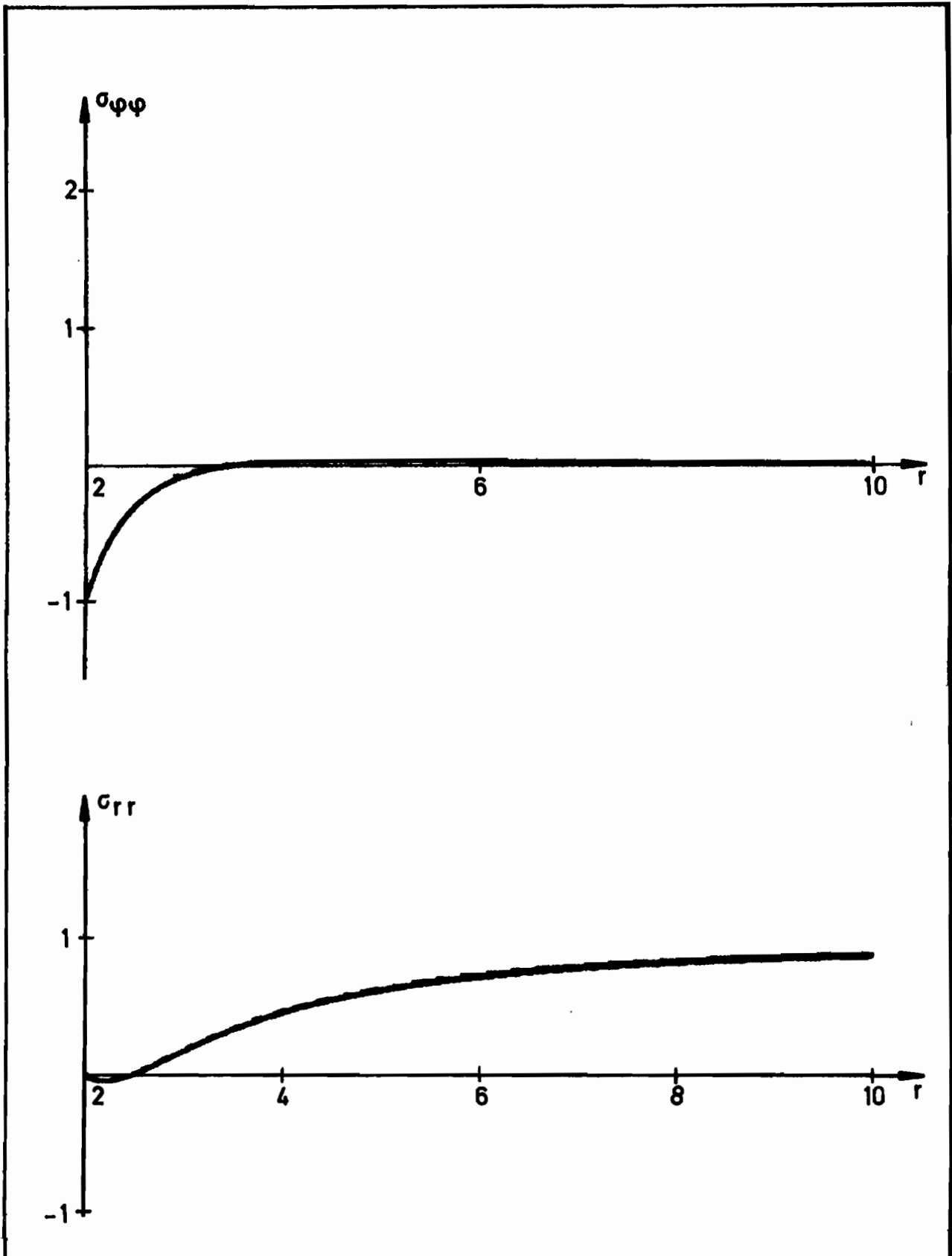


Bild 22.4 : Spannungsverläufe σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$
im Intervall $2 \leq r \leq 10$
(exakte und numerisch erhaltene Kurve sind jeweils in
dasselbe Achsenkreuz eingetragen)

Beispiel 1.2 : Gegenüberstellung der Ergebnisse für Elemente mit linearen Randverschiebungen bei Verwendung von Funktional I und II .
Anzahl der Freiheitsgrade: 156
Lochradius: $r_0 = 2$

$r_0 = 2$	exakt	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi}/\rho$ im Punkt A	3.0	2.961	1.3%	2.993	0.2%
$\sigma_{\varphi\varphi}/\rho$ im Punkt B	-1.0	-0.973	2.7%	-0.995	0.5%

Tabelle 22.1 : Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B (Elementraster gemäß Bild 22.2 mit einem 8-Knoten-Kreislochelement, $r_0 = 2$)

Beispiel 1.3 : Gegenüberstellung der Ergebnisse für Elemente mit quadratischen Randverschiebungen bei Verwendung von Funktional I u. II .
Anzahl der Freiheitsgrade: 436
Lochradius: $r_0 = 2$

$r_0 = 2$	exakt	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi}/\rho$ im Punkt A	3.0	3.008	0.3%	3.009	0.3%
$\sigma_{\varphi\varphi}/\rho$ im Punkt B	-1.0	-1.006	0.6%	-1.007	0.7%

Tabelle 22.2 : Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B (Elementraster gemäß Bild 22.2 mit einem 16-Knoten-Kreislochelement, $r_0 = 2$)

Beispiel 1.4 : Rechnung mit unterschiedlichen Kreisradien r_0 bei Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen.
Anzahl der Freiheitsgrade: 156

$r_0 = 0.5$	exakt	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi} / \rho$ im Punkt A	3.0	2.971	1%	3.000	0%
$\sigma_{\varphi\varphi} / \rho$ im Punkt B	-1.0	-0.985	1.5%	-1.000	0%

Tabelle 22.3 : Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.2 mit einem 8-Knoten-Kreislochelement, $r_0 = 0.5$)

$r_0 = 1.5$	exakt	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi} / \rho$ im Punkt A	3.0	2.965	1.2%	2.996	0.1%
$\sigma_{\varphi\varphi} / \rho$ im Punkt B	-1.0	-0.978	2.2%	-0.997	0.3%

Tabelle 22.4 : Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.2 mit einem 8-Knoten-Kreislochelement, $r_0 = 1.5$)

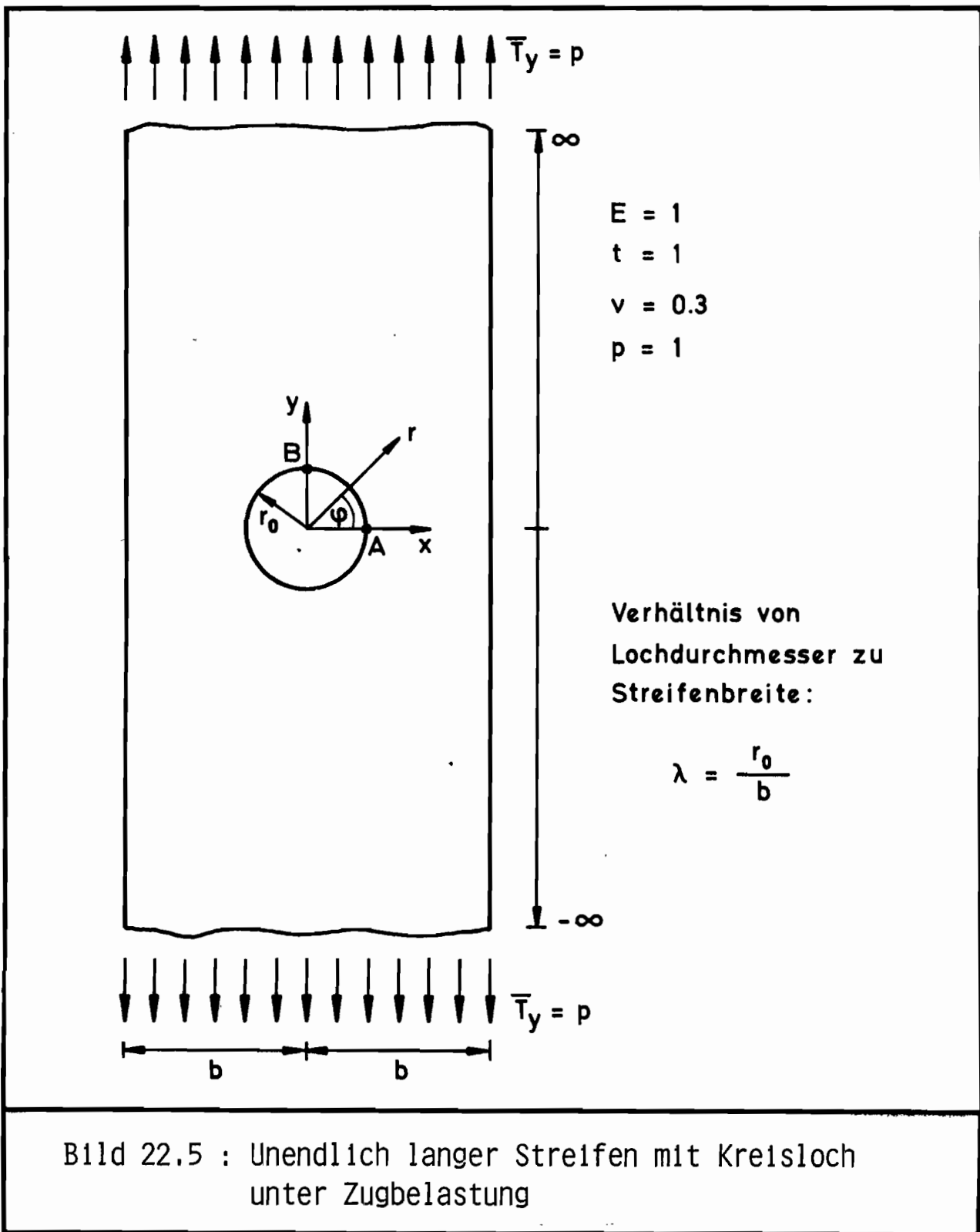
$r_0 = 3$	exakt	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi} / p$ im Punkt A	3.0	2.953	1.6%	2.987	0.4%
$\sigma_{\varphi\varphi} / p$ im Punkt B	-1.0	-0.964	3.6%	-0.993	0.7%

Tabelle 22.5 : Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.2 mit einem 8-Knoten-Kreis-
lochelement, $r_0 = 3$)

$r_0 = 5$	exakt	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi} / p$ im Punkt A	3.0	2.953	1.6%	2.983	0.6%
$\sigma_{\varphi\varphi} / p$ im Punkt B	-1.0	-0.962	3.8%	-1.013	1.3%

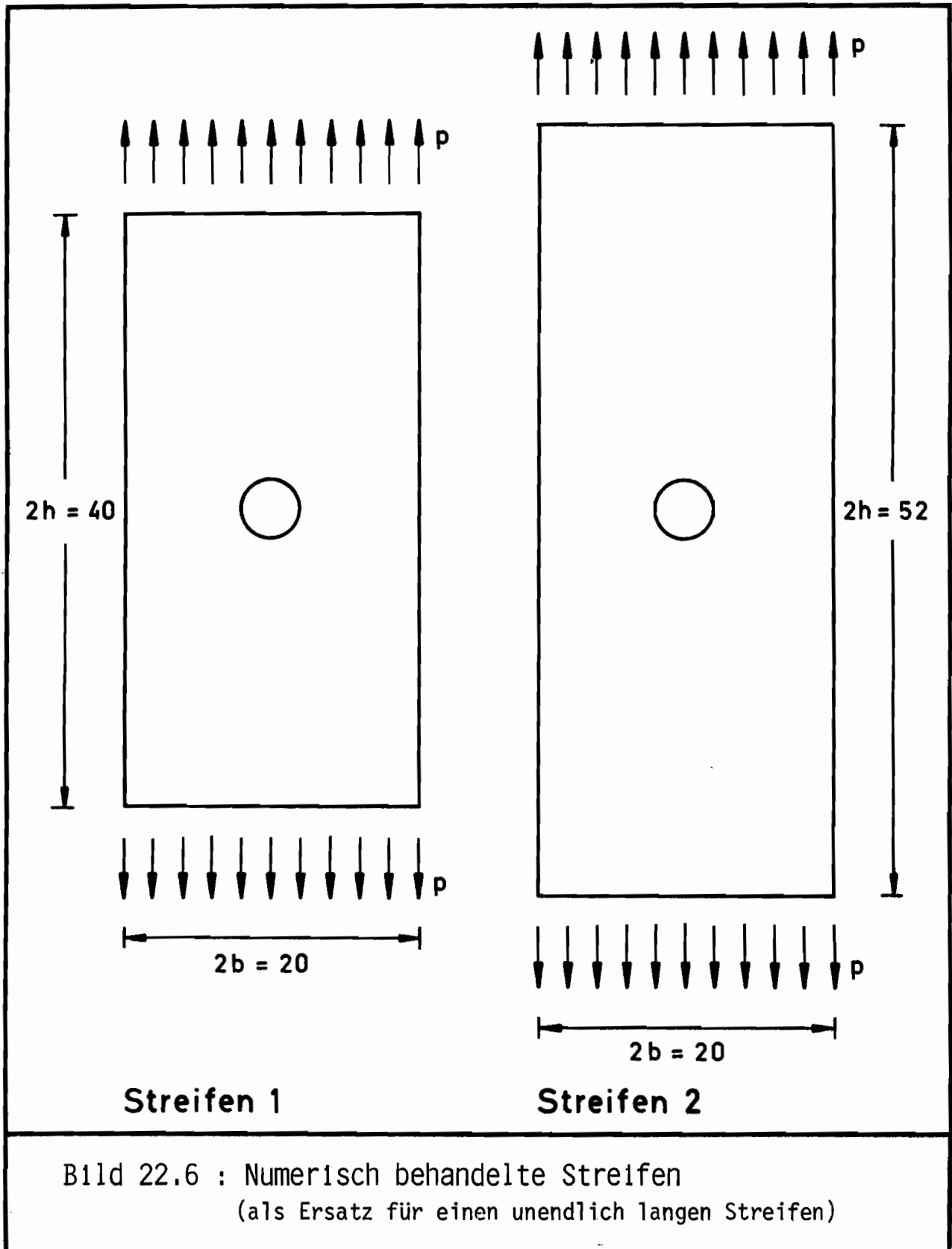
Tabelle 22.6 : Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.2 mit einem 8-Knoten-Kreis-
lochelement, $r_0 = 5$)

Beispiel 2 : Unendlich langer Streifen mit kreisförmigem Loch
unter Zugbelastung



Das vorliegende Problem wurde von Howland in [38] auf analytischem Wege behandelt. Für verschiedene Werte λ sind dort die maximalen Spannungen am Lochrand tabellarisch aufgeführt.

Um den Einfluß der endlichen Länge eines Ersatzsystems beurteilen zu können, werden im Hinblick auf einen Vergleich mit der Lösung des unendlich langen Streifen zwei unterschiedlich lange Streifen berechnet (s. Bild 22.6) .



Beispiel 2.1 : Behandlung von Streifen 1 für unterschiedliche Lochradien r_0 mittels finiter Elemente mit quadratischen Randverschiebungen

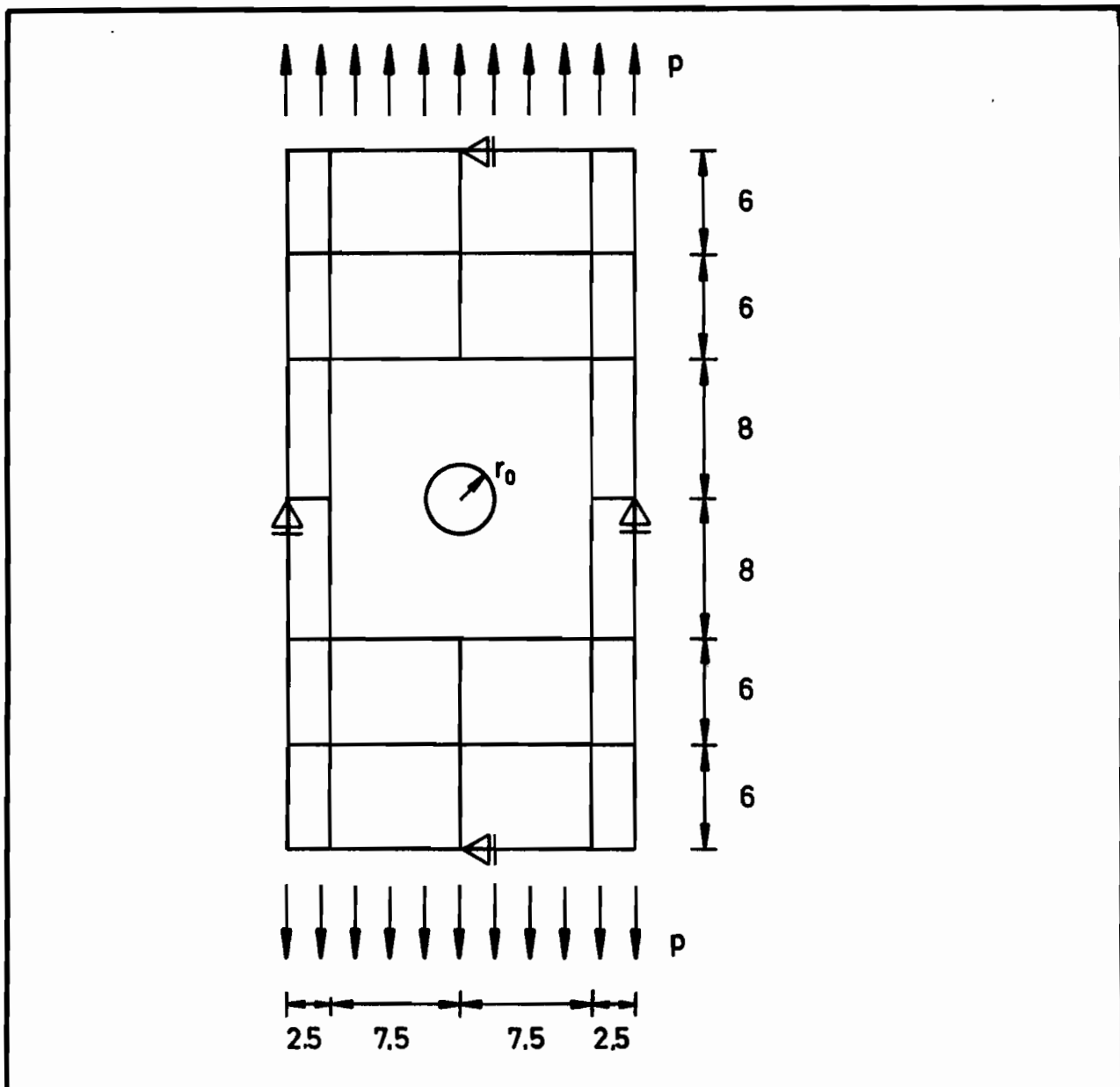


Bild 22.7 : Diskretisierung von Streifen 1 in finite Elemente mit quadratischen Randverschiebungen (Anzahl der Freiheitsgrade: 172)

In den folgenden Tabellen sind in der Spalte "exakt" die Werte für einen unendlich langen Streifen angegeben.

$r_0 = 2$ $\lambda = \frac{r_0}{b} = 0.2$	exakt [38]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi}/p$ im Punkt A	3.14	3.141	0.03%	3.145	0.16%
$\sigma_{\varphi\varphi}/p$ im Punkt B	-1.11	-1.114	0.4%	-1.114	0.4%

Tabelle 22.7 : Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.7 , $r_0 = 2$, $h/r_0 = 10$)

$r_0 = 3$ $\lambda = \frac{r_0}{b} = 0.3$	exakt [38]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi}/p$ im Punkt A	3.36	3.344	0.5%	3.351	0.3%
$\sigma_{\varphi\varphi}/p$ im Punkt B	-1.26	-1.252	0.6%	-1.250	0.8%

Tabelle 22.8 : Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.7 , $r_0 = 3$, $h/r_0 = 6.7$)

$r_0 = 4$ $\lambda = \frac{r_0}{b} = 0.4$	exakt [38]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi} / p$ im Punkt A	3.74	3.673	1.8%	3.688	1.4%
$\sigma_{\varphi\varphi} / p$ im Punkt B	-1.44	-1.431	0.6%	-1.429	0.8%

Tabelle 22.9 : Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.7 , $r_0 = 4$, $h/r_0 = 5$)

$r_0 = 5$ $\lambda = \frac{r_0}{b} = 0.5$	exakt [38]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi} / p$ im Punkt A	4.32	4.176	3.3%	4.197	2.9%
$\sigma_{\varphi\varphi} / p$ im Punkt B	-1.58	-1.638	3.7%	-1.640	3.8%

Tabelle 22.10 : Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.7 , $r_0 = 5$, $h/r_0 = 4$)

Beispiel 2.2 : Behandlung von Streifen 2 für unterschiedliche Lochradien r_0 mittels finiter Elemente mit quadratischen Randverschiebungen

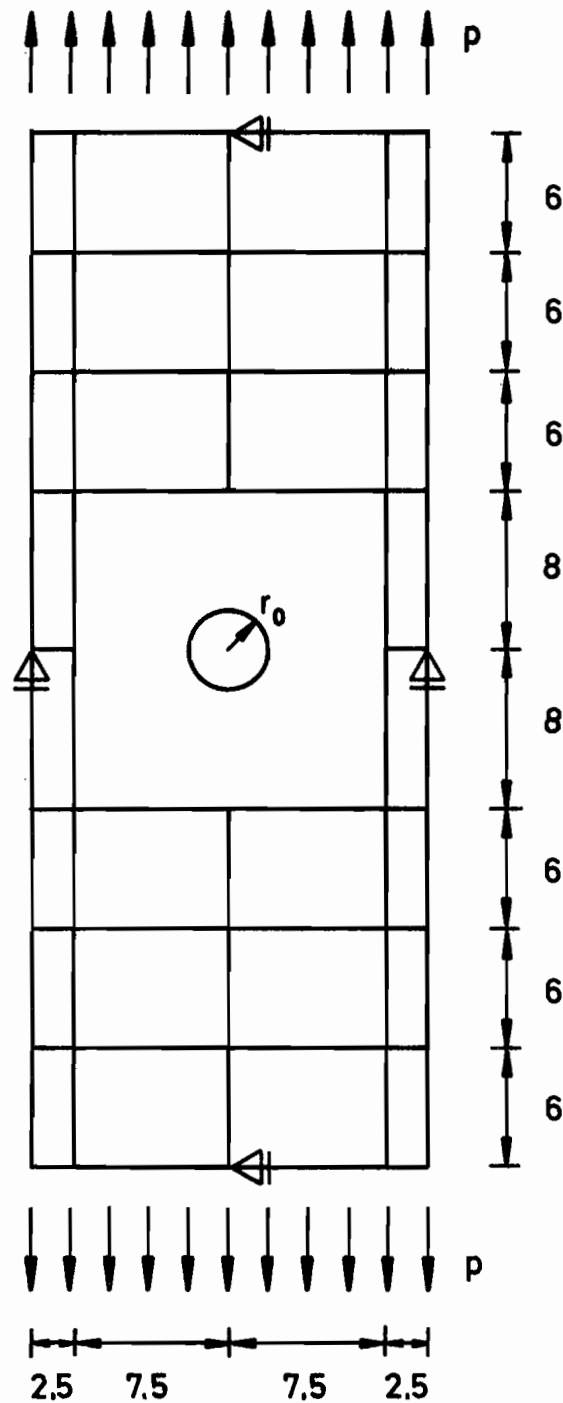


Bild 22.8 : Diskretisierung von Streifen 2 in finite Elemente mit quadratischen Randverschiebungen (Anzahl der Freiheitsgrade: 228)

$r_0 = 2$ $\lambda = \frac{r_0}{b} = 0.2$	exakt [38]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi}/p$ im Punkt A	3.14	3.138	0.06%	3.142	0.06%
$\sigma_{\varphi\varphi}/p$ im Punkt B	-1.11	-1.109	0.09%	-1.110	0%

Tabelle 22.11: Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.8 , $r_0 = 2$, $h/r_0 = 13$)

$r_0 = 3$ $\lambda = \frac{r_0}{b} = 0.3$	exakt [38]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi}/p$ im Punkt A	3.36	3.337	0.7%	3.345	0.5%
$\sigma_{\varphi\varphi}/p$ im Punkt B	-1.26	-1.239	1.7%	-1.237	1.8%

Tabelle 22.12: Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.8 , $r_0 = 3$, $h/r_0 = 8.7$)

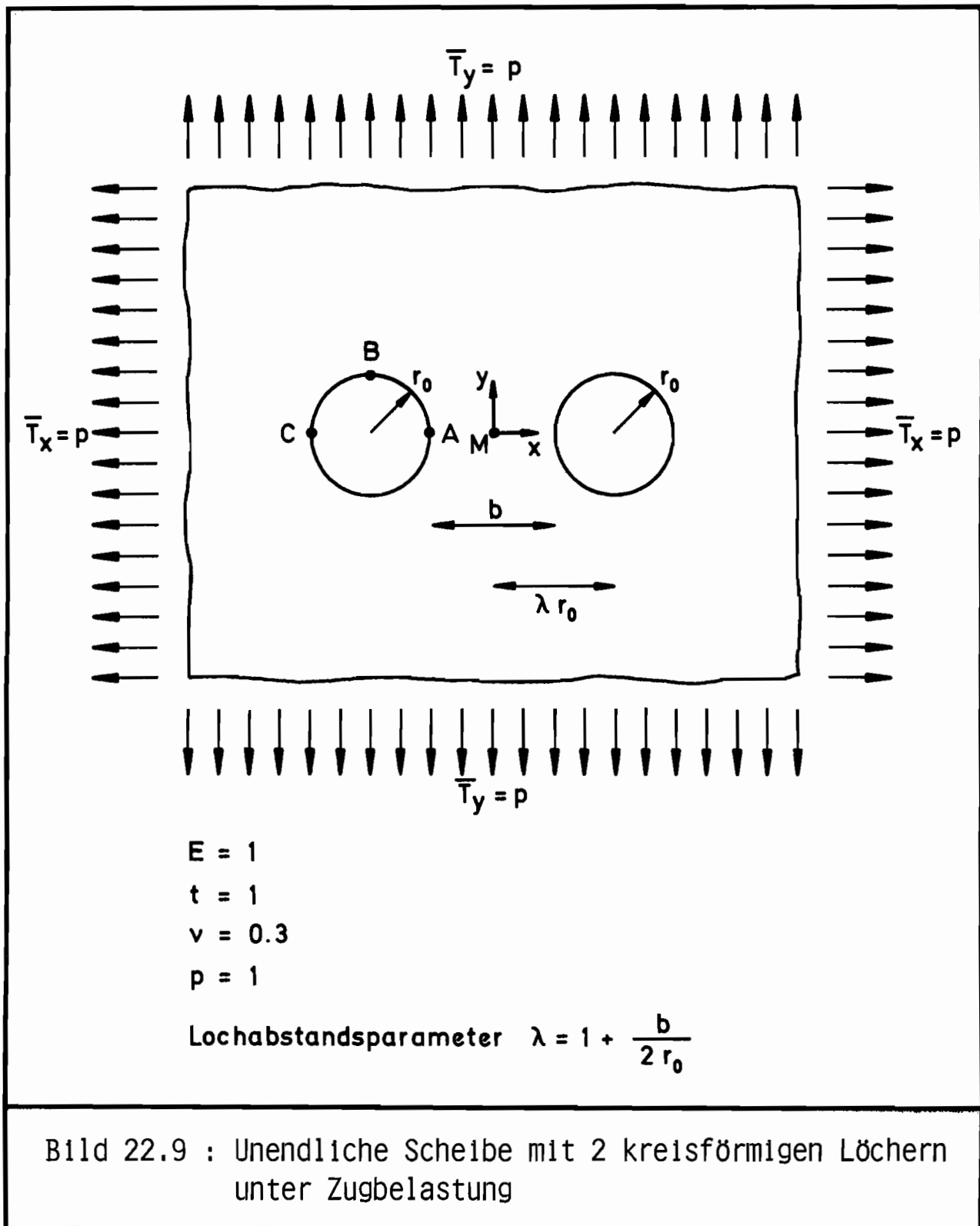
$r_0 = 4$ $\lambda = \frac{r_0}{b} = 0.4$	exakt [38]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi} / p$ im Punkt A	3.74	3.661	2.1%	3.676	1.7%
$\sigma_{\varphi\varphi} / p$ im Punkt B	-1.44	-1.401	2.7%	-1.399	2.9%

Tabelle 22.13: Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.8 , $r_0 = 4$, $h/r_0 = 6.5$)

$r_0 = 5$ $\lambda = \frac{r_0}{b} = 0.5$	exakt [38]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
$\sigma_{\varphi\varphi} / p$ im Punkt A	4.32	4.157	3.8%	4.176	3.3%
$\sigma_{\varphi\varphi} / p$ im Punkt B	-1.58	-1.575	0.3%	-1.577	0.2%

Tabelle 22.14: Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.8 , $r_0 = 5$, $h/r_0 = 5.2$)

Beispiel 3 : Unendliche Scheibe mit 2 kreisförmigen Löchern unter Zugbelastung



Analytische Lösungswege zu dem Problem der zweifach gelochten Scheibe finden sich zum Beispiel in einem Aufsatz von C. Weber [40] und in Sawins Buch über Spannungserhöhungen [39] auf den Seiten 150 bis 155 .

Beispiel 3.1 : Behandlung der 2-fach gelochten Scheibe mittels finiter Elemente mit linearen Randverschiebungen
(Lastfall: allseitiger Zug)

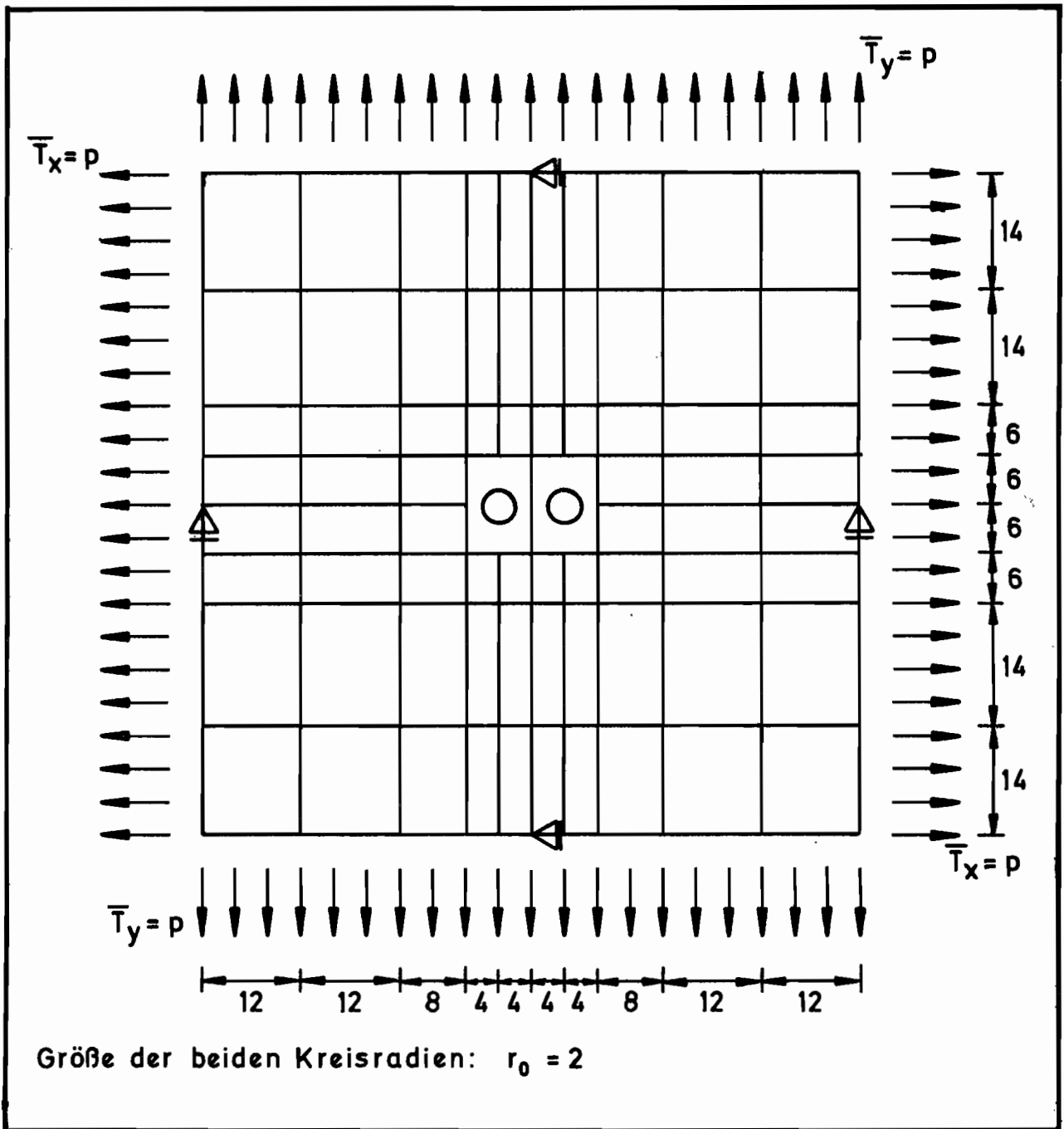


Bild 22.10 : Numerisch behandeltes Ersatzsystem für eine 2-fach gelochte unendliche Scheibe mit Finite-Element-Einteilung
(190 Freiheitsgrade bei Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen)

$\lambda = 2$	exakt [39]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
σ_{yy} / p im Punkt A	2.411	2.328	3.4%	2.298	4.7%
σ_{yy} / p im Punkt C	2.158	2.112	2.1%	2.091	3.1%

Tabelle 22.15: Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und C
(Elementraster gemäß Bild 22.10 , $r_0 = 2$,
Lastfall: allseitiger Zug)

Beispiel 3.2 : Behandlung der 2-fach gelochten Scheibe mittels finiter
Elemente mit linearen Randverschiebungen
(Lastfall: nur Zug in x-Richtung)

$\lambda = 2$	exakt [39]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
σ_{xx} / p im Punkt B	2.703	2.668	1.3%	2.688	0.6%

Tabelle 22.16: Ergebnisse für die Spannungsspitze in B
(Elementraster gemäß Bild 22.10 , $r_0 = 2$,
Lastfall: Zug in x-Richtung)

Beispiel 3.3 : Behandlung der 2-fach gelochten Scheibe mittels finiter Elemente mit quadratischen Randverschiebungen
(Lastfall: allseitiger Zug ,
betrachtet wird nur eine Hälfte des symmetrischen Systems)

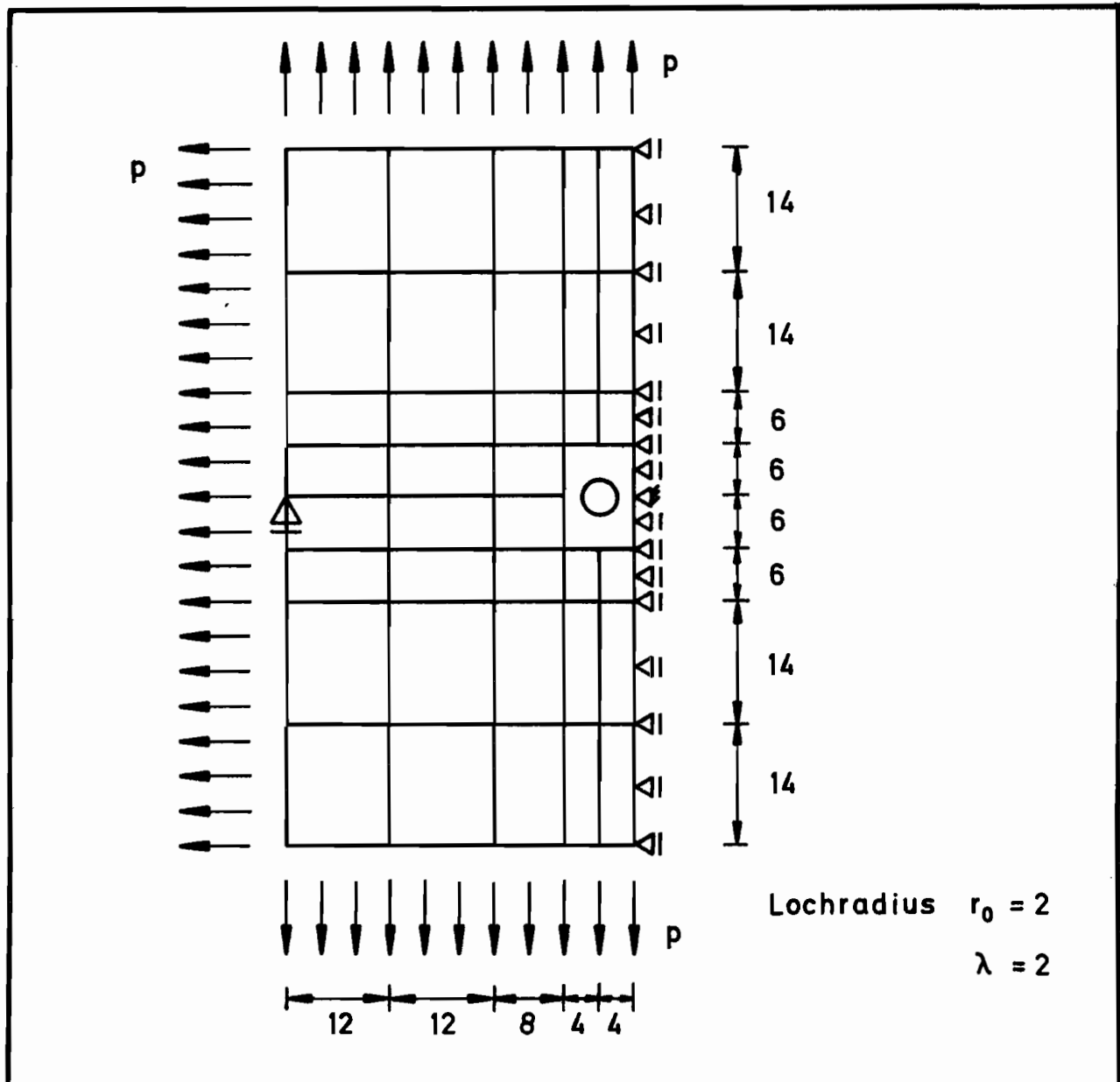


Bild 22.11 : Numerisch behandeltes Ersatzsystem für eine 2-fach gelochte unendliche Scheibe mit Finite-Element-Einteilung nach Ausnutzung der Symmetrie (265 Freiheitsgrade bei Verwendung von Elementen mit quadratischen Randverschiebungen, $\lambda = 2$)

$\lambda = 2$	exakt [39]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
σ_{yy} / p im Punkt A	2.411	2.426	0.6%	2.421	0.4%
σ_{yy} / p im Punkt C	2.158	2.159	0.05%	2.154	0.2%

Tabelle 22.17: Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und C.
(Elementraster gemäß Bild 22.11 , $r_0 = 2$, $\lambda = 2$)

Beispiel 3.4 : Behandlung der 2-fach gelochten Scheibe mittels finiter Elemente mit quadratischen Randverschiebungen für einen Fall sehr dicht beieinanderliegender Löcher [40]
 (Lastfall: allseitiger Zug ,
 betrachtet wird nur eine Hälfte des symmetrischen Systems)

Je dichter die beiden Löcher zusammenliegen, um so schwieriger wird die numerische Problembehandlung, zumal im Grenzfall sich berührender Kreisränder ($\lambda = 1$) die Spannung σ_{yy} im Punkt A unendlich wird. Das konkret vorliegende Problem mit $\lambda = 1.25$ ist einer Arbeit von C. Weber [40] entnommen.

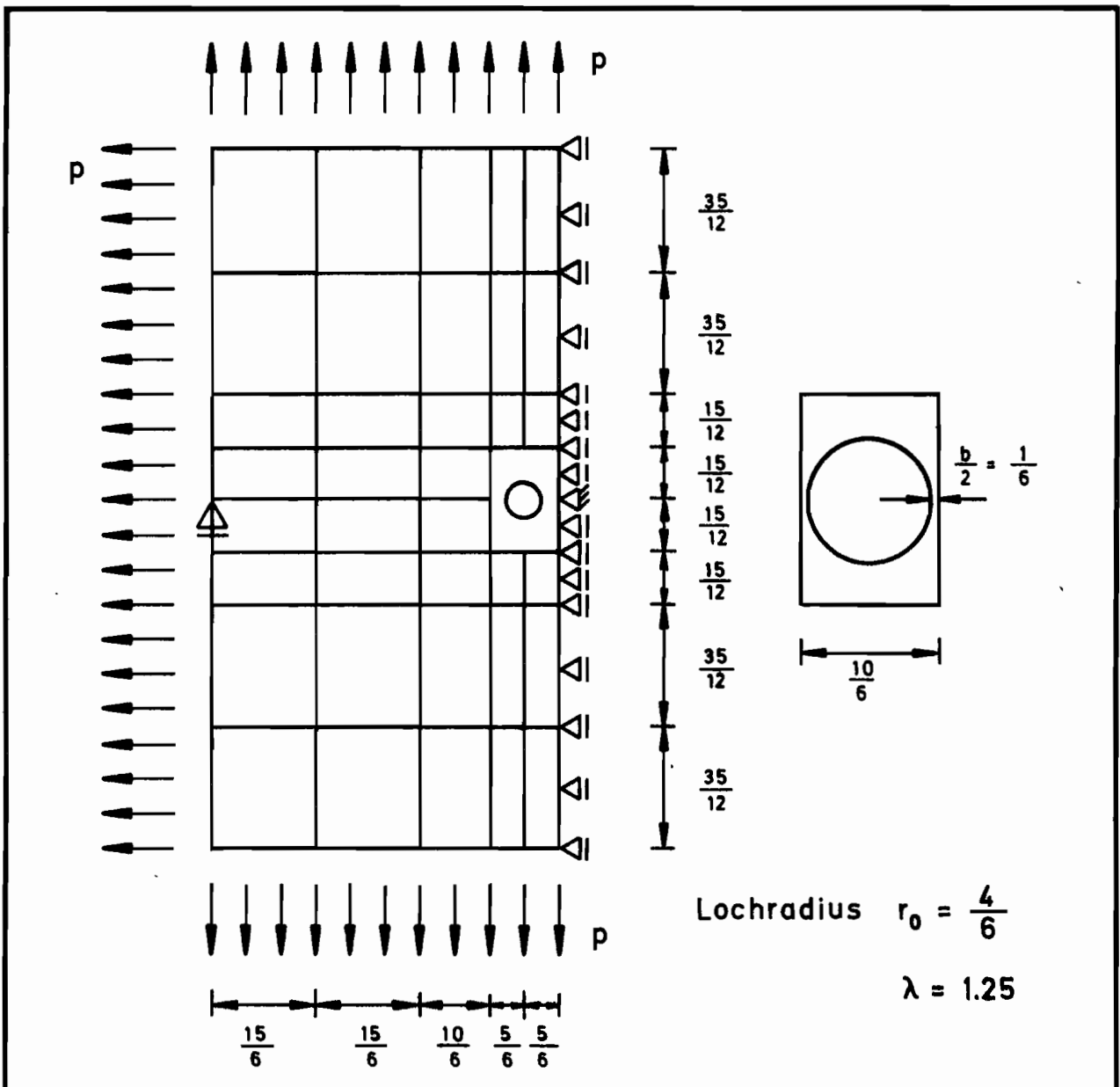


Bild 22.12 : Numerisch behandeltes Ersatzsystem für eine 2-fach gelochte unendliche Scheibe mit Finite-Element-Einteilung nach Ausnutzung der Symmetrie (265 Freiheitsgrade bei Verwendung von Elementen mit quadratischen Randverschiebungen, $\lambda = 1.25$)

$\lambda = 1.25$	exakt [40]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
σ_{yy} / p im Punkt A	3.65	3.680	0.8%	3.682	0.9%
σ_{xx} / p im Punkt B	1.68	1.683	0.2%	1.699	1.1%
σ_{yy} / p im Punkt C	2.38	2.254	5.3%	2.236	6.1%
σ_{yy} / p im Punkt M	2.96	2.797	5.5%	2.800	5.4%

Tabelle 22.18: Ergebnisse für Spannungen in A, B, C und M
(Elementraster gemäß Bild 22.12 , $r_0 = 2/3$, $\lambda = 1.25$)

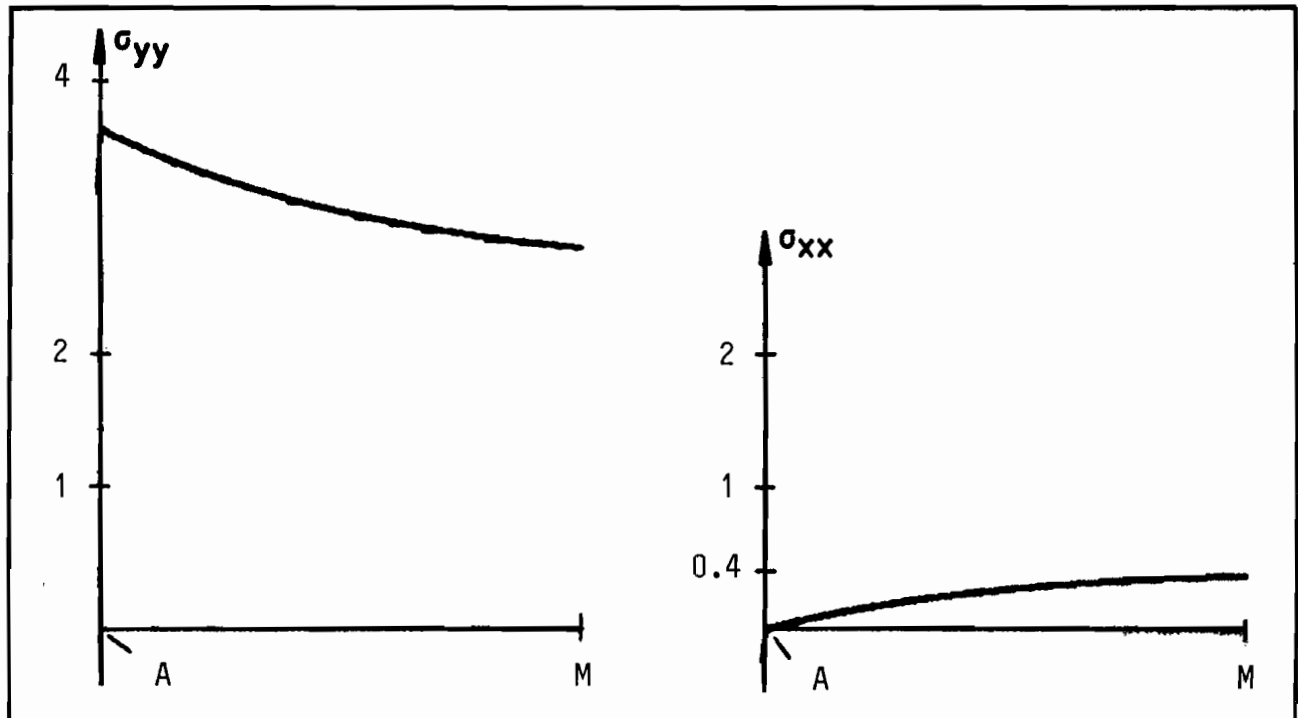
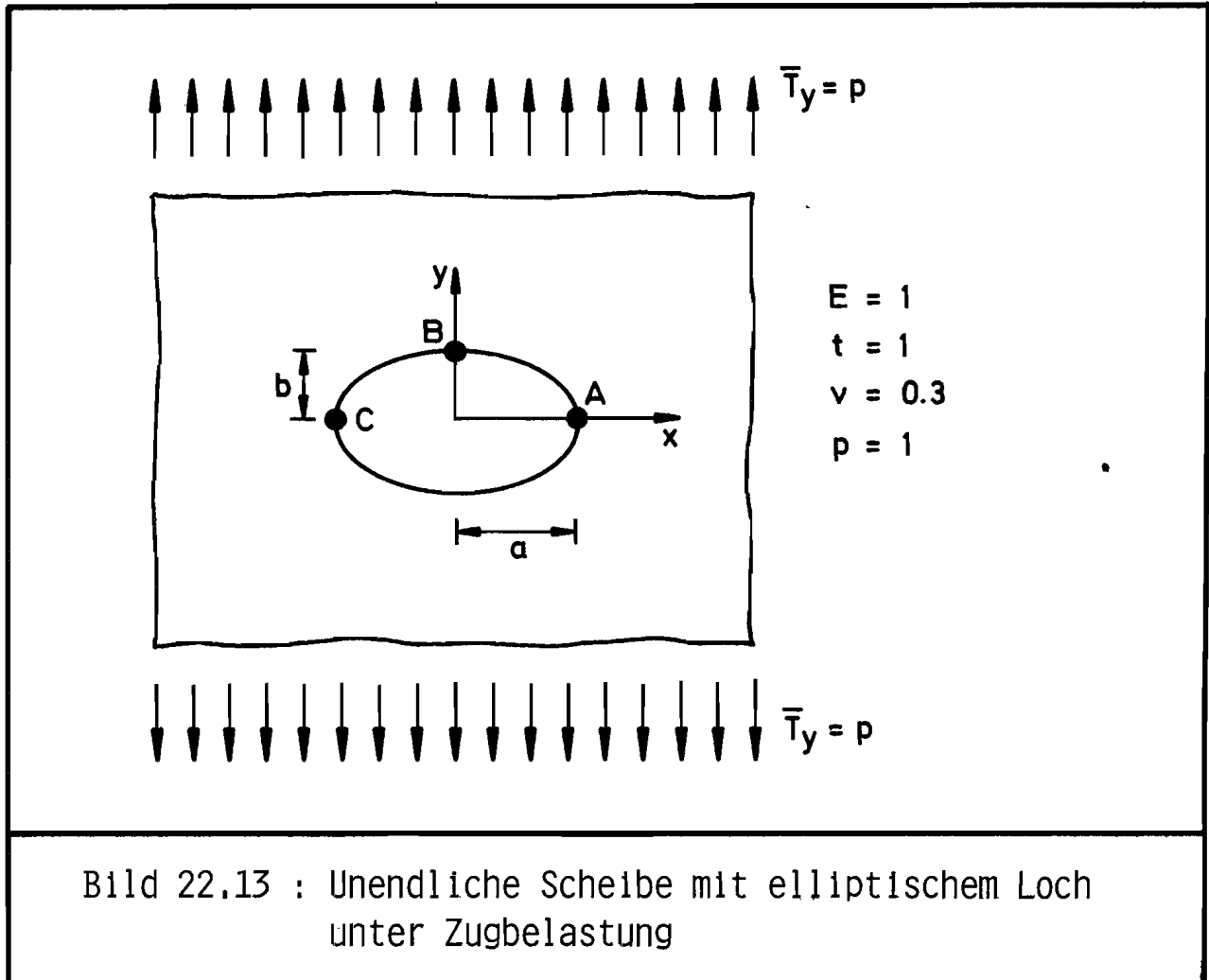


Bild 22.13 : Numerisch ermittelte Spannungsverläufe σ_{yy} und σ_{xx} zwischen den Punkten A und M

Beispiel 4 : Unendliche Scheibe mit elliptischem Loch unter Zug in einer Richtung



Eine analytische Behandlung der Problemstellung findet sich beispielsweise in [19] auf Seite 273 und in [16] auf Seite 195 .

Die maximal auftretende Spannung ist auf dem Lochrand in den Punkten A und C zu finden und läßt sich mit

$$\sigma_{yy} = \left(1 + 2 \frac{a}{b}\right) p$$

angeben. Die tangentielle Spannung im Punkt B ist von den Halbachsenwerten a und b unabhängig, und zwar gilt für den Punkt B :

$$\sigma_{xx} = -p .$$

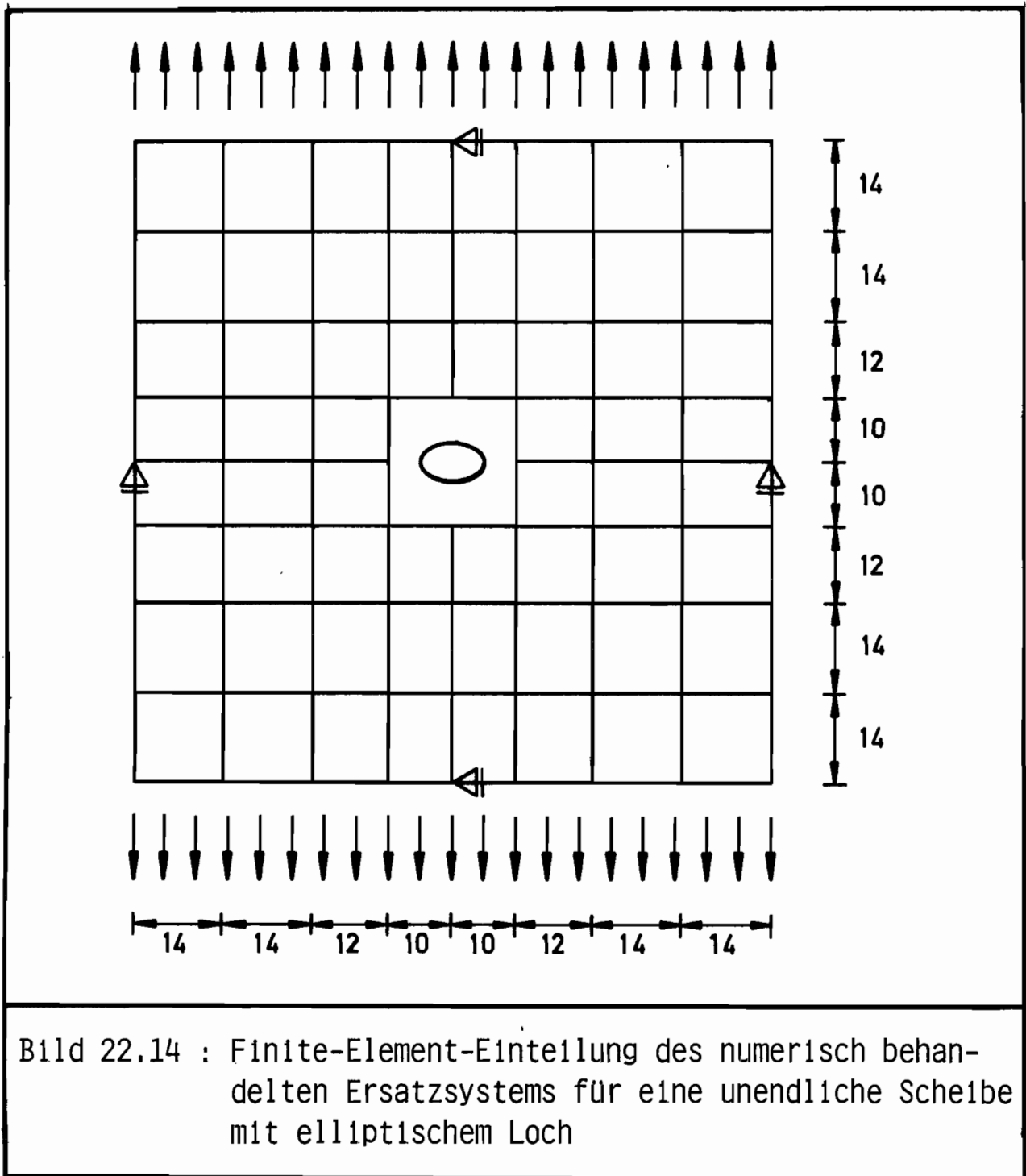


Bild 22.14 : Finite-Element-Einteilung des numerisch behandelten Ersatzsystems für eine unendliche Scheibe mit elliptischem Loch

Beispiel 4.1 : Numerische Ermittlung der Spannungsspitzen für unterschiedliche Halbachsenverhältnisse a/b unter Verwendung von Elementen mit linearen Ränderverschiebungen
(Anzahl der Freiheitsgrade: 156)

$\frac{a}{b} = 2$	exakt	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
σ_{yy} / p im Punkt A	5.0	4.941	1.2%	4.991	0.2%
σ_{xx} / p im Punkt B	-1.0	-0.980	2%	-0.996	0.4%

Tabelle 22.19: Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.14 , $a = 2$, $b = 1$)

$\frac{a}{b} = 6$	exakt	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
σ_{yy} / p im Punkt A	13.0	12.84	1.2%	12.96	0.3%
σ_{xx} / p im Punkt B	-1.0	-0.979	2.1%	-0.995	0.5%

Tabelle 22.20: Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.14 , $a = 3$, $b = 0.5$)

$\frac{a}{b} = 20$	exakt	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
σ_{yy} / p im Punkt A	41.0	40.54	1.1%	40.92	0.2%
σ_{xx} / p im Punkt B	-1.0	-0.986	1.4%	-0.998	0.2%

Tabelle 22.21: Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.14 , a = 2 , b = 0.1)

Beispiel 4.2 : Numerische Ermittlung der Spannungsspitzen für das Halb-
achsenverhältnis $a/b = 2$ (mit $a = 2$ und $b = 1$)
unter Verwendung von Elementen mit quadratischen Rand-
verschiebungen
(Anzahl der Freiheitsgrade: 436)

$\frac{a}{b} = 2$	exakt	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
σ_{yy} / p im Punkt A	5.0	5.010	0.2%	5.011	0.2%
σ_{xx} / p im Punkt B	-1.0	-1.003	0.3%	-1.004	0.4%

Tabelle 22.22: Ergebnisse für die Spannungsspitzen in A und B
(Elementraster gemäß Bild 22.14 , a = 2 , b = 1)

Beispiel 4.3 : Numerische Ermittlung und Darstellung der Spannungsverläufe σ_{xx} , σ_{yy} auf der x-Achse für das Halbachsenverhältnis $a/b = 4$ (mit $a = 2$ und $b = 0.5$) unter Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen (Funktional I)

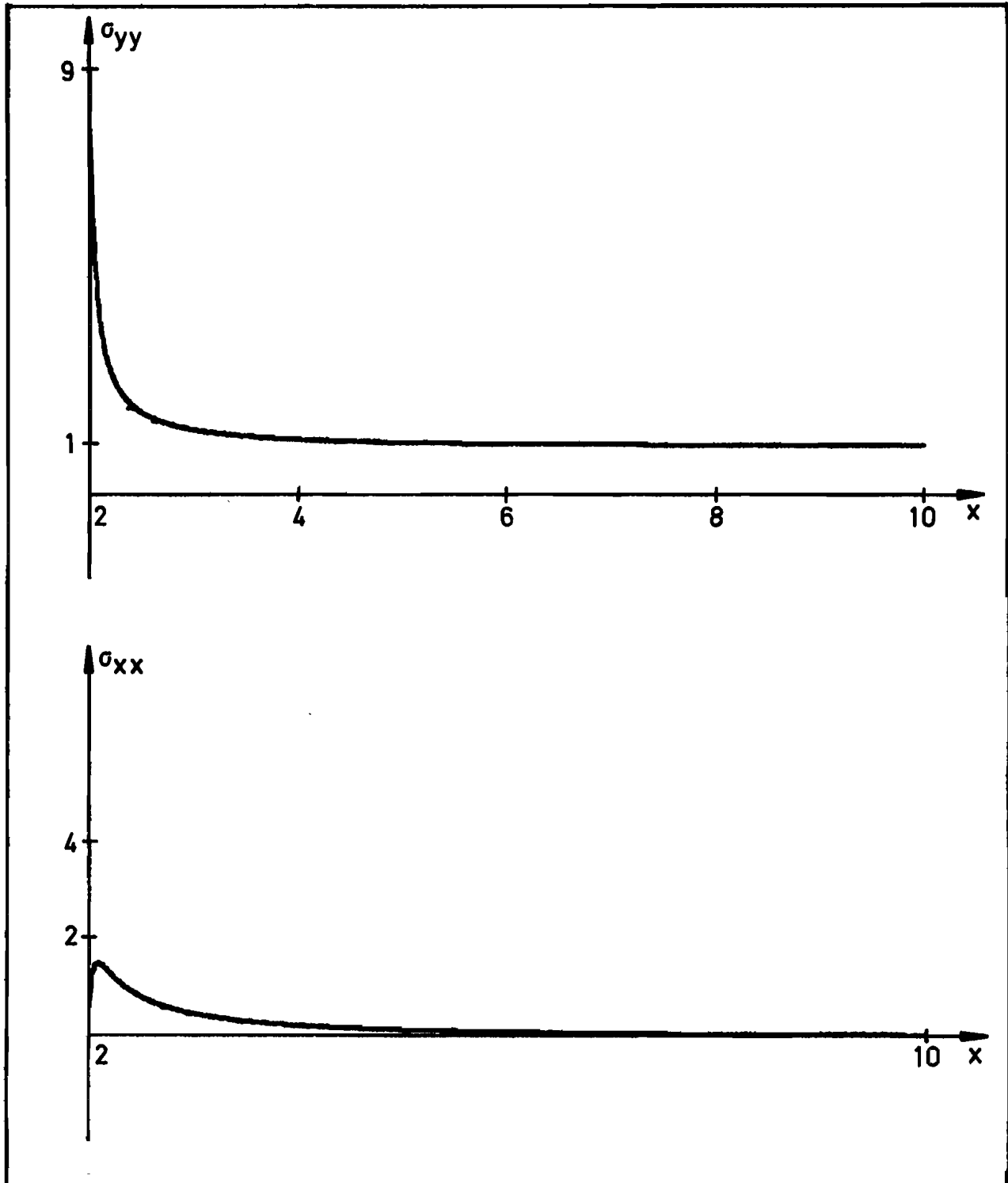


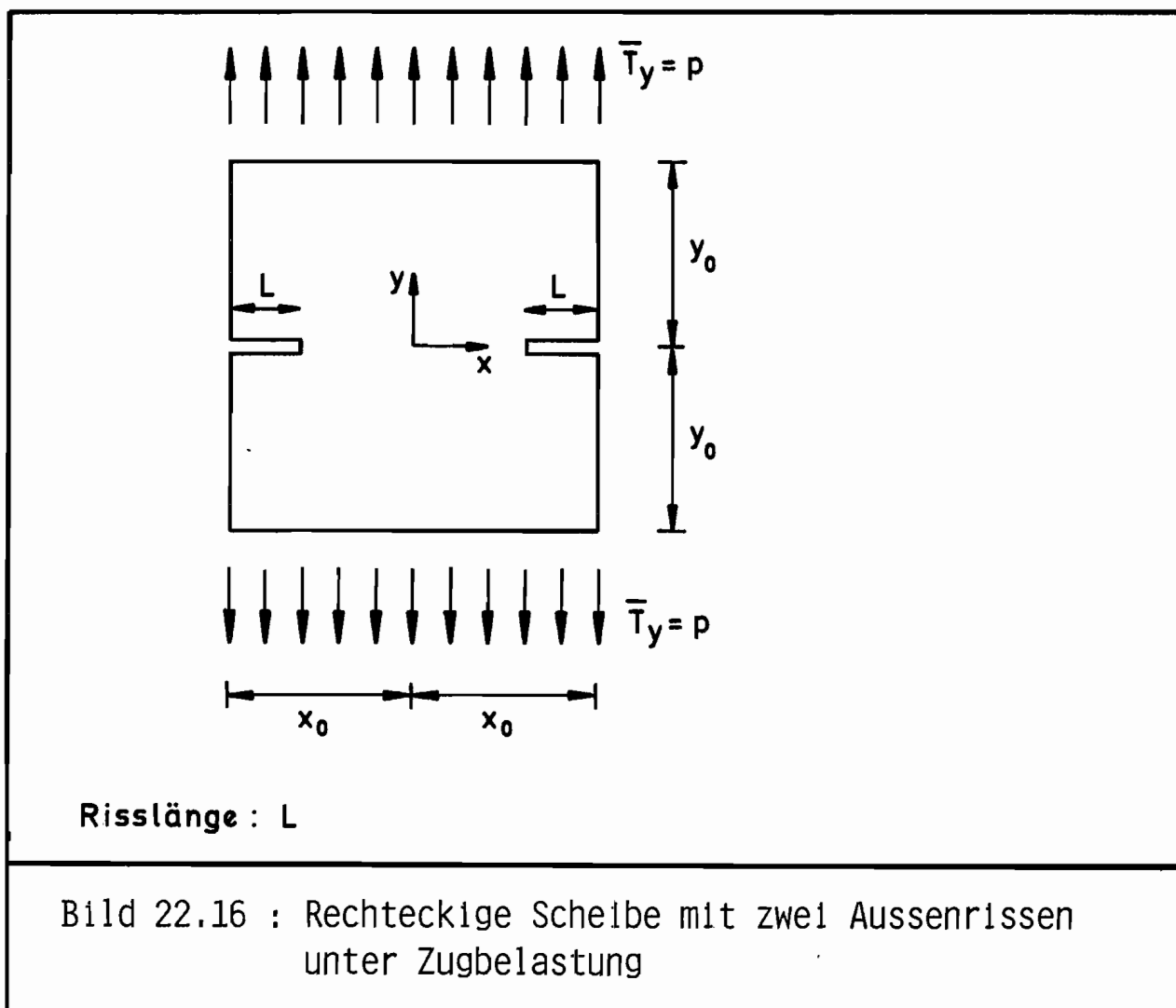
Bild 22.15 : Spannungsverläufe σ_{xx} , σ_{yy} auf der x-Achse innerhalb des speziellen Elementbereiches ($2 \leq x \leq 10$) für $a/b = 4$ und $a = 2$

Beispiel 4.4 : Numerische Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren für einen Innenriß der Länge $2a$ ($a = 2$, $b = 0$) unter Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen

	exakt [11] $K_1 = p \sqrt{a}$ $K_2 = 0$	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
K_1/p für Punkt A	1.414	1.399	1.1%	1.412	0.1%
K_2/p für Punkt A	0	$-1.2 \cdot 10^{-6}$		$-1.1 \cdot 10^{-6}$	
K_1/p für Punkt C	1.414	1.399	1.1%	1.412	0.1%
K_2/p für Punkt C	0	$-2 \cdot 10^{-6}$		$-1.9 \cdot 10^{-6}$	

Tabelle 22.23: Spannungsintensitätsfaktoren für die Spitzen einer zu einem Schlitz entarteten Ellipse ($a = 2$, $b = 0$) (Elementraster gemäß Bild 22.14 , Anzahl der Freiheitsgrade: 156)

Beispiel 5 : Numerische Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren einer rechteckigen Scheibe mit zwei Außenrissen unter Zugbeanspruchung



Das in Bild 22.16 dargestellte Problem wurde von O.L. Bowie [4] auf analytischem Wege gelöst. Die in [4] tabellierten Spannungsintensitätsfaktoren können als exakt angesehen werden, wenn man auf die Ungenauigkeiten (max. 1%) infolge von Abbrechfehlern bei der numerischen Auswertung der Lösung absieht.

Im folgenden sind für verschiedene Rißlängen L bei einem Seitenverhältnis $y_0/x_0 = 1$ nach Skizzierung des jeweiligen Elementrasters die numerisch erhaltenen Spannungsintensitätsfaktoren aufgeführt. Zu den einzelnen Rechnungen wurde aus Symmetriegründen jeweils nur eine Systemhälfte herangezogen.

Anstelle des exakten Wertes $K_2 = 0$ ergaben sich in allen numerischen Rechnungen Werte von der Größenordnung 10^{-6} .

Beispiel 5.1: Numerische Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren für $L/x_0 = 0.2612$ und $y_0/x_0 = 1$ (mit $x_0 = 0.9865$, $L = 0.2577$) unter Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen

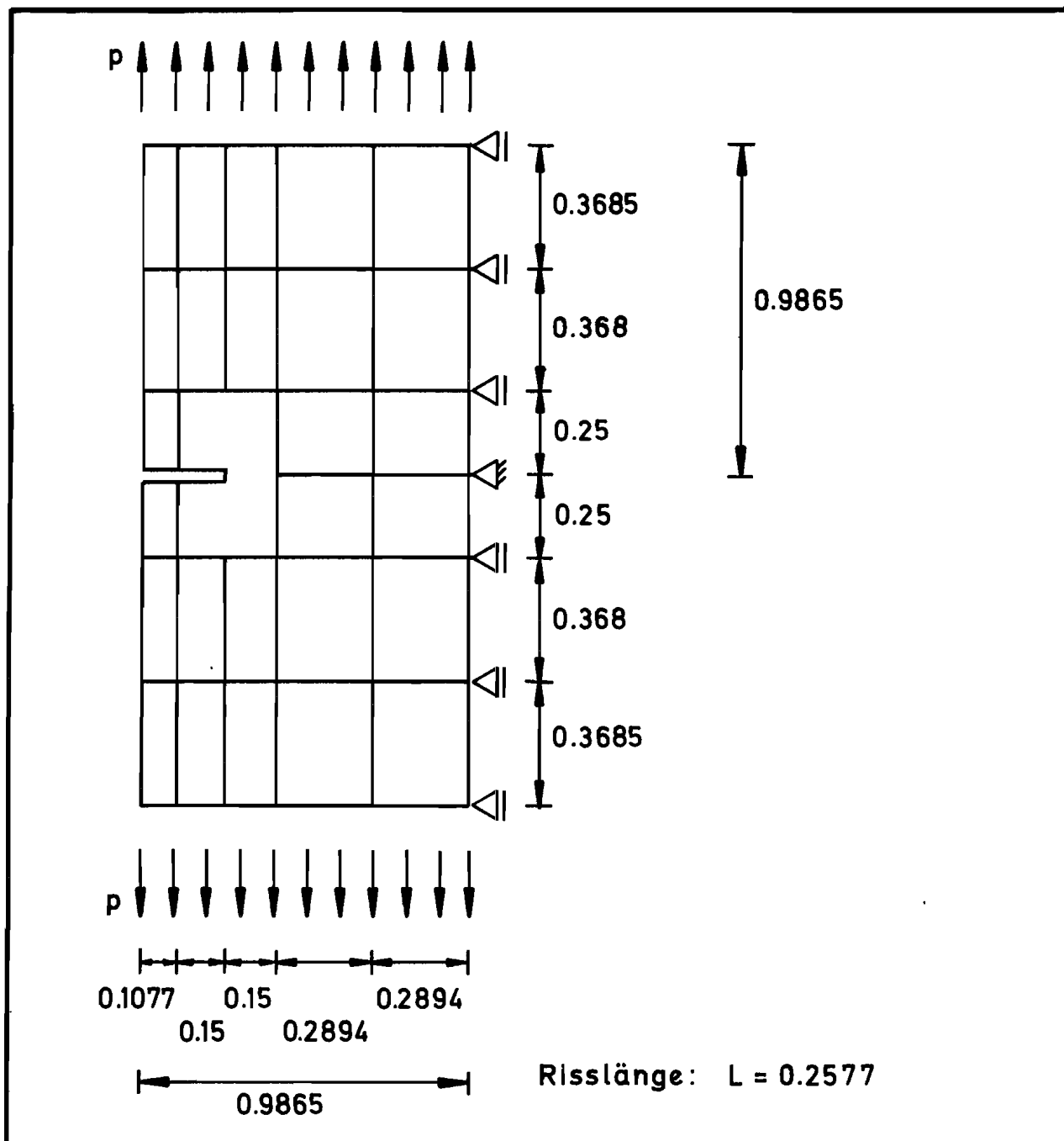
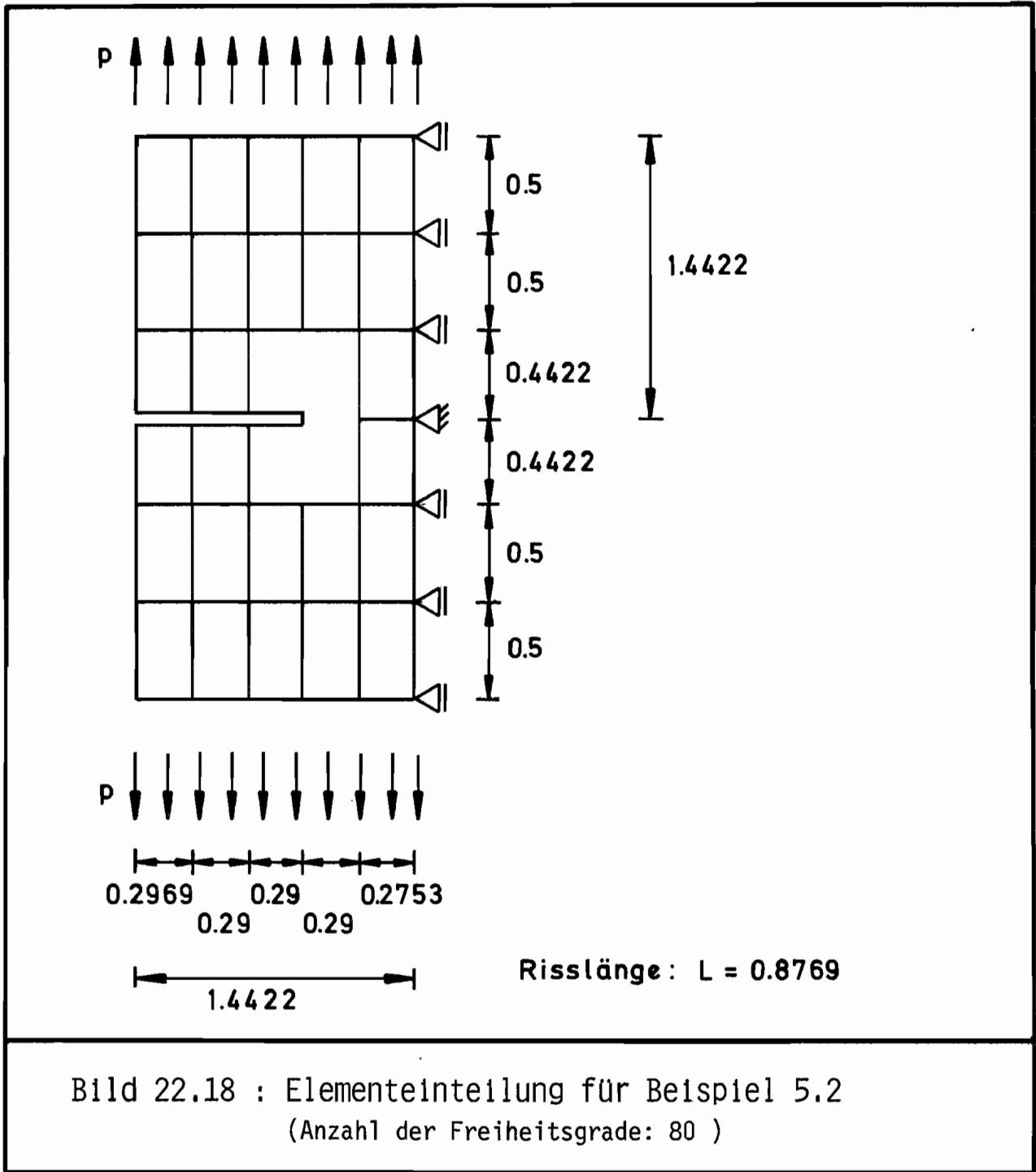


Bild 22.17 : Elementeinteilung für Beispiel 5.1
(Anzahl der Freiheitsgrade: 78)

	exakt [4]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
K_1/p	0.595	0.602	1.2%	0.600	0.8%

Tabelle 22.24: Spannungsintensitätsfaktoren zu Beispiel 5.1

Beispiel 5.2: Numerische Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren für $L/x_0 = 0.608$ und $y_0/x_0 = 1$ (mit $x_0 = 1.4422$, $L = 0.8769$) unter Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen



	exakt [4]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
K_1/p	1.25	1.296	3.7%	1.290	3.2%

Tabelle 22.25: Spannungsintensitätsfaktoren zu Beispiel 5.2

Beispiel 5.3: Numerische Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren für $L/x_0 = 0.7609$ und $y_0/x_0 = 1$ (mit $x_0 = 2.1936$, $L = 1.6691$) unter Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen

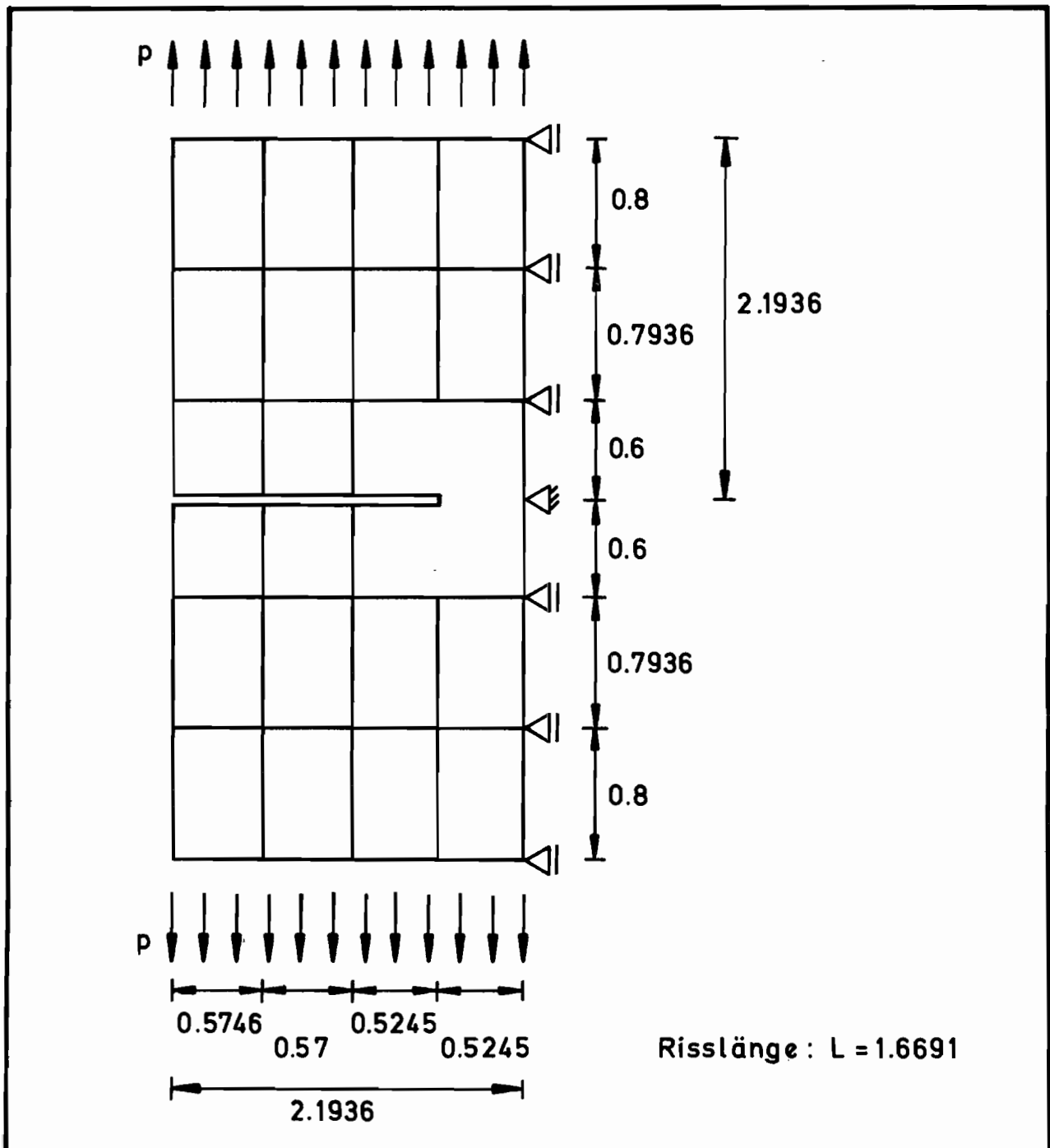


Bild 22.19 : Elementeinteilung für Beispiel 5.3
(Anzahl der Freiheitsgrade: 66)

	exakt [4]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
K_1/p	1.9	1.982	4.3%	1.974	3.9%

Tabelle 22.26: Spannungsintensitätsfaktoren zu Beispiel 5.3

Beispiel 5.4: Numerische Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren für $L/x_0 = 0.3838$ und $y_0/x_0 = 1$ (mit $x_0 = 1.0705$, $L = 0.4109$) unter Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen (26 Standardverschiebungselemente, 1 rechteckiges RiBelement)

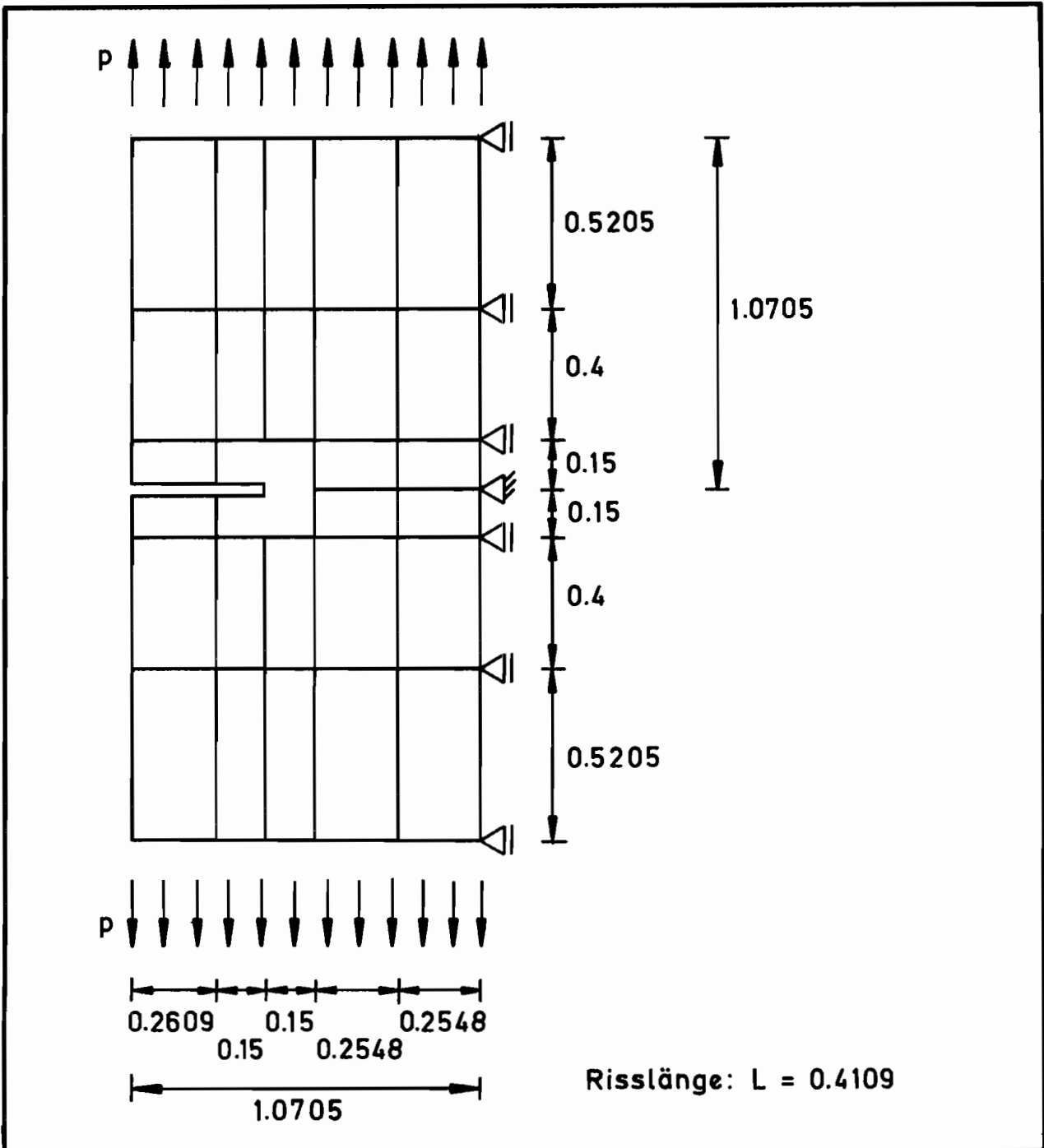


Bild 22.20 : Elementeinteilung für Beispiel 5.4
(Anzahl der Freiheitsgrade: 78)

	exakt [4]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
K_1/p	0.793	0.791	0.3%	0.787	0.8%

Tabelle 22.27: Spannungsintensitätsfaktoren zu Beispiel 5.4

Beispiel 5.5: Numerische Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren für $L/x_0 = 0.3838$ und $y_0/x_0 = 1$ (mit $x_0 = 1.0705$, $L = 0.4109$) unter Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen (34 Standardverschiebungselemente, 1 dreieckiges RiBelement)

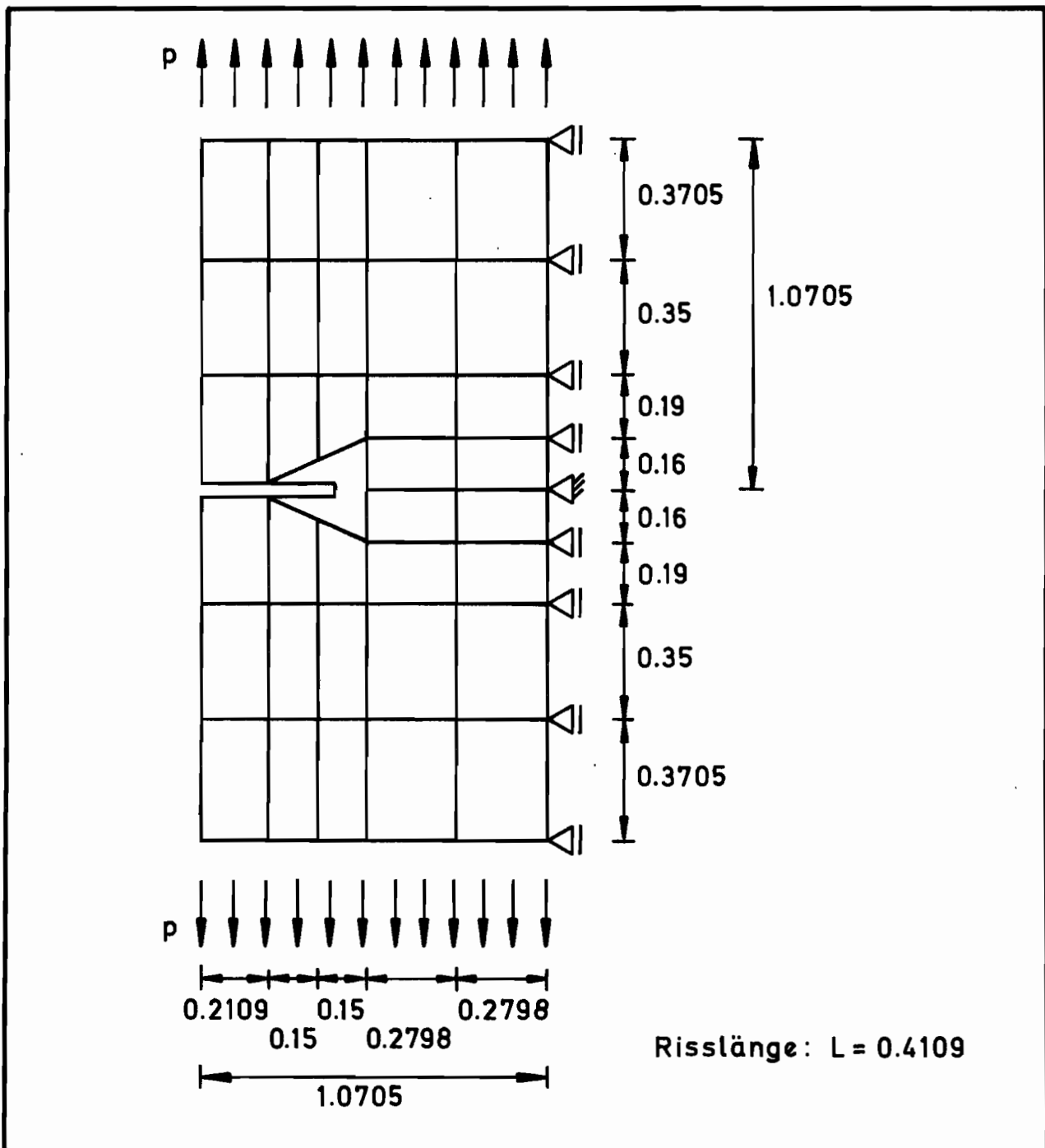


Bild 22.21 : Elementeinteilung für Beispiel 5.5
(Anzahl der Freiheitsgrade: 92)

	exakt [4]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
K_1/p	0.793	0.825	4%	0.796	0.4%

Tabelle 22.28: Spannungsintensitätsfaktoren zu Beispiel 5.5

Beispiel 5.6: Numerische Ermittlung der Spannungsintensitätsfaktoren für $L/x_0 = 0.3838$ und $y_0/x_0 = 1$ (mit $x_0 = 1.0705$, $L = 0.4109$) unter Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen (54 Standardverschiebungselemente, 1 dreieckiges Rißelement)

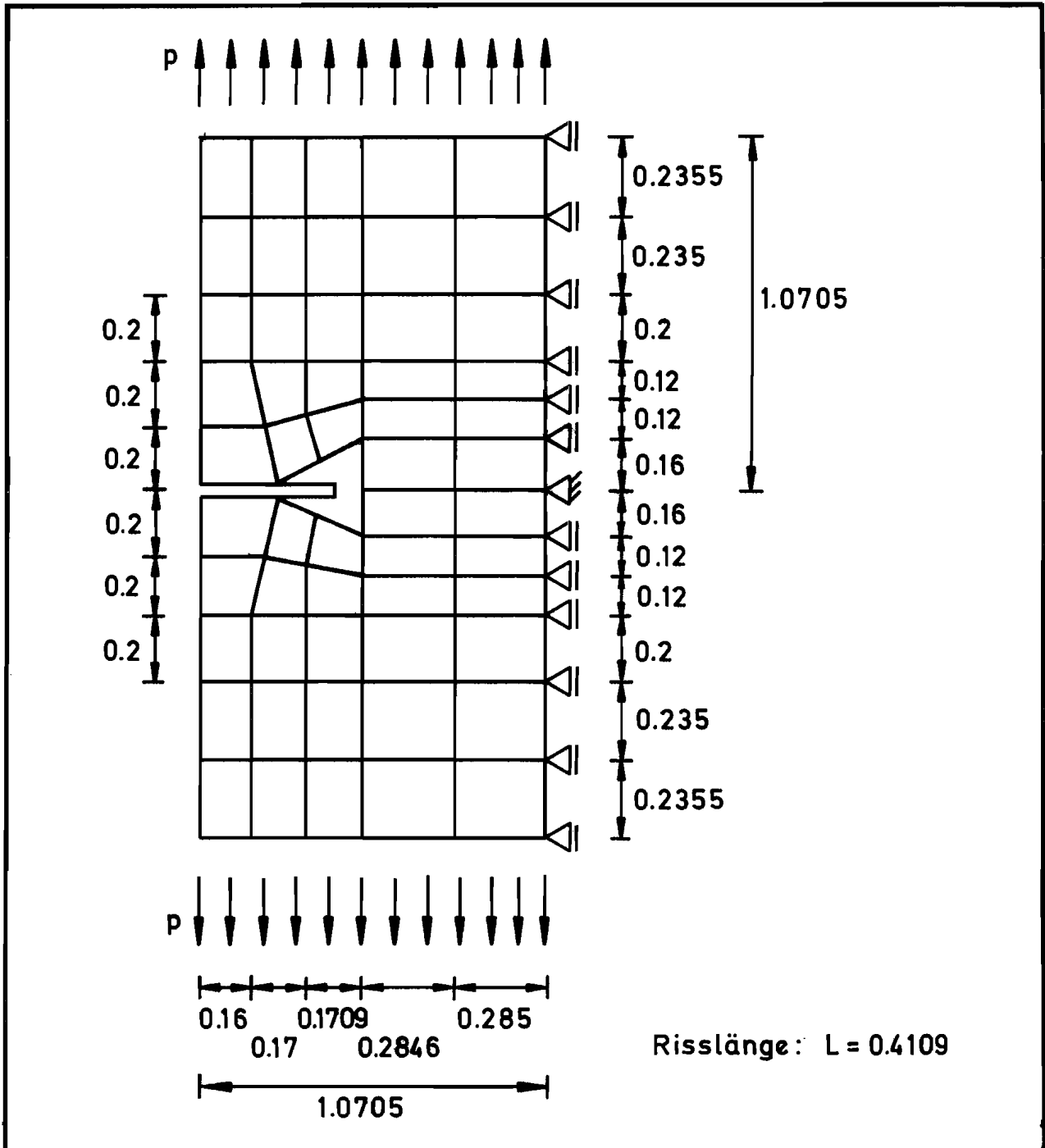


Bild 22.22 : Elementeinteilung für Beispiel 5.6
(Anzahl der Freiheitsgrade: 136)

	exakt [4]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
K_1/p	0.793	0.815	2.8%	0.786	0.9%

Tabelle 22.29: Spannungsintensitätsfaktoren zu Beispiel 5.6

Beispiel 6 : Numerische Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren einer rechteckigen Scheibe mit einem Außenriß unter Zugbeanspruchung

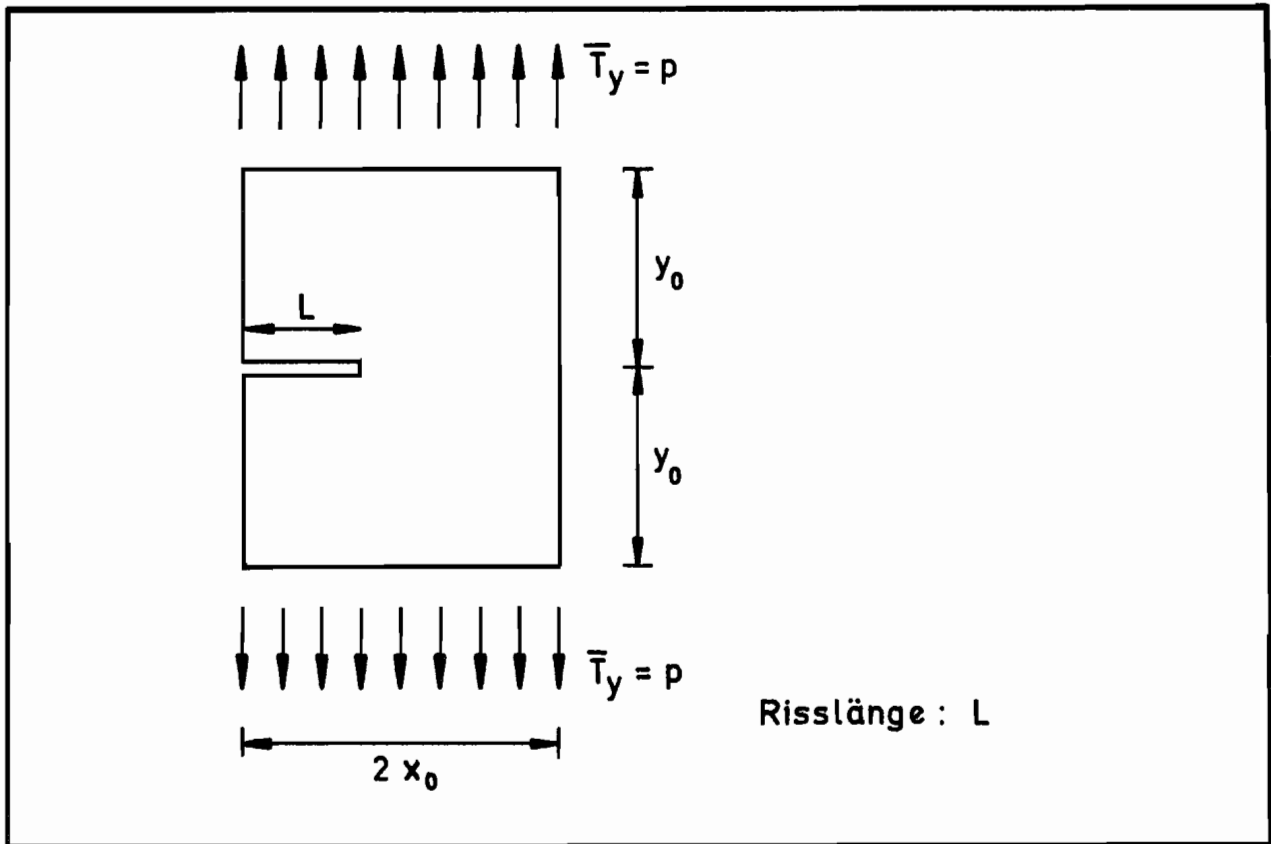


Bild 22.23 : Rechteckige Scheibe mit einem Aussenriß unter Zugbelastung

Eine analytische Behandlung des vorliegenden Problems findet man in [5] . Die dort tabellierten Werte sind aus einer exakten Lösungsdarstellung bis auf etwa 2% genau berechnet.

Für die Parameter $y_0/x_0 = 0.997$, $x_0 = 1.18$ und $L/2x_0 = 0.254$ sind die Spannungsintensitätsfaktoren unter Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen in einem Elementraster gemäß Bild 22.24 ermittelt worden. Die Ergebnisse können Tabelle 22.30 entnommen werden.

	exakt [5]	Funktional I	Differenz	Funktional II	Differenz
K_1/p	1.29	1.266	1.9%	1.258	2.5%

Tabelle 22.30: Spannungsintensitätsfaktor K_1 für $y_0/x_0 = 0.997$, $x_0 = 1.18$, $L/2x_0 = 0.254$

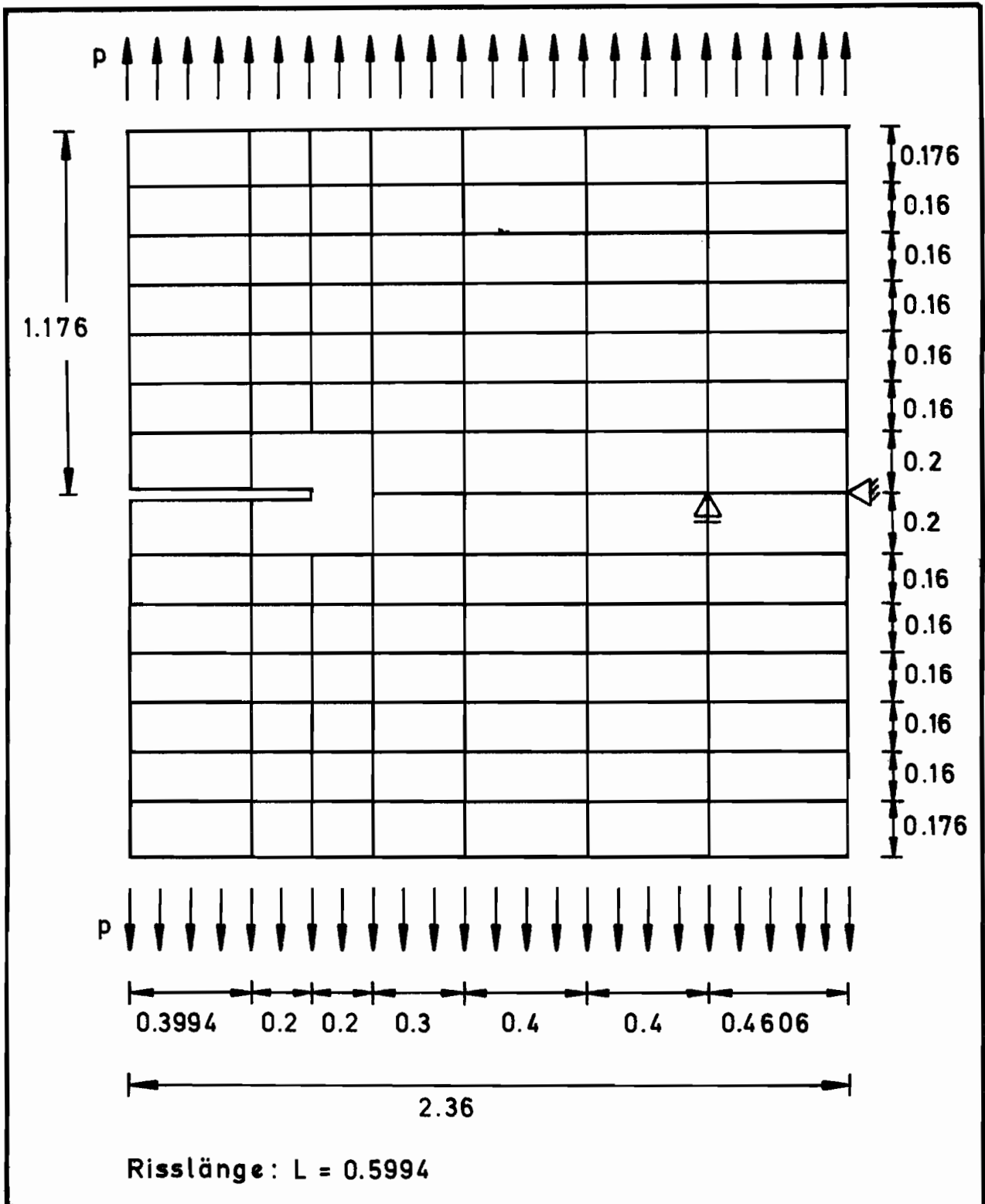


Bild 22.24 : Elementeinteilung für eine Scheibe mit Aussenriss ($y_0/x_0 = 0.997$, $x_0 = 1.18$, $L/2x_0 = 0.254$, 239 Freiheitsgrade bei Verwendung von Elementen mit linearen Randverschiebungen)

23 Zusammenfassung

Für Differentialgleichungsprobleme mit kritischen Teilbereichen erweist es sich als effektiv, den lokalen Lösungscharakter zu analysieren und in die numerische Rechnung einfließen zu lassen. Als Beispiele, bei welchen sich der Aufwand einer analytischen Untersuchung lohnt, werden Scheibenprobleme mit Löchern, Ecken und Rissen betrachtet, in denen man es mit Spannungskonzentrationen bzw. Spannungssingularitäten auf einem Teil der Randkurve zu tun hat. Wie die Beispielrechnungen gezeigt haben, erweist es sich als günstig, neben den Standardverschiebungselementen für verbleibende kritische Bereiche spezielle Verschiebungselemente zu verwenden, in denen Ansatzfunktionen eingehen, welche nicht nur das Differentialgleichungssystem sondern auch die Randbedingungen auf dem Elementrand exakt erfüllen. Zur Ermittlung der Funktionen, welche das Differentialgleichungssystem und betrachtete Teilrandbedingungen erfüllen, wird die komplexe Funktionentheorie herangezogen und insbesondere die konforme Abbildung als Hilfsmittel zur Behandlung der Randbedingungen verwendet. Konkret werden Ansatzfunktionen hergeleitet für Elemente mit einem kreisförmigen oder elliptischen Loch, für Elemente mit Innen- oder Außenriß sowie für Elemente mit spitzer einspringender Ecke.

Insgesamt werden drei Wege aufgezeigt, wie man mit den die Differentialgleichung erfüllenden Ansätzen zu (Verschiebungs-) Elementbeziehungen kommt. Jede dieser Methoden läßt sich letztendlich unter dem Gesichtspunkt sehen, geeignete Verknüpfungsmatrizen zwischen den Ansatzfreiwerten und den Elementknotenwerten zu erhalten, um schließlich eine Kopplung mit anderen Elementen zu ermöglichen. Geeigneter als eine Knotenpunktinterpolation, bei der es darum geht, daß die Ansätze die gewählten Knotenwerte annehmen, erscheinen hierbei die beiden Wege, zu welchen Randverschiebungsansätze benutzt werden, um zu einer optimalen Elementkopplung zu kommen, in der nicht nur die diskreten Knotenwerte, sondern auch die Funktionsverläufe zwischen den Knoten voll berücksichtigt werden. Innerhalb der Vorgehensweise werden auf dem Elementrand die Verschiebungsansätze des Elementbereichs den Randverschiebungsansätzen angepaßt. Dies geschieht im erweiterten Funktional durch einen Zusatzterm, während bei dem nicht erweiterten Funktional die erwähnte Anpassung durch ein zusätzliches Fehlerquadratfunktional erfolgt und nicht durch die in der Literatur häufig beschriebene Methode, die Fehlerquadrat-terme zu dem betrachteten Funktional als Straffunktionen (penalty-functions) dazuzuaddieren. Koppelbar sind die hergeleiteten einzelnen speziellen Verschiebungselemente je nach Randverschiebungsansätzen mit linearen oder quadratischen Verschiebungselementen.

Literaturverzeichnis

- [1] AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (ASTM) : Special Technical Publication STP 463, Review of Developments in Plane Strain Fracture Toughness Testing, Philadelphia 1970
- [2] ASTM : Specials Technical Publication STP 381, Fracture toughness testing, Philadelphia 1965
- [3] BATHE, K.-J., WILSON, E.L.: Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1976
- [4] BOWIE, O.L.: Rectangular tensile sheet with symmetric edge cracks. J. Appl. Mech. 31 (1964), S. 208 - 212
- [5] BOWIE, O.L., NEAL, D.M.: Single edge crack in rectangular tensile sheet. J. Appl. Mech. 32 (1965), S. 708 - 709
- [6] BRONSTEIN, I.N., SEMENDJAJEW, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Zürich/ Frankfurt/M. 1971
- [7] BYSKOV, E.: The calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements. Int. J. Fract. Mech. 6 (1970), S. 159 - 167
- [8] COURANT, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung 2 . Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg 1972
- [9] GALLAGHER, R.H.: Finite-Element-Analysis. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York 1976
- [10] GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Springer-Verlag, Wien 1963.
- [11] HAHN, H.G.: Bruchmechanik. B.G. Teubner, Stuttgart 1976
- [12] HENRICI, P., JELTSCH, R.: Komplexe Analysis für Ingenieure. Band 1, UTB Birkhäuser, Basel/ Stuttgart 1977
- [13] KRATZIG, W.B., SCHMID, G. u. THIERAUF, G.: Überblick über die Methode der finiten Elemente für Probleme der linearen Statik. Finite Berechnungsmethoden im Konstruktiven Ingenieurbau, Tagung am 6. Okt. 1976, Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilung Nr. 76-8 (1976), S. I.1 - I. 87

- [14] LEHMANN, TH.: Elemente der Mechanik II : Elastostatik. Vieweg, Braunschweig 1975
- [15] LEHMANN, TH.: Elemente der Mechanik IV : Schwingungen und Variationsprinzipie. Friedr. Vieweg, Braunschweig/ Wiesbaden 1979
- [16] LEIPHOLZ, H.: Einführung in die Elastizitätstheorie. G. Braun, Karlsruhe 1968
- [17] LIN, K.Y., TONG, P.: Singular finite elements for the fracture analysis of V-notched plate. Int. J. num. Meth. in Engng. 15 (1980), S. 1343 - 1354
- [18] MANGOLDT, H.v., KNOPP, K.: Einführung in die höhere Mathematik. Band 3, Hirzel Verlag Stuttgart 1978
- [19] MUBCHELISCHWILI, N.I.: Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie. Carl Hanser Verlag, München 1971
- [20] PIAN, T.H.H., TONG, P.: Basis of finite element methods for solid continua. Int. J. num. Meth. in Engng. 1 (1969), S. 3 - 28
- [21] ROBINSON, J.: Integrated Theory of Finite Element Methods. John Wiley & Sons, London/ New York 1973
- [22] RUOFF, G.: Die praktische Berechnung der Kopplungsmatrizen bei der Kombination der Trefftzschen Methode und der Methode der finiten Elemente bei flachen Schalen. Beitrag aus: Finite Elemente in der Statik. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin/ München/ Düsseldorf 1973
- [23] SIH, G.C., PARIS, P.C., ERDOGAN, F.: Crack-tip, stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems. J. Appl. Mech. 29 (1962), S. 306 - 312
- [24] SIH, G.C. (Ed.): Mechanics of fracture 1: Methods of analysis and solutions of crack problems. Noordhoff International Publishing, Leyden 1973
- [25] SMIRNOW, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik. Band 1 bis 6, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1979
- [26] SOKOLNIKOFF, I.S.: Mathematical Theory of Elasticity. Mc Graw-Hill, New York/ Toronto/ London 1956

- [27] SPIEGEL, M.R.: Einführung in die höhere Mathematik. Schaum's Outline, Mc Graw-Hill, Düsseldorf 1977

- [28] SPIEGEL, M.R.: Complex Variables. Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, New York 1964

- [29] STEIN, E. und WUNDERLICH, W.: Finite-Element-Methoden als direkte Variationsverfahren der Elastostatik. Sonderdruck aus: Finite Elemente in der Statik. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin/ München/ Düsseldorf 1973

- [30] STEIN, E.: Die Kombination des modifizierten Trefftz'schen Verfahrens mit der Methode der finiten Elemente. Beitrag aus: Finite Elemente in der Statik. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin/ München/ Düsseldorf 1973

- [31] STRANG, G., FIX G.J.: An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1973

- [32] TIMOSHENKO, S.P. und GOODIER, J.N.: Theory of Elasticity. 3rd Edition, Mc Graw-Hill, New York 1970

- [33] TONG, P., PIAN, T.H.H., LASRY, S.J.: A hybride element approach to crack problems in plane elasticity. Int. J. num. Meth. in Engng. 7 (1973), S. 297 - 308

- [34] TREFFTZ, E.: Ein Gegenstück zum Ritz'schen Verfahren. 2. Int. Kongr. f. Techn. Mech., Zürich 1926, S. 131 - 137

- [35] WILLIAMS, M.L.: Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. J. Appl. Mech. (1952), S. 526 - 528

- [36] WUNDERLICH, W.: Verallgemeinerte und nichtlineare Finite-Element-Modelle. Beitrag aus: Finite-Element-Methoden - Seminar an der Ruhr-Universität Bochum 1974, Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilung Nr. 74-1 (1974), S. 5.1 - 5.34

- [37] ZIENKIEWICZ, O.C.: Methode der finiten Elemente. Carl Hanser Verlag, München/ Wien 1975

Zusätzlich wurden für Kap. 22 konkrete Zahlenbeispiele entnommen aus:

- [38] Howland, R.C.J.: On the stresses in the neighbourhood of a circular hole in a strip under tension. Phil. Trans. Roy. Soc. , London , A 229 (1930), S.49 - 86
- [39] Sawin, G.N.: Spannungserhöhung am Rande von Löchern. VEB-Verlag Technik, Berlin 1956 , S. 150 - 154
- [40] Weber, C.: Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern. Z. angew. Math. Mech. 2 (1922), S. 267 - 273

Als Übersichtsbuch zu der in Kap. 2 erwähnten Boundary-Element-Methode sei genannt:

- [41] Brebbia, C.A.: The Boundary Element Method for Engineers. Pentech Press, London 1978

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 32**