



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Georg Zander

Zur Bestimmung von
Verzweigungslasten dünnwandiger
Kreiszyylinder unter kombinierter
Längs- und Torsionslast

Heft Nr. 27



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

GEORG ZANDER

ZUR BESTIMMUNG VON VERZWEIGUNGSLASTEN DONNWANDIGER
KREISZYLINDER UNTER KOMBINIRTER LÄNGS- UND TORSIONSLAST

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 27

SEPTEMBER 1981

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistententätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann und Herrn Prof. Dr.-Ing. O. Bruhns danke ich für die Anregung und Unterstützung der Arbeit sowie für die Übernahme der Referate.

Eingereicht am: 27.4.81

Referent: Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Otto Bruhns

Tag der Promotion: 6.8.81

© 1981 Dr.-Ing. Georg Zander

Munscheider Str. 198, 463 Bochum 6

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Verzweigungslasten elasto-plastisch deformierter, dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast berechnet. Dabei wird auch die Grunddeformation als endliche elasto-plastische Deformation berücksichtigt und die Verzweigungslasten in Abhängigkeit von der Geometrie des spannungsfreien Ausgangszustandes angegeben. Für den plastischen Anteil der Deformation wird neben der Normalenregel auch die Auswirkung eines Abweichens von der Normalenregel auf die Verzweigungslasten untersucht. Den theoretisch ermittelten Ergebnissen werden die experimentell an Proben aus Al Cu Mg Pb gefundenen Verzweigungslasten gegenübergestellt.

Summary

The present paper deals with the bifurcation of thin-walled cylinders under torsional and axial loading in the elasto-plastic range. The bifurcation occurs after finite elasto-plastic deformation, and the calculated results are presented as a function of the geometry in the stress-free initial state. The plastic part of the deformation is mostly described by the Normality-rule. In this paper also deviations from the Normality-rule and its influence on the bifurcation is regarded. The theoretical results are compared with some necking-experiments made with specimens of Al Cu Mg Pb.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
<u>Bezeichnungen</u>	3
<u>1. Einführung</u>	4
<u>2. Beschreibung der Deformationen</u>	9
<u>3. Spannungen</u>	15
<u>4. Stoffgesetz</u>	19
<u>5. Grunddeformation</u>	25
5.1. Zylinderkoordinaten	25
5.2. Geometrie der Grunddeformation	27
5.3. Spannungen der Grunddeformation	30
5.4. Gleichungssystem der Grunddeformation	32
<u>6. Verzweigungslasten</u>	34
6.1. Feldgleichungen	34
6.2. Randbedingungen	38
6.3. Lösungsansätze	40
<u>7. Theoretische Lösung</u>	48
7.1. Ermittlung der Werkstoffkenngrößen	48
7.2. Numerische Behandlung	53
7.3. Darstellung und Diskussion der Ergebnisse	55
<u>8. Experimentelle Untersuchungen</u>	68
8.1. Versuchsdurchführung	68
8.2. Darstellung und Diskussion der Ergebnisse	71
<u>9. Zusammenfassung und Ausblick</u>	80

	Seite
<u>Anhang</u>	82
<u>Literaturverzeichnis</u>	87
<u>Verzeichnis der bereits erschienen Hefte der Schriftenreihe</u>	92

Bezeichnungen

$(\underline{\quad})$	Vektor im euklidischen Raum
$(\underline{\underline{\quad}})$	Tensor 2. Stufe
$(\underline{\underline{\quad}})^{-1}$	Inverse eines Tensors
$(\underline{\underline{\quad}})^T$	Transponierte eines Tensors
$Sp(\underline{\underline{\quad}})$	Spur eines Tensors
$\underline{\underline{1}}$	Einstensor
$(\underline{\underline{\quad}}) \cdot (\underline{\underline{\quad}})$	Verjüngendes Produkt
$(\underline{\quad})$	Vektor im n-dimensionalen Vektorraum
$(\underline{\underline{\quad}})$	n x n Matrix

Alle weiteren, nicht einzeln aufgeführten Bezeichnungen und Abkürzungen werden im Text erläutert oder sind allgemein gebräuchlich. Im übrigen gelten für das Rechnen mit Tensoren die in [26] erläuterten Rechenregeln.

1. Einführung

Für den Ingenieur hat die Bestimmung der Traglast von Konstruktionen eine große Bedeutung. Entscheidend für die Tragfähigkeit ist dabei oft der Verlust der Stabilität. Nach Erreichen der Stabilitätsgrenze führen geringe Laststeigerungen zum Versagen des Materials. Das bekannteste Beispiel ist wohl der ausknickende Druckstab. Für elastisches Materialverhalten existiert eine gut ausgebaute Stabilitätstheorie. Stellvertretend für eine große Anzahl von Autoren seien hier die zusammenfassenden Darstellungen von PFLÜGER [1] und FLÜGGE [2] erwähnt. Die Theorie der Stabilität elasto-plastisch deformierter Körper ist dagegen weit weniger gut entwickelt. Man muß insbesondere bei Berücksichtigung plastischen Materialverhaltens auf eine genaue Bestimmung des Stabilitätsbegriffs achten, da der Unterschied zwischen der Stabilitätsgrenze (Verzweigung), bei der ein Gleichgewicht in verschiedenen Deformationszuständen möglich ist, und der Maximallast, die ein Körper aufnehmen kann, oft ausgeprägt ist. Da eine über die Verzweigungslast hinausgehende Laststeigerung immer mit einer großen Zunahme der Deformationen verbunden ist, wird mit Erreichen der Verzweigung für die meisten Konstruktionen die Grenze der zulässigen Belastung erreicht sein. Die vorliegende Arbeit befaßt sich deshalb mit der Bestimmung von Verzweigungslasten für den unter kombinierter Längs- und Torsionslast elasto-plastisch deformierten, dünnwandigen Kreiszyylinder.

Ein kurzer Rückblick auf die Entwicklung der Stabilitätstheorie zeigt, daß der Unterschied zwischen Verzweigungslast und Maximallast lange Zeit nicht erkannt wurde.

Die ersten Ansätze einer Stabilitätstheorie gehen bereits auf EULER zurück. Er gab 1744 die kritische Last für einen Druckstab bei linear elastischem Werkstoffverhalten an. ENGESSER erweiterte die EULERSchen Betrachtungen 1889 auf nichtlineares Werkstoffverhalten, indem er den Elastizitätsmodul der EULERSchen Theorie durch den Tangentenmodul

des Spannungs-Dehnungsdiagramms ersetzte. Einer Anregung von CONSIDÈRE folgend modifizierte ENGESSER seine Theorie 1895 und führte einen reduzierten Modul ein, der die beim Knicken des Druckstabes auftretenden örtlichen Entlastungen und anschließenden elastischen Belastungen berücksichtigen sollte. ENGESSER gab auch noch eine allgemeine Herleitung für den reduzierten Modul an, die dann 1910 durch v. KÄRMÀN aufgegriffen und an einigen Beispielen ausgeführt wurde. Obwohl Versuche eher die auf dem Tangentenmodul basierende Theorie ENGESSERS zu bestätigen schienen, wurde die Theorie des reduzierten Moduls lange für exakt gehalten, bis SHANLEY 1946 und 1947 in zwei Arbeiten [3] und [4] zeigte, daß mit der auf dem Tangentenmodul basierenden Theorie die Verzweigungslast, mit der Theorie des reduzierten Moduls aber die Maximallast bestimmt wird.

Nachdem von SHANLEY der Unterschied zwischen dem Problem der Verzweigung des Gleichgewichts und dem Problem der maximalen Tragfähigkeit herausgearbeitet worden war, entwickelte HILL 1956 - 62 die Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Stabilität und Eindeutigkeit. In [5] bestimmte HILL zunächst die Bedingungen für die Eindeutigkeit von Lösungen des Verzweigungsproblems bei starr-plastischem Materialverhalten. Diese Betrachtungen erweiterte er in [6] auf das Problem der Maximallast und in [7] und [8] auf elasto-plastisches Materialverhalten.

Ausgehend von der von HILL entwickelten Theorie sind seither eine Vielfalt von Einzelproblemen behandelt worden. Eine Reihe dieser Arbeiten beschäftigt sich mit der Bestimmung von Verzweigungs- und Maximallasten für den Druckstab. Auch das Einschnüren von Zugproben kann, wie einige Autoren zeigen, als Verzweigungsproblem gedeutet werden. Daneben wurde die Stabilitätstheorie auch auf Platten, Scheiben und Schalen angewandt. Einen guten Überblick über die neueren Arbeiten gibt BRUHNS in [17].

Unter den Schalen nimmt die Kreiszylinderschale wegen ihrer einfachen Geometrie eine Sonderstellung ein. Von vielen Autoren wurde deshalb das Stabilitätsverhalten des Kreiszylin-

ders unter verschiedenen Belastungen wie Axiallast, Innen- bzw. Außendruck und Torsion untersucht.

Neben BIJLAARD [9], GERARD [10], LEE und ADES [11] seien hier die Arbeiten von BATTERMAN [12], ARIARATNAM und DUBEY [13], CHENG, ARIARATNAM und DUBEY [14] sowie von NEALE [15] und [16] und BRUHNS [17] - [19] erwähnt.

Bei der durch Torsion und Längslast belasteten Kreiszyllinderschale wie auch bei Stäben und Platten kann bis zum Erreichen der Verzweigungslast zumindest näherungsweise ein homogener Spannungszustand (Grundzustand) angenommen werden. Dagegen erhält man bei der durch Innen- bzw. Außendruck belasteten Schale, bei der auch im dünnwandigen Fall, bedingt durch die an Innen- bzw. Außenrand unterschiedlichen Randbedingungen, eine Abhängigkeit der Spannungen von der radialen Richtung zu beachten ist, sowie bei dickwandigen durch Torsion beanspruchten Kreiszyllindern eine inhomogene Spannungsverteilung im Grundzustand. Für die im Vergleich zu den Problemen mit homogenem Grundzustand schwierigeren Probleme mit inhomogenem Grundzustand existieren bisher nur Lösungen für starr-plastisches Werkstoffverhalten. Literaturhinweise gibt BRUHNS in [17].

Bei den Arbeiten, die sich mit der Längs- bzw. Torsionsbelastung dünnwandiger Kreiszyllinderschalen bei elasto-plastischem Materialverhalten beschäftigen, wurde bisher immer eine lineare Werkstoffverfestigung angenommen. Wie schon von BRUHNS in [19] vorgeschlagen wird, ist für eine praxisbezogene Aussage von einem realistischen nicht linearen Verfestigungsverhalten auszugehen. Außerdem wird von allen Autoren ein bekannter Grundzustand vorausgesetzt und die ermittelten Verzweigungslasten in Abhängigkeit von der Geometrie des Grundzustandes angegeben. Diese Art der Darstellung ist aber nur für kleine Deformationen aus dem spannungslosen Ausgangszustand in den Grundzustand (Grunddeformation) zulässig. Näherungen wie sie z.B. in [19] für die Berechnung des Ausgangszustandes aus dem Grundzustand angegeben werden, können nur für lineare Verfestigung sinnvoll angewandt werden, da sich bei einer Berücksichtigung

realen Werkstoffverhaltens während der Grunddeformation nicht nur die Geometrie sondern auch der, für die Ermittlung der Verzweigungslasten entscheidende Verfestigungszustand ändert.

In der vorliegenden Arbeit wird deshalb, neben der Berücksichtigung realen Werkstoffverhaltens bei der Bestimmung der Verzweigungslasten, auch die Grunddeformation als endliche elasto-plastische Deformation, entsprechend einer Theorie, wie sie zusammenfassend von LEHMANN in [22] dargestellt wird, mit einbezogen. Außerdem wird, einem Vorschlag von BRUHNS in [17] folgend, der Einfluß einer Abweichung von der Normalenregel für die Beschreibung des plastischen Anteils der Deformation untersucht, wobei ein von LEHMANN in [21] vorgeschlagenes Stoffgesetz angewandt wird.

Im ersten Teil der Arbeit werden die Grundlagen zur Beschreibung endlicher elasto-plastischer Deformationen und die für die Bestimmung der Verzweigungslasten benötigten grundlegenden Beziehungen zusammengestellt.

Dabei wird isotropes Materialverhalten angenommen. Außerdem werden quasistatische Deformationen vorausgesetzt, sodaß Trägheitswirkungen vernachlässigt werden können, und die durch irreversible Anteile der plastischen Deformation entstehende Wärme abgeführt werden kann, also isothermes Verhalten gilt. Darüber hinaus wird das Eigengewicht vernachlässigt.

Im folgenden wird aus den Grundlagen das Gleichungssystem der Grunddeformation hergeleitet. Dieses im allgemeinen partielle Differentialgleichungssystem läßt sich unter der Annahme inkompressiblen Materialverhaltens in ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen überführen, das mit den bekannten Größen des Ausgangszustandes ein Anfangswertproblem bildet.

Im dritten Teil werden dann die Feldgleichungen und Randbedingungen zur Bestimmung der Verzweigungslasten formuliert, aus denen sich unter Berücksichtigung physikalisch sinnvoller Lösungsansätze ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen ergibt. Die Verzweigungslasten ergeben sich als Eigenwerte des aus diesen Gleichungen zusammen mit den Randbedin-

gungen gebildeten Randwertproblems.

Im weiteren werden nach Ermittlung der Werkstoffkenngrößen aus Versuchen mit der Aluminiumlegierung Al Mg Cu Pb und einem Überblick über das numerische Lösungsverfahren die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen zusammengestellt und diskutiert.

Im letzten Abschnitt werden schließlich die zur Überprüfung der Theorie durchgeführten Beulversuche erläutert und die Ergebnisse mit denen der Theorie verglichen.

2. Beschreibung der Deformationen

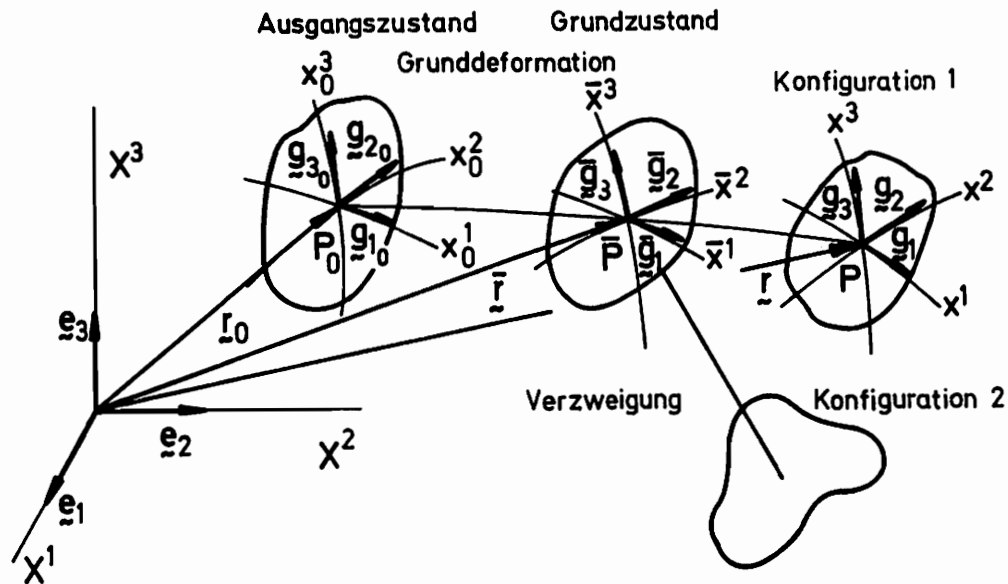


Abb. 1

Ein im Ausgangszustand spannungsfreier Körper wird durch die Grunddeformation in einen beliebigen Grundzustand überführt. Bei einem Andauern der Grunddeformation nimmt der Körper nach einem Zeitschritt die Konfiguration 1 an. Eine Verzweigung des Gleichgewichts liegt dann vor, wenn im Grundzustand neben dem aus der Grunddeformation bekannten Geschwindigkeitsfeld mindestens ein weiteres, mit den Randbedingungen verträgliches Geschwindigkeitsfeld existiert, das den Körper in eine von der Konfiguration 1 verschiedene Konfiguration 2 überführt.

Zur Beschreibung der Raumpunkte führen wir ein kartesisches Koordinatensystem X^i mit den Basisvektoren \underline{e}_i ein. In dem kartesischen Bezugssystem definieren wir mit

$$x^i = x^i(X^j, t) \quad (2.1)$$

ein krummliniges Koordinatensystem x^i .

Für jeden Punkt des Raumes mit dem dazu gehörigen Ortsvektor \underline{x} ergeben sich im krummlinigen Koordinatensystem Basisvektoren, die sich wie in [26] angegeben zu

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{x}}{\partial x^i} \quad (2.2)$$

ermitteln lassen.

Über die Beziehung

$$\underline{g}^k \cdot \underline{g}_i = \delta_i^k \quad (2.3)$$

werden die reziproken Basisvektoren \underline{g}^k definiert. Dabei ist δ_i^k das Kroneckersymbol, das durch

$$\begin{aligned} \delta_i^k &= 0 \quad \text{für } i \neq k \\ \delta_i^k &= 1 \quad \text{für } i = k \end{aligned} \quad (2.4)$$

definiert ist.

Durch skalare Multiplikation der Basisvektoren erhalten wir die Metrik

$$\begin{aligned} \underline{g}_i \cdot \underline{g}_j &= g_{ij} \\ \underline{g}^i \cdot \underline{g}^j &= g^{ij} \end{aligned} \quad (2.5)$$

die wir, wie in [26] gezeigt, zum Herauf- bzw. Herunterziehen der Indizes gebrauchen.

Aus der Ableitung der Metrik nach den Koordinaten ergeben sich die Christoffelsymbole zu

$$\Gamma_{lm}^k = \frac{1}{2} g^{kn} (g_{mn,l} + g_{nl,m} - g_{lm,n}). \quad (2.6)$$

Durch Ableitung tensorieller Größen nach den Koordinaten erhalten wir beispielsweise als Gradienten eines Vektors

$$\text{Grad } \underline{a} = \frac{\partial \underline{a}}{\partial x^k} \underline{g}^k = a^i|_k \underline{g}_i \underline{g}^k. \quad (2.7)$$

Die Divergenz eines Tensors 2. Stufe ist z.B.

$$\text{Div } \underline{\underline{A}} = \frac{\partial \underline{\underline{A}}}{\partial x^k} \cdot \underline{g}^k = A^{ij}|_j \underline{g}_i = A_i{}^j|_j \underline{g}^i \quad (2.8)$$

mit

$$a^i|_k = a^i{}_{,k} + \Gamma_{km}^i a^m \quad (2.9)$$

$$A_i{}^j|_k = A_i{}^j{}_{,k} - \Gamma_{ik}^m A_m{}^j + \Gamma_{km}^j A_i{}^m$$

als kovarianter Ableitung eines Vektors bzw. Tensors 2. Stufe.

Wir wollen nun mit x_0^i die Koordinaten aller Körperpunkte im Ausgangszustand bezeichnen. Die Größen x_0^i benutzen wir im folgenden zur Identifikation der Körperpunkte. Die Deformation eines Körpers ist somit vollständig beschrieben, wenn zu jedem Zeitpunkt t die Koordinaten der Körperpunkte, die wir der Einfachheit halber ebenfalls mit x^i bezeichnen wollen, als Funktionen der x_0^i bekannt sind.

$$x^i = x^i(x_0^j, t) \quad (2.10)$$

Die Geschwindigkeit eines Körperpunktes gegenüber dem Raum ergibt sich aus der zeitlichen Änderung des zu dem Körperpunkt zeigenden Vektors \underline{r} .

$$\underline{v} = \frac{D\underline{r}}{dt} \quad (2.11)$$

Dabei ist $\frac{D}{dt}$ die Zeitableitung bei festgehaltenen x_0^i (substantielle Zeitableitung), die wir im folgenden mit

($\dot{\quad}$) kennzeichnen wollen.

Da $\underline{r} = \underline{r}(x^i)$ ist, erhält man

$$\underline{v} = \frac{\partial x^i}{\partial t} \underline{g}_i = \dot{x}^i \underline{g}_i = v^i \underline{g}_i. \quad (2.12)$$

Bei der zeitlichen Änderung eines zu einem Körperpunkt gehörenden Tensors ändert sich durch die Bewegung des Körperpunktes im Raum auch die zugehörige Basis $\underline{g}_i = \underline{g}_i(x^j)$. Man erhält

$$\dot{\underline{g}}_i = \underline{g}_{i,j} v^j = \underline{g}_{j,i} v^j, \quad (2.13)$$

was sich mit (2.6) und (2.9) auch zu

$$\dot{\underline{g}}_i = \Gamma^j_{ik} v^k \underline{g}_j = (v^j_{,i} - v^j_{,i}) \underline{g}_j \quad (2.14)$$

angeben läßt.

Über die Beziehung $(\underline{g}_i \cdot \dot{\underline{g}}^j) = \delta_i^j = 0$ läßt sich aus (2.14) für die reziproke Basis zeigen

$$\dot{\underline{g}}^i = (v^i_{,j} - v^i_{,j}) \underline{g}^j = -\Gamma^i_{jk} v^k \underline{g}^j. \quad (2.15)$$

Durch Anwendung von (2.7) auf den Geschwindigkeitsvektor \underline{v} erhalten wir den Geschwindigkeitsgradienten

$$\text{Grad } \underline{v} = \underline{\underline{U}} = v^i{}_{,k} \underline{g}_i \underline{g}^k. \quad (2.16)$$

Aus dem Geschwindigkeitsgradienten läßt sich durch Aufspalten der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit $\underline{\underline{D}}$ als symmetrischer Anteil und der die Starrkörperrotationen beschreibende Tensor $\underline{\underline{W}}$ als unsymmetrischer Anteil herleiten.

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}^T) \quad (2.17)$$

$$\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{U}}^T)$$

Die Maßzahlen von $\underline{\underline{D}}$ und $\underline{\underline{W}}$ ergeben sich zu

$$d_k^i = \frac{1}{2} (v^i|_k + v_k|i) \quad (2.18)$$

$$\omega^i_k = \frac{1}{2} (v^i|_k - v_k|i) ,$$

wobei sich $v_k|i$ aus

$$v_k|i = g_{kr} \cdot v^r|_j g^{ji} \quad (2.19)$$

bestimmen läßt.

Neben der mit (2.10) beschriebenen gibt es auch noch eine andere Möglichkeit, die Deformationen zu beschreiben. Der Vektor $d\underline{\underline{x}}_0$ zeigt im Ausgangszustand von einem Körperpunkt zu einem infinitesimal benachbarten Körperpunkt. Die gleichen Körperpunkte verbindet im deformierten Zustand der Vektor $d\underline{\underline{x}}$. Die Deformation ist vollständig beschrieben, wenn zu jedem Zeitpunkt der zum Vektor $d\underline{\underline{x}}_0$ gehörende Vektor $d\underline{\underline{x}}$ bekannt ist. Die Abbildung von $d\underline{\underline{x}}_0$ auf $d\underline{\underline{x}}$ erfolgt durch den Deformationsgradienten $\underline{\underline{F}}$.

$$d\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{F}} d\underline{\underline{x}}_0 \quad (2.20)$$

Da bei festgehaltener Zeit

$$d\underline{\underline{x}} = dx^i \underline{\underline{g}}_i = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} dx_0^j \underline{\underline{g}}_i \quad (2.21)$$

und

$$d\underline{\underline{x}}_0 = dx_0^i \underline{\underline{g}}_{i_0} , \quad \underline{\underline{g}}_{i_0} = \underline{\underline{g}}_i(x_0^j)$$

ergibt sich aus (2.20)

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} \underline{\underline{g}}_i \underline{\underline{g}}_0^j . \quad (2.22)$$

Führt man die substantielle Ableitung von (2.22) durch, so erhält man unter Berücksichtigung von (2.14)

$$\dot{\underline{F}} = \underline{U} \underline{F} = v^i{}_{;k} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^j} g_i g_0^j . \quad (2.23)$$

Die Änderung eines Volumenelementes dV wird durch die Funktionaldeterminante J beschrieben

$$\frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \quad J = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho} \quad dV = \frac{dM}{\rho}$$

$$dV = J dV_0 \Rightarrow J = \frac{\rho}{\rho_0} , \quad (2.24)$$

mit ρ und ρ_0 als Dichte im deformierten und im Ausgangszustand. Man erhält J aus der Determinante der Maßzahlen des Deformationsgradienten und der Metrik nach [27] zu

$$J = \frac{\sqrt{|g_{ik}|}}{\sqrt{|g_{ik_0}|}} * |F^i{}_{;j}| . \quad (2.25)$$

Die substantielle Änderung von J ergibt sich aus (2.25) zu

$$\dot{J} = S_p \underline{U} J = v^i{}_{;i} J . \quad (2.26)$$

3. Spannungen

Im deformierten Zustand des Körpers wirkt auf einem Flächenelement dA mit dem Flächennormalenvektor $d\underline{A}$ eine Kraft $d\underline{f}$.

Der CAUCHY Spannungstensor ist dann definiert durch

$$d\underline{f} = \underline{\underline{S}} d\underline{A} . \quad (3.1)$$

Seine Maßzahlen bezüglich der raumfesten Basis \underline{g}_i bzw. \underline{g}^k sind gegeben durch

$$\underline{\underline{S}} = \sigma_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k . \quad (3.2)$$

Das Flächenelement im Körper, das im deformierten Zustand durch $d\underline{A}$ gekennzeichnet ist, wird im undeformierten Zustand durch den Flächennormalenvektor $d\underline{A}_0$ beschrieben. Wir definieren den LAGRANGESchen Spannungstensor durch

$$d\underline{f} = \underline{\underline{S}}_L d\underline{A}_0 . \quad (3.3)$$

Mit (2.20) und (2.24) läßt sich zeigen, daß

$$d\underline{A} \underline{\underline{F}} = \mathcal{J} d\underline{A}_0 \quad (3.4)$$

ist, sodaß sich aus (3.1) und (3.2) ergibt

$$\underline{\underline{S}}_L = \mathcal{J} \underline{\underline{S}} \cdot (\underline{\underline{F}}^{-1})^T . \quad (3.5)$$

Neben dem LAGRANGESchen Spannungstensor, der insbesondere auch zur Formulierung der Randbedingungen benötigt wird, da ja im allgemeinen die Lage der Randflächen des deformierten Körpers unbekannt sind, verwenden wir noch den KIRCHHOFF Spannungstensor

$$\underline{\underline{S}}_K = \mathcal{J} \underline{\underline{S}} = s_k^i \underline{g}_i \underline{g}^k . \quad (3.6)$$

Für die Maßzahlen gilt

$$s_k^i = J \sigma_k^i . \quad (3.7)$$

Die Verwendung dieses Tensors gestattet es uns, die aus dem Stoffgesetz hergeleiteten Gleichungen auf die Dichte im Ausgangszustand zu beziehen. Der Tensor $\underline{\underline{S}}_K$ läßt sich aufspalten in den Deviator $\underline{\underline{T}}_K$ und den durch den hydrostatischen Druck bestimmten Kugeltensor

$$\underline{\underline{T}}_K = \underline{\underline{S}}_K - \frac{1}{3} S_p (\underline{\underline{S}}_K) \underline{\underline{1}} \quad (3.8)$$

mit den Maßzahlen

$$t_k^i = s_k^i - \frac{1}{3} s_r^r \sigma_k^i . \quad (3.9)$$

Neben den Spannungstensoren selbst benötigen wir auch deren Zeitableitungen. Aus

$$\dot{\underline{\underline{S}}} = \frac{D}{dt} (\sigma_k^i g_i g^k) \quad (3.10)$$

ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.14) und (2.15)

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{S}}} &= \{ \dot{\sigma}_k^i + \sigma_k^r (v^i{}_{,r} - v^r{}_{,i}) \\ &+ \sigma_r^i (v^r{}_{,k} - v^k{}_{,r}) \} g_i g^k . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die substantielle Ableitung von (3.5) führt mit (2.23) und (2.26) auf

$$\dot{\underline{\underline{S}}}_L = J (\dot{\underline{\underline{S}}} + \underline{\underline{S}} S_p \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{U}}^T) \cdot (\underline{\underline{E}}^{-1})^T, \quad (3.12)$$

und aus (3.6) erhält man mit (2.26)

$$\dot{\underline{\underline{S}}}_K = J (\dot{\underline{\underline{S}}} + \underline{\underline{S}} S_p \underline{\underline{U}}) . \quad (3.13)$$

Mit (3.7) und (3.11) ergibt sich damit unter Berücksichti-

gung von (2.26)

$$Sp(\dot{\underline{S}}_K) = \dot{s}^r. \quad (3.14)$$

Zur Elimination der bei Starrkörperrotationen auftretenden Anteile der substantiellen Ableitung führen wir die objektive Zeitableitung nach JAUMANN ein.

$$\dot{\underline{S}}^{\circ} = \dot{\underline{S}} - \underline{W} \cdot \underline{S} + \underline{S} \cdot \underline{W} \quad (3.15)$$

Unter Berücksichtigung von (3.11) und (2.18) ergibt sich für die Maßzahlen von $\dot{\underline{S}}$

$$\begin{aligned} \sigma_K^i l_o &= \dot{\sigma}_K^i + \sigma_K^r d_r^i - \sigma_r^i d_K^r \\ &+ \sigma_r^i v_{,K}^r - \sigma_K^r v_{,r}^i. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Bilden wir die JAUMANN Ableitung $\dot{\underline{T}}_K$, so ergibt sich durch Anwendung von (3.15) auf (3.8)

$$\dot{\underline{T}}_K = \dot{\underline{S}}_K - \frac{1}{3} Sp(\dot{\underline{S}}_K) \underline{1}. \quad (3.17)$$

Mit (3.16) und (3.14) ergeben sich daraus die Maßzahlen

$$\begin{aligned} t_K^i l_o &= \dot{t}_K^i + t_K^r d_r^i - t_r^i d_K^r + t_r^i v_{,K}^r - t_K^r v_{,r}^i \\ &= \dot{s}_K^i + s_K^r d_r^i - s_r^i d_K^r + s_r^i v_{,K}^r - s_K^r v_{,r}^i \\ &- \frac{1}{3} \dot{s}^r \delta_K^i. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aus (3.18) erhalten wir

$$Sp(\underline{T}_K \dot{\underline{T}}_K) = t_K^i \dot{t}_i^K. \quad (3.19)$$

Die Spannungen müssen den Gleichgewichtsbedingungen genügen, die sich bei Fehlen von volumenhaft verteilt angreifenden Kräften und Vernachlässigung von Trägheitskräften als

$$\text{Div } \underline{\underline{S}} = 0 \quad (3.20)$$

angeben lassen.

Das Gleichgewicht muß aber für jeden Körperpunkt zu jeder Zeit erfüllt sein, sodaß neben (3.20) auch gelten muß

$$(\text{Div } \underline{\underline{S}})^\cdot = 0 \quad (3.21)$$

Wie in [17] ausgeführt, läßt sich daraus nach einiger Rechnung herleiten

$$\text{Div } (\underline{\underline{S}}^\cdot + \underline{\underline{S}} S_P \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{U}}^T) = 0 \quad (3.22)$$

Bilden wir die JAUMANN Ableitung $\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K$ entsprechend (3.15), so erhalten wir unter Berücksichtigung von (2.17) u. (3.13)

$$\underline{\underline{S}}^\cdot + \underline{\underline{S}} S_P \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{U}}^T = \frac{1}{J} \overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K + \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{D}} \quad (3.23)$$

sodaß aus (3.22) folgt

$$\text{Div } (\frac{1}{J} \overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K + \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{D}}) = 0 \quad (3.24)$$

Unter Berücksichtigung von (2.8) folgt daraus für die Maßzahlen

$$(\frac{1}{J} s_k^i |_0 + \omega_k^r \sigma_r^i - \sigma_k^r d_v^i) |_i = 0 \quad (3.25)$$

mit der Ausführung entsprechend (2.9). $s_k^i |_0$ sind dabei die Maßzahlen von $\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K$.

4. Stoffgesetz

Das Stoffgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungsinkrementen. Wir müssen die Deformation in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufspalten, da beide Anteile unterschiedlichen Stoffgesetzen gehorchen. Diese Aufspaltung kann auf verschiedene Arten erfolgen, die jedoch wie in [22] gezeigt, alle auf eine additive Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit in einen elastischen und einen plastischen Anteil führen.

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_e + \underline{\underline{D}}_p \quad (4.1)$$

Da bei Metallen die elastischen Deformationen klein sind, können wir für den elastischen Anteil ein hypoelastisches Stoffgesetz der Form

$$\underline{\underline{D}}_e = \frac{1}{2G} \left(\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K) \underline{\underline{1}} \right) \quad (4.2)$$

annehmen, vgl. [22]. Bilden wir $\text{Sp}(\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K)$ entsprechend (3.15), so ergibt sich aus (4.2)

$$\underline{\underline{D}}_e = \frac{1}{2G} \left(\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\overset{\circ}{\underline{\underline{S}}}_K) \underline{\underline{1}} \right). \quad (4.3)$$

Für den plastischen Anteil der Deformation wählen wir den Ansatz

$$\underline{\underline{D}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{S}}_K} + \alpha \dot{\underline{\underline{I}}}_K. \quad (4.4)$$

Darin ist $\dot{\lambda}$ eine positive skalare Funktion der Spannungen und F die Fließbedingung, die im Spannungsraum die Grenze des Bereichs rein elastischer Deformationen angibt. Die Größe $\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{S}}_K}$ stellt die Normale zur Fließfläche dar. Deshalb wird der erste Anteil des Stoffgesetzes für die plastische Deformation auch als Normalenregel bezeichnet. Bei Anwendung der Normalenregel ist die plastische Deformation allein durch die Fließbedingung bestimmt. Da Versuchsergeb-

nisse jedoch auf eine Abweichung von der Normalenregel hindeuten, wird einem Vorschlag von Lehmann in [21] folgend, der zweite Term in (4.4) hinzugefügt. Über die skalare Größe κ lassen sich die Abweichungen von der Normalenregel steuern.

Die Fließbedingung ist bei isotropen Materialien eine Funktion der Invarianten des Spannungstensors.

$$J_1 = Sp(\underline{S}_K), J_2 = Sp(\underline{S}_K^2), J_3 = Sp(\underline{S}_K^3) \quad (4.5)$$

Für Metalle kann allgemein angenommen werden, daß das plastische Fließen unabhängig vom hydrostatischen Spannungszustand also keine Funktion der ersten Invarianten J_1 ist. Diese Tatsache wird durch die Einführung des Spannungsdeviators berücksichtigt. Die Fließbedingung ist dann angebar als Funktion der Invarianten des Deviators

$$J_1' = Sp(\underline{T}_K) = 0, J_2' = Sp(\underline{T}_K^2), J_3' = Sp(\underline{T}_K^3) \quad (4.6)$$

also

$$F = F(J_2', J_3') \quad (4.7)$$

Für Probleme ohne Belastungsumkehr läßt sich die Fließbedingung angeben zu

$$F = f(J_2', J_3') - K^2 \quad (4.8)$$

Dabei gibt die skalare Größe K^2 die Werkstoffverfestigung an. Sie ist eine Funktion der Formänderungsgeschichte des Werkstoffs. Als einfachste Form von (4.8) liefert die Fließbedingung nach v.MISES für die meisten Metalle befriedigende Ergebnisse.

$$F = Sp(\underline{T}_K^2) - K^2(w_p) = 0 \quad (4.9)$$

Die Werkstoffverfestigung ist dabei nur von der plastischen Arbeit abhängig.

Da bei einer Entlastung elastisches Verhalten auftritt, muß während der plastischen Deformation ständig die Fließbedingung erfüllt sein. Es gilt also neben (4.9) auch

$$\dot{F} = S_P(\dot{\underline{T}}_K^2) - \frac{\partial k^2}{\partial W_P} \dot{W}_P = 0. \quad (4.10)$$

Die Größen $\dot{\lambda}$ und μ aus dem Stoffgesetz sind also so zu bestimmen, daß (4.10) gültig ist.

Für die massenbezogene Formänderungsarbeit gilt

$$\dot{W} = \frac{1}{\rho} S_P(\underline{S} \cdot \underline{D}) = \frac{1}{\rho_0} S_P(\underline{S}_K \cdot \underline{D}). \quad (4.11)$$

Mit (4.1) läßt sich die substantielle Änderung der Formänderungsarbeit aufspalten in

$$\dot{W} = \dot{W}_e + \dot{W}_P = \frac{1}{\rho_0} S_P(\underline{S}_K \cdot \underline{D}_e) + \frac{1}{\rho_0} S_P(\underline{S}_K \cdot \underline{D}_P). \quad (4.12)$$

Daraus ergibt sich für den plastischen Anteil, da der hydrostatische Spannungszustand keine plastischen Formänderungen bewirkt,

$$\dot{W}_P = \frac{1}{\rho_0} S_P(\underline{T}_K \cdot \underline{D}_P). \quad (4.13)$$

Bilden wir nun $\frac{\partial F}{\partial \underline{S}_K}$, so erhalten wir mit (3.8)

$$\frac{\partial F}{\partial \underline{S}_K} = \frac{\partial F}{\partial \underline{T}_K} = 2 \underline{T}_K. \quad (4.14)$$

Mit (3.18) und (3.19) erhalten wir

$$S_P(\dot{\underline{T}}_K^2) = 2 S_P(\underline{T}_K \cdot \dot{\underline{T}}_K) = S_P\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{T}_K} \cdot \dot{\underline{T}}_K\right). \quad (4.15)$$

Wenn wir eine Entfestigung des Werkstoffs ausschließen, so muß bei plastischen Deformationen gelten

$$\frac{\partial k^2}{\partial w_p} \dot{w}_p \geq 0 \quad ,$$

und wir erhalten aus (4.10) und (4.15) die Belastungsbedingung

$$S_p \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{T}}_K} \cdot \underline{\underline{\dot{T}}}_K \right) \geq 0 \quad . \quad (4.16)$$

Erst die Gültigkeit der Fließbedingung (4.9) und der Belastungsbedingung (4.16) gewährleisten ein Andauern der plastischen Deformation.

Führen wir nun ein

$$B(w_p) = \frac{1}{2 \rho_0} \frac{\partial k^2}{\partial w_p} \quad , \quad (4.17)$$

so erhalten wir aus (4.10) mit (4.4), (4.13) und (4.15)

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} - \alpha \right) \frac{S_p(\underline{\underline{T}}_K \cdot \underline{\underline{\dot{T}}}_K)}{S_p(\underline{\underline{T}}_K^2)} \quad (4.18)$$

Eingesetzt in (4.4) ergibt das

$$\underline{\underline{D}}_p = \left(\frac{1}{B} - \alpha \right) \frac{S_p(\underline{\underline{T}}_K \cdot \underline{\underline{\dot{T}}}_K)}{S_p(\underline{\underline{T}}_K^2)} \underline{\underline{T}}_K + \alpha \underline{\underline{\dot{T}}}_K \quad . \quad (4.19)$$

Aus (4.3) erhält man mit (3.17)

$$D_e = \frac{1}{2G} \left(\underline{\underline{\dot{T}}}_K + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} S_p(\underline{\underline{\dot{S}}}_K) \underline{\underline{1}} \right) \quad . \quad (4.20)$$

Die Verzerrungsgeschwindigkeit läßt sich somit durch die Spannungen ausdrücken und mit (4.1) wird

$$\underline{D} = \left(\frac{1}{2G} + \kappa\right) \underline{\dot{T}}_K + \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \text{Sp}(\underline{\dot{T}}_K) \underline{1} + \left(\frac{1}{B} - \kappa\right) \frac{\text{Sp}(\underline{T}_K \cdot \underline{\dot{T}}_K)}{\text{Sp}(\underline{T}_K^2)} \underline{T}_K . \quad (4.21)$$

Die Maßzahlen ergeben sich mit (3.14) und (3.19) zu

$$d_k^i = \left(\frac{1}{2G} + \kappa\right) t_k^i l_o + \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \dot{s}_r^i \delta_k^i + \left(\frac{1}{B} - \kappa\right) \frac{t_s^r t_r^s}{t_s^r t_r^s} t_k^i . \quad (4.22)$$

Durch Einsetzen von (4.19) in (4.13) erhalten wir für die plastische Arbeit

$$\dot{w}_p = \frac{1}{\rho_o B} \text{Sp}(\underline{T}_K \cdot \underline{\dot{T}}_K) . \quad (4.23)$$

Zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens führen wir die normierte Größe δ ein

$$\delta = \frac{1}{\frac{B}{2G} + 1} \quad (4.24)$$

mit dem Wertebereich $0 \leq \delta \leq 1$. Die Grenzen haben dabei folgende Bedeutung

$$\delta = 0 \quad \text{elastisches Verhalten}$$

$$\delta = 1 \quad \text{idealplastisches Verhalten.}$$

Überschieben wir nun (4.21) von links mit \underline{T}_K und bilden dann $\text{Sp}(\underline{T}_K \underline{D})$, so erhalten wir mit (4.24)

$$\text{Sp}(\underline{T}_K \cdot \underline{\dot{T}}_K) = B \delta \text{Sp}(\underline{T}_K \cdot \underline{D}) . \quad (4.25)$$

Durch Einsetzen von (4.25) in (4.21) und anschließender Bildung von $\text{Sp } \underline{D}$ erhalten wir unter Berücksichtigung, daß wie aus (3.18) ersichtlich $\text{Sp } (\underline{\dot{T}}_K) = 0$

$$\text{Sp } \underline{D} = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\underline{\dot{S}}_K) . \quad (4.26)$$

Durch Einsetzen von (4.25), (4.26) und (3.17) in (4.21) und Auflösen nach $\underline{\dot{S}}_K$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\dot{S}}_K = \frac{2G}{1+\alpha 2G} \left\{ \underline{D} + \frac{\nu + \frac{2}{3} G \alpha (1+\nu)}{1-2\nu} \text{Sp}(\underline{D}) \underline{1} \right. \\ \left. - \delta (1-\alpha B) \frac{\text{Sp}(\underline{T}_K \cdot \underline{D})}{\text{Sp}(\underline{T}_K^2)} \underline{T}_K \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

mit den Maßzahlen

$$\begin{aligned} s_K^i /_0 = \frac{2G}{1+\alpha 2G} \left\{ d_K^i + \frac{\nu + \frac{2}{3} G \alpha (1+\nu)}{1-2\nu} d_r^i \delta_K^i \right. \\ \left. - \delta (1-\alpha B) \frac{t_s^r d_r^s}{t_s^r t_r^s} t_K^i \right\} . \end{aligned} \quad (4.28)$$

Die Gleichungen (4.21), (4.22) stellen das nach den Verzerrungsgeschwindigkeiten und die Gleichungen (4.27), (4.28) das nach den Spannungsgeschwindigkeiten aufgelöste Stoffgesetz dar.

5. Grunddeformation

5.1. Zylinderkoordinaten

Wir wollen uns im folgenden mit den Deformationen dünnwandiger Kreiszyylinder beschäftigen. Wir führen deshalb für das in Kap. 2. (Abb 1) beschriebene, krummlinige Koordinatensystem ein Zylinderkoordinatensystem ein.

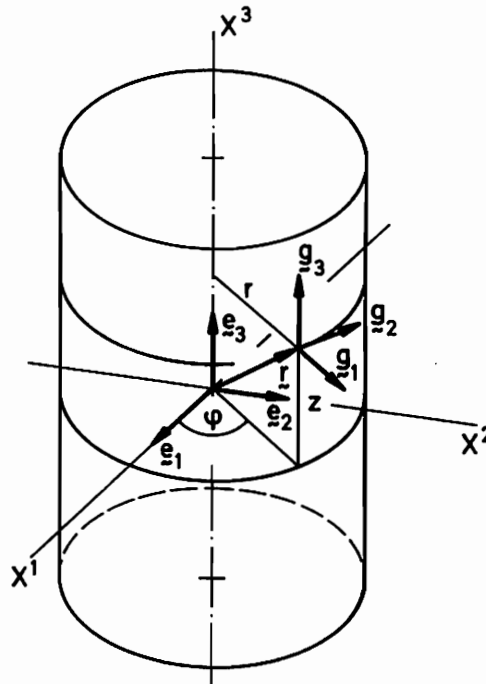


Abb. 2

Für die Koordinaten x^i gilt

$$x^1 = r, \quad x^2 = \varphi, \quad x^3 = z. \quad (5.1)$$

Der Zusammenhang zwischen kartesischen und Zylinderkoordinaten ist gegeben durch

$$X^1 = r \cos \varphi, \quad X^2 = r \sin \varphi, \quad X^3 = z. \quad (5.2)$$

Mit

$$\underline{r} = X^1 \underline{e}_1 + X^2 \underline{e}_2 + X^3 \underline{e}_3 \quad (5.3)$$

folgt aus (2.2) und (2.3)

$$\begin{aligned} \underline{g}_1 &= \underline{g}^1 = \cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2 \\ \underline{g}_2 &= r^2 \underline{g}^2 = -r \sin \varphi \underline{e}_1 + r \cos \varphi \underline{e}_2 \\ \underline{g}_3 &= \underline{g}^3 = \underline{e}_3 . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die Metrik ergibt sich dann entsprechend (2.5) zu

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (5.5)$$

Für die Christoffelsymbole erhält man mit (2.6)

$$\Gamma_{22}^1 = -r , \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} . \quad (5.6)$$

Alle übrigen Γ_{ik}^m ergeben sich zu Null.

5.2. Geometrie der Grunddeformation

Wir betrachten im folgenden den in Abb. 3 angegebenen Lastfall.

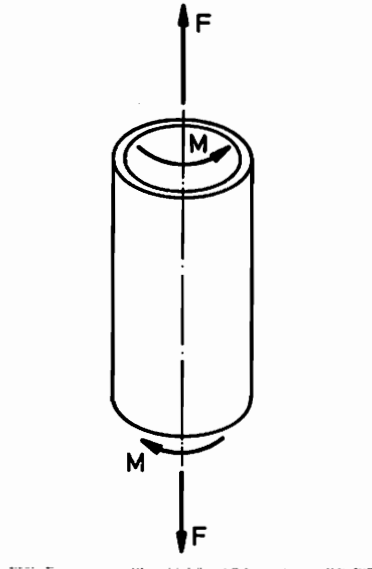


Abb. 3

Unter Beachtung der Annahmen, daß

- a) Radien gerade
- b) Querschnittsflächen eben
- c) kreiszylindrische Mantelflächen kreiszylindrisch

bleiben, ergibt sich die in Abb. 4 angegebene Deformation des dünnwandigen Kreiszylinders vgl. [24] und [25].

Die mit \circ bezeichneten Größen kennzeichnen den spannungsfreien Ausgangszustand.

Wie aus Abb. 4 ersichtlich, gelten die Beziehungen

$$\frac{r_o - R_o}{r - R} = \frac{t_o}{t} , \quad \varphi - \varphi_o = \psi \frac{z}{l} , \quad z = \frac{l}{l_o} z_o \quad (5.7)$$

mit ψ als Gesamtverdrillwinkel

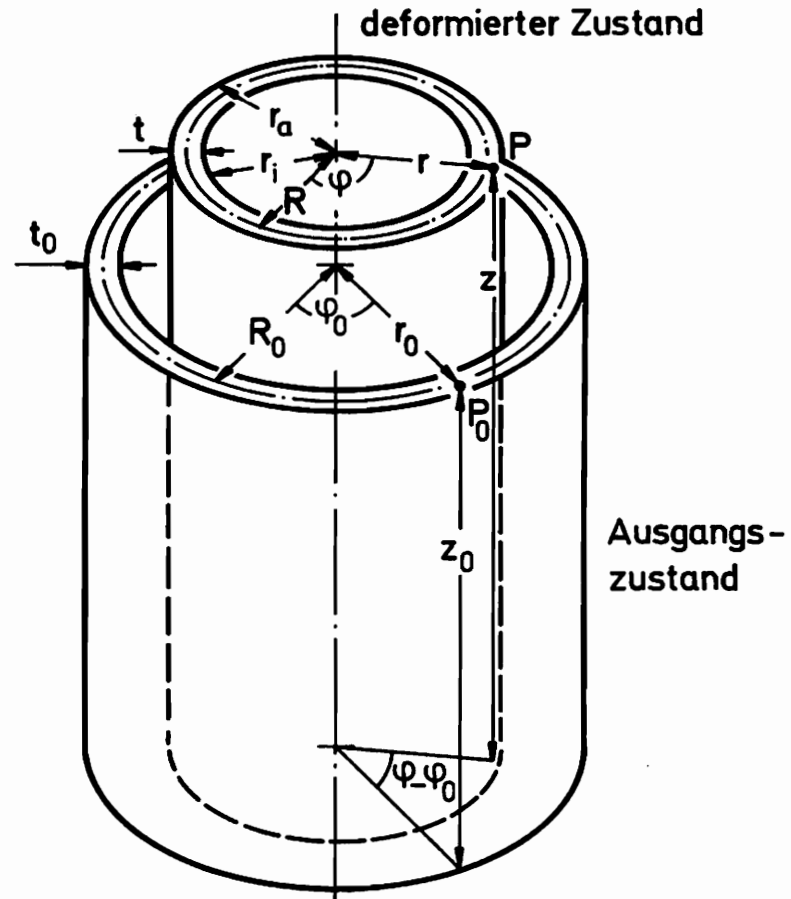


Abb. 4

Wir erhalten aus (5.7) die nach (2.10) gesuchten Zusammenhänge

$$r = (r_0 - R_0) \frac{t}{t_0} + R, \quad \varphi = \psi \frac{z_0}{l_0} + \varphi_0, \quad z = \frac{l}{l_0} z_0. \quad (5.8)$$

Dabei sind R, t, l und ψ Funktionen der Zeit.

Nach (2.12) ergeben sich die Maßzahlen des Geschwindigkeitsvektors \underline{v}

$$v^i = (\dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \left(\frac{\dot{t}}{t} (r - R) + \dot{R}, \dot{\psi} \frac{z}{l}, z \frac{\dot{l}}{l} \right). \quad (5.9)$$

Die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten x^i erhalten wir zu

$$v^i_{,k} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{t}}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\psi}}{l} \\ 0 & 0 & \frac{\dot{l}}{l} \end{bmatrix} \begin{matrix} i=1 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (5.10)$$

Mit (2.9) und (5.6) ergeben sich daraus die Maßzahlen des Geschwindigkeitsgradienten (2.16).

$$v^i_{/k} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{t}}{t} & -r\dot{\psi} \frac{z}{l} & 0 \\ \frac{\dot{\psi}}{r} \frac{z}{l} & \frac{\dot{r}}{r} & \frac{\dot{\psi}}{l} \\ 0 & 0 & \frac{\dot{l}}{l} \end{bmatrix} \begin{matrix} i=1 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (5.11)$$

Nehmen wir nun an, daß bei einem dünnwandigen Zylinder $r \approx R$ ist, so erhalten wir mit (2.18) und (2.19) die Maßzahlen des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit

$$d^i_k = \begin{bmatrix} \frac{\dot{t}}{t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{R}}{R} & \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{l} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{l} R^2 & \frac{\dot{l}}{l} \end{bmatrix} \begin{matrix} i=1 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (5.12)$$

und die Maßzahlen des Tensors der Rotationsgeschwindigkeit

$$\omega^i_k = \begin{bmatrix} 0 & -R \dot{\psi} \frac{z}{l} & 0 \\ \frac{\dot{\psi}}{R} \frac{z}{l} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{l} \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{l} R^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} i=1 \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (5.13)$$

5.3. Spannungen der Grunddeformation

Für den in Abb. 3 gegebenen Lastfall erhalten wir, unter der bei einem dünnwandigen Zylinder üblichen Vernachlässigung der Radialspannung, einen homogenen Spannungszustand mit den Spannungen σ und τ in den Schnittflächen senkrecht zur z-Richtung. σ und τ sind die physikalischen Komponenten des CAUCHY Spannungstensors, aus denen wir nach [26] die Maßzahlen

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_{\underline{33}} \sqrt{g_{33}} \sqrt{g^{33}} = \sigma_{\underline{33}} \\ \tau &= \sigma_{\underline{23}} \sqrt{g_{22}} \sqrt{g^{33}} = \sigma_{\underline{23}} r\end{aligned}\tag{5.14}$$

erhalten. Aus der Symmetrie des CAUCHY Spannungstensors folgen dann die übrigen Maßzahlen

$$\sigma_k^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau}{r} \\ 0 & \tau r & \sigma \end{bmatrix} \begin{matrix} i=1 \\ \\ k=1 \end{matrix} \tag{5.15}$$

Wie schon bei der Herleitung des Stoffgesetzes gesagt wurde, kann man bei metallischen Werkstoffen annehmen, daß die elastischen Deformationen klein sind. Wir können die Berechnungen erheblich vereinfachen, wenn wir annehmen, daß der Werkstoff elastisch inkompressibel ist. Da die plastische Inkompressibilität bei Metallen ohnehin immer vorausgesetzt wird, können wir aus dieser Annahme folgende Vereinfachungen herleiten

$$\mathcal{J} = 1, \quad S_p \underline{\underline{U}} = S_p \underline{\underline{D}} = 0 \tag{5.16}$$

Damit ergibt sich aus (3.6) und (3.13) für den KIRCHHOFF Spannungstensor

$$\underline{\underline{S}}_K = \underline{\underline{S}} \quad , \quad \underline{\underline{\dot{T}}}_K = \underline{\underline{\dot{T}}} \quad . \quad (5.17)$$

Daraus erhalten wir mit (3.9) und (5.15) die Maßzahlen des Deviators $\underline{\underline{T}}_K$

$$t_K^i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\epsilon & \frac{\tau}{r} \\ 0 & \tau r & \frac{2}{3}\sigma \end{bmatrix} \quad . \quad (5.18)$$

Bilden wir die JAUMANN Ableitung $\underline{\underline{\dot{T}}}_K$, so erhalten wir für die Maßzahlen gemäß (3.18) mit (5.10), (5.12), (5.15) und (5.18) unter Berücksichtigung, daß bei dünnwandigen Kreis- zylindern $r=R$ ist,

$$t_{K|0}^i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\dot{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\dot{\epsilon} - \tau \frac{\dot{\psi}}{l} R & \frac{\dot{\tau}}{R} - \frac{1}{2}\sigma \frac{\dot{\psi}}{l} \\ 0 & \dot{\tau} R - \frac{1}{2}\sigma \frac{\dot{\psi}}{l} R^2 & \frac{2}{3}\dot{\sigma} + \tau \frac{\dot{\psi}}{l} R \end{bmatrix} \quad . \quad (5.19)$$

Für $\text{Sp} (\underline{\underline{\dot{T}}}_K \cdot \underline{\underline{\dot{T}}}_K)$ erhalten wir mit (3.19) aus (5.18)

$$\text{Sp} (\underline{\underline{\dot{T}}}_K \cdot \underline{\underline{\dot{T}}}_K) = \frac{2}{3}\sigma \dot{\sigma} + 2\tau \dot{\tau} \quad , \quad (5.20)$$

und $\text{Sp} (\underline{\underline{T}}_K^2)$ ergibt sich zu

$$\text{Sp} (\underline{\underline{T}}_K^2) = \frac{2}{3}\sigma^2 + 2\tau^2 \quad . \quad (5.21)$$

5.4. Gleichungssystem der Grunddeformation

Zur Bildung des Gleichungssystems der Grunddeformation setzen wir (5.12) und (5.18)-(5.21) in (4.22) ein.

Mit den dimensionslosen Größen

$$\frac{t}{R}, \frac{L}{R}, \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{2G}, \bar{\tau} = \frac{\tau}{2G}, \alpha_1 = 1 + \alpha_2 G \quad (5.22)$$

erhalten wir nach einigen Umformungen das Gleichungssystem der Grunddeformation

$$\dot{\psi} = \frac{L}{R} \left[\left\{ \alpha_1 2 \dot{\bar{\tau}} + \frac{2}{3} \frac{\tilde{\delta}}{K_2} \frac{\bar{\sigma} \bar{\tau} \alpha_1 \dot{\bar{\sigma}}}{H_2} \right\} \right. \\ \left. / \left[1 + \alpha_1 \bar{\sigma} - \frac{\tilde{\delta}}{K_2} \bar{\tau}^2 \left(H_1 + \frac{2}{3} \bar{\sigma} \frac{H_3}{H_2} \right) \right] \right] \quad (5.23)$$

$$\left(\frac{\dot{L}}{R} \right) = \frac{1}{H_2} \left(\frac{L}{R} \alpha_1 \dot{\bar{\sigma}} + H_3 \bar{\tau} \dot{\psi} \right)$$

$$\left(\frac{\dot{t}}{R} \right) = \alpha_1 \bar{\tau} \frac{\dot{\psi}}{L/R} \frac{t}{R}$$

mit den Hilfsgrößen

$$\tilde{\delta} = \delta (1 - \alpha B), \quad K_2 = \frac{1}{3} \sigma^2 + \tau^2, \quad H_1 = 1 - \frac{1}{3} \bar{\sigma} \alpha_1$$

$$H_2 = 1 - \frac{\tilde{\delta}}{K_2} \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2, \quad H_3 = \left(2 \alpha_1 + \frac{\tilde{\delta}}{2K_2} \bar{\sigma} H_1 \right).$$

Zur Integration dieses Differentialgleichungssystems geben wir $\dot{\bar{\sigma}}$ und $\dot{\bar{\tau}}$ als konstant vor. Dem entspricht im Experiment in etwa eine Kraft- bzw. Momentensteuerung mit zeitlich linearem Anstieg von Kraft bzw. Moment. Damit werden $\bar{\sigma}$ und $\bar{\tau}$ lineare Funktionen der Zeit T und wir erhalten aus (5.23) ein lineares Differentialgleichungssystem mit nicht konstanten Koeffizienten der Form

$$\dot{y}_i = f_i^k(T) y_k \quad (5.24)$$

mit $y_i = \left(\psi, \frac{L}{R}, \frac{t}{R} \right)$ und

$$f_i^k = \begin{bmatrix} 0 & H_4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{H_2} (\alpha_1 \dot{\bar{\sigma}} + H_3 \bar{\tau} H_4) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1 \bar{\tau} H_4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1 \\ \\ k = 1 \end{matrix} \quad (5.25)$$

und der Hilfsgröße

$$H_4 = \frac{\dot{\psi}}{L/R} = \frac{\alpha_1 2 \dot{\bar{\tau}} + \frac{2}{3} \frac{\delta}{K_2} \frac{\bar{\sigma} \bar{\tau} \alpha_1 \dot{\bar{\sigma}}}{H_2}}{1 + \alpha_1 \bar{\sigma} - \frac{\delta}{K_2} \bar{\tau}^2 (H_1 + \frac{2}{3} \bar{\sigma} \frac{H_3}{H_2})}$$

Bei Integration von (5.24) mit dem Startvektor $y_{i_0} = (0, \frac{l_0}{R_0}, \frac{t_0}{R_0})$ beginnen wir zunächst mit dem rein elastischen Fall, der sich aus (5.24) und (5.25) mit $\bar{\delta} = 0$ und $\alpha_1 = 1$ ergibt. Nach Überschreiten der Fließgrenze erfolgt die weitere Integration mit noch zu bestimmenden Funktionen $\bar{\delta}$ und α_1 . Bei stetig wachsendem $\dot{\bar{\sigma}}$ und $\dot{\bar{\tau}}$ sehen wir aus (5.20) und (4.15), daß die Belastungsbedingung (4.16) für die Grunddeformation immer erfüllt ist.

6. Verzweigungslasten

6.1. Feldgleichungen

Gesucht sind die Verzweigungslasten d.h. die Lasten, unter denen neben der Grunddeformation auch noch andere Deformationsformen das Gleichgewicht (3.20) bzw. dessen substantielle Ableitung (3.21) und (3.24) erfüllen (vgl. Abb. 1). Dazu muß neben dem aus der Grunddeformation bekannten Geschwindigkeitsfeld (5.9) ein weiteres Geschwindigkeitsfeld \underline{v} vorliegen, das den noch zu formulierenden Randbedingungen genügt.

$$\underline{v} = v_i \underline{g}^i = u \underline{g}^1 + v \underline{g}^2 + w \underline{g}^3 \quad (6.1)$$

Durch Überschieben mit der kontravarianten Metrik g^{ik} erhalten wir

$$v^i = (u, v/r^2, w) \quad (6.2)$$

Die Maßzahlen des Geschwindigkeitsgradienten ergeben sich aus (2.9) und (5.6) mit den Bezeichnungen

$$(\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial r}, (\cdot)^* = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \varphi}, (\cdot)^+ = \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} \quad (6.3)$$

zu

$$v^i /_{k} = \begin{bmatrix} u' & u^* - \frac{v}{r} & u^+ \\ \frac{1}{r^2}(v' - \frac{v}{r}) & \frac{1}{r^2}(v^* + ru) & \frac{v^+}{r^2} \\ w' & w^* & w^+ \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$k=1$

Daraus ergeben sich mit (2.18) und (2.19) die Maßzahlen von \underline{D} und \underline{W} zu

$$d_k^i = \begin{bmatrix} u' & \frac{1}{2}(u^* + v') - 2\frac{v}{r} & \frac{1}{2}(w' + u^+) \\ \frac{1}{2r^2}(u^* + v') - 2\frac{v}{r} & \frac{v^*}{r^2} + \frac{u}{r} & \frac{1}{2r^2}(v^+ + w^*) \\ \frac{1}{2}(u^+ + w') & \frac{1}{2}(v^+ + w^*) & w^+ \end{bmatrix} \quad i=1$$

$r=1$ (6.5)

$$\omega_{\cdot k}^i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u^* - v') & \frac{1}{2}(u^+ - w') \\ \frac{1}{2r^2}(v' - u^*) & 0 & \frac{1}{2r^2}(v^+ - w^*) \\ \frac{1}{2}(w' - u^+) & \frac{1}{2}(w^* - v^+) & 0 \end{bmatrix} \quad i=1$$

$k=1$

Aus (3.25) erhalten wir mit (4.28) unter Berücksichtigung, daß bei Inkompressibilität $J = 1$ und $\text{Sp } \underline{D} = 0$ ist, mit $\omega_{k^r} = -\omega^{r_k}$

$$\left\{ \frac{2G}{\kappa_1} (d_k^i + q \delta_k^i - \tilde{\delta} \frac{t_s^r d_r^s}{t_s^r t_r^s} t_k^i) - \sigma_k^r d_r^i - \omega^{r_k} \sigma_r^i \right\} / i \quad (6.6)$$

Dabei ist q eine bei Inkompressibilität unbestimmte Größe

$$q = \frac{\nu + \frac{2}{3} G \kappa (1 + \nu)}{1 - 2\nu} d_r^r, \quad \nu = 0.5. \quad (6.7)$$

Die Größen κ_1 und $\tilde{\delta}$ entsprechen (5.22) bzw. (5.23). Der Spannungszustand unmittelbar am Verzweigungspunkt entspricht noch dem der Grunddeformation. Mit (5.15) und (5.18) sowie (5.21) erhalten wir

$$\frac{2G}{\lambda_1} (d_k^i + q \delta_k^i - \tilde{\delta} \frac{t_s^r d_r^s}{t_s^r t_r^s} t_k^i) - \sigma_k^r d_r^i - \omega_k^r \sigma_r^i =$$

$$\left(\begin{array}{lll} \frac{2G}{\lambda_1} (u' + q + \frac{1}{3} \tilde{\delta} \sigma Q) & \frac{2G}{\lambda_1} \frac{1}{2} (u^* + v' - 2 \frac{v}{r}) & \frac{2G}{\lambda_1} \frac{1}{2} (w' + u^+) \\ & - \frac{\tau r}{2} (w' + u^+) & - \frac{\tau}{2r} (u^* + v' - 2 \frac{v}{r}) \\ & & - \frac{\sigma}{2} (w' + u^+) \\ \\ \frac{2G}{\lambda_1} \frac{1}{2r^2} (u^* + v' - 2 \frac{v}{r}) & \frac{2G}{\lambda_1} (\frac{v^*}{r^2} + \frac{u}{r} + q) & \frac{2G}{\lambda_1} \{ \frac{1}{2r^2} (v^+ + w^*) - \frac{1}{r} \tilde{\delta} \tau Q \} \\ - \frac{\tau}{2r} (w' - u^+) & + \frac{1}{3} \tilde{\delta} \sigma Q - \frac{\tau}{r} w^* & - \frac{\tau}{r} (\frac{v^*}{r^2} + \frac{u}{r}) \\ & & - \frac{\sigma}{2r^2} (v^+ + w^*) \\ \\ \frac{2G}{\lambda_1} \frac{1}{2} (u^+ + w^+) & \frac{2G}{\lambda_1} \{ \frac{1}{2} (v^+ + w^*) & \frac{2G}{\lambda_1} (w^+ + q - \frac{2}{3} \sigma \tilde{\delta} Q) \\ - \frac{\tau}{2r} (v' - u^*) & - r \tilde{\delta} \tau Q \} - \tau r w^+ & - \frac{\tau}{r} v^+ - \sigma w^+ \\ - \frac{\sigma}{2} (w' - u^+) & - \frac{\sigma}{2} (w^* - v^+) & \end{array} \right)$$

$k=1$

(6.8)

Dabei ist Q eine Abkürzung für $\frac{Sp(I_k D)}{Sp(I_k^2)}$, die sich unter Ausnutzung der Inkompressibilitätsbedingung

$$d_r^r = u' + \frac{u}{r} + \frac{v^*}{r^2} + w^+ = 0 \quad (6.9)$$

zu

$$Q = \frac{t_s^r d_r^s}{t_s^r t_r^s} = \frac{\sigma w^+ + \frac{\tau}{r} (v^+ + w^*)}{\frac{2}{3} \sigma^2 + 2\tau^2} \quad (6.10)$$

ergibt.

Bilden wir nun die kovariante Ableitung von (6.8) nach

(2.9), so erhalten wir unter Berücksichtigung von (6.9) und (5.6) die das Verzweigungsproblem beschreibenden Feldgleichungen

$$\begin{aligned}
 & \Delta u + 2q' + \frac{2}{3} \tilde{\delta} \sigma Q' - \frac{1}{r^2} (u + 2\frac{v}{r})^* + \kappa_1 \bar{\sigma} (u^{++} - w'^+) \\
 & - \kappa_1 \frac{\bar{\tau}}{r} (w'^* + v'^+ - 2\frac{w}{r}^* - 2u^{**}) = 0 \\
 \\
 & \Delta v - \Delta w \kappa_1 \bar{\tau} r + 2q^* + \frac{2}{3} \tilde{\delta} \sigma Q^* - 2r \tilde{\delta} \tau Q^+ \\
 & + \frac{2}{r} (u^* - v') + \kappa_1 \bar{\sigma} (v^{++} - w'^+) \\
 & - \kappa_1 \bar{\tau} r (u'^+ + \frac{w'^*}{r^2} + w'^+ + \frac{w'}{r}) = 0 \\
 \\
 & \Delta w (1 - \kappa_1 \bar{\sigma}) - \Delta v \frac{\bar{\tau}}{r} \kappa_1 - 2 \tilde{\delta} \frac{\tau}{r} Q^* - \frac{4}{3} \tilde{\delta} \sigma Q^+ \\
 & + 2q^+ + \kappa_1 \frac{\bar{\tau}}{r} (3\frac{v'}{r} - 2\frac{v}{r^2} - \frac{u^*}{r} - v^{++} + w'^*) = 0.
 \end{aligned}$$

(6.11)

Der Operator Δ (Laplace-Operator) ist dabei eine Abkürzung für die Vorschrift vgl. [28]

$$\Delta () = ()'' + \frac{1}{r} ()' + \frac{1}{r^2} ()^{**} + ()^{++}. \quad (6.12)$$

Zusammen mit der Inkompressibilitätsbedingung (6.9) bildet (6.11) ein System linearer partieller Differentialgleichungen für die vier unbekannt Funktionen u, v, w und q der drei Ortskoordinaten r, φ und z .

6.2. Randbedingungen

Um aus den Gleichungen (6.9) und (6.11) zu Lösungen für die unbekanntenen Funktionen u, v, w und q zu gelangen, benötigen wir Randbedingungen.

Wir betrachten einen unendlich langen Zylinder. Bei reiner Torsion und Längskraft (Abb. 3) müssen die Außen- und Innenflächen des Zylinders zu jeder Zeit spannungsfrei sein. Auf der Außen- und Innenwandung des Zylinders gilt also

$$d\underline{f} = (\dot{d\underline{f}}) = 0 . \quad (6.13)$$

Da am Verzweigungspunkt eine inhomogene Deformation beginnt, und sich die Flächenvektoren der zur Innen- und Außenwandung gehörenden Flächenelemente in unbekannter Weise ändern, ist ein Bezug der Kräfte $d\underline{f}$ auf die Flächenelemente $d\underline{A}$ des deformierten Zustandes, wie sie beim CAUCHY Spannungstensor erfolgt, wenig sinnvoll. Wählen wir dagegen die Flächen $d\bar{A}$ des bekannten Grundzustandes als Bezugsflächen, so ergibt sich in Abwandlung von (3.3)

$$d\underline{f} = \underline{S}_L d\bar{A} = 0$$

oder

(6.14)

$$(\dot{d\underline{f}}) = \dot{\underline{S}}_L d\bar{A} = 0$$

für alle Flächenelemente $d\bar{A}$ auf der Innen- und Außenwandung des Zylinders.

Da sich während der homogenen Grunddeformation die Richtung der Flächenelemente $d\bar{A}$ nicht ändert, gilt für die Innen- und Außenflächen mit (5.4) und (5.5)

$$d\bar{A} = \frac{g^1}{\sqrt{g^{11}}} d\bar{A} = \underline{g}^1 d\bar{A} . \quad (6.15)$$

Die Wahl des Grundzustandes als Referenzkonfiguration liefert zu Beginn der Verzweigung auch bei kompressibler Grunddeformation

$$\underline{J} = 1, \quad \underline{F} = \underline{1}, \quad (6.16)$$

sodaß wir für die Randbedingungen aus (6.14) unter Verwendung von (3.12) mit (6.16) die für alle Punkte von Innen- und Außenwandung gültige Beziehung

$$(\underline{\dot{S}} + \underline{S} \underline{S_P} \underline{U} - \underline{S} \cdot \underline{U}^T) \cdot \underline{g}^1 = 0 \quad (6.17)$$

erhalten. Mit (3.23) und (4.27) ergibt sich daraus unter Berücksichtigung der Inkompressibilität

$$\left\{ \frac{2G}{\underline{\alpha}_1} (\underline{D} + q \underline{1} - \delta \frac{S_P(\underline{I}_K \underline{D})}{S_P(\underline{I}_K^2)} \underline{I}_K) + \underline{W} \cdot \underline{S} - \underline{S} \cdot \underline{D} \right\} \cdot \underline{g}^1 = 0, \quad (6.18)$$

mit den Maßzahlen

$$\frac{2G}{\underline{\alpha}_1} (d_k^1 + q \delta_k^1 - \delta \frac{t_s^r d_r^s}{t_s^r t_r^s} t_k^1) - \omega_k^r \sigma_r^1 - \sigma_k^r d_r^1 = 0. \quad (6.19)$$

Mit (6.8) ergeben sich daraus drei Gleichungen, die für $r = r_i$ und $r = r_a$ (vgl. Abb. 4) die zur Lösung von (6.11) benötigten Randbedingungen liefern.

$$u^1 + q + \frac{1}{3} \delta \sigma Q = 0$$

$$\frac{1}{r} (u^* + v^1 - \frac{2v}{r}) - \bar{\tau} \underline{\alpha}_1 (u^1 + w^1) = 0 \quad (6.20)$$

$$(u^1 + w^1)(1 - \underline{\alpha}_1 \bar{\sigma}) - \underline{\alpha}_1 \frac{\bar{\tau}}{r} (u^* + v^1 - 2\frac{v}{r}) = 0$$

für $r = r_i, r_a$.

Die Gleichungen (6.11) und die Randbedingungen (6.20) bilden ein lineares homogenes Randwertproblem. Ein Verzweigungspunkt des Geschwindigkeitsfeldes liegt dann vor, wenn neben der Grunddeformation, die für sich eine Lösung des Randwertproblems darstellt, weitere Lösungen das Randwertproblem erfüllen. Da die Existenz solcher Lösungen vom Spannungszustand abhängt, und sich eine Mehrdeutigkeit der Lösungen im allgemeinen nur für diskrete "kritische" Werte des Spannungszustandes ergibt, sind die den Spannungszustand beschreibenden Größen $\bar{\sigma}$ und $\bar{\tau}$ die Eigenwerte des Randwertproblems. vgl.[29]

6.3. Lösungsansätze

Eine Lösung des gegebenen Randwertproblems ist das Geschwindigkeitsfeld der Grunddeformation (5.9). Wir suchen also noch ein weiteres Geschwindigkeitsfeld, welches das Randwertproblem erfüllt. Wie SHANLEY in [4] gezeigt hat, ergibt sich dann eine physikalisch sinnvolle Lösung aus der Überlagerung beider Geschwindigkeitsfelder. Wie ebenfalls aus [4] zu ersehen ist, dominiert unmittelbar am Verzweigungspunkt noch die Grunddeformation. Damit ist die Gültigkeit der Belastungsbedingung (4.16) am Verzweigungspunkt gesichert.

Zur Ermittlung des von der Grunddeformation abweichenden Geschwindigkeitsfeldes wählen wir als Lösungsansätze harmonische Funktionen entsprechend den tatsächlich vorkommenden Beulformen.

$$\begin{aligned}u &= u(r) \cos(n\varphi + \alpha z) \\v &= v(r) \sin(n\varphi + \alpha z) \\w &= w(r) \sin(n\varphi + \alpha z) \\q &= q(r) \cos(n\varphi + \alpha z)\end{aligned}\tag{6.21}$$

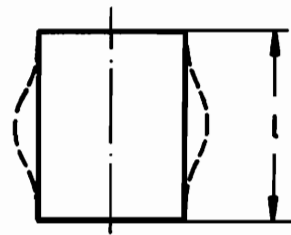
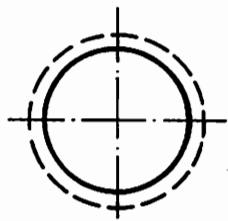
Mit

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

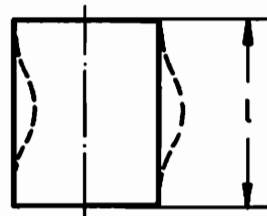
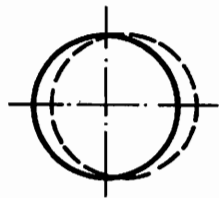
(6.22)

$$\alpha = m 2 \frac{\pi}{l} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

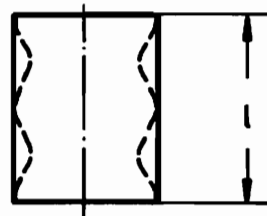
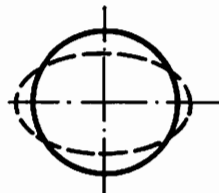
werden die Anzahl der Wellen in Umfangs- bzw. Längsrichtung vorgegeben. In Abb. 5 werden einige mögliche Beulformen angegeben.



a) $n=0, m=1$



b) $n=1, m=1$



c) $n=2, m=2$

Abb. 5

Wie aus (6.22) ersichtlich, führt $m = 2, 3, \dots$ bei einer entsprechenden Vergrößerung der Länge l auf die gleichen Werte α und damit auf die gleichen Verzweigungslasten. Für die Berechnung kann deshalb immer $m = 1$ gesetzt werden. Die Länge l ist dann die Länge einer Beulwelle.

Setzen wir nun die Lösungsansätze (6.21) in die Feldgleichungen (6.11) ein, so erhalten wir durch Bildung der Ableitungen nach den Koordinaten φ und z ein gewöhnliches, lineares Differentialgleichungssystem für die nur noch vom Radius abhängigen Funktionen $u(r), v(r), w(r)$ und $q(r)$. Wir erhalten aus (6.9) und (6.11)

$$\begin{aligned} & \Delta u(r) + 2q'(r) + \frac{2}{3} \bar{\delta} \sigma Q'(r) - \varkappa_1 \bar{\sigma} (\alpha^2 u(r) + \alpha w'(r)) \\ & - \frac{1}{r^2} (u(r) + 2 \frac{n}{r} v(r)) - \varkappa_1 \frac{\bar{\tau}}{r} (n w'(r) + \alpha v'(r)) \\ & - 2 \frac{n}{r} w(r) + 2 r \alpha u(r) = 0 \\ & \Delta v(r) - 2 n q(r) - \frac{2}{r} (n u(r) + v'(r)) - \varkappa_1 \bar{\sigma} (\alpha^2 v(r) - n \alpha w(r)) \\ & + \varkappa_1 \bar{\tau} r (\alpha u'(r) + \frac{n^2}{r^2} w(r) + \alpha^2 w(r) - \frac{w'(r)}{r} - \Delta w(r)) \\ & + 2 r \bar{\delta} Q(r) (\tau \alpha - \frac{1}{3} \frac{n}{r} \sigma) = 0 \\ & \Delta w(r) (1 - \varkappa_1 \bar{\sigma}) + 2 \bar{\delta} Q(r) (\frac{n}{r} \tau + \frac{2}{3} \alpha \sigma) - 2 \alpha q(r) \\ & + \varkappa_1 \frac{\bar{\tau}}{r} (3 \frac{v'(r)}{r} - 2 \frac{v(r)}{r^2} + \frac{n}{r} u(r) + \alpha^2 v(r) - n \alpha w(r)) \\ & - \Delta v(r) = 0 \\ & u'(r) + \frac{u(r)}{r} + \frac{n}{r^2} v(r) + \alpha w(r) = 0. \end{aligned}$$

(6.23)

Der Laplace-Operator (6.12) reduziert sich dabei auf

$$\Delta(\cdot) = (\cdot)'' + \frac{1}{r}(\cdot)' - \frac{r^2}{r^2}(\cdot) - \alpha^2(\cdot). \quad (6.24)$$

Wir führen nun folgende dimensionslose Größen ein

$$\xi = \frac{r}{R}, \quad \bar{\alpha} = R\alpha = m\sqrt{\frac{\pi}{\mu R}} \quad \text{mit} \quad R = \frac{r_i + r_a}{2}. \quad (6.25)$$

Daneben führen wir die neuen Funktionen ein

$$\bar{v} = \frac{v(r)}{R}, \quad \bar{q} = 2q(r)R. \quad (6.26)$$

Wir verwenden für die neuen von ξ abhängigen Funktionen der Einfachheit halber die alten Bezeichnungen u, v, w und q , und wir erhalten dann durch Einführung der Funktionen

$$\zeta(\xi) = \frac{d\bar{v}(\xi)}{d\xi}, \quad \eta(\xi) = \frac{d\bar{w}(\xi)}{d\xi} \quad (6.27)$$

aus (6.23) ein lineares Differentialgleichungssystem der Form

$$\frac{d u_i}{d \xi} = A_i^k u_k \quad (6.28)$$

mit

$$u_i = (u, \bar{v}, w, \zeta, \eta, \bar{q})$$

und der Koeffizientenmatrix A_i^k

$k=1$	$-\frac{1}{\xi}$	$-\frac{\alpha}{\xi^2}$	$-\alpha$	0	0	0	0
$i=1$	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0
	$F_0 + (1 - \kappa_1 \bar{\sigma}) \frac{F_2}{A_1}$	$F_0^2 + \alpha^2 + \frac{1}{A_1} (2\kappa_1 \bar{\tau}^2 + \alpha F_8 - \alpha \bar{\delta} \bar{\tau} F_9)$	$-\frac{\xi}{A_1} (F_0 F_8 + \frac{\bar{\delta}}{\kappa_1} F_3 F_9)$	$\frac{1}{\xi} \frac{A_2}{A_1}$	$\frac{\kappa_1 \bar{\tau} (1 - \kappa_1 \bar{\sigma})}{A_1}$	$\frac{F_7}{A_1}$	
	$\frac{\kappa_1 \bar{\tau}}{\xi} \frac{F_2}{A_1}$	$-\frac{1}{\xi A_1} [\kappa_1 \bar{\tau} (\alpha F_5 - \frac{2}{\xi}) + \alpha \bar{\delta} \bar{\tau} F_6]$	$F_0^2 + \alpha^2 + \frac{1}{A_1} (F_0 \bar{\tau} \kappa_1 F_5 - \frac{\bar{\delta}}{\kappa_1} F_3 F_6)$	$-\frac{\kappa_1 \bar{\tau}}{\xi A_1}$	$-\frac{A_2}{\xi A_1}$	$\frac{F_4}{A_1}$	
	$F_0 F_2 + \alpha F_1$	$\frac{1}{3} \frac{\alpha}{\xi^2} \delta \kappa_1 \bar{\sigma} \tau$	$\frac{F_0 \bar{\tau} \kappa_1}{\xi} (\frac{1}{3} \delta \bar{\sigma} - 2)$	$\frac{F_2}{\xi} - \frac{1}{3} \frac{\delta \kappa_1}{\bar{\sigma} \bar{\tau} \xi}$	$F_1 - \frac{1}{3} \delta \bar{\sigma} F_3$	0	
	$A_i^k =$						

Neben den aus (5.23) bekannten Abkürzungen gilt dabei

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\bar{\delta}}{K_2 \kappa_1}, \quad A_1 = 1 - \kappa_1 \bar{\sigma} - \kappa_1^2 \bar{\tau}^2, \quad A_2 = 1 - \kappa_1 \bar{\sigma} - 2\bar{\tau}^2 \kappa_1^2 \\ F_0 &= \frac{1}{\bar{\sigma}}, \quad F_1 = \bar{\alpha} (1 + \kappa_1 \bar{\sigma}) + \bar{\tau} F_0 \kappa_1, \quad F_2 = F_0 + \bar{\alpha} \bar{\tau} \kappa_1 \\ F_3 &= \kappa_1 \bar{\tau} F_0 + \bar{\alpha} \bar{\sigma} \kappa_1, \quad F_4 = \bar{\alpha} + F_0 \bar{\tau} \kappa_1, \quad F_5 = \bar{\alpha} - F_3 \\ F_6 &= \kappa_1 \bar{\tau} F_2 + \frac{1}{3} \kappa_1 \bar{\sigma} (2\bar{\alpha} - \kappa_1 F_0 \bar{\tau}), \quad F_7 = n (1 - \kappa_1 \bar{\sigma}) + \bar{\alpha} \bar{\tau} \xi \kappa_1 \\ F_8 &= (1 - \kappa_1 \bar{\sigma}) F_3 - \bar{\alpha} \bar{\tau}^2 \kappa_1^2 \\ F_9 &= F_0 K_2 \kappa_1^2 - \frac{1}{3} \bar{\sigma} \kappa_1 F_2 + \bar{\alpha} \bar{\tau} \kappa_1. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Durch Einsetzen der Lösungsansätze (6.21) in die Randbedingungen (6.20) erhalten wir unter Beachtung von (6.25)-(6.27)

$$z_k(\xi) = z_k^j(\xi) u_j(\xi)$$

mit

$$z_k^j = \begin{pmatrix} \frac{2}{\bar{\sigma}} & \frac{1}{3} \bar{\alpha} \left(2 \frac{n}{\bar{\sigma}} - \frac{2\bar{\alpha}}{\bar{\sigma}} - \frac{1}{3} \frac{\bar{\delta}}{K_2} \bar{\sigma} \right) & \left(\frac{n}{\bar{\sigma}} \bar{\tau} + \bar{\alpha} \bar{\sigma} \right) & 0 & 0 & -1 \\ \bar{\alpha} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ n & \frac{2}{\bar{\sigma}} & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.31}$$

Mit

$$\xi_1 = \frac{r_1}{R} = 1 - \frac{1}{2} \frac{t}{R} \quad \text{und} \quad \xi_2 = \frac{r_2}{R} = 1 + \frac{1}{2} \frac{t}{R}$$

gilt

$$z_k(\xi_i) = z_k(\xi_0) = 0. \quad (6.32)$$

Zur Integration des Differentialgleichungssystems (6.28) benötigen wir die sechs Komponenten $u_j(\xi_i)$ des Startvektors $\underline{u}(\xi_i)$. Da wir nur drei Gleichungen $z_k(\xi_i) = 0$ zur Bestimmung der $u_j(\xi_i)$ haben, wählen wir die drei übrigen Komponenten so, daß wir drei linear unabhängige Startvektoren $\underline{u}_r(\xi_i)$ erhalten. Mit (6.31) und (6.32) ergibt sich

$$\underline{u}_1(\xi_i) = (1, 0, 0, r_1, \bar{\alpha}, \frac{2}{\xi_i})$$

$$\underline{u}_2(\xi_i) = (0, 1, 0, \frac{2}{\xi_i}, 0, \frac{1}{\xi_i} (2 \frac{n}{\xi_i} - \frac{1}{3} \bar{\alpha} \frac{\tilde{\delta}}{K_2} \bar{\sigma} \bar{\tau}))$$

$$\underline{u}_3(\xi_i) = (0, 0, 1, 0, 0, 2\bar{\alpha} - \frac{1}{3} \frac{\tilde{\delta}}{K_2} \bar{\sigma} (\frac{n}{\xi_i} \bar{\tau} + \bar{\alpha} \bar{\sigma})). \quad (6.33)$$

Durch dreimalige Integration des Differentialgleichungssystems (6.28) von ξ_i bis ξ_2 mit den einzelnen Startvektoren $\underline{u}_r(\xi_i)$ erhalten wir drei Endvektoren $\underline{u}_r(\xi_2)$, die wegen der Linearität des Problems ebenfalls linear unabhängig sind.

Den Vektor $\underline{u}(\xi_2)$, der die Randbedingungen $z_k(\xi_2) = 0$ erfüllt, können wir darstellen als Linearkombination der Vektoren $\underline{u}_r(\xi_2)$

$$\underline{u}(\xi_2) = c^r \underline{u}_r(\xi_2) \quad (6.34)$$

mit den Komponenten

$$u_i(\xi_a) = c^r \bar{u}_{ri}(\xi_a). \quad (6.35)$$

Setzen wir nun (6.35) in (6.32) ein, so erhalten wir mit (6.31)

$$z_k(\xi_a) = z_k^i(\xi_a) c^r \bar{u}_{ri}(\xi_a) = 0. \quad (6.36)$$

Dieses lineare Gleichungssystem mit den Unbekannten c^r hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn gilt

$$\det z_k^i(\xi_a) \bar{u}_{ri}(\xi_a) = 0. \quad (6.37)$$

Sowohl die Koeffizienten $z_k^i(\xi_a)$ als auch die durch Integration von (6.28) erhaltenen Größen $\bar{u}_{ri}(\xi_a)$ sind abhängig von den Eigenwerten $\bar{\sigma}$ und $\bar{\tau}$. Eine Verzweigung des Gleichgewichts ist dann erreicht, wenn $\bar{\sigma}$ und $\bar{\tau}$ so bestimmt sind, daß (6.37) erfüllt ist.

7. Theoretische Lösung

7.1. Ermittlung der Werkstoffkenngrößen

Zur numerischen Lösung des Gleichungssystems der Grunddeformation (5.24) sowie des Eigenwertproblems der Verzweigungslasten (6.28) und (6.37) benötigen wir noch die Werkstoffkenngrößen ϱ_0 , G , δ und κ . Die Größe ϱ_0 als Dichte im Ausgangszustand ist konstant. Ebenso kann der Schubmodul G im Rahmen der Voraussetzungen (isotherm, kleine elastische Deformationen) als konstant angenommen werden. Für die den Verfestigungszustand beschreibende Größe δ gilt (4.24) mit B entsprechend (4.17). Zur Bestimmung des Verfestigungsverhaltens dient uns der einachsige Zugversuch.

Aus der Fließbedingung (4.9) ergibt sich mit (5.21) für den einachsigen Zugversuch

$$k^2 = \frac{2}{3} \sigma^2 \quad (7.1)$$

Dabei ist, (4.9) vorausgesetzt, die Verfestigung nur eine Funktion der plastischen Formänderungsarbeit. Aus (4.11) ergibt sich für die zeitliche Änderung der massebezogenen Formänderungsarbeit mit (5.12), (5.15) und (5.16) für den Zugversuch

$$\dot{w} = \frac{1}{\varrho_0} \sigma \frac{\dot{l}}{l} \quad (7.2)$$

woraus sich mit $\epsilon = \ln \frac{l}{l_0}$ sowie (4.3) und (4.12) ergibt

$$w_p = \frac{1}{\varrho_0} \left(\int_0^\epsilon \sigma d\epsilon - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \right) \quad (7.3)$$

Aus dem experimentell gewonnenen Diagramm $\sigma(\epsilon)$ (vgl. Abb. 6) läßt sich also durch Integration w_p bestimmen und damit aus (7.1) auch $k^2(w_p)$ (vgl. Abb. 7).

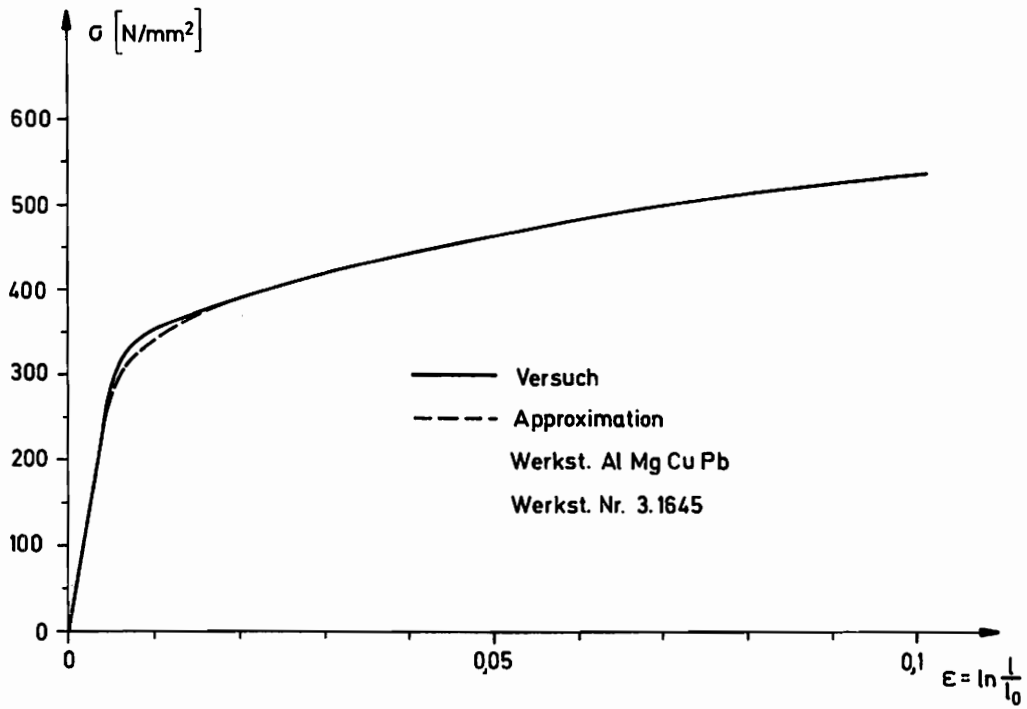


Abb. 6

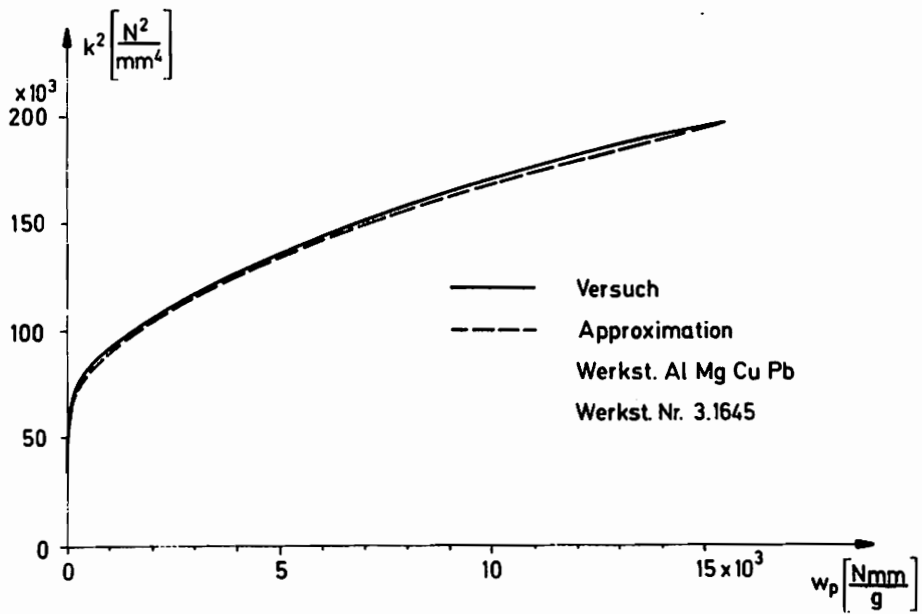


Abb. 7

Bei der Behandlung von Verzweigungsproblemen muß das verwendete Verfestigungsgesetz bestimmten Bedingungen genügen. Dabei ist es wichtig, daß der Übergang von elastischem zu elasto-plastischem Verhalten richtig erfaßt wird. Bei einer Funktion mit unstetiger Ableitung an dieser Stelle ändert sich δ sprunghaft von Null auf einen endlichen Wert, was zu einer sprunghaften Änderung der Verzweigungslasten führt. Das kann speziell bei Materialien ohne ausgeprägte Fließgrenze, wie die untersuchte Aluminiumlegierung, zu falschen Ergebnissen in der theoretischen Berechnung der Verzweigungslasten führen.

Für $k^2(w_p)$ wählen wir deshalb folgenden Näherungsansatz

$$k^2(w_p) = a \left(\frac{\rho_0}{2G} w_p \right)^c + k_0^2. \quad (7.4)$$

Für den Werkstoff Al Mg Cu Pb Werkstoff Nr. 3.1645 vgl. [30] erhalten wir die Konstanten

$$a = 6.025 \cdot 10^6 \frac{N^2}{mm^4}, \quad c = 0.5454$$

$$k_0^2 = 6.0 \cdot 10^4 \frac{N^2}{mm^4}, \quad \rho_0 = 2.82 \cdot 10^{-3} \frac{g}{mm^3} \quad (7.5)$$

$$G = 2.24 \cdot 10^4 \frac{N}{mm^2}.$$

Den Näherungsansatz (7.4) wollen wir im folgenden ausnutzen um den Verfestigungsparameter δ als Funktion der Spannungen σ und τ zu bestimmen.

Aus (4.17) ergibt sich mit (7.4)

$$B(w_p) = \frac{c a}{4G} \left(\frac{\rho_0}{2G} w_p \right)^{c-1}. \quad (7.6)$$

Mit (5.20) erhalten wir aus (4.23)

$$\dot{w}_p = \frac{1}{\rho_0 B} \left(\frac{2}{3} \sigma \dot{\sigma} + 2 \tau \dot{\tau} \right), \quad (7.7)$$

woraus wir über

$$B(w_p) dw_p = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{2}{3} \sigma d\sigma + 2\tau d\tau \right)$$

durch Integration schließlich mit (4.9) und (5.21)

$$\int_0^{w_p} B(w_p) dw_p = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{3} \sigma^2 + \tau^2 - \frac{k_0^2}{2} \right) \quad (7.8)$$

erhalten. Mit (7.6) folgt daraus

$$\frac{\rho_0}{2h} w_p = \left\{ \frac{2}{a} \left(\frac{1}{3} \sigma^2 + \tau^2 - \frac{k_0^2}{2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (7.9)$$

Daraus ergibt sich mit (7.6) wieder $B(w_p)$ und mit (4.24) schließlich δ .

Mögliche Abweichungen von der Normalenregel werden durch die Größe \varkappa gesteuert vgl (4.4). Die exakte Bestimmung dieser Größe ist schwierig, da \varkappa die Effekte erster Ordnung nur wenig beeinflusst, sich aber in viel stärkerem Maße auf die Effekte zweiter Ordnung auswirkt. Gerade diese kleinen Effekte werden aber häufig durch Mechanismen beeinflusst, die unter den für die Theorie gültigen Voraussetzungen vernachlässigt werden.

Wie schon von BRUHNS in [17] gezeigt wird, beeinflusst \varkappa auch die Verzweigungslasten. Aber auch die im Rahmen der Theorie vernachlässigten thermischen Effekte sowie Imperfektionen und Anisotropien wirken sich auf die Verzweigungslasten aus, sodaß eine exakte quantitative Aussage über \varkappa aus einer experimentellen Bestimmung von Verzweigungslasten nicht möglich ist.

In der vorliegenden Arbeit soll jedoch gezeigt werden, daß bestimmte qualitative Aussagen möglich sind, und daß die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen durch eine Berücksichtigung von \varkappa in der richtigen Richtung korrigiert werden können.

In (5.23) wurde der durch \varkappa modifizierte Verfestigungsparameter $\bar{\delta} = \delta (1 - \varkappa B)$ eingeführt. Für elastisches Verhalten gilt $\delta = \varkappa = 0$. Wie aus (7.6) ersichtlich, gilt mit $w_p = 0$ am Beginn des plastischen Bereichs $B(w_p) \rightarrow \infty$, woraus mit (4.24) $\delta \rightarrow 0$ folgt. Damit auch bei einer Berücksichtigung von \varkappa der stetige Übergang vom elastischen in den elasto-plastischen Bereich gewährleistet bleibt, muß auch $\bar{\delta} \rightarrow 0$ gehen d.h. auch \varkappa muß am Beginn des plastischen Fließens verschwinden, also von der Größe der plastischen Deformation abhängig sein.

Wir wählen deshalb als einfachste Möglichkeit eine lineare Abhängigkeit von der plastischen Arbeit.

$$\varkappa = c_k \left(\frac{\rho_0}{2G} w_p \right) \quad (7.10)$$

Wie schon gesagt wurde, ist eine exakte Bestimmung von \varkappa und damit auch von c_k aus einer experimentellen Bestimmung von Verzweigungslasten nicht möglich. Wir wollen jedoch versuchen, durch Vergleich von Theorie und Experiment zumindest die Größenordnung von c_k zu bestimmen.

Eine andere Möglichkeit zu einer deformationsabhängigen Beschreibung von \varkappa zu gelangen, bietet der von BRUHNS in [17] vorgeschlagene Ansatz

$$\varkappa \cdot B = \beta = const, \quad (7.11)$$

der mit (7.6) zu einem nichtlinearen Zusammenhang zwischen \varkappa und der plastischen Arbeit führt.

Auch PFLÜGER weist in [20] auf die Möglichkeit, mit Abweichungen von der Normalenregel eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch zu erzielen, hin.

Mit (7.5), (7.6) sowie (7.9) und (7.10) sind nun alle zur numerischen Lösung erforderlichen Werkstoffkenngrößen bekannt.

7.2. Numerische Behandlung

Die numerische Behandlung des Problems gliedert sich in zwei Teile

- a) Die Bestimmung von Verzweigungslasten σ und τ bei gegebener Geometrie \bar{l}/\bar{R} und \bar{t}/\bar{R} im Grundzustand als Lösung des durch (6.28)-(6.37) beschriebenen Eigenwertproblems
- b) Die Bestimmung der Geometrie des Ausgangszustandes durch Variation von l_0/R_0 und t_0/R_0 so, daß bei einem Anwachsen der Belastung von Null auf die Verzweigungslasten σ und τ gerade die Geometrie des zugehörigen Grundzustandes erreicht wird. Dabei wird (5.24) mit konstantem $\dot{\sigma}$ und $\dot{\tau}$ solange integriert, bis die Verzweigungslasten σ und τ erreicht sind.

Die Berechnung der Grunddeformation wurde der Bestimmung der Verzweigungslasten nachgestellt, da sich wegen der Linearität von (5.24) die zu einem bestimmten Grundzustand gehörende Ausgangsgeometrie aus einer zweimaligen Berechnung der Grunddeformation bestimmen läßt.

Eine andere Möglichkeit zur Lösung des Problems besteht darin, nach jedem Zeitschritt der Grunddeformation zu überprüfen, ob bereits die Verzweigungslasten erreicht sind. Diese Möglichkeit wurde ebenfalls untersucht, konnte aber besonders hinsichtlich der benötigten Rechenzeiten nicht befriedigen.

Der prinzipielle Aufbau des Programms wird im nachfolgenden Flußdiagramm dargestellt. Neben dem im Flußdiagramm dargestellten Belastungsweg mit gleichzeitigem Aufbringen von Längs- und Torsionslast, bietet das Programm die Möglichkeit, die beiden Lasten auch hintereinander aufzubringen, da beim Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen auch der Belastungsweg zu beachten ist.

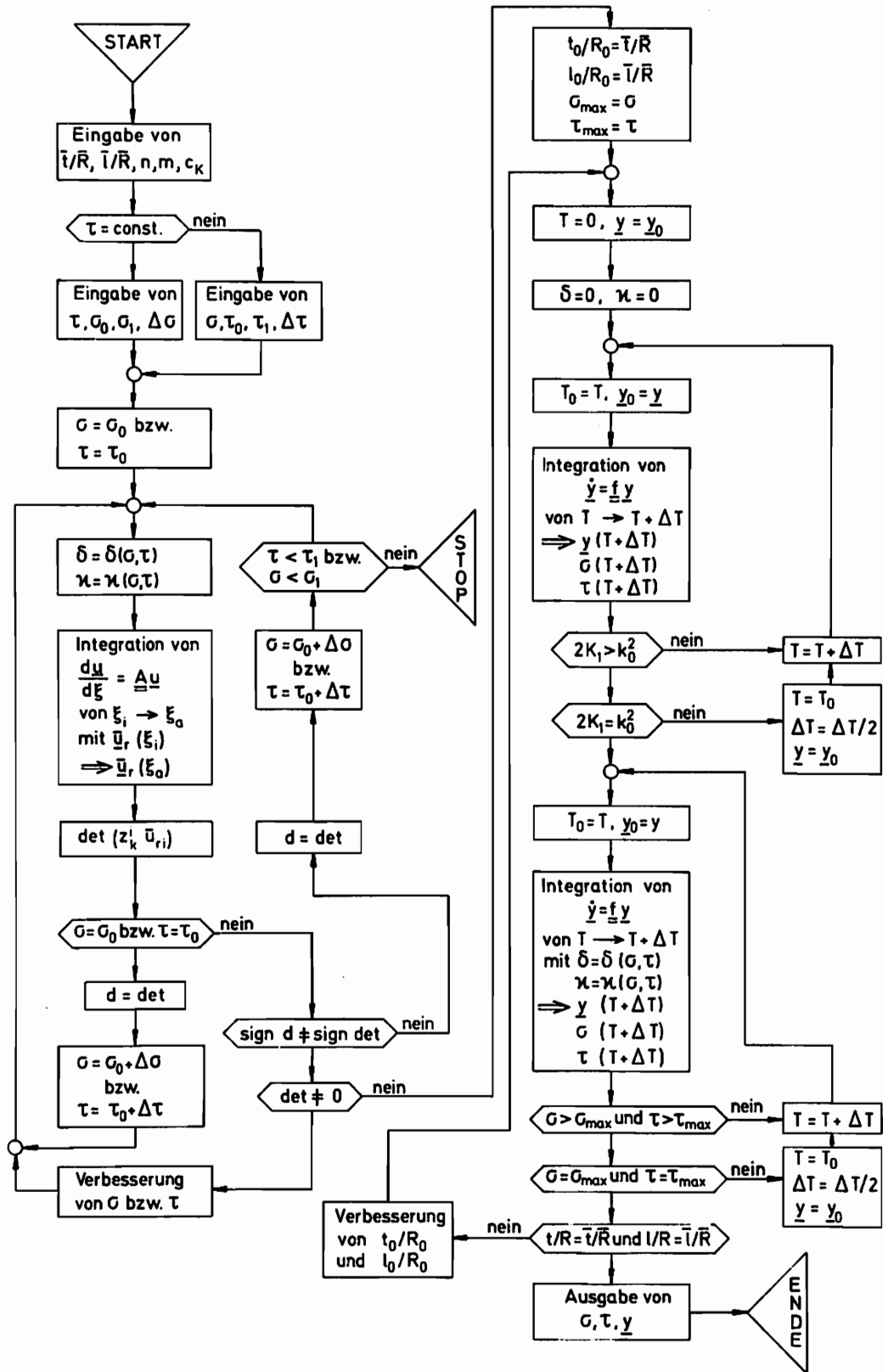


Abb. 8

Die Integration der Differentialgleichungssysteme (5.24) und (6.28) erfolgt mit Hilfe eines Extrapolationsverfahrens, dem wegen der kürzeren Rechenzeit der Vorzug vor einem Runge-Kutta Verfahren gegeben wurde. Das Programm ist in FORTRAN IV abgefaßt⁺).

7.3. Darstellung und Diskussion der Ergebnisse

Im folgenden werden die Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen vorgestellt. Es wurden die folgenden vier Belastungsfälle untersucht.

- a) Reine Torsionslast
- b) Kombinierte Zug- Torsionsbelastung
- c) Kombinierte Druck- Torsionslast
- d) Reine Druckbelastung

Die ermittelten Verzweigungslasten werden zum einen über der Geometrie des Grundzustandes dargestellt und im Vergleich dazu in Abhängigkeit von der Geometrie des Ausgangszustandes. Der Übersichtlichkeit halber werden nur die Werte für $m = 1$ angegeben. Die Größe \bar{l} bezeichnet also die Länge einer Beulwelle vgl. (6.22). l_0 ist die Länge im Ausgangszustand, die sich während der Grunddeformation auf \bar{l} deformiert. Für $m = 2, 3, \dots$ ergeben sich die gleichen Verzweigungslasten bei entsprechenden Vielfachen von l/R . In allen Fällen sind zum jeweiligen Ausgangs- bzw. Grundzustand nur die niedrigsten Verzweigungslasten angegeben. Die Ergebnisse für reine Torsionsbelastung sind in Abb. 9 und Abb. 10 angegeben.

⁺) Die umfangreichen numerischen Berechnungen wurden auf dem MODCOMP Rechner des Instituts für Mechanik durchgeführt.

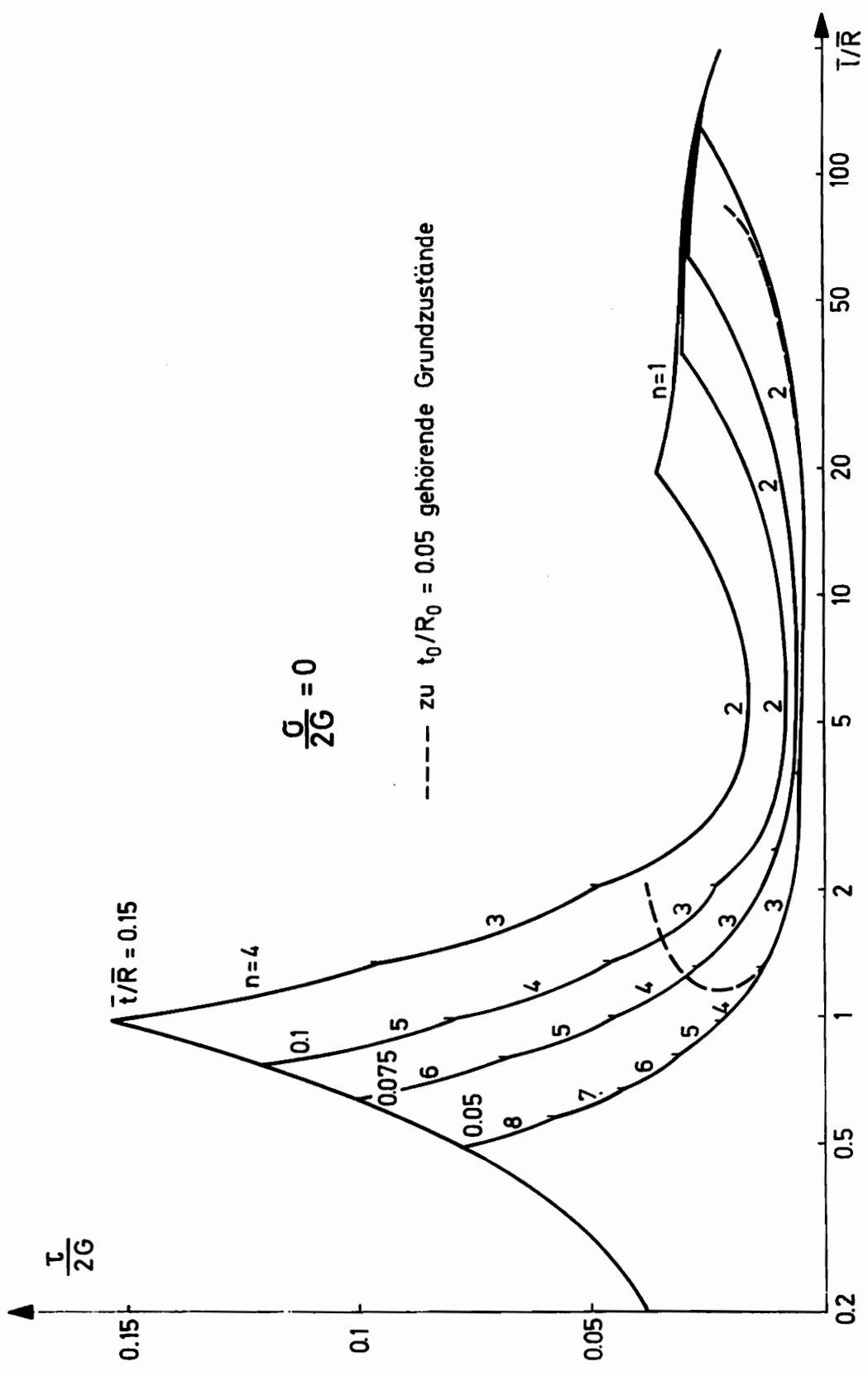


Abb. 9

*Verweijumpunkt dargestellt
über Geometrie der Grunddeformation*

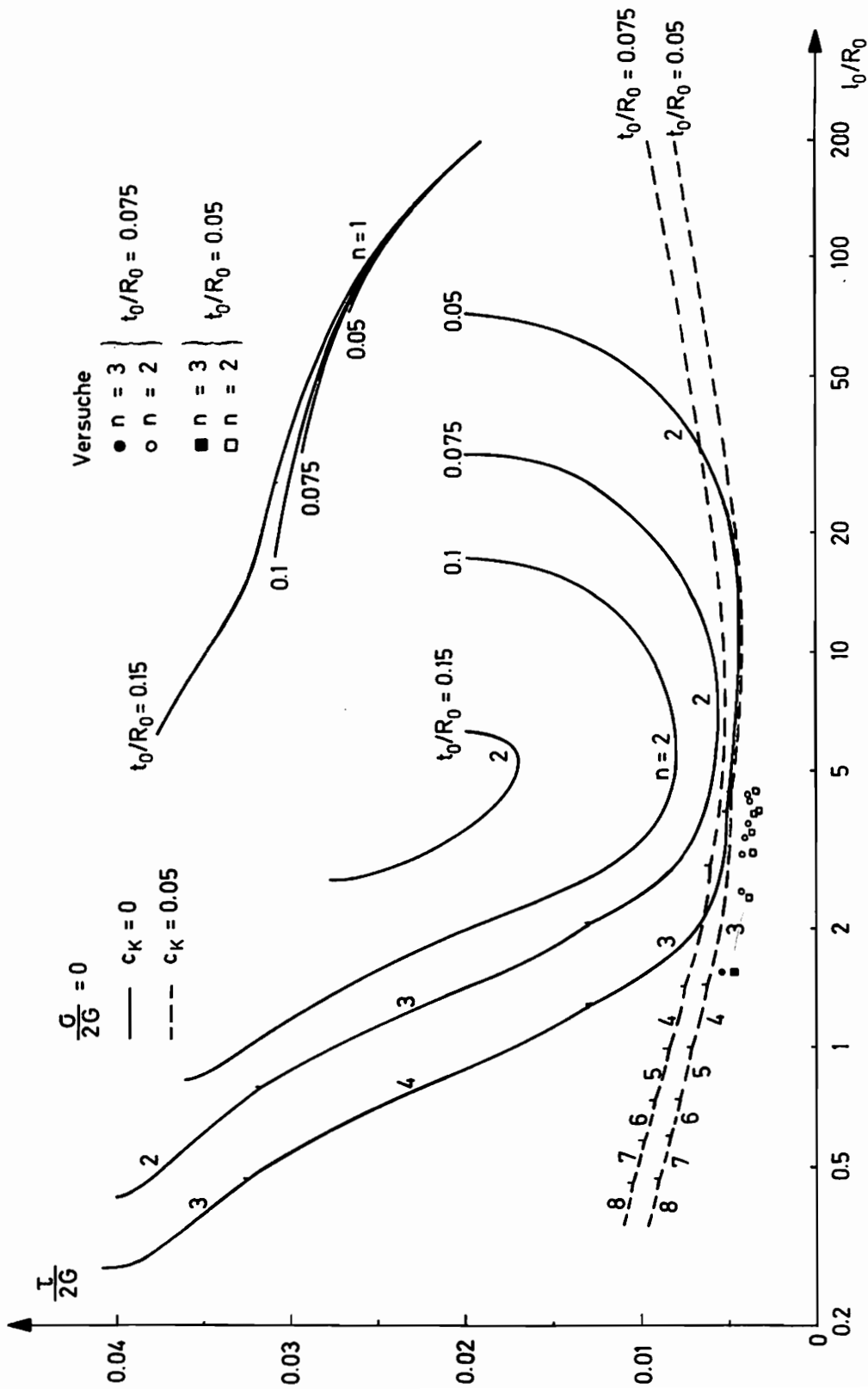


Abb. 10

reine Torsion

Verzerrungslast-Diagramm
über Geometrie des
Anfangszustandes

In Abb. 9 sind die Verzweigungslasten in Abhängigkeit von der Geometrie des Grundzustandes angegeben. Die Ergebnisse entsprechen den von BRUHNS in [19] vorgestellten Kurven für $\delta = 0.99$. Betrachten wir nun im Vergleich dazu die über der Geometrie des zugehörigen Ausgangszustandes aufgetragenen Verzweigungslasten in Abb. 10, so sehen wir, daß unter Berücksichtigung realistischen Materialverhaltens die im Bereich kleiner Werte \bar{l}/\bar{R} stark ansteigenden Verzweigungslasten durch keine Grunddeformation zu erreichen sind. Zur Verdeutlichung wurden in Abb. 9 alle zu $t_0/R_0 = 0.05$ gehörenden Grundzustände eingezeichnet. Der starke Anstieg der Verzweigungslasten bei kleinen l_0/R_0 wird, wie die in Abb. 10 eingetragenen Ergebnisse zeigen, durch die Versuche nicht bestätigt. Daß eine Abweichung von der Normalenregel eine bessere Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen bringt, verdeutlichen die für $c_k = 0.05$ in Abb. 10 eingetragenen Kurven. Da der Einfluß von c_k auf die Fälle $n = 1$ geringer ist als auf die Fälle mit $n = 2, 3, \dots$, führt diese Beulform bei $c_k = 0.05$ in keinem Bereich von l_0/R_0 mehr zu den niedrigsten Verzweigungslasten.

Betrachten wir nun die Ergebnisse für kombinierte Zug-Torsionslast in Abb. 11 und 12. Entsprechend dem im Versuch gewählten Belastungsweg, werden Zug- und Torsionslast nacheinander aufgebracht. Die Abweichungen, die sich bei gleichzeitigem Aufbringen beider Lasten ergeben, sind jedoch unbedeutend.

Die großen Verzweigungslasten im Bereich kleiner Werte \bar{l}/\bar{R} in Abb. 11 werden von Ausgangszuständen mit $l_0/R_0 > 0.2$ nicht erreicht. Bedingt durch die Zugbelastung wächst der Wert von l/R während der Grunddeformation an, d.h. die zu den Grundzuständen \bar{l}/\bar{R} gehörenden Ausgangszustände liegen bei kleineren Werten l_0/R_0 . Wie bei der reinen Torsionsbelastung, so zeigt sich auch in diesem Fall, daß erst ein Abweichen von der Normalenregel ($c_k = 0.05$) zu einer befriedigenden Annäherung an die Versuchsergebnisse führt.

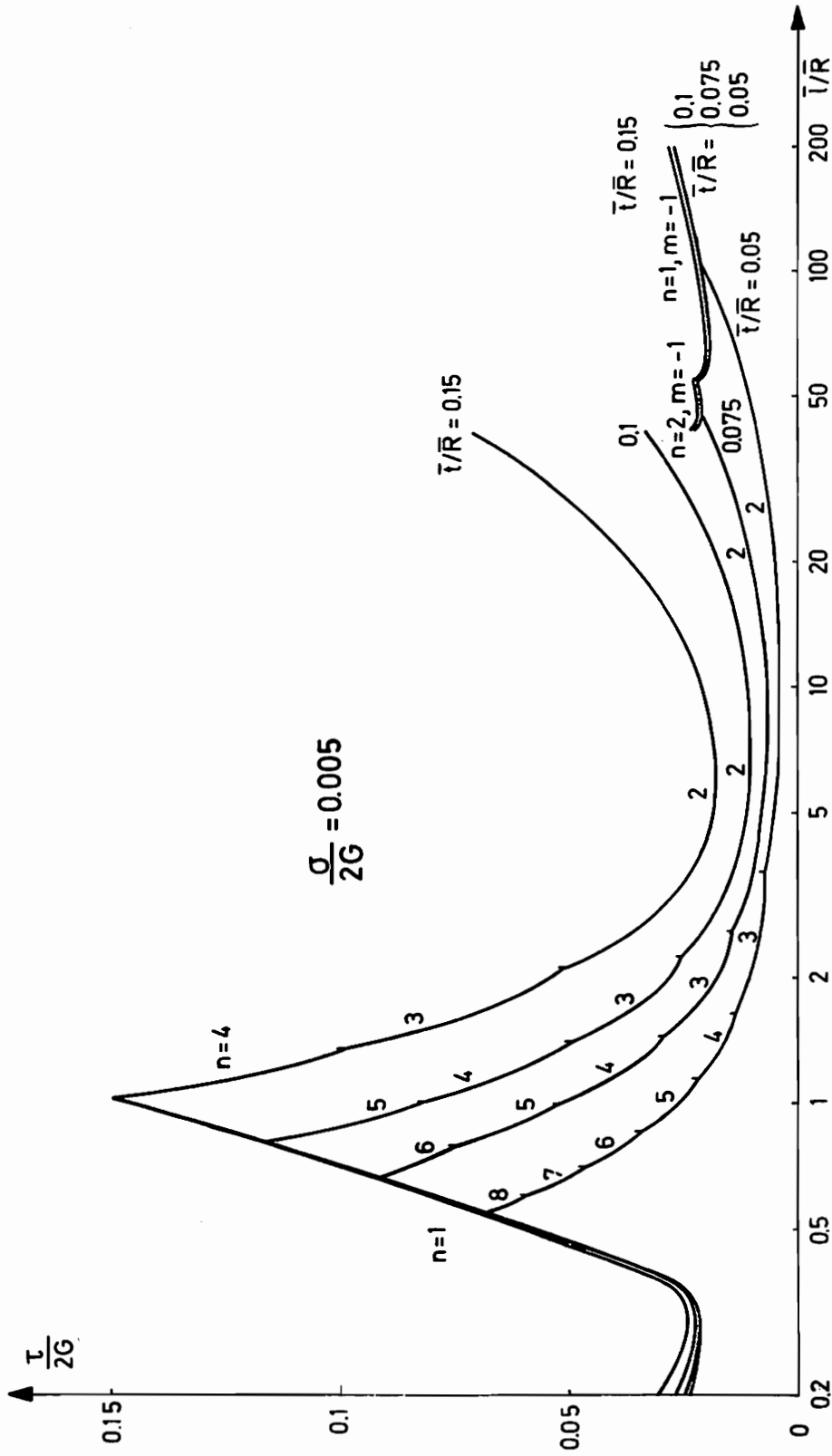


Abb. 11

Zug + Torsion

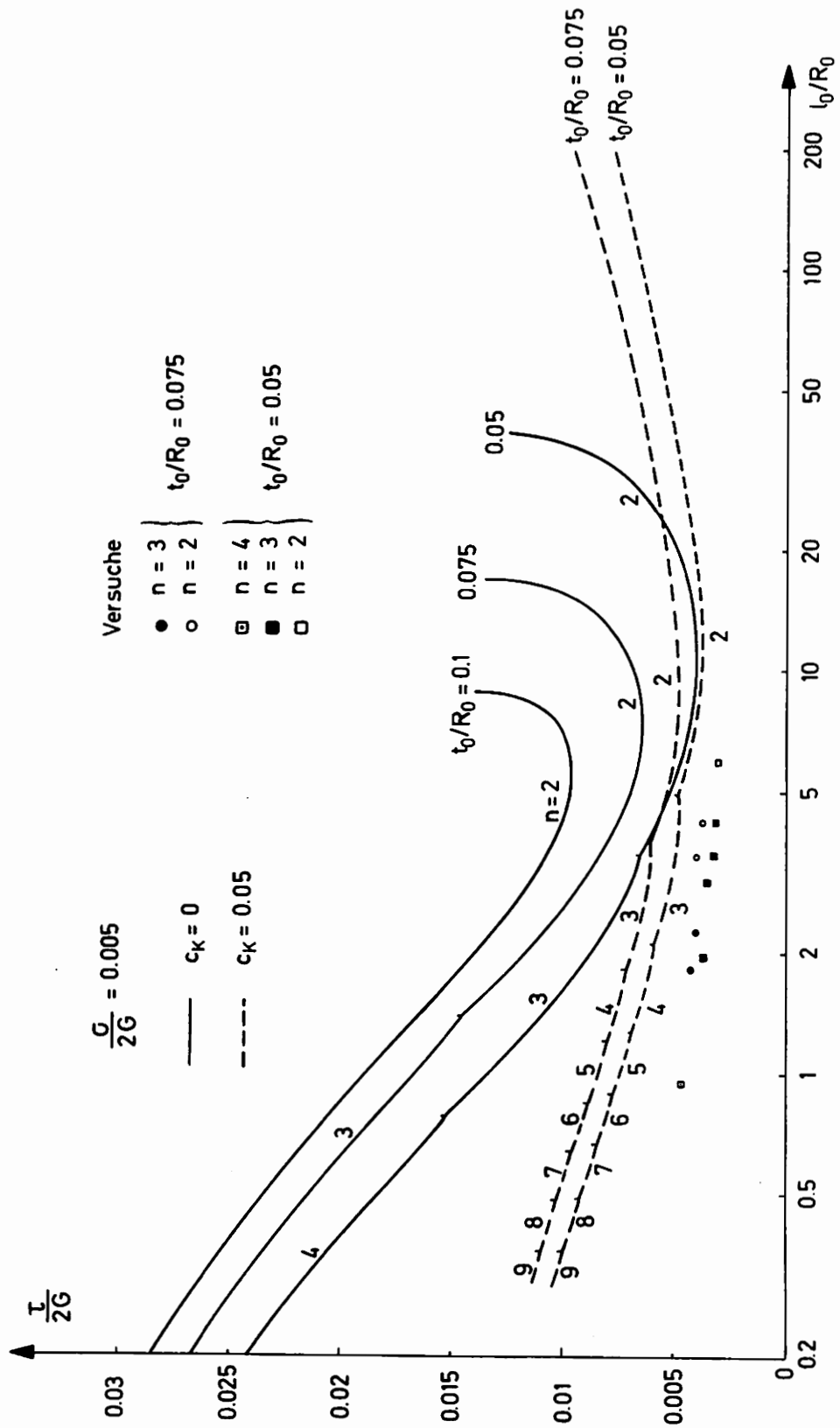


Abb. 12

Für die in Abb. 11 im Bereich $40 < \bar{l}/\bar{R} < 200$ auftretenden Verzweigungslasten mit $m = -1$ gilt entsprechend Abb. 13 b, daß die Beulwellen entgegen der Richtung des Torsionsmomentes laufen.

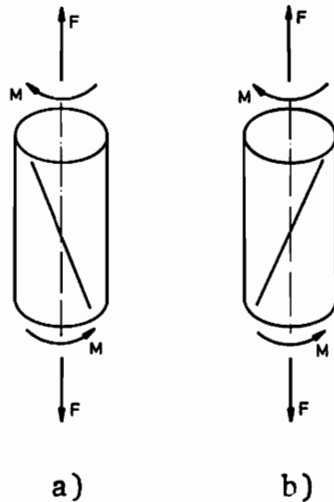


Abb. 13

Diese Werte besitzen jedoch nur theoretische Bedeutung. Im betrachteten Bereich liegen die Verzweigungslasten so hoch, daß sie nur von Ausgangszuständen erreicht werden können, zu denen schon Grundzustände mit niedrigeren Verzweigungslasten gehören.

Wenden wir uns nun dem Fall kombinierter Druck- Torsionsbelastung zu. (Abb. 14 und 15) Hinsichtlich des Belastungsweges gilt das gleiche wie bei kombinierter Zug- Torsionslast. Im Gegensatz zur Zugbelastung führt die Druckbelastung zu einer Abnahme von l/R während der Grunddeformation. Je höher die Verzweigungslasten sind, desto größer werden die zu einem Grundzustand \bar{l}/\bar{R} gehörenden Werte l_0/R_0 des Ausgangszustandes. Das führt dazu, daß im Bereich kleiner Werte l_0/R_0 zumindest für $c_k = 0$ keine Verzweigungslasten mehr erreicht werden. Die in Abb. 15 eingetragenen Versuchsergebnisse bestätigen das jedoch nicht. Auch hier führt erst ein Abweichen von der Normalenregel ($c_k = 0.05$) zu einer besseren Übereinstimmung.

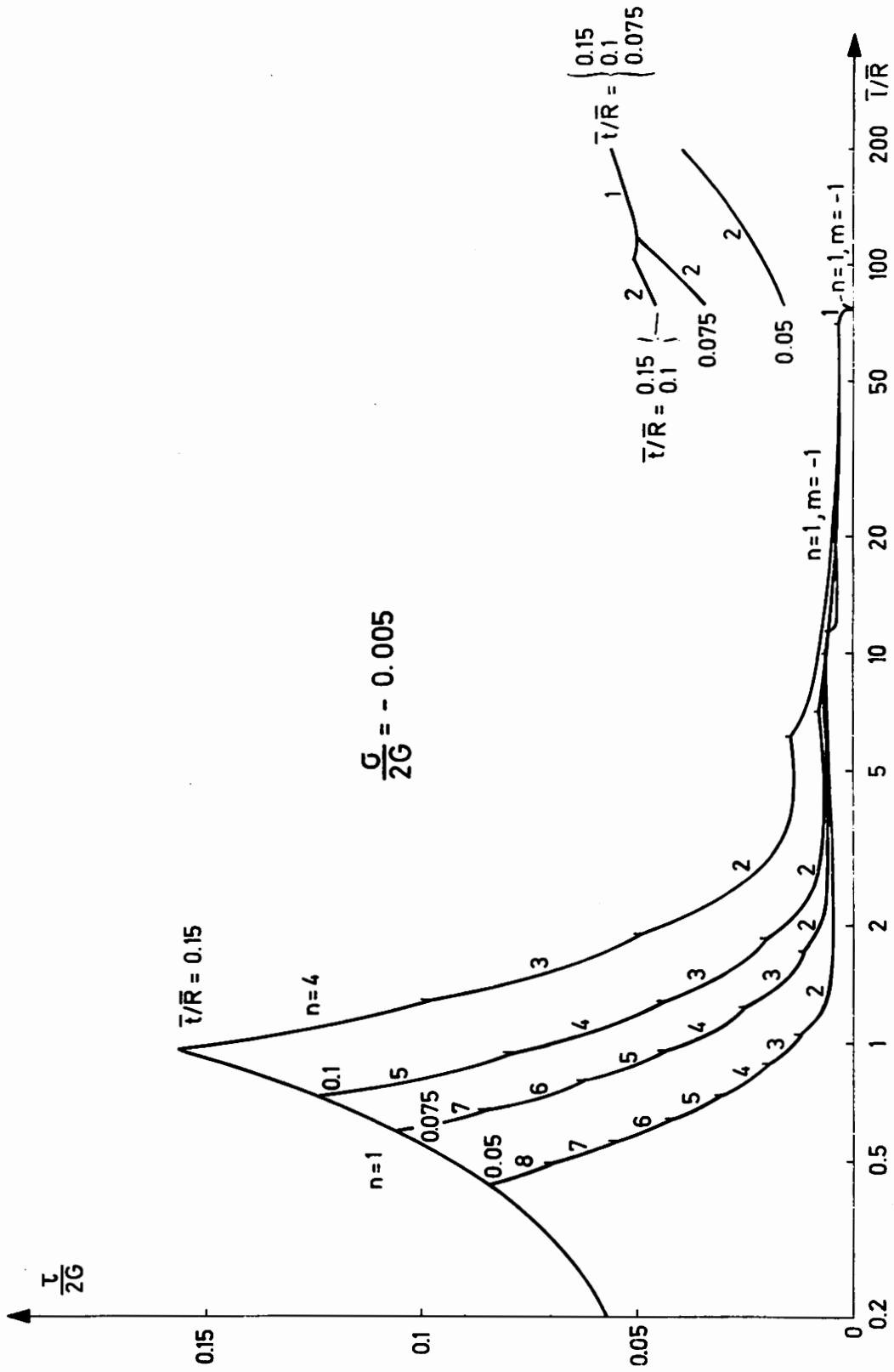


Abb. 14

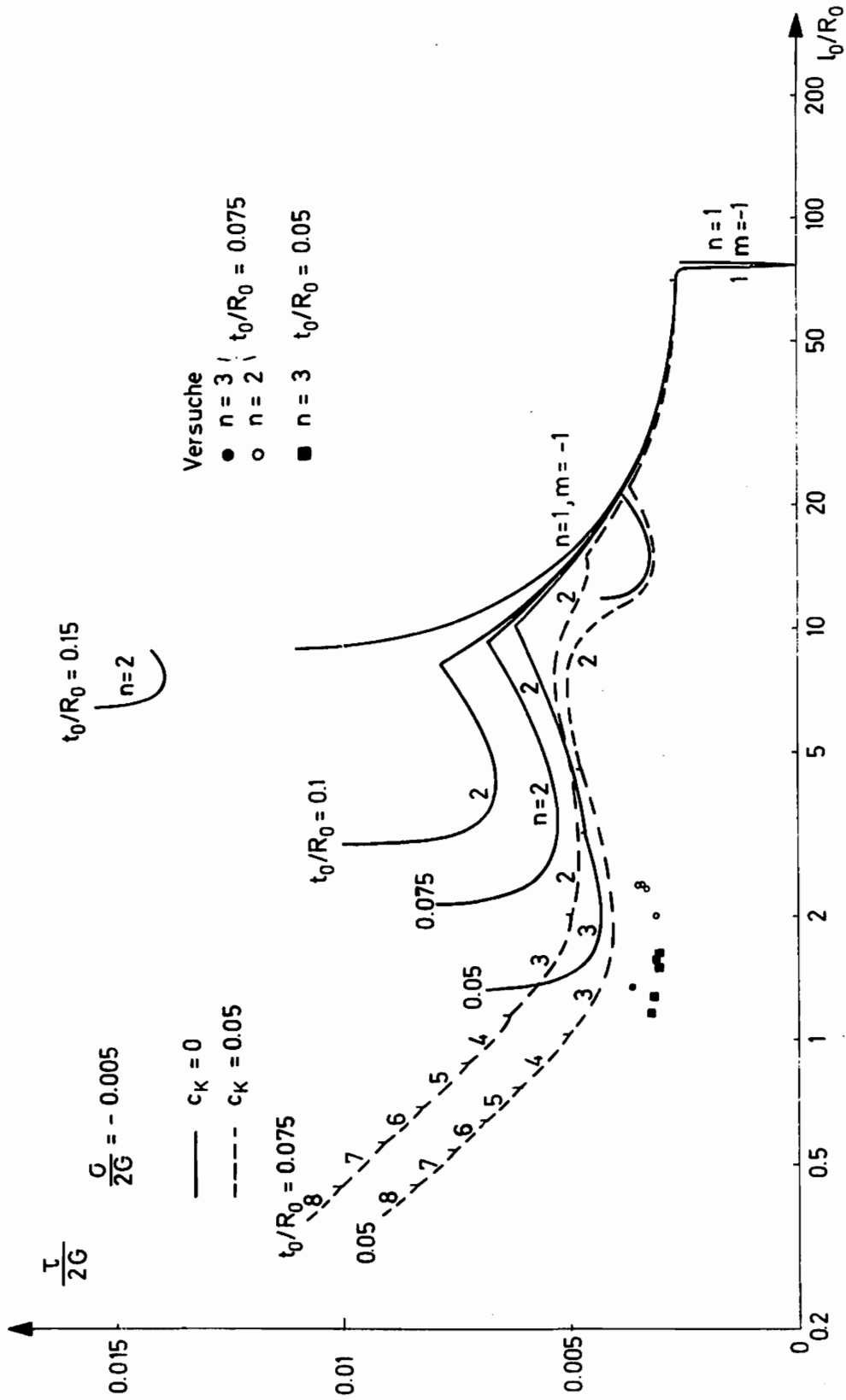


Abb. 15

Druck + Torsion

Bei Werten $l_0/R_0 > 10$ wird die Drucklast maßgeblich für die Verzweigung des Gleichgewichts. Es stellt sich mit $n = 1$, $m = -1$ (vgl. Abb. 5 und 13b) eine dem vierten EULER-Fall des knickenden Druckstabes entsprechende Beulform ein. vgl. [23] Bei $l_0/R_0 = 76$ erhalten wir mit $\bar{\tau} = 0$ den unter reiner Drucklast elastisch ausknickenden EULER-Druckstab.

Während bei den zuvor behandelten Fällen reiner Torsions- bzw. kombinierter Zug- Torsionslast die Verzweigungslasten so hoch liegen, daß eine lineare Verfestigung als gute Näherung betrachtet werden kann, so muß insbesondere bei Auftreten von Druckbelastungen, die oft schon im elastischen Bereich zu Verzweigungen des Gleichgewichts führen, auf eine exakte Beschreibung des Materialverhaltens im elastisch plastischen Übergangsbereich geachtet werden.

Für reine Drucklasten (vgl. Abb. 16 und 17) ergeben sich etwas andere Verhältnisse als für die zuvor behandelten Belastungsfälle. Neben den Beulformen mit Beulwellen in Umfangsrichtung $n = 1, 2, 3, \dots$, treten bei reiner Druckbelastung auch rotationssymmetrische Beulformen $n = 0$ auf. Der Fall $n = 1$, $m = -1$ stellt im elasto-plastischen Bereich $l_0/R_0 < 66$ den in der Einleitung beschriebenen Fall des von ENGESSER durch Einführung des Tangentenmoduls modifizierten EULER-Druckstabes dar.

Im rein elastischen Bereich $l_0/R_0 > 66$ ergibt sich der vierte EULER-Fall des ausknickenden Druckstabes, für den sich aus [23] die Verzweigungslast $\bar{\sigma}$ eines dünnwandigen Kreiszylinders bei inkompressiblem Materialverhalten ($\nu = 0.5$) zu

$$\bar{\sigma} = \frac{3 \pi^2}{(l/R)^2} \quad (7.12)$$

bestimmen läßt.

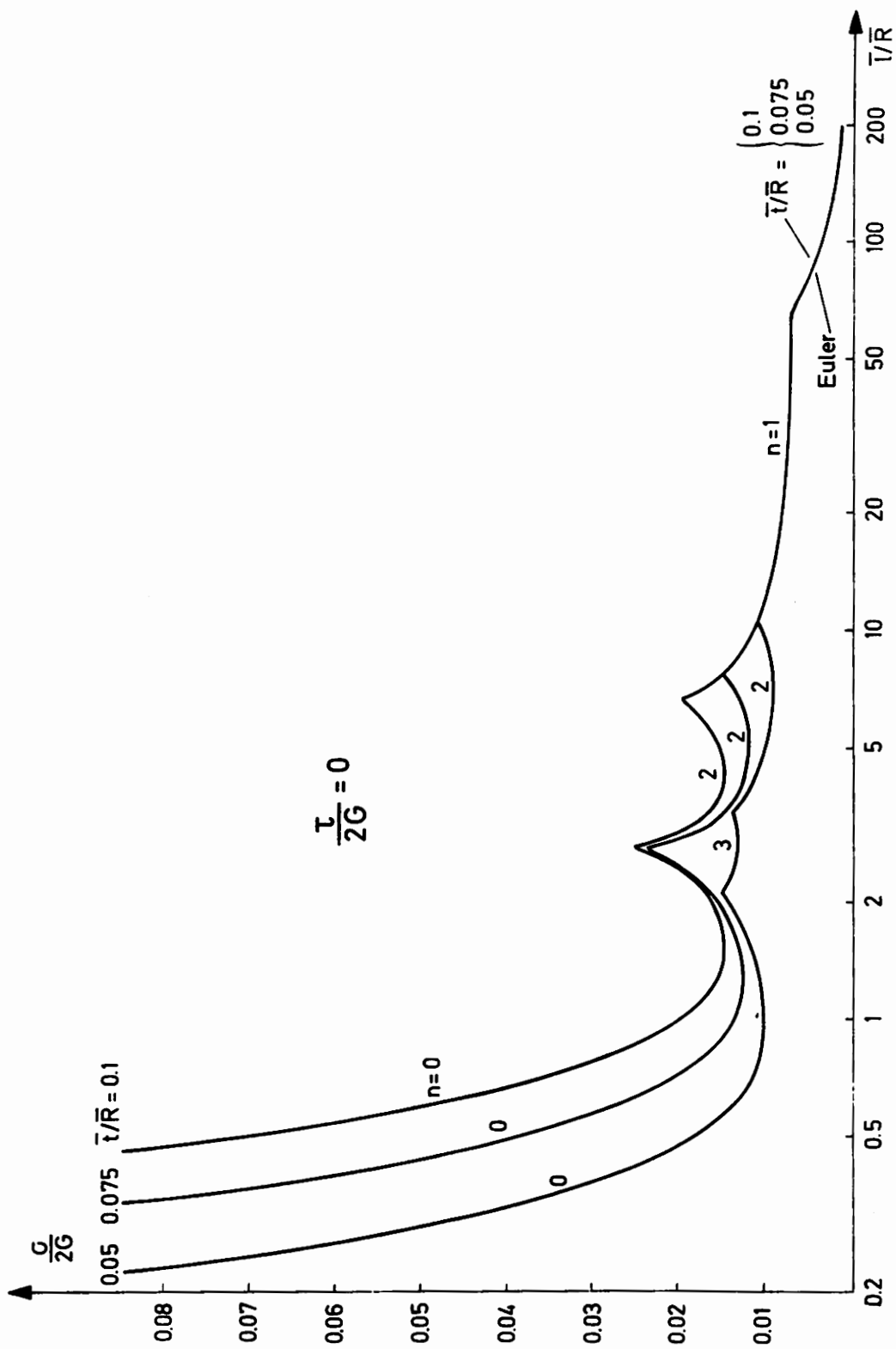


Abb. 16

Druck

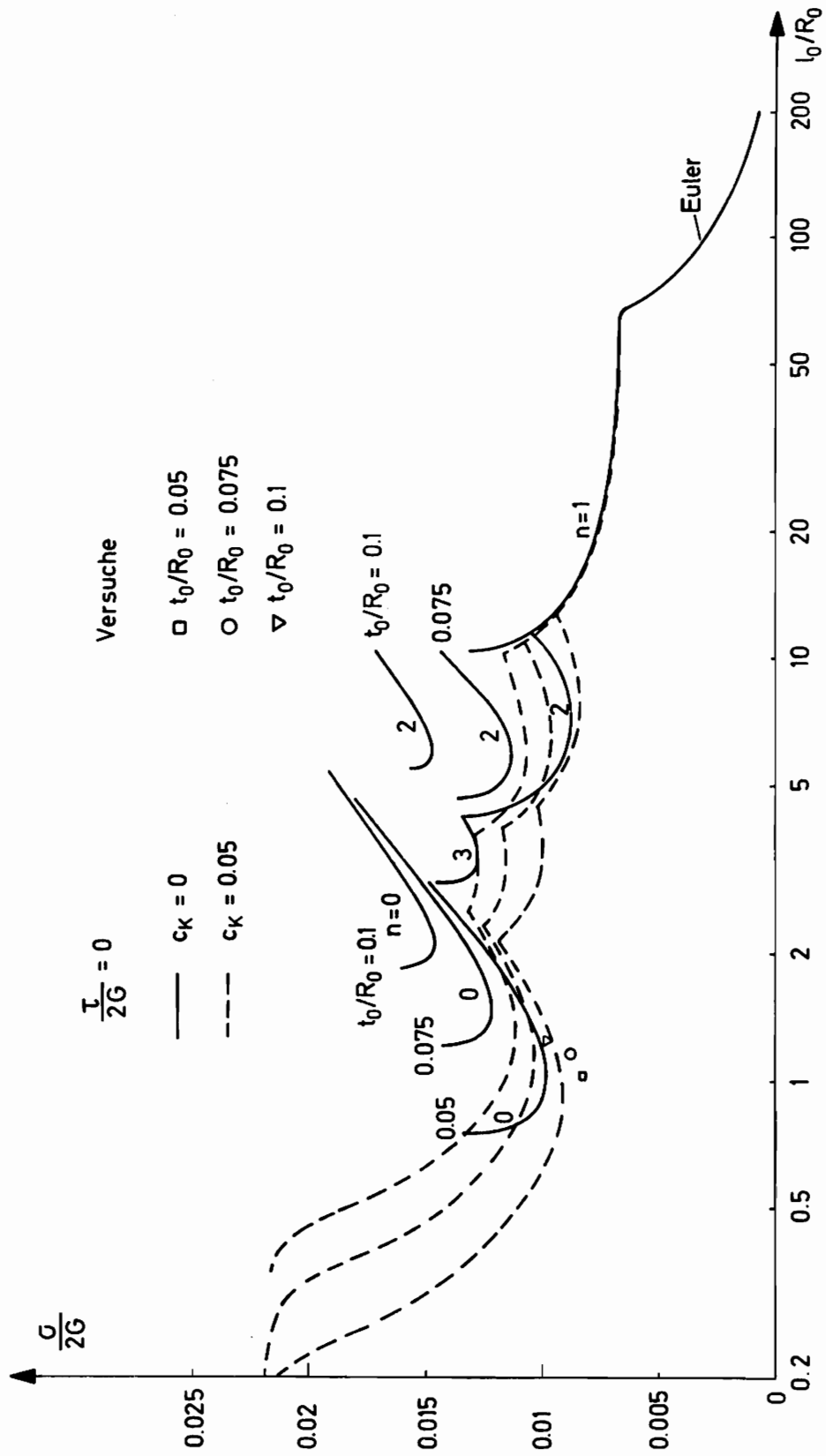


Abb. 17

Im Bereich kleiner l_0/R_0 werden aus den gleichen Gründen wie im Fall kombinierter Druck- Torsionslast (Abb. 14 und 15) bei Gültigkeit der Normalenregel ($c_k = 0$) keine Verzweigungslasten mehr erreicht, was, wie aus Abb. 17 ersichtlich, durch die Versuche nicht bestätigt wird. Eine bessere Anpassung an die Versuchsergebnisse wird wieder mit $c_k = 0.05$ erreicht. Obwohl die in [21] eingeführte Abweichung von der Normalenregel den einachsigen Belastungszustand nicht beeinflusst, so muß doch die Auswirkung auf die Verzweigung des Gleichgewichts unter einachsiger Belastung beachtet werden, da am Verzweigungspunkt zwar noch ein einachsiger Spannungszustand herrscht, dies jedoch nicht mehr für die Spannungskremente gilt. vgl. [24]

Allgemein kann für alle vier Belastungsfälle gesagt werden, daß erst ein Abweichen von der Normalenregel zu sinnvollen Ergebnissen führt. Die Größe $c_k = 0.05$ ist, wie schon vorher gesagt, nicht als exakte Materialgröße zu verstehen, sondern es soll lediglich exemplarisch die Auswirkung eines Abweichens von der Normalenregel gezeigt werden. Die Normalenregel selbst führt zu wesentlich zu hohen Verzweigungslasten, wodurch der Einfluß der Grunddeformation bei einer Berücksichtigung realen Stoffverhaltens zu groß wird.

Bei der Darstellung der Ergebnisse war immer von der Länge einer Beulwelle ausgegangen worden. Es stellt sich nun die Frage, welche Beullänge sich bei der Deformation eines Zylinders, von dem im allgemeinen nur seine frei deformierbare Länge im Ausgangszustand bekannt ist, einstellt. Auf diese Frage, die gleichbedeutend mit der Vorausbestimmung der Verzweigungslast aus den Abb. 9-17 ist, wollen wir im Zusammenhang mit den experimentellen Ergebnissen noch näher eingehen.

8. Experimentelle Untersuchungen

8.1. Versuchsdurchführung

Zur Überprüfung der Theorie wurden auf einer hydraulischen Zug-Torsionsprüfmaschine[†] Beulversuche an 38 Zylinderproben aus Al Mg Cu Pb Werkstoff Nr. 3.1645 durchgeführt.

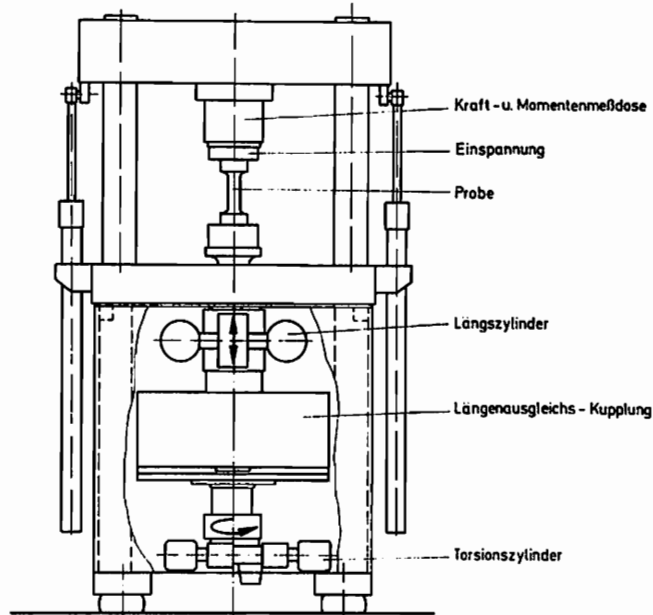


Abb. 18

Zur Werkstoffwahl muß bemerkt werden, daß zur Vermeidung von Einflüssen der Materialinstabilität, die z.B. bei weichen Stählen in Form von Entlastungen nach Erreichen der Streckgrenze auftritt, nur ein Material mit stetigem Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich gewählt werden sollte. Hochfeste Stähle haben zwar das gewünschte Verhalten besitzen jedoch nur geringe Bruchdehnung und bedingen außerdem, wegen der begrenzten Leistung der Prüfmaschine

[†]) Die Maschine wurde von der Firma Schenk in Darmstadt gebaut und vom Inst. f. Mechanik mit Mitteln der Stiftung Volkswagenwerk erworben.

kleine, für die Herstellung schwierige Probenabmessungen. Für eine kostengünstige Fertigung sollte als Halbzeug ein nahtloses Rohr aus dem gewünschten Material lieferbar sein. Die Wahl fiel schließlich auf den oben angegebenen Werkstoff, der sich zudem durch sehr gute Zerspanungseigenschaften auszeichnet.

Es wurden die vier aus der theoretischen Behandlung bekannten Belastungsfälle reine Torsion, Zug-Torsion, Druck-Torsion- sowie reine Druckbelastung untersucht. Neben dem Einfluß der Wandstärke wurde auch der Einfluß der freien Probenlänge l_0 auf das Beulverhalten untersucht. Die Probenabmessungen können der Abb. 19 und den Tab. 1-4 entnommen werden.

Die Proben für reine Längsbelastung, bei denen rotations-symmetrische Beulen entsprechend Abb. 5a auftreten, sind zur Vermeidung von zu großen Imperfektionen an den Rändern des Meßbereichs, wie in Abb 19b angegeben, ausgeführt.

Außerdem wurde bei reiner Druckbelastung auf eine Untersuchung des Einflusses der reinen Probenlänge verzichtet, da so kleine Beullängen zu erwarten waren, daß bei Zylindern mit noch kleinerer freier Länge l_0 kein von Einspannungseinflüssen freier Bereich mehr vorhanden ist.

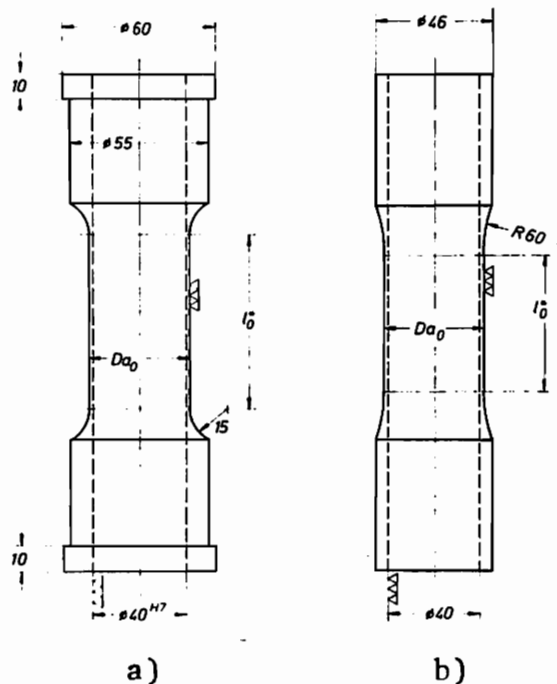


Abb. 19

Die Spannung der Proben erfolgt durch eine eigens konstruierte Spannvorrichtung⁺ Abb. 20.

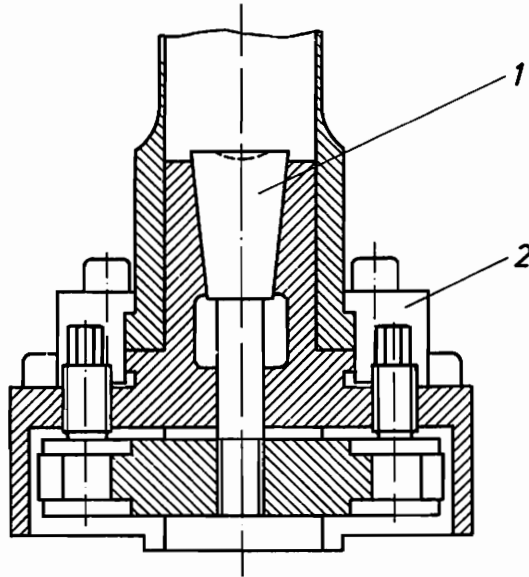


Abb. 20

Die Innenklemmung durch den Spreizkonus 1 gewährleistet eine sehr gute Zentrierung im eingespannten Zustand, und sorgt für eine Krafteinleitung an der Innenseite. Zur Sicherung insbesondere gegenüber Zugbelastungen sind Spannbrücken 2 vorgesehen.

In den Fällen mit kombinierter Belastung wurde zunächst die Längslast kraftgesteuert mit zeitlich linearem Kraftanstieg aufgebracht. Die Torsionslast sowie die Längslast bei den Versuchen mit reiner Druckbelastung wurde dagegen winkel- bzw. weggesteuert aufgebracht, da diese Last bis zum Beulen der Probe gesteigert wurde, und bei Kraft- bzw. Momentensteuerung unmittelbar nach Erreichen der Verzweigung eine so große Deformation eintritt, daß die Probe zerstört wird. Zwecks Ermittlung der tatsächlichen Beul-

⁺) Herrn P. Grundmann sei für die wertvolle Hilfe bei der Vorbereitung und Durchführung der Versuche gedankt.

länge sollte eine Zerstörung aber vermieden werden. Die von der theoretischen Berechnung abweichende Winkel- bzw. Wegsteuerung erfolgt jedoch nur in einer Lastrichtung und führt so nicht zu einer Verfälschung des Ergebnisses. Lediglich der zum entsprechenden Last- Verformungsdiagramm gehörende Zeitmaßstab wird dadurch verzerrt.

Die Messung der Verzweigungslasten stellt ein schwieriges Problem dar, da die Stelle der Probe, an der zuerst eine Beule auftritt, nicht bekannt ist. Zur richtigen Erfassung des Beulbeginns ist eine Information über die Deformation für jeden Punkt des Umfangs erforderlich. Eine Abtastung durch Weggeber ist somit unmöglich. Dehnungsmeßstreifen lassen sich wegen ihrer kleinen Baugröße zwar in großer Zahl auf dem Umfang unterbringen, jedoch ist ihr Einsatz schon durch die bei der Grunddeformation erreichten plastischen Deformationen nicht möglich. Es wurde deshalb zur Bestimmung der Verzweigung die Deformation eines optisch auf die Probenoberfläche aufgebrauchten Linienmusters betrachtet. Das Auftreten einer Beule wurde im Last- Verformungsdiagramm markiert. Mit dieser Methode können Beulwellen mit einer Amplitude von 0.2 - 0.3 mm festgestellt werden. Da die Verzweigung zudem im bereits relativ flach verlaufenden Teil der Last- Verformungskurve auftritt, in dem wegen des zeitlich linearen Anstiegs von Weg bzw. Winkel nur noch ein sehr langsamer Lastanstieg erfolgt, beträgt der maximale Fehler im Lastbereich etwa 3%.

8.2. Darstellung und Diskussion der Versuchsergebnisse

Die Ergebnisse der Beulversuche sind im folgenden zusammen mit den Probenabmessungen in den Tabellen 1 - 4 zusammengestellt. Zum Vergleich mit den Ergebnissen der theoretischen Untersuchungen sind sie außerdem in den Abb. 10,12,15 und 17 eingetragen.

Reine Torsion

l_0^* [mm]	D_{α_0} [mm]	t_0/R_0	l_0^*/R_0	l_0/R_0	n	$\bar{\sigma}/10^{-3}$	$\bar{\tau}/10^{-3}$
30	42.03	0.0499	1.463	1.546	3	0	4.65
50	42.05	0.0505	2.438	2.380	2	0	3.78
70	42.03	0.0495	3.413	3.080	2	0	3.51
80	42.04	0.0500	3.901	3.460	2	0	3.64
90	42.00	0.0497	4.392	3.900	2	0	3.42
100	41.97	0.0485	4.881	3.960	2	0	3.31
110	42.05	0.0502	5.363	4.460	2	0	3.38
30	43.12	0.0753	1.444	1.568	3	0	5.36
50	43.07	0.0739	2.408	2.500	2	0	4.27
70	43.12	0.0752	3.369	3.080	2	0	4.16
80	43.10	0.0749	3.851	3.420	2	0	4.07
90	43.10	0.0750	4.333	3.700	2	0	3.82
100	43.12	0.0751	4.812	4.220	2	0	3.78
110	43.10	0.0744	5.295	4.340	2	0	3.84

Tab. 1

Zug- Torsion

l_o^* [mm]	D_{a_o} [mm]	t_o/R_o	l_o^*/R_o	l_o/R_o	n	$\bar{\epsilon}/10^{-3}$	$\bar{\tau}/10^{-3}$
30	42.03	0.0499	1.463	0.936	4	4.97	4.58
50	42.03	0.0499	2.439	1.944	3	5.02	3.67
70	42.03	0.0497	3.414	2.988	3	5.04	3.53
90	42.04	0.0495	4.388	3.482	3	4.99	3.17
110	42.05	0.0502	5.364	4.236	3	4.99	3.14
130	42.05	0.0502	6.34	6.006	2	5.02	3.02
30	43.13	0.0754	1.444	-	-	-	-
50	43.11	0.0748	2.407	1.834	3	5.07	4.26
70	43.14	0.0755	3.368	2.264	3	5.02	4.00
90	43.12	0.0750	4.331	3.486	2	4.99	3.98
110	43.12	0.0755	5.295	4.248	2	5.10	3.74

Tab. 2

Druck- Torsion

l_o^* [mm]	D_{a_o} [mm]	t_o/R_o	l_o^*/R_o	l_o/R_o	n	$\bar{\epsilon}/10^{-3}$	$\bar{\tau}/10^{-3}$
30	42.03	0.0497	1.463	1.170	3	4.98	3.20
50	42.03	0.0496	2.440	1.268	3	4.98	3.14
70	42.05	0.0500	3.413	1.560	3	4.98	3.07
80	42.06	0.0500	3.900	1.500	3	4.96	3.06
90	42.04	0.0500	4.390	1.640	3	5.02	3.02
30	43.09	0.0745	1.444	1.358	3	4.94	3.66
50	43.15	0.0760	2.406	2.050	2	4.98	3.08
70	43.12	0.0750	3.369	2.400	2	4.94	3.48
80	43.12	0.0753	3.850	2.380	2	4.94	3.42
90	43.13	0.0756	4.330	2.360	2	4.94	3.32

Tab. 3

Reiner Druck

l_o [mm]	D_{a_o} [mm]	t_o/R_o	l_o/R_o	l_o/R_o	$-\bar{\sigma}/10^{-3}$
82	42.06	0.0503	3.997	1.026	8.23
91	43.12	0.0756	4.381	1.164	8.73
98	44.21	0.0999	4.655	1.242	9.81

Tab. 4

Alle Proben haben einen Innendurchmesser $D_{i_o} = 40$ mm vgl. Abb. 19. Die wichtigsten, nicht angegebenen Maße und Grö-
sen ergeben sich wie folgt.

$$R_o = \frac{1}{4} (D_{a_o} + D_{i_o}), \quad t_o = \frac{1}{2} (D_{a_o} - D_{i_o})$$

$$A_o = 2 \pi R_o t_o = \frac{\pi}{4} (D_{a_o}^2 - D_{i_o}^2) \quad (8.1)$$

$$W_{T_o} = \frac{\pi}{12} (D_{a_o}^3 - D_{i_o}^3)$$

Die Spannungen ergeben sich zu

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{A_o 2.5}, \quad \bar{\tau} = \frac{M}{W_{T_o} 2.5} \quad (8.2)$$

mit $G = 2.24 \cdot 10^4 \frac{N}{mm^2}$.

Die Spannungen $\bar{\sigma}$ und $\bar{\tau}$ sind also nicht die mit der Theo-
rie ermittelten wahren Spannungen. Der Fehler ist aber im
Rahmen der im Versuch erreichten Deformationen vernachlässig-
bar. Eine Ermittlung der wahren Spannungen erfordert
eine Messung von Wandstärke und Außendurchmesser während
des Versuchs, was besonders im Hinblick auf die sich ein-
stellenden Beulen zu Schwierigkeiten führt.

Die in den Tabellen angegebene Größe l_o ist die auf den
unverformten Zustand bezogene Länge einer Beulwelle, die
wir zum Vergleich mit den theoretischen Ergebnissen benö-

tigen. Mit l^* als der, an der deformierten Probe ausgemessenen freien Länge und der im gleichen Zustand ermittelten Länge einer Beulwelle l gilt,

$$l_0 = \frac{l_0^*}{l^*} \quad (8.3)$$

Zur Ermittlung der Länge l wurden die Proben um jeweils 60° in Umfangsrichtung versetzt, entlang ihrer Längsachse abgetastet. In Abb. 21 ist der abgetastete Außenradius über der Länge aufgetragen. Jede Kurve gilt für einen bestimmten Winkel. Die gestrichelten Linien geben als Bezugspunkt den Außenradius für den Winkel 0° und die Längskoordinate $z/l^* = 0$ an. Die gesuchte Länge l ergibt sich aus dem Abstand der Maxima bzw. Minima. Dabei wurde ein Mittel aus den Kurven für die unterschiedlichen Winkel gebildet.

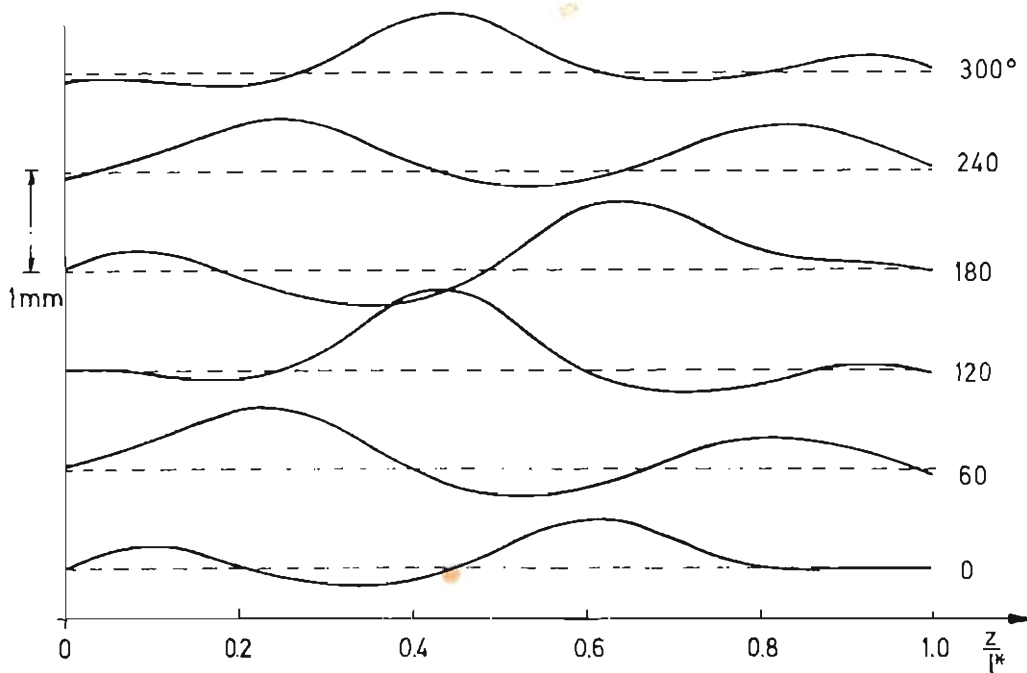


Abb. 21

In Abb. 22 finden wir die gleichen Angaben für eine Probe, bei der, bedingt durch Einspannungseinflüsse, die Länge einer ganzen Beulwelle nicht exakt zu bestimmen ist. Im Gegensatz zu dem Fall aus Abb. 21 ergibt sich das Maß l hier als der zweifache Wert des Mittels der Abstände zwischen je einem Maximum und einem Minimum.

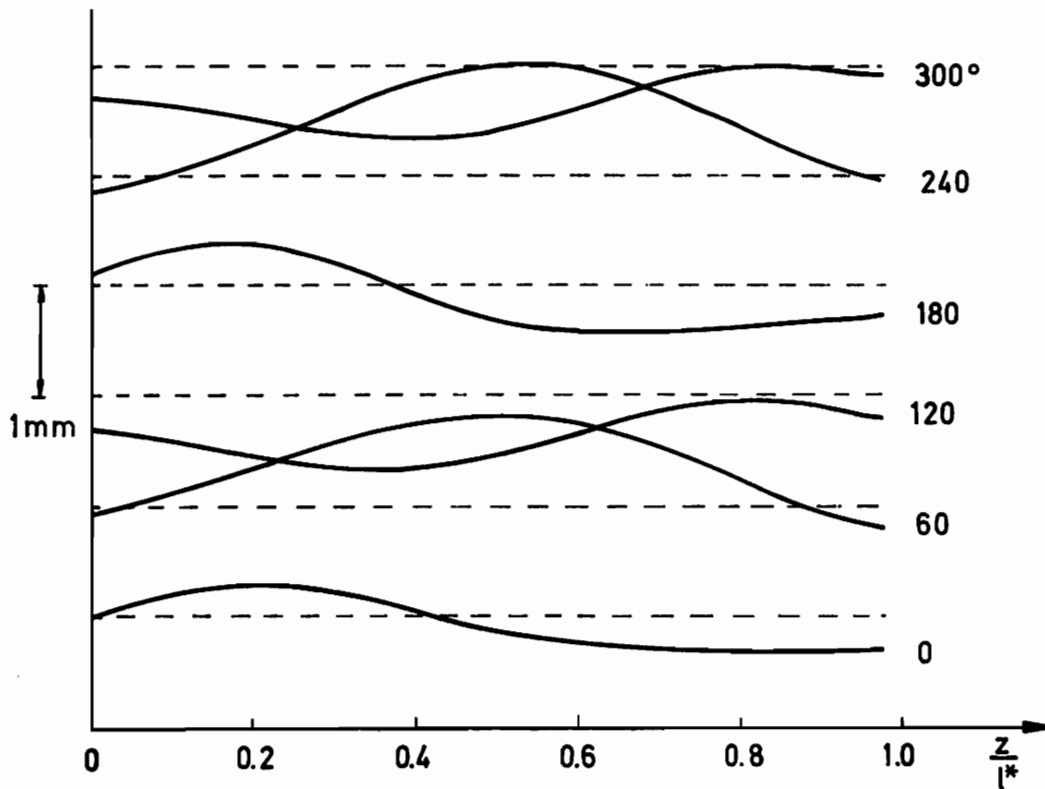


Abb. 22

Zur Bestimmung der Anzahl n der Beulwellen in Umfangsrichtung wurden die Proben an verschiedenen Stellen der Meßlänge in Umfangsrichtung abgetastet. Es zeigt sich nämlich (vgl. Abb. 23), daß, vermutlich bedingt durch Anfangsimperfektionen, die Amplituden der Beulwellen einer Probe unterschiedlich hoch ausfallen, sodaß bei einer oberflächlichen Betrachtung die Anzahl der Beulwellen oft nicht richtig erkannt wird.

Die Abtastung der Proben wurde auf der gleichen Drehbank vorgenommen, auf der auch die Feinbearbeitung der Proben durchgeführt wurde. Die Abtastgenauigkeit liegt somit in der gleichen Größenordnung wie die Fertigungsgenauigkeit der Proben. Deshalb ist eine Bestimmung der Anfangsimperfektionen mit dieser Meßmethode nicht möglich.

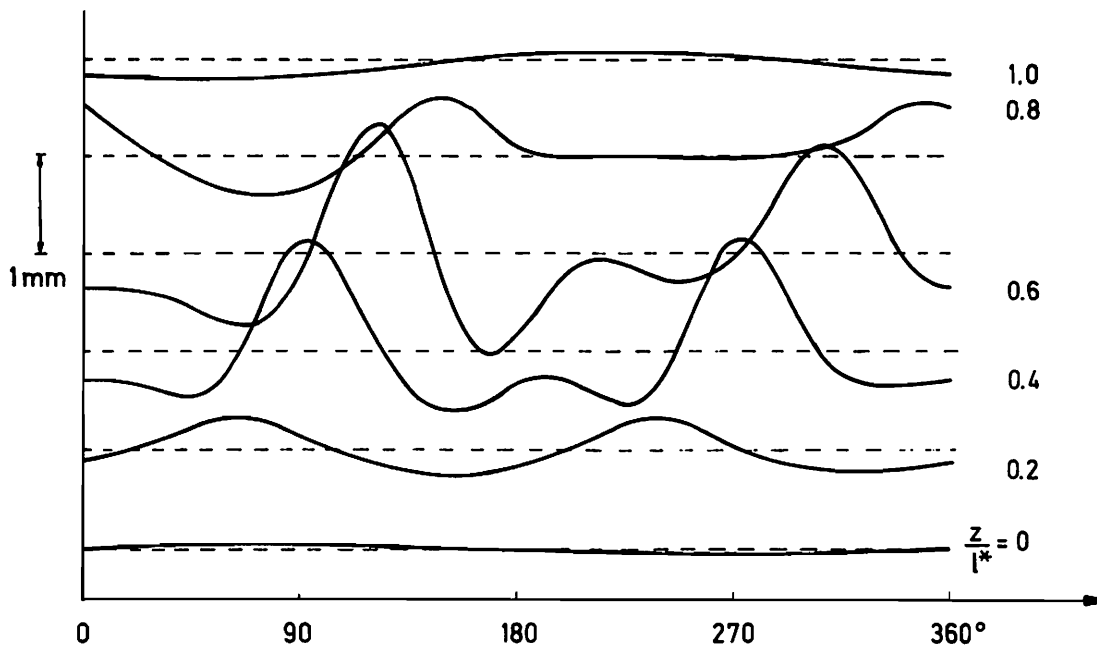


Abb. 23

Bei der Diskussion der theoretischen Ergebnisse wurde bereits die Frage nach der sich tatsächlich einstellenden Beullänge aufgeworfen. In Abb. 24 sind deshalb die ermittelten, auf den Ausgangszustand bezogenen Beullängen in Abhängigkeit von der freien Meßlänge aufgetragen. Betrachten wir die Fälle reine Torsion und Zug-Torsion, so stellen wir fest, daß sich in der freien Länge l^* genau eine Beule ausbildet. Daß die Beullängen l geringfügig kleiner sind, ist darauf zurückzuführen, daß am Rande der Meßlänge Einspannungseinflüsse das freie Ausbilden einer Beule behindern. Wie ein Vergleich mit Abb. 15 bestätigt, stellt sich im Fall Druck-Torsion im Rahmen der durch die freie Meßlänge gegebenen Möglichkeit genau die Beullänge ein, die zur minimalen Verzweigungslast führt. Dieses Ergebnis wird auch durch den reinen Druckversuch (vgl. Abb. 17) bestätigt. Unter Berücksichtigung dieser Tatsachen können wir die Abb. 10, 12, 15 und 17 zur Vorausbestimmung von Beullasten dünnwandiger Kreiszyylinder verwenden.

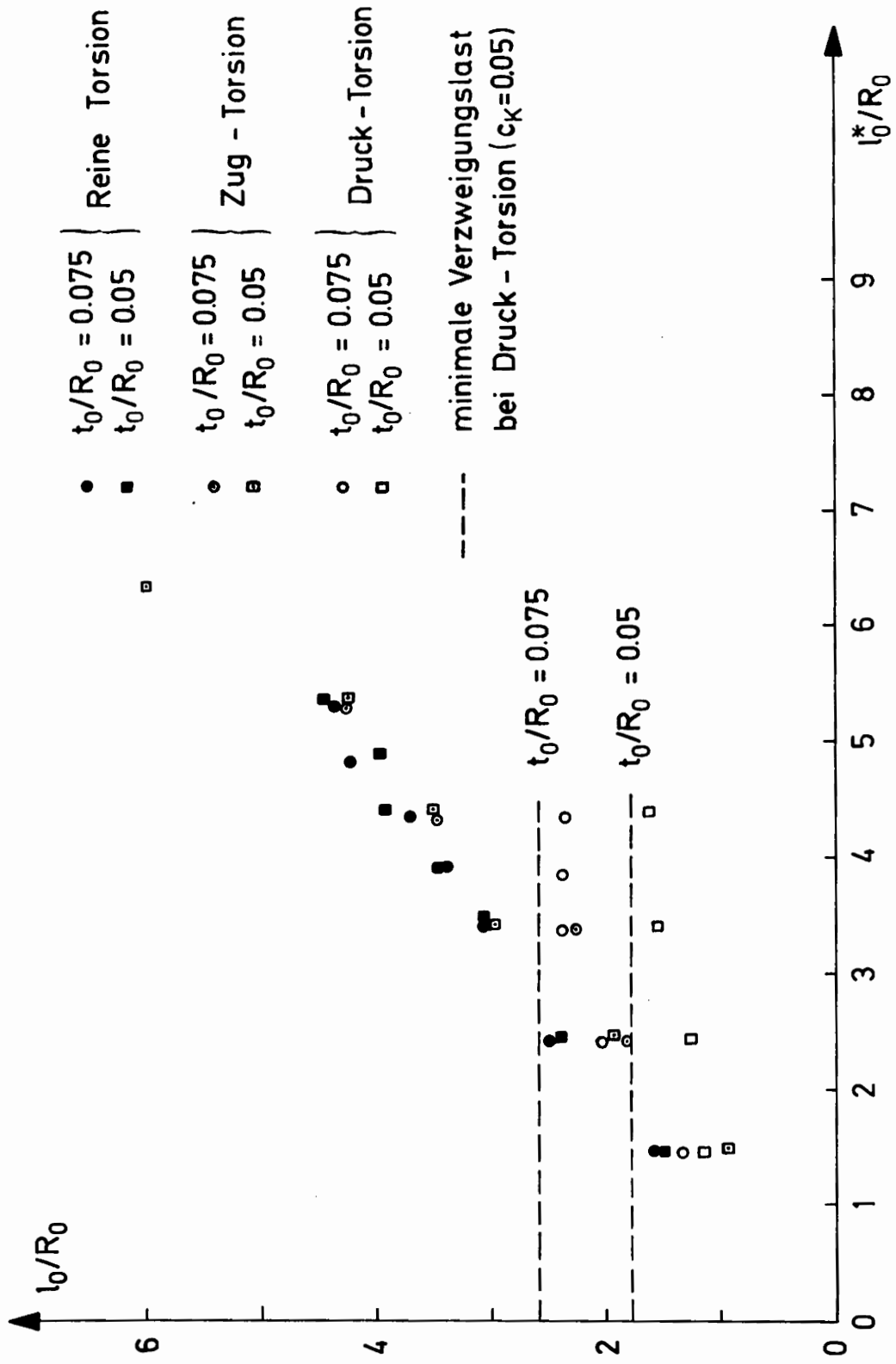


Abb. 24

Für die Länge einer Beulwelle können sich alle Werte l_0/R_0 , die kleiner sind, als der durch die freie Meßlänge bestimmte Wert l_0^*/R_0 einstellen. Der Zylinder wird also mit der Beullänge ausbeulen, die im Bereich $0 < l_0/R_0 < l_0^*/R_0$ zu der minimalen Verzweigungslast führt. Das bedeutet aber auch, daß alle Werte rechts vom absoluten Minimum der Verzweigungslast im praktischen Versuch nicht erreicht werden können. Ist die Meßlänge größer als die zur minimalen Verzweigungslast gehörende Beullänge, so erhöht sich entsprechend die Anzahl m der Beulwellen in Längsrichtung.

Betrachten wir noch einmal die in den Abb. 10, 12, 15 und 17 eingetragenen Versuchsergebnisse, so stellen wir fest, daß die Versuche zu wesentlich niedrigeren Verzweigungslasten führen, als die Theorie. Das liegt zum einen sicher daran, daß die Proben Anfangsimperfektionen aufweisen, die das Beulen begünstigen. Aus den bereits erwähnten Gründen war eine Beurteilung des Einflusses der Anfangsimperfektionen auf das Versuchsergebnis nicht möglich.

Ein weiterer Grund für die Abweichungen zwischen Theorie und Experiment liegt aber darin, daß die verwendete Fließbedingung nach v. MISES für den untersuchten Werkstoff eine zu hohe Anfangsfließspannung im Torsionsbereich liefert. Der Einfluß von herstellungsbedingten Anisotropien im untersuchten Material kann ausgeschlossen werden, da auch Versuche mit lösungsgeglühten Proben zu den gleichen Ergebnissen führten. Im einachsigen Zugversuch, an den ja das Fließgesetz angepaßt wurde, finden wir, wie Abb. 17 zeigt, zumindest für $c_k = 0.05$ eine sehr viel bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment als in den Versuchen mit Torsionsbelastung.

Im Anhang finden sich noch einige erläuternde Bilder zu den Versuchsergebnissen.

9. Zusammenfassung und Ausblick

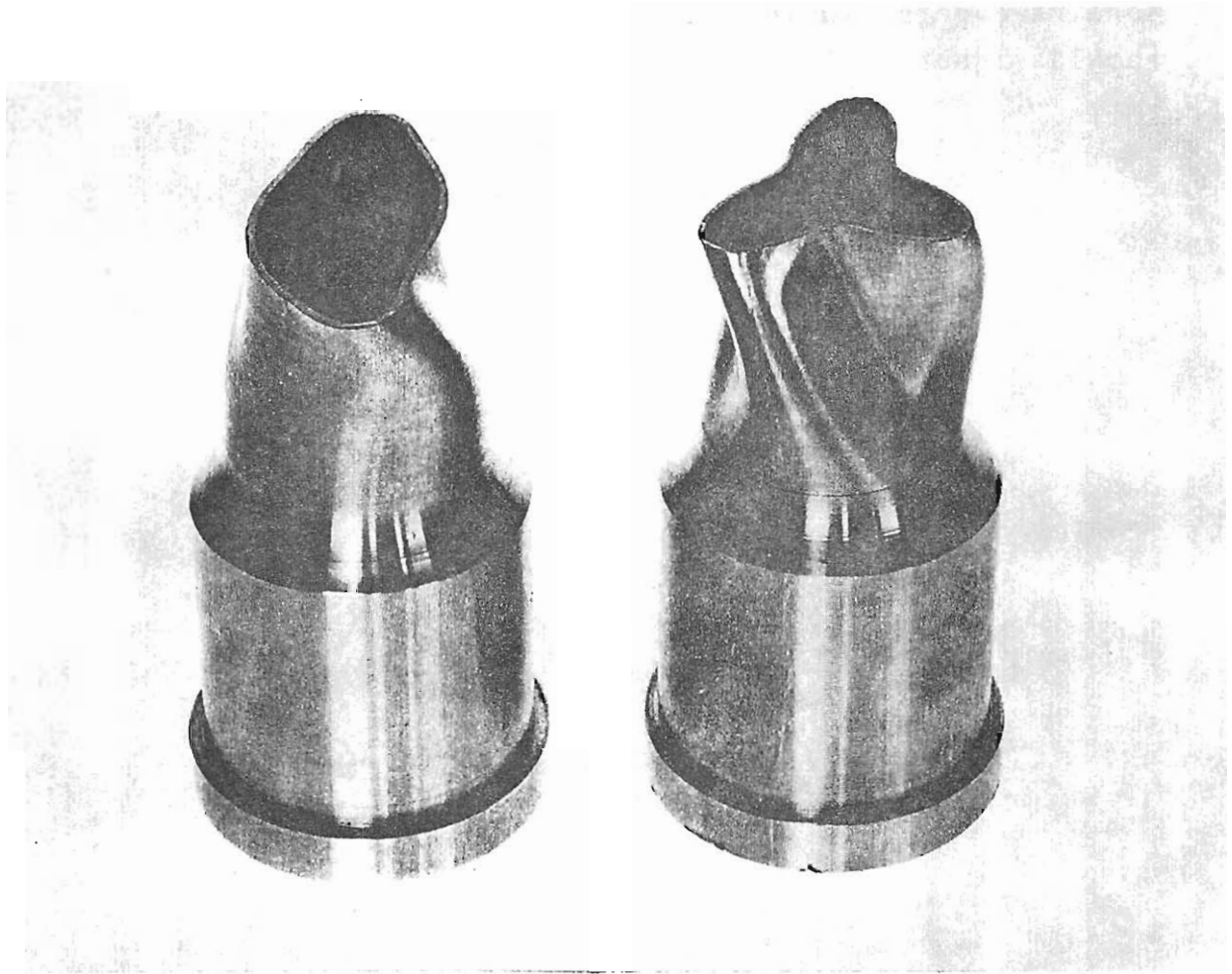
In der vorliegenden Arbeit werden die Verzweigungslasten einer dünnwandigen, elasto-plastisch deformierten Kreis-zylinderschale unter kombinierter Längs- und Torsionsbelastung sowohl theoretisch als auch experimentell bestimmt. Abweichend von den bereits bekannten Arbeiten [10] - [19] wird dabei elasto-plastisches Stoffverhalten und ein reales, nichtlineares Verfestigungsgesetz sowie die Grunddeformation als große elasto-plastische Deformation berücksichtigt. Darüber hinaus wird, einem Vorschlag von LEHMANN in [21] folgend, für den plastischen Anteil der Deformation eine Abweichung von der Normalenregel untersucht, und die theoretisch gewonnenen Ergebnisse damit im Sinne einer besseren Anpassung an die Versuchsergebnisse korrigiert. Anhand der Versuchsergebnisse wird der Einfluß der freien Probenlänge auf die Länge der Beulwellen und auf die Beullasten untersucht.

Es zeigt sich, daß die Normalenregel im Vergleich mit den Versuchsergebnissen wesentlich zu hohe Verzweigungslasten liefert, und daß die in [21] vorgeschlagene Modifikation geeignet ist, das tatsächliche Verhalten besser zu erfassen. Dabei ist zu beachten, daß nur ein deformationsabhängiges Abweichen von der Normalenregel zu sinnvollen Ergebnissen führt.

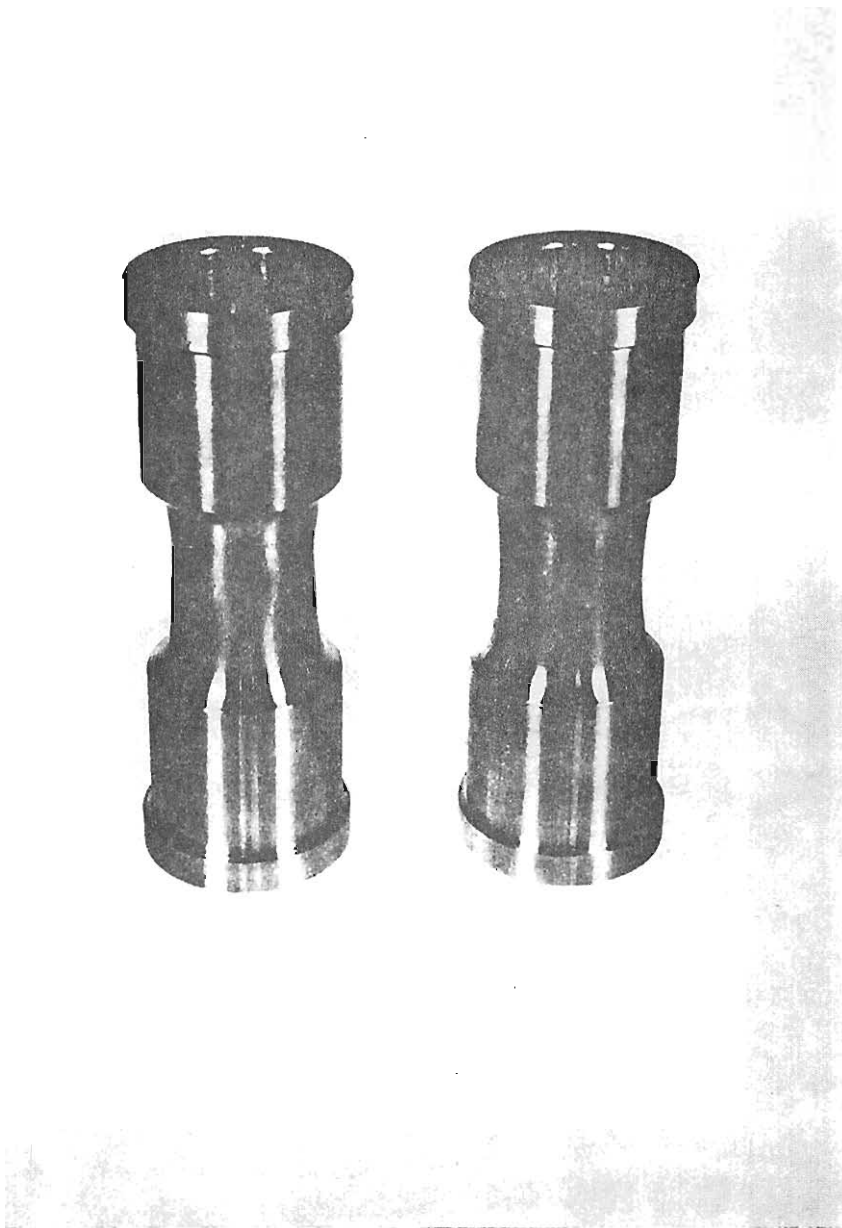
Es muß jedoch kritisch bemerkt werden, daß ein Abweichen von der Normalenregel nur eine von vielen, noch zu untersuchenden Möglichkeiten ist, die theoretischen Ergebnisse besser an das reale Verhalten anzupassen. Es zeigt sich nämlich, daß auch die Fließbedingung nach v. MISES, die für metallische Werkstoffe häufig angewandt wird, für die in den Versuchen untersuchte Aluminiumlegierung nur eine erste Näherung darstellen kann. Eine Überprüfung der Ergebnisse mit einer verbesserten Fließbedingung sowie eine Erweiterung der Untersuchungen auf andere Werkstoffe erscheint deshalb angeraten. Darüber hinaus müssen auch Imperfektionen berücksichtigt werden, wie es LEE und ADES

in [11] bereits in einem ersten Ansatz durchgeführt haben. Da während der Verzweigung das Verhalten in radialer Richtung starken Einfluß gewinnt, sollte auch die radiale Spannungsverteilung im Grundzustand in erweiterte Überlegungen mit einbezogen werden. Der Einfluß thermischer Effekte erscheint dagegen zumindest beim dünnwandigen Zylinder vernachlässigbar.

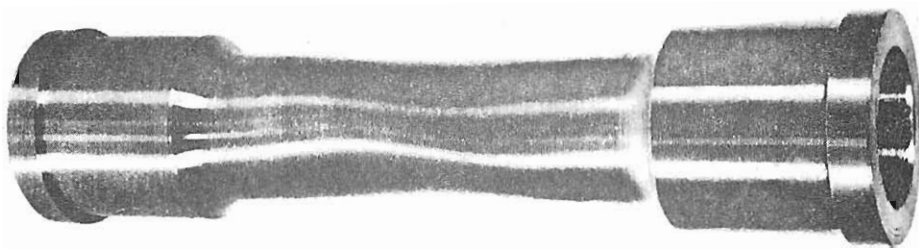
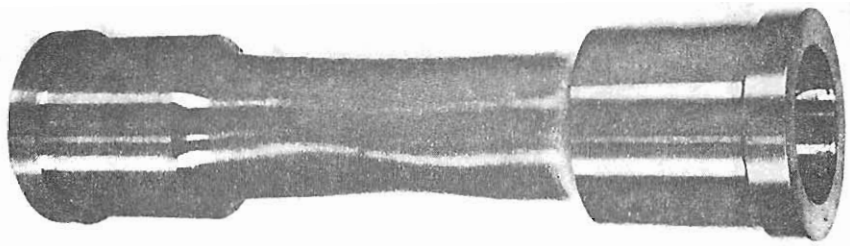
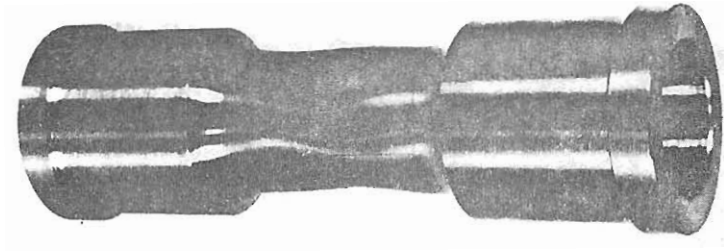
Anhang



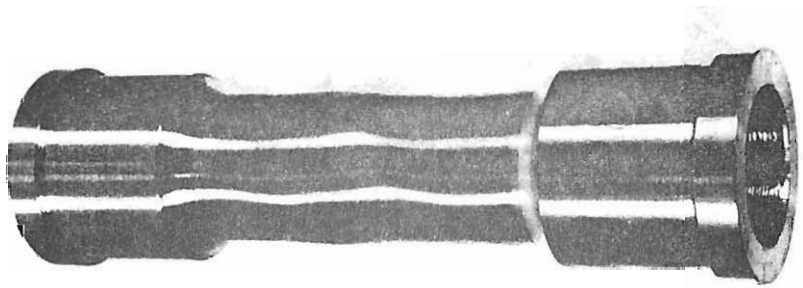
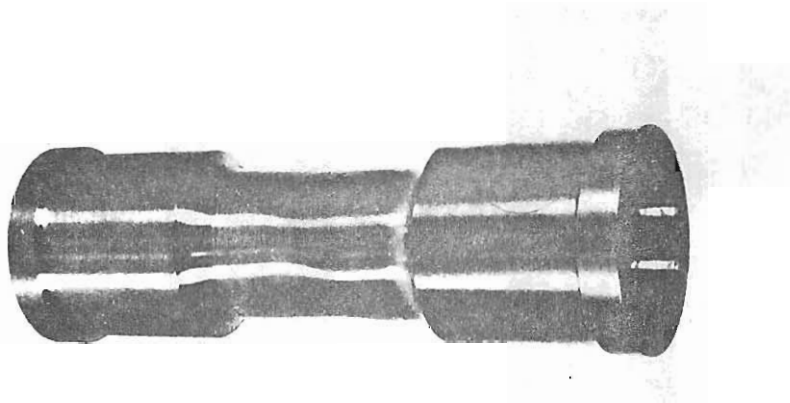
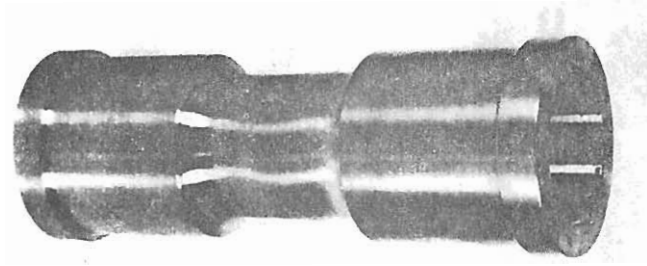
Proben mit 2 und 3 Beulwellen in Umfangsrichtung
aus dem Torsionsversuch



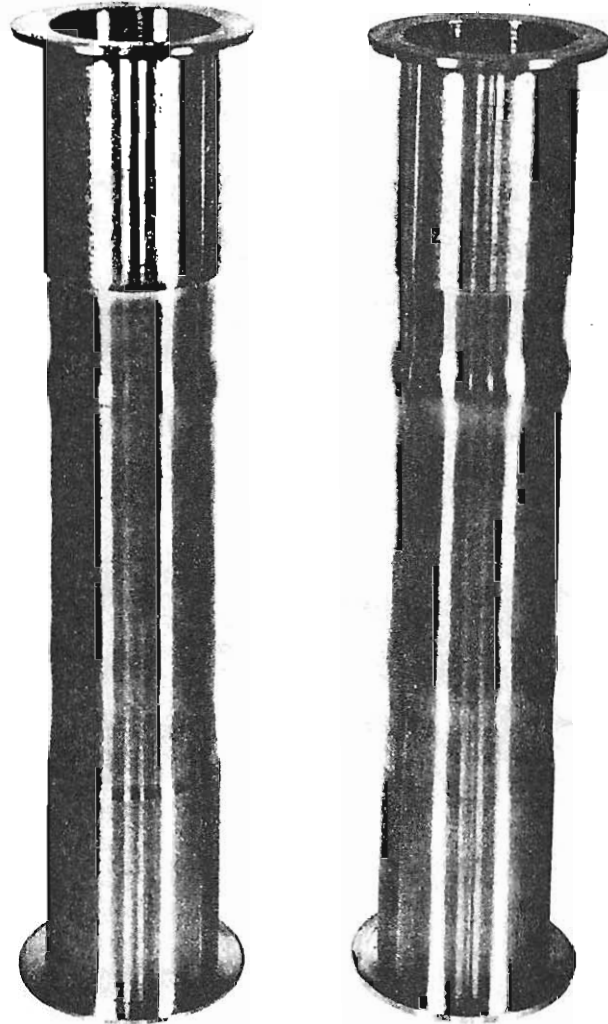
Einschnüren der Proben mit und ohne überlagerte
Beulwellen im Zug- Torsionsversuch



Zunahme der Beulwellenlänge in Längsrichtung mit steigender Probenlänge im Zug- Torsionsversuch



Ausbilden von mehreren Beulwellen in Längsrichtung
mit zunehmender Probenlänge im Druck- Torsionsversuch



Rotationssymmetrische Peulen im Druckversuch

Literaturverzeichnis

- [1] Pflüger, A.
Stabilitätstheorie der Elastostatik
Springer Verlag 1964
- [2] Flügge, W.
Stresses in Shells
Springer Verlag 1967
- [3] Shanley, F. R.
The column paradox
J. of Aeronaut. Sci. 13 (1946) S. 678
- [4] Shanley, F. R.
Inelastic column theory
J. of Aeronaut. Sci. 14 (1947) S. 261 - 268
- [5] Hill, R.
On the problem of uniqueness in the theory of a
rigid-plastic solid I-IV
J. Mech. Phys. Sol. 4 (1956) S. 247 - 255, 5 (1956)
S. 1 - 8, S. 153 - 161, S. 302 - 307
- [6] Hill, R.
Stability of rigid-plastic solids
J. Mech. Phys. Sol. 6 (1957) S. 1 - 8
- [7] Hill, R.
A general theory of uniqueness and stability in
elastic-plastic solids
J. Mech. Phys. Sol. 6 (1958) S. 236 - 249

- [8] Hill, R.
Uniqueness criteria and extremum principles in
self-adjoint problems of continuum mechanics
J. Mech. Phys. Sol. 10 (1962) S. 185 - 194
- [9] Bijlaard, P. P.
Theory and tests on the plastic stability of plates
and shells
J. of Aeronaut. Sci. 16 (1949) S. 529 - 541
- [10] Gerard, G.
Compressive and torsional buckling of thin walled
cylinders in the yield region
NACA TN 3726 (1956)
- [11] Lee, L. H. N. and Ades, C. S.
Plastic torsional buckling strength of cylinders
including the effects of imperfections
J. of Aeronaut. Sci. 24 (1957) S. 241
- [12] Batterman, S. C.
Plastic buckling of axially compressed cylindrical
shells
AIAA J. 3 (1965) S. 316
- [13] Ariaratnam, S. T. and Dubey, R. N.
Instability in an elastic-plastic cylindrical shell
under axial compression
J. Appl. Mech. 36 (1969) S. 47 - 50
- [14] Cheng, S. Y., Ariaratnam, S. T. and Dubey, R. N.
Axisymmetric bifurcation in an elastic-plastic cy-
linder under axial load and lateral hydrostatic
pressure
Quart. Appl. Math. 29 (1971) S. 41 - 51

- [15] Neale, K. W.
Bifurcation in an elastic-plastic cylindrical shell
under torsion
J. Appl. Mech. 40 (1973) S. 826
- [16] Neale, K. W.
A method for the estimation of plastic buckling
loads
Int. J. Sol. Struct. 10 (1974) S. 217 - 230
- [17] Bruhns, O.
Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Verzwei-
gungslasten elastisch-plastisch deformierter Kon-
tinua
Mitteilung 74-9 (1974) Inst. KIB RU Bochum
- [18] Bruhns, O.
Verzweigungslasten inelastischer Schalen
ZAMM 57 (1977) S. 165 - 174
- [19] Bruhns, O.
Zur Stabilität der Deformation des tordierten elasto-
plastischen Kreiszyllinders
ZAMM 57 (1977) S. 621 - 628
- [20] Pflüger, A.
Zur plastischen Beulung von Flächenträgern
ZAMM 47 (1967) S. T209 - T211
- [21] Lehmann, Th.
Zur Beschreibung großer plastischer Formänderungen
unter Berücksichtigung der Werkstoffverfestigung
Rheologica Acta 2 (1962) S. 247 - 254

- [22] Lehmann, Th.
Große elasto-plastische Formänderungen
Mitteilungen a. d. Inst. f. Mech. 1 (1976)
RU Bochum
- [23] Lehmann, Th.
Elemente der Mechanik
Vieweg Verlag 1974-79
- [24] Hartung, Ch.
Vergleich zweier Formänderungsgesetze für plasti-
sche Werkstoffe mit isotroper Werkstoffverfestigung
unter Zug-, Druck- und Schubbeanspruchung bei end-
lichen Formänderungen
Diss. TU Hannover 1968
- [25] Thermann, K.
Zur elasto-plastischen Torsion kreiszylindrischer
Körper bei endlichen Verzerrungen
Diss. TU Hannover 1969
- [26] Klingbeil, E.
Tensorrechnung für Ingenieure
BI Hochschultaschenbuch 197/197a
- [27] Truesdell, C. and Toupin, R.
The classical field theories
in Handbuch der Physik Bd. III, 1 Springer Verlag
1965
- [28] Bronstein, I. N. und Semendjajew, K. A.
Taschenbuch der Mathematik
Verlag Harri Deutsch 1969

- [29] Collatz, L.
Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen
Portig Leipzig 1963
- [30] Aluminium Halbzeuge
Mitteilung d. Vereinigten deutschen Metallwerke
Frankfurt/M 1966

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann
 Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann
 Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of
 Finite Elastic-Plastic Deformations.
 Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings
 Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,
 viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke
 Theoretische und experimentelle Untersuchung der
 zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei
 endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze
 Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünn-
 wandigen Stäben mit gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer
 Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Ver-
 zerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl
 Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre
 Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers
 Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufen-
 den Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer
 Zur zyklischen elasto-plastischen Beanspruchung eines
 dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen

- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer
dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizi-
tät auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer
Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Opti-
mierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer
Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte
des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von ki-
nematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue
Problems of Elastic Systems with Application to Ei-
genvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg
Variational Principles and their Numerical Applica-
tion to Geometric Nonlinear v. Kármán Plates

- Nr. 19 Heinz Antes
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei
numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Woźniak
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates,
Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Pla-
sticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehr-
zielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei
Darstellung der mehrfach korrelierten Erregungen
durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert
Variational Formulation and Solution of Boundary-
Value Problems in the Theory of Plasticity and App-
lication to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz
On Consistent Approximations in the Geometrically
Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsions-
last

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 27**