

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Burkhard von Bredow

Optimierung von Stäben unter
stochastischer Erregung

Heft Nr. 22



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Burkhard von Bredow

**Optimierung von Stäben unter
stochastischer Erregung**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 22

Dezember 1980

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistentenzeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. T. Lehmann, Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Thermann und Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich für die Anregung und Unterstützung dieser Arbeit sowie für die Übernahme der Referate.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Klaus Thermann

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Tag der Einreichung: 15. 10. 1980

Tag der mündlichen Prüfung: 16. 12. 1980

© 1980 Dr.-Ing. Burkhard von Bredow

Institut für Mechanik / Ruhr-Universität Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

Die Querschnittsverläufe von stochastisch erregten Stäben werden so bestimmt, daß bei Einhaltung eines vorgegebenen Stabvolumens die größte auftretende Standardabweichung der Spannungen minimal wird.

Bei Erregung durch (vektorielles) weißes und farbiges Rauschen führt die Kovarianzanalyse auf die sogenannte Ljapunov-Gleichung, zu deren Lösung ein effektives Verfahren vorgestellt wird, das auf Anwendung der modalen Analyse beruht.

Summary

The cross-sections of beams subjected to random excitation are determined in such a way, that with given volume the maximum standard deviation of stress is minimized.

The excitation by white or coloured noise leads to the so-called Ljapunov-equation. An effective procedure for solving this equation based on modal analysis is presented.

| <u>Inhaltsverzeichnis</u> | Seite |
|---|-------|
| <u>1. Einleitung</u> | 1 |
| <u>2. Zufallsprozesse</u> | 5 |
| 2.1 Grungbegriffe | 5 |
| 2.2 Die stochastische Differentialgleichung | 15 |
| 2.3 Die Spektralmethode | 24 |
| 2.4 Die stochastische Erregung | 25 |
| <u>3. Die Lösung der Ljapunov-Gleichung</u> | 31 |
| 3.1 Die allgemeine Lösung | 32 |
| 3.2 Die Lösung mit modaler Analyse | 35 |
| <u>4. Optimierung</u> | 41 |
| 4.1 Die Optimalitätsbedingungen | 42 |
| 4.2 Der Stab gleicher Festigkeit | 45 |
| 4.3 Der optimale Stab | 46 |
| <u>5. Numerische Durchführung</u> | 49 |
| 5.1 Allgemeines | 49 |
| 5.2 Die Längsschwingung | 52 |
| 5.3 Die Biegeschwingung | 54 |
| 5.4 Inversion einer symmetrischen Tridiagonalmatrix | 59 |
| <u>6. Ergebnisse</u> | 60 |
| 6.1 Der Längsschwinger unter Einzelkraft | 63 |
| 6.2 Der auflagerbeschleunigte Längsschwinger | 67 |
| 6.3 Der Biegeschwinger unter Einzelkraft | 71 |
| 6.4 Der Biegeschwinger unter verteilter Belastung | 77 |
| 6.5 Der statisch unbestimmte Biegeschwinger | 81 |
| <u>7. Zusammenfassung</u> | 84 |
| <u>Literaturverzeichnis</u> | 86 |

1. Einleitung

Bei der Auslegung von Konstruktionselementen und Bauwerken steht für den Ingenieur zunächst die Funktionstüchtigkeit im Vordergrund.

Sie kann beschränkt sein etwa durch die zulässigen maximalen Spannungen oder Durchbiegungen, Sicherheitsfaktoren und/oder Einbaumaße. Innerhalb dieses Rahmens besteht häufig noch die Möglichkeit, die entsprechende Konstruktion optimal zu gestalten. Ziele dieser Optimierung können z. B. niedrige Herstellungskosten, geringes Gewicht, große Steifigkeit, hohe 1. Eigenfrequenz oder lange Lebensdauer sein, wobei diese Ziele erreicht werden können durch Materialauswahl (Elastizitätsmodul, spezifisches Gewicht, Fließspannungen,...) und Formgebung (Form und Verlauf von Querschnittsflächen bei Stäben, Wanddicke bei Schalen, Lage der Gelenke bei Fachwerken,...).

Einen ausführlichen Überblick über den jeweiligen Stand der Strukturoptimierung geben Wasiutyński und Brandt [1], Sheu und Prager [2], Niordson und Pedersen [3].

Eine häufige Aufgabenstellung ist die Minimierung des Gewichts oder des Volumens, was besonders für die Raumfahrt von großer Bedeutung ist; man nimmt dabei die oft wesentlich höheren Herstellungskosten in Kauf. Hiermit beschäftigen sich auch die Arbeiten von Ullenboom [4] und Lauert [5], die Stäbe unter (deterministischer) dynamischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen optimieren.

Oft werden auch die Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie bei der Strukturoptimierung angewandt, um beispielsweise die Versagenswahrscheinlichkeit infolge von Schwankungen gegenüber den Annahmen bei (statischer) Belastung und Materialfestigkeit abzuschätzen [6 - 9].

Gerade in neuerer Zeit interessiert man sich immer mehr für das Verhalten von Systemen unter zufälliger, dynamischer Beanspruchung wie Wind, Erdbeben und Meereswellen. (Eine Literaturübersicht zur Behandlung von Zufallsschwingungen findet man bei Crandall [10], Lin [11] und Vanmarcke [12].) Während es in der Regelungstechnik bereits viele Arbeiten zur Optimierung von stochastisch gestörten Systemen gibt [13], ist bisher jedoch nur wenig bekannt über optimale mechanische Strukturen, die stochastisch erregt werden.

Dahlberg [14] optimiert bei vorgegebener Spektraldichte des Straßenprofils Feder und Dämpfer der Radaufhängung eines Fahrzeugmodells mit 2 Freiheitsgraden in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit bezüglich des Fahrkomforts und der Straßenhaftung.

Nigam [15] minimiert das Gewicht eines einfachen Fachwerkes und die Versagenswahrscheinlichkeit eines Biegebalkens jeweils über 2 geometrische Parameter bei zufälliger Auflagerbeschleunigung.

Narayanan und Nigam [16] betrachten eine rippenversteifte Platte unter zufälliger Druckbelastung mit bekannter Spektraldichte und bestimmen 5 geometrische Parameter so, daß das Gewicht unter Nebenbedingungen für Versagenswahrscheinlichkeiten und Eigenfrequenzen minimal wird.

Bei der Optimierung von mechanischen Systemen unter stochastischer Erregung stellt sich zunächst die Frage, wann dieses System optimal ist. Naheliegend ist hier die Forderung nach möglichst hoher Lebensdauer - d. h. man hat die verschiedenen Versagensmöglichkeiten zu untersuchen. Versagen kann z. B. eintreten [17]

- wenn die Spannungen ein vorgegebenes Niveau wie die Fließspannung überschreiten

- wenn die Spannungen zu lange oberhalb eines gewissen Niveaus bleiben, sodaß Kriechvorgänge begünstigt werden
- durch Dauerbruch, ausgehend etwa davon, daß jeder Lastwechsel entsprechend seiner Amplitude zu einer kleinen Schädigung des Werkstoffs führt.

Konkrete Aussagen zur erwarteten Lebensdauer können nur bei bekannten Wahrscheinlichkeitsverteilungen gemacht werden; an durchgeführten Rechnungen [17 - 19] sieht man aber, daß ganz allgemein kleine Standardabweichungen günstig sind. Eine anschauliche Begründung hierfür liefert die Tschebyschew'sche Ungleichung

$$W[|X - m_x| \geq k] \leq \left(\frac{\sigma_x}{k}\right)^2 \quad (1.1)$$

Die obere Grenze der Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Zufallsgröße X um mehr als den Betrag k von ihrem Mittelwert m_x abweicht, ist also proportional dem Quadrat ihrer Standardabweichung σ_x - und zwar unabhängig von ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, den Querschnittsverlauf kontinuierlicher Stäbe bei stochastischer Erregung so zu optimieren, daß die größte Standardabweichung der Spannung minimal wird, wobei für eine sinnvolle Lösung dieser Aufgabe die Materialmenge bzw. das Volumen vorgegeben wird. Das entspricht der dualen Forderung nach minimalem Volumen bei vorgegebener oberer Schranke für die Standardabweichungen der Spannungen.

Nach geeigneter Diskretisierung wird das System beschrieben durch seine Zustandsgleichung

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A} \underline{z}(t) + \underline{b}(t) \quad (1.2)$$

mit $\underline{z}(t)$ als Zustandsvektor, der die generalisierten Koordinaten und deren Geschwindigkeiten repräsentiert, und $\underline{b}(t)$ als Vektor der zufälligen Erregung.

Die zur Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.2) benötigten Grundlagen werden in Kapitel 2 behandelt. Bei Erregung durch farbiges Rauschen führt die Kovarianzanalyse auf die sogenannte Ljapunov-Gleichung, zu deren Lösung in Kapitel 3 ein besonders effizientes Verfahren unter Anwendung der modalen Analyse vorgestellt wird. Kapitel 4 beschreibt die notwendigen Optimalitätsbedingungen und die gewählte Optimierungsstrategie. Kapitel 5 enthält die Darstellung der benutzten Diskretisierungen und Kapitel 6 einige Beispiele für Stäbe, die zur Längs- oder Biegeschwingung angeregt werden.

2. Zufallsprozesse

Zufallsprozesse sind dadurch gekennzeichnet, daß die Zeitverläufe ihrer Realisierungen sehr unregelmäßig sind und daher deterministisch nicht oder nur sehr schlecht zu beschreiben sind.

Man bedient sich deshalb der Methoden der Statistik und beschreibt diese regellosen Vorgänge durch ihre statistischen Kenngrößen (siehe z.B. [17,20-23]), wobei man in Kauf nimmt, daß ein großer Teil der Informationen verlorenght.

2.1 Grundbegriffe

Der skalare Zufallsprozeß $X(t)$ wird beschrieben durch die Gesamtheit (Ensemble) aller seiner möglichen Realisierungen $X^i(t)$.

Seine eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte $p_1(x;t)$ beschreibt den Anteil aller Realisierungen, die bei festgehaltener Zeit t zwischen den Werten x und $x+dx$ liegen.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Realisierung zur Zeit t einen Wert zwischen a und b annimmt, ist somit

$$W[a < X(t) < b] = \int_a^b p_1(x;t) dx \quad (2.1)$$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x;t) dx = 1 \quad (2.2)$$

Die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt für Wertepaare $X_1=X(t_1)$ und $X_2=X(t_2)$ zu festen Zeiten t_1 und t_2 die Wahrscheinlichkeit, X_1 zwischen a_1 und b_1 und X_2 zwischen a_2 und b_2 anzutreffen:

$$W[a_1 < X_1 < b_1, a_2 < X_2 < b_2] = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.3)$$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad (2.4)$$

$$p_1(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2 \quad (2.5)$$

$$p_1(x_2; t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 \quad (2.6)$$

Zur vollständigen Beschreibung des stochastischen Prozesses müßte seine Wahrscheinlichkeitsdichte $p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$ beliebig hoher Ordnung n bekannt sein.

In den Anwendungen ist diese Information in der Regel nicht vorhanden, da bereits die Bestimmung der ein- und zwei-dimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichten einen unverhältnismäßig hohen Aufwand erfordern würde.

Man versucht daher, die Prozesse durch einige wenige Kenngrößen, ihre ersten Momente, zu charakterisieren.

Mit der Definition des Erwartungswertes (Ensemble-Mittelung) einer skalaren Funktion $g(X)$ des Prozesses $X=X(t)$

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_1(x; t) dx \quad (2.7)$$

sind diese der Mittelwert

$$m_X(t) = E\{X\} \quad (2.8)$$

und der quadratische Mittelwert

$$Q_X(t) = E\{X^2\} \quad (2.9)$$

sowie die daraus abgeleitete Varianz

$$P_X(t) = E\{(X-m_X)^2\} = Q_X - m_X^2 \quad (2.10)$$

und die Standardabweichung

$$\sigma_x(t) = \sqrt{P_x} \quad (2.11)$$

Entsprechend erhält man über die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte mit

$$E\{f(X_1)g(X_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1)g(x_2)p_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (2.12)$$

die Autokorrelationsfunktion (AKF)

$$K_{xx}(t_1, t_2) = E\{X_1 X_2\} \quad (2.13)$$

bzw. die zentrale AKF

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{(X_1 - m_{x1})(X_2 - m_{x2})\} = K_{xx} - m_{x1} m_{x2} \quad (2.14)$$

mit

$$R_{xx}(t, t) = P_x(t) \quad (2.15)$$

Die AKF ist ein Maß für die statistische Abhängigkeit (Verwandtschaft) der Werte eines Prozesses zu zwei verschiedenen Zeitpunkten t_1 und t_2 .

Analog erhält man für zwei Zufallsprozesse $X(t)$ und $Y(t)$ die Kreuzkorrelationsfunktion

$$K_{xy}(t_1, t_2) = E\{X_1 Y_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 p_2(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2 \quad (2.16)$$

Einige spezielle Zufallsprozesse werden bereits vollständig beschrieben durch ihren Mittelwert und ihre AKF.

Im Rahmen der Korrelationstheorie begnügt man sich auch in anderen Fällen mit der Betrachtung nur dieser beiden Kenn-

größen, so daß zwei stochastische Prozesse im Sinne dieser Theorie äquivalent sind, wenn sie in Mittelwert und AKF übereinstimmen.

Eine weitere wesentliche Vereinfachung in der Beschreibung ergibt sich, wenn ein stochastischer Prozeß $X(t)$ stationär ist, d. h. wenn alle seine n -dimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilungen invariant sind gegenüber einer Verschiebung der Zeitskala.

Ein streng stationärer Prozeß hat keinen Anfang und kein Ende. Obwohl dies für reale Prozesse sicher nicht gilt, kann man häufig diese Randeffekte vernachlässigen, wenn der Prozeß selbst nur lange genug dauert.

Im Sinne der Korrelationstheorie ist ein Prozeß bereits stationär, wenn Mittelwert und Varianz konstant sind und seine (zentrale) AKF nur von der Zeitdifferenz abhängt:

$$m_x = \text{konst.} \quad (2.17)$$

$$P_x = \text{konst.} \quad (2.18)$$

$$R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(\tau) \quad \text{mit} \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (2.19)$$

Ein stationärer Prozeß ist ergodisch, wenn bei ihm die Ensemble-Mittelung durch Bildung des zeitlichen Mittelwertes bei einer einzelnen Realisierung $X^i(t)$ ersetzt werden kann:

$$E\{g(X)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T g(X^i(t)) dt \quad (2.20)$$

Man braucht hier also nur eine ausreichend lange dauernde Realisierung zur Bestimmung der gesuchten Größen.

Die Spektraldichte eines stationären Prozesses ist die Fouriertransformierte (Frequenzzerlegung) seiner zentralen AKF:

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.21)$$

Entsprechend gilt

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.22)$$

mit

$$P_X = R_{XX}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega \quad (2.23)$$

Die Spektraldichte ist eine gerade, nicht-negative Funktion von ω und überall endlich, wenn der Prozeß keine periodischen Komponenten enthält.

Die Definition der in der Korrelationstheorie benötigten Kenngrößen zufälliger Vektorprozesse $\underline{x}(t)$ und $\underline{y}(t)$ geschieht in sinngemäßer Erweiterung durch die Betrachtung der jeweiligen Komponenten.

Man erhält so den Mittelwertvektor

$$\underline{m}_X(t) = E\{\underline{x}(t)\} \quad (2.24)$$

die Korrelationsmatrix

$$\underline{K}_{XY}(t_1, t_2) = E\{\underline{x}(t_1)\underline{y}(t_2)^T\} \quad (2.25)$$

die zentrale Korrelationsmatrix

$$\underline{R}_{XY}(t_1, t_2) = E\{[\underline{x}(t_1) - \underline{m}_X(t_1)][\underline{y}(t_2) - \underline{m}_Y(t_2)]^T\} \quad (2.26)$$

die Kovarianzmatrix

$$\underline{P}_{xy}(t) = \underline{R}_{xy}(t, t) \quad (2.27)$$

und mit entsprechender Definition für Stationarität die Spektraldichtematrix

$$\underline{S}_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{R}_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.28)$$

wobei in den Formeln (2.25) - (2.28) gegebenenfalls $\underline{x} = \underline{y}$ zu setzen ist, z.B. für die Autokorrelationsmatrix \underline{K}_{xx} .

Für einen Vektorprozeß

$$\underline{y}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) \quad \text{mit} \quad \underline{A} = \text{konst.} \quad (2.29)$$

ergibt sich aus der Definition des Erwartungswertes

$$\underline{m}_y = \underline{A} \underline{m}_x \quad (2.30)$$

und

$$\underline{R}_{yy} = \underline{A} \underline{R}_{xx} \underline{A}^T \quad (2.31)$$

Für die Theorie der stochastischen Differentialgleichungen werden einige spezielle Prozesse benötigt, deren Eigenschaften kurz beschrieben werden sollen.

Ein stochastischer Prozeß $X(t)$ ist ein Gauß-Prozeß, wenn seine n-dimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichten normalverteilt sind - also z.B.

$$p_1(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad (2.32)$$

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist ein Zufallsprozeß normalverteilt, wenn er entstanden ist aus der Überlagerung vieler unabhängiger, beliebig verteilter Zufallsgrößen, von denen keine einen überwiegend starken Einfluß hat. Ein Gauß-Prozeß ist vollständig beschrieben durch seinen Mittelwert und seine AKF.

Ein Markov-Prozeß $X(t)$ ist ein Prozeß, bei dem - bei bekannter Gegenwart - zusätzliche Informationen aus der Vergangenheit keinen Einfluß auf Aussagen über die wahrscheinliche Entwicklung in der Zukunft haben (Prozeß ohne Gedächtnis).

Die Übergangswahrscheinlichkeitsdichte

$$p(x_2; t_2 | x_1; t_1) = \frac{p_2(x_1, x_2; t_1, t_2)}{p_1(x_1; t_1)} \quad (2.33)$$

beschreibt durch

$$W[a < X(t_2) < b | X(t_1) = x_1] = \int_a^b p(x_2; t_2 | x_1; t_1) dx_2 \quad (2.34)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Realisierung des Prozesses zur Zeit t_2 zwischen den Werten a und b liegt, wenn sie zur Zeit $t_1 \leq t_2$ den Wert x_1 hatte. Speziell für $t_1 = t_2$ gilt

$$p(x_2; t_1 | x_1; t_1) = \delta(x_2 - x_1) \quad (2.35)$$

mit $\delta(\cdot)$ als Dirac-Funktion.

Damit erhält man für den Markov-Prozeß die sogenannte Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p(x_2; t_2 | x_0; t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1; t_1 | x_0; t_0) p(x_2; t_2 | x_1; t_1) dx_1 \quad (2.36)$$

für $t_0 \leq t_1 \leq t_2$.

Der Markov-Prozeß wird vollständig beschrieben durch seine Übergangs- und eine Anfangswahrscheinlichkeitsdichte. Er heißt homogen, wenn seine Übergangswahrscheinlichkeitsdichte nur von der Zeitdifferenz zwischen zwei Zuständen abhängt.

Der Wiener-Prozeß $W(t)$ ist ein homogener (instationärer) Markov-Prozeß, dessen Übergangswahrscheinlichkeitsdichte normalverteilt ist mit dem Mittelwert w_1 und der Varianz $\tau = t_2 - t_1$:

$$p(w_2; t_1 + \tau | w_1; t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left[-\frac{(w_2 - w_1)^2}{2\tau}\right] \quad (2.37)$$

Mit der vorgegebenen Anfangswahrscheinlichkeitsdichte

$$p_1(w; t_0) = \delta(w) \quad (2.38)$$

verschwinden alle Realisierungen zum Zeitpunkt t_0 :

$$W(t_0) = 0 \quad (2.39)$$

Setzt man noch $t_0 = 0$, dann hat der Wiener-Prozeß die normalverteilte eindimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p_1(w; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left[-\frac{w^2}{2t}\right] \quad (2.40)$$

mit dem Mittelwert

$$m_w = E\{W(t)\} = 0 \quad (2.41)$$

und der Varianz

$$P_w(t) = E\{W(t)^2\} = t \quad (2.42)$$

Die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt sich mit $0 \leq t_1 \leq t_2$ zu

$$\begin{aligned} p_2(w_1, w_2; t_1, t_2) &= p_1(w_1; t_1) p(w_2; t_2 | w_1; t_1) \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{t_1(t_2 - t_1)}} \exp\left[-\frac{w_1^2}{2t_1} - \frac{(w_2 - w_1)^2}{2(t_2 - t_1)}\right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

woraus man durch Integration nach (2.12) die (zentrale) AKF erhält:

$$R_{ww}(t_1, t_2) = E\{W(t_1)W(t_2)\} = \min(t_1, t_2) \quad (2.44)$$

mit

$$\min(t_1, t_2) = \begin{cases} t_1 & \text{für } t_1 \leq t_2 \\ t_2 & \text{für } t_1 \geq t_2 \end{cases} \quad (2.45)$$

Der Wiener-Prozeß hat fast sicher stetige, aber nirgends differenzierbare Realisierungen.

Seine Zuwächse

$$\Delta W = W(t_2) - W(t_1) \quad (2.46)$$

sind statistisch unabhängig und normalverteilt mit

$$m_{\Delta W} = 0 \quad (2.47)$$

und

$$P_{\Delta W} = |t_2 - t_1| \quad (2.48)$$

Normiertes weißes Rauschen $h(t)$ ist ein stationärer Gauß-Prozeß mit dem Mittelwert

$$m_h = 0 \quad (2.49)$$

und der (zentralen) AKF

$$R_{hh}(\tau) = \delta(\tau) \quad (2.50)$$

bzw. der konstanten Spektraldichte

$$S_{hh}(\omega) = 1 \quad (2.51)$$

Das bedeutet, daß die Realisierungen zu allen Zeiten unabhängige Werte haben - bzw. daß alle Frequenzen mit gleicher Intensität am Spektrum beteiligt sind.

Im Rahmen der Theorie verallgemeinerter Funktionen kann weißes Rauschen als Ableitung des Wiener-Prozesses aufgefaßt werden, da beide - als verallgemeinerte (Gauß'sche) stochastische Prozesse - in Mittelwert und AKF übereinstimmen [20].

Das rechtfertigt die bei der Behandlung stochastischer Differentialgleichungen verwandte Schreibweise

$$h(t) = \dot{w}(t) \quad \text{bzw.} \quad dw(t) = h(t) dt \quad (2.52)$$

Die Komponenten des Wiener-Vektorprozesses $\underline{w}(t)$ sind voneinander unabhängige skalare Wiener-Prozesse mit

$$\underline{m}_w = E\{\underline{w}(t)\} = \underline{0} \quad (2.53)$$

$$\underline{R}_{ww}(t_1, t_2) = E\{\underline{w}(t_1)\underline{w}(t_2)^T\} = \min(t_1, t_2) \underline{I} \quad (2.54)$$

Für den Vektorprozeß des weißen Rauschens $\underline{h}(t)$ gilt

$$\underline{m}_h = E\{\underline{h}(t)\} = \underline{0} \quad (2.55)$$

$$\underline{R}_{hh}(\tau) = E\{\underline{h}(t)\underline{h}(t+\tau)^T\} = \delta(\tau) \underline{I} \quad (2.56)$$

2.2 Die stochastische Differentialgleichung

Die skalare stochastische Differentialgleichung

$$\dot{z}(t) = a[t, z(t)] + B[t, z(t)] h(t) \quad (2.57)$$

hat formal die Lösung

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t a[s, z(s)] ds + \int_{t_0}^t B[s, z(s)] dW(s) \quad (2.58)$$

wobei im zweiten Integral $h(s) ds$ durch $dW(s)$ ersetzt wurde, so daß dieser Ausdruck wegen der glättenden Wirkung der Integration nicht mit der Theorie verallgemeinerter Funktionen behandelt werden muß. Dennoch kann dieses Integral nicht als gewöhnliches Riemann-Integral aufgefaßt werden, denn die Summe bei feiner werdender Zerlegung und beliebiger Wahl der Zwischenpunkte konvergiert nicht gegen einen festen Wert, sondern hängt wegen der starken Schwankungen der Realisierungen von $W(t)$ von der Wahl der Zwischenpunkte ab. [Zwar sind die Realisierungen von $W(t)$ fast sicher stetig - nicht aber seine Zuwächse $\Delta W(t)$.] Daher erfordert die Theorie der stochastischen Differentialgleichungen eine neue Definition - also die Festlegung der zu wählenden Zwischenpunkte - für Integrale der allgemeinen Form

$$x(t) = \int_{t_0}^t B(s) dW(s) \quad (2.59)$$

worin $B(t)$ vom Zufall abhängt und $W(t)$ der Wiener-Prozeß ist. Dies geschieht zunächst für stückweise konstante (treppenförmige) $B(t)$, wobei dann beliebige Funktionen durch geeignete Folgen von Treppenfunktionen angenähert werden [20]. Für fast sicher stetige Funktionen $B(t)$ können diese Treppenfunktionen aus $B(t)$ selbst ermittelt werden, sodaß man mit der Itô'schen Definition der Zwischenpunkte erhält:

$$x(t) = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n B(t_{i-1}) [W(t_i) - W(t_{i-1})] \quad (2.60)$$

mit

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n = t, \quad \Delta n = \max(t_i - t_{i-1})$$

Ist $B(t)$ sogar fast sicher stetig differenzierbar, so findet man durch partielle Integration

$$x(t) = B(t) W(t) - B(t_0) W(t_0) - \int_{t_0}^t B(s) W(s) ds \quad (2.61)$$

wobei jetzt das Integral als gewöhnliches Riemann-Integral für einzelne Realisierungen von $W(t)$ berechnet werden kann. Unter der Voraussetzung, daß $B(t)$ und $\Delta W(t_2, t_1)$ statistisch unabhängig sind, berechnet man durch Bildung des Erwartungswertes in (2.60) mit (2.47) den Mittelwert des Integrals

$$m_x = E\{x(t)\} = 0 \quad (2.62)$$

und mit (2.48) bei Berücksichtigung der statistischen Unabhängigkeit der Zuwächse des Wiener-Prozesses die Varianz

$$\begin{aligned} P_x(t) = E\{x(t)^2\} &= \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n E\{B(t_{i-1})^2\} (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_{t_0}^t E\{B(s)^2\} ds \end{aligned} \quad (2.63)$$

Entsprechend erhält man für die (zentrale) AKF

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} E\{B(s)^2\} ds \quad (2.64)$$

Die Erweiterung auf beliebige Matrizenfunktionen $\underline{B}(t)$ und Wiener-Vektorprozesse $\underline{w}(t)$ führt mit

$$\underline{x}(t) = \int_{t_0}^t \underline{B}(s) d\underline{w}(s) \quad (2.65)$$

auf

$$\underline{m}_x = E\{\underline{x}(t)\} = \underline{0} \quad (2.66)$$

$$\underline{R}_{xx}(t_1, t_2) = E\{\underline{x}(t_1)\underline{x}(t_2)^T\} = \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} E\{\underline{B}(s)\underline{B}(s)^T\} ds \quad (2.67)$$

und

$$\underline{P}_{xx}(t) = \underline{R}_{xx}(t, t) \quad (2.68)$$

Im Sonderfall, daß $\underline{B}(t)$ unabhängig ist vom Zufall, ist $\underline{x}(t)$ ein normalverteilter Vektorprozeß mit unabhängigen Zuwächsen.

Der Vektorprozeß $\underline{z}(t)$, der der Differentialgleichung

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{a}(t) + \underline{B}(t) \underline{h}(t) \quad (2.69)$$

genügt, besitzt das stochastische Differential

$$d\underline{z}(t) = \underline{a}(t) dt + \underline{B}(t) d\underline{w}(t) \quad (2.70)$$

Die Vektorfunktion

$$\underline{x}(t) = \underline{u}[t, \underline{z}(t)] \quad (2.71)$$

hat dann (Satz von Itô) das stochastische Differential

$$(d\underline{x})_i = \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \frac{\partial^2 u_i}{\partial z_k \partial z_l} (\underline{B} \underline{B}^T)_{kl} \right] dt + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial z_k} (dz)_k \quad (2.72)$$

was sich mit Hilfe von Treppenfunktionen beweisen läßt [20].

Es wird nun das lineare stochastische Differentialgleichungssystem mit der speziellen Form

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A}(t) \underline{z}(t) + \underline{a}(t) + \underline{B}(t) \underline{h}(t) \quad (2.73)$$

bzw.

$$d\underline{z}(t) = [\underline{A}(t) \underline{z}(t) + \underline{a}(t)] dt + \underline{B}(t) d\underline{w}(t) \quad (2.74)$$

und der Anfangsbedingung

$$\underline{z}(t_0) = \underline{z}_0 \quad (2.75)$$

betrachtet. Dabei ist

- $\underline{z}(t)$ der gesuchte Zustandsvektor
- $\underline{A}(t)$ die Systemmatrix
- $\underline{a}(t)$ der Vektor der deterministischen Erregung
- $\underline{B}(t)$ die Koeffizientenmatrix der stochastischen Erregung
- $\underline{h}(t)$ vektorielles weißes Rauschen
- $\underline{w}(t)$ der Wiener-Vektorprozeß und
- \underline{z}_0 der zufällige, von der Erregung unabhängige Anfangsvektor mit dem Mittelwertvektor

$$\underline{m}_0 = E\{\underline{z}_0\} \quad (2.76)$$

und der Kovarianzmatrix

$$\underline{P}_0 = E\{(\underline{z}_0 - \underline{m}_0)(\underline{z}_0 - \underline{m}_0)^T\} \quad (2.77)$$

Über die Fundamentalmatrix $\underline{\Phi}(t)$ der homogenen, deterministischen Gleichung

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A}(t) \underline{z}(t) \quad (2.78)$$

mit den Eigenschaften

$$\underline{\Phi}(t_0) = \underline{I} \quad (2.79)$$

$$\dot{\underline{\Phi}}(t) = \underline{A}(t) \underline{\Phi}(t) \quad (2.80)$$

erhält man die Lösung von (2.73/74):

$$\underline{z}(t) = \underline{\Phi}(t) \left[\underline{z}_0 + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(s)^{-1} \underline{a}(s) ds + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(s)^{-1} \underline{B}(s) d\underline{w}(s) \right] \quad (2.81)$$

was sich mit dem Satz von Itô durch die Substitution

$$\underline{z}(t) = \underline{\Phi}(t) \underline{y}(t) = \underline{u}[t, \underline{y}(t)] \quad (2.82)$$

verifizieren läßt.

Von Interesse sind vor allem Mittelwertvektor und Autokorrelationsmatrix von $\underline{z}(t)$.

Bildet man von Gleichung (2.81) den Erwartungswert und berücksichtigt, daß $\underline{\Phi}(t)$, $\underline{a}(t)$ und $\underline{B}(t)$ vom Zufall unab-

hängig sind, ergibt sich mit Gleichung (2.66) der Mittelwertvektor zu

$$\underline{m}_z(t) = \underline{\Phi}(t) \left[\underline{m}_0 + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(s)^{-1} \underline{a}(s) ds \right] \quad (2.83)$$

Durch Differentiation von (2.83) nach der Zeit sieht man, daß $\underline{m}_z(t)$ die Lösung der deterministischen Gleichung

$$\dot{\underline{m}}_z(t) = \underline{A}(t) \underline{m}_z(t) + \underline{a}(t) \quad (2.84)$$

mit dem Anfangsvektor

$$\underline{m}_z(t_0) = \underline{m}_0 \quad (2.85)$$

ist. Die zentrale Autokorrelationsmatrix findet man entsprechend mit Gleichung (2.67) und wegen der angenommenen Unabhängigkeit von Anfangsvektor und stochastischer Erregung:

$$\underline{R}_{zz}(t_1, t_2) = \underline{\Phi}(t_1) \left[\underline{P}_0 \right. \quad (2.86)$$

$$\left. + \int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \underline{\Phi}(s)^{-1} \underline{B}(s) \underline{B}(s)^T (\underline{\Phi}(s)^{-1})^T ds \right] \underline{\Phi}(t_2)^T$$

Die Kovarianzmatrix folgt mit $t_1 = t_2 = t$ in (2.86) zu:

$$\underline{P}_{zz}(t) = \underline{\Phi}(t) \left[\underline{P}_0 \right. \quad (2.87)$$

$$\left. + \int_{t_0}^t \underline{\Phi}(s)^{-1} \underline{B}(s) \underline{B}(s)^T (\underline{\Phi}(s)^{-1})^T ds \right] \underline{\Phi}(t)^T$$

Sie ist die symmetrische Lösung der deterministischen Gleichung

$$\dot{\underline{P}}_{zz}(t) = \underline{A}(t) \underline{P}_{zz}(t) + \underline{P}_{zz}(t) \underline{A}(t)^T + \underline{B}(t) \underline{B}(t)^T \quad (2.88)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\underline{P}_{zz}(t_0) = \underline{P}_0 \quad (2.89)$$

was sich wiederum durch die Zeitableitung von (2.87) zeigen läßt.

Das Aufstellen von Gleichung (2.88) aus der stochastischen Differentialgleichung (2.73) und daraus die Ermittlung von $\underline{P}_{zz}(t)$ ist unter dem Namen Kovarianzanalyse bekannt [24 - 26].

In den später betrachteten Anwendungen liegt der Sonderfall eines zeitinvarianten Differentialgleichungssystems (2.73/74) mit

$$\underline{A}(t) = \underline{A} = \text{konst.} \quad (2.90)$$

$$\underline{B}(t) = \underline{B} = \text{konst.} \quad (2.91)$$

$$\underline{a}(t) = \underline{0} \quad (2.92)$$

vor, für den sich die Beziehungen (2.83), (2.86) und (2.87) noch weiter vereinfachen.

Für die Fundamentalmatrix gilt jetzt

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}(t-t_0)} \quad (2.93)$$

$$\underline{\Phi}(t)^{-1} = \underline{\Phi}(-t) = e^{\underline{A}(t_0-t)} \quad (2.94)$$

$$[\dot{\underline{\Phi}}(t)^{-1}] = -\underline{A} \underline{\Phi}(-t) = -\underline{\Phi}(-t) \underline{A} \quad (2.95)$$

Das Integral in (2.86) läßt sich damit berechnen:

$$\int_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \underline{\Phi}(s)^{-1} \underline{B} \underline{B}^T (\underline{\Phi}(s)^{-1})^T ds = [\underline{\Phi}(-s) \tilde{\underline{P}}_{zz} \underline{\Phi}(-s)^T]_{t_0}^{\min(t_1, t_2)} \quad (2.96)$$

wobei die konstante, symmetrische Hilfsmatrix $\tilde{\underline{P}}_{zz}$ die sogenannte Ljapunov-Gleichung

$$\underline{A} \tilde{\underline{P}}_{zz} + \tilde{\underline{P}}_{zz} \underline{A}^T + \underline{B} \underline{B}^T = \underline{0} \quad (2.97)$$

erfüllen muß, was durch Differentiation von (2.96) gezeigt werden kann.

Die zentrale Autokorrelationsmatrix ist dann

$$\underline{R}_{zz}(t_1, t_2) = \underline{\Phi}(t_1) (\underline{P}_0 - \tilde{\underline{P}}_{zz}) \underline{\Phi}(t_2)^T + \begin{cases} \tilde{\underline{P}}_{zz} \underline{\Phi}(t_2 - t_1)^T & t_1 \leq t_2 \\ \underline{\Phi}(t_1 - t_2) \tilde{\underline{P}}_{zz} & t_1 \geq t_2 \end{cases} \quad \text{für} \quad (2.98)$$

Damit erhält man schließlich für den Zustandsvektor $\underline{z}(t)$ des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A} \underline{z}(t) + \underline{B} \underline{h}(t) \quad (2.99)$$

den Mittelwertvektor

$$\underline{m}_z(t) = \underline{\Phi}(t) \underline{m}_0 \quad (2.100)$$

die Kovarianzmatrix

$$\underline{P}_{zz}(t) = \underline{\Phi}(t) (\underline{P}_0 - \tilde{\underline{P}}_{zz}) \underline{\Phi}(t)^T + \tilde{\underline{P}}_{zz} \quad (2.101)$$

mit $\tilde{\underline{P}}_{zz}$ aus (2.97)

und die zentrale Autokorrelationsmatrix

$$\underline{R}_{zz}(t_1, t_2) = \begin{cases} \underline{P}_{zz}(t_1) \underline{\Phi}(t_2 - t_1)^T & t_1 \leq t_2 \\ \underline{\Phi}(t_1 - t_2) \underline{P}_{zz}(t_2) & t_1 \geq t_2 \end{cases} \quad \text{für} \quad (2.102)$$

Nach hinreichend langer Zeit ist bei asymptotisch stabilen Systemen der Einschwingvorgang und damit auch der Einfluß des Anfangsvektors abgeklungen.

[Nach Heinrich und Henning [22] kann man z.B. den instationären Einschwingvorgang eines durch weißes Rauschen erregten Einmassenschwingers

$$\ddot{x}(t) + 2D\omega_0 \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 h(t) \quad (2.103)$$

mit homogenen Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ nach einer Zeit von

$$T_E \approx \frac{\pi}{2D\omega_0} \quad (2.104)$$

als beendet betrachten.]

Man erhält dann für die normalverteilte, stationäre Dauerlösung des zufälligen Vektorprozesses $\underline{z}(t)$ wegen $\underline{\Phi}(t \rightarrow \infty) = \underline{0}$

$$\underline{m}_z(t \rightarrow \infty) = \tilde{\underline{m}}_z = \underline{0} \quad (2.105)$$

$$\underline{P}_{zz}(t \rightarrow \infty) = \tilde{\underline{P}}_{zz} = \int_{t_0}^{\infty} \underline{\Phi}(s) \underline{B} \underline{B}^T \underline{\Phi}(s)^T ds = \text{konst.} \quad (2.106)$$

$$\underline{R}_{zz}(t_1 \rightarrow \infty, t_2 \rightarrow \infty) = \tilde{\underline{R}}_{zz}(\tau) = \begin{cases} \tilde{\underline{P}}_{zz} \underline{\Phi}(\tau)^T & \tau \geq 0 \\ \underline{\Phi}(-\tau) \tilde{\underline{P}}_{zz} & \tau \leq 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad (2.107)$$

mit $\tau = t_2 - t_1$.

Der gesamte Prozeß $\underline{z}(t)$ (also nicht erst die Dauerlösung) ist stationär und normalverteilt mit (2.105) - (2.107), wenn der Anfangsvektor \underline{z}_0 normalverteilt ist mit dem Mittelwertvektor $\underline{m}_0 = \underline{0}$ und der Kovarianzmatrix $\underline{P}_0 = \tilde{\underline{P}}_{zz}$.

Im folgenden wird die Kennzeichnung $\tilde{}$ für $(t \rightarrow \infty)$ weglassen, da nur noch der eingeschwungene Zustand betrachtet wird.

2.3 Die Spektralmethode

Die in (2.105) - (2.107) mit der Kovarianzanalyse erhaltenen statistischen Kenngrößen kann man auch mit der sogenannten Spektralmethode berechnen, die bei der Behandlung von Zufallsschwingungen am weitesten verbreitet ist [17, 22, 23].

Die lineare Vektor-Differentialgleichung

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A} \underline{z}(t) + \underline{b}(t) \quad (2.108)$$

mit der stationären stochastischen Erregung $\underline{b}(t)$, deren Mittelwertvektor \underline{m}_b und der Spektraldichtematrix $\underline{S}_{bb}(\omega)$ wird zunächst im Bildbereich der Fouriertransformation gelöst und dann zurücktransformiert.

Mit Hilfe der komplexen Frequenzgangmatrix des Systems als Fouriertransformierte der Impuls-Antwort

$$\underline{H}(\omega) = (i\omega \underline{I} - \underline{A})^{-1} \quad (2.109)$$

erhält man durch Erwartungswertbildung für die stationäre Dauerlösung von $\underline{z}(t)$

$$\underline{m}_z = \underline{H}(0) \underline{m}_b \quad (2.110)$$

$$\underline{S}_{zz}(\omega) = \underline{H}(\omega) \underline{S}_{bb}(\omega) \underline{H}(-\omega)^T \quad (2.111)$$

und daraus

$$\underline{R}_{zz}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{zz}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (2.112)$$

$$\underline{P}_{zz} = \underline{R}_{zz}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}_{zz}(\omega) d\omega \quad (2.113)$$

Ein Vergleich der Kovarianzanalyse mit der Spektralmethode [24 - 26] zeigt den Vorteil des ersten Verfahrens, das im wesentlichen auf der Lösung der Ljapunov-Gleichung (2.97) beruht, während bei der Spektralmethode die Fouriertransformation durchgeführt werden muß, was zumindest bei großen Systemen sehr aufwendig und mit spezifischen numerischen Problemen [27] verbunden ist.

2.4 Die stochastische Erregung

Die Behandlung von Systemen unter stochastischer Beanspruchung erfordert zunächst die Kenntnis der statistischen Kenngrößen der Erregung.

Bei den hier betrachteten stationären Prozessen sind das - im Rahmen der Korrelationstheorie - Mittelwert und Autokorrelationsfunktion bzw. Spektraldichte.

Der Mittelwert der Erregung kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit zu Null gesetzt werden.

Im eingeschwungenen Zustand verschwindet dann nach (2.105) oder (2.110) auch der Mittelwert der Antwort eines gedämpften Systems.

Im allgemeineren Fall mit konstantem Mittelwert der stationären Erregung kann der entsprechende, in der Dauerlösung ebenfalls konstante Mittelwert der Antwort wegen der Linearität der betrachteten Systeme der Lösung hinzugefügt werden; die zentrale AKF ändert sich hierdurch natürlich nicht.

Ein häufig benutzter Erregerprozeß ist das in Kapitel 2.1 besprochene weiße Rauschen $h(t)$ bzw. $B h(t)$, obwohl es wegen seiner unendlich großen Varianz kein realer Prozeß ist. Dennoch eignet es sich zur Beschreibung schnell fluktuierender, zufälliger Vorgänge und ist rechnerisch besonders leicht zu handhaben.

Realistischer ist das bandbegrenzte (abbrechende) weiße Rauschen $b(t)$, dessen Spektraldichte bis zu einer Grenzfrequenz $\pm\omega_g$ konstant ist und dann auf Null absinkt:

$$m_b = 0 \quad (2.114)$$

$$S_{bb}(\omega) = \begin{cases} C^2 & \text{für } -\omega_g \leq \omega \leq \omega_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.115)$$

$$R_{bb}(\tau) = \frac{C^2}{\pi} \frac{\sin(\omega_g \tau)}{\tau} \quad (2.116)$$

Dieser Prozeß hat eine endliche Varianz und ist differenzierbar. Er wird gut angenähert durch weißes Rauschen, wenn ω_g hinreichend groß ist gegenüber den Eigenfrequenzen des Systems [17], er kann jedoch nicht direkt mit der vorgestellten Kovarianzanalyse behandelt werden.

Im folgenden soll daher das farbige Rauschen - als ein weiterer, physikalisch sinnvoller Erregerprozeß - angenommen werden, für den die oben dargelegte Theorie der stochastischen Differentialgleichungen unmittelbar anwendbar ist.

Farbiges Rauschen $r(t)$ ist definiert als stationäre Dauerlösung der Filtergleichung

$$\dot{r}(t) = -\omega_F r(t) + C h(t) \quad (2.117)$$

Mit Gleichungen (2.105) - (2.107) findet man

$$m_r = 0 \quad (2.118)$$

$$P_r = \frac{C^2}{2\omega_F} \quad (2.119)$$

$$R_{rr}(\tau) = P_r e^{-\omega_F |\tau|} \quad (2.120)$$

und mit (2.21)

$$S_{rr}(\omega) = \frac{C^2}{\omega_F^2 + \omega^2} \quad (2.121)$$

Der Verlauf von AKF und Spektraldichte in Abhängigkeit von der Filterfrequenz ω_F ist in Abbildung 1 (a-d) dargestellt [mit $R(\tau) = R(-\tau)$, $S(\omega) = S(-\omega)$].

Die Darstellung von Abb. 1 (a,b), bezogen auf die Varianz der Erregung $P_r = R_{rr}(0)$, ist besonders sinnvoll bei niedrigen Filterfrequenzen, da der Grenzübergang $\omega_F \rightarrow 0$ bei konstant gehaltenem $R_{rr}(0)$ auf den (nicht mehr zufälligen) Grenzfall der statischen Belastung durch

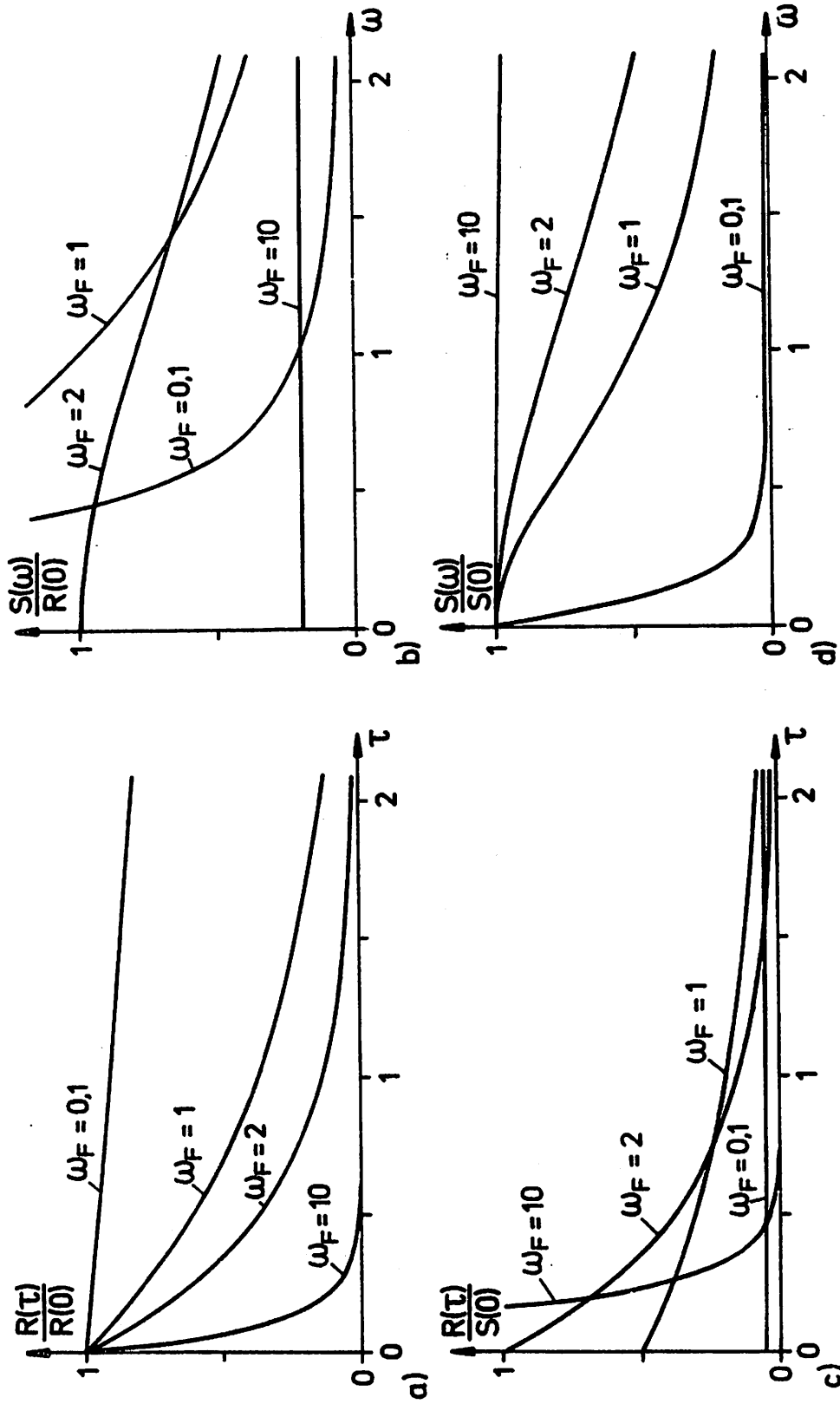


Abb. 1: Farbiges Rauschen / (a,b): $R(0) = \frac{C^2}{2\omega_F}$, (c,d): $S(0) = \frac{C^2}{\omega_F}$

$$r(\omega_F \rightarrow 0) = \frac{C}{\sqrt{2\omega_F}} = \text{konst.} \quad (2.122)$$

führt.

Andererseits erhält man durch $\omega_F \rightarrow \infty$ mit konstantem $S_{rr}(0)$ [Abb. 1 (c,d)] wieder den Prozeß des weißen Rauschens:

$$r(\omega_F \rightarrow \infty) = \frac{C}{\omega_F} h(t) \quad (2.123)$$

Als farbiges Rauschen (2.117) sind z.B. die Brown'sche Bewegung eines Teilchens (Ornstein-Uhlenbeck-Geschwindigkeitsprozeß [20]), die Geschwindigkeit einer turbulenten Strömung [24] oder Fahrbahnunebenheiten bei der Berechnung von Fahrzeugschwingungen [36] darzustellen.

Die Erweiterung auf den Vektorprozeß des farbigen Rauschens geschieht analog durch die Matrixgleichung

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{W} \underline{r}(t) + \underline{C} \underline{h}(t) \quad (2.124)$$

sodaß man durch geeignete Wahl der Koeffizienten die Möglichkeit hat, reale Prozesse zu approximieren.

Die einfachste Anwendung von (2.124) ist die Erregung durch einen skalaren, schmalbandigen Prozeß, der durch die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{r}(t) + 2 D_F \omega_F \dot{r}(t) + \omega_F^2 r(t) = C h(t) \quad (2.125)$$

beschrieben wird und durch $r_1 = r$, $r_2 = \dot{r}$ auf die Form (2.124) transformiert werden kann [36].

Die in Kapitel 2.2 beschriebene Antwort linearer Systeme gilt zunächst nur für Erregung durch weißes Rauschen. Die angegebenen Gleichungen lassen sich jedoch auch verwenden für

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A} \underline{z}(t) + \underline{B} \underline{r}(t) \quad (2.126)$$

mit $\underline{r}(t)$ aus (2.124), da der erweiterte Zustandsvektor

$$\underline{z}^*(t) = \begin{vmatrix} \underline{z}(t) \\ \underline{r}(t) \end{vmatrix} \quad (2.127)$$

wieder einem Differentialgleichungssystem vom Typ (2.99) genügt (siehe Kapitel 3).

3. Die Lösung der Ljapunov-Gleichung

Das hier betrachtete gedämpfte, lineare System von endlichem Freiheitsgrad wird beschrieben durch das Differentialgleichungssystem seiner generalisierten Verschiebungen

$$\underline{M} \ddot{\underline{x}}(t) + \underline{D} \dot{\underline{x}}(t) + \underline{K} \underline{x}(t) = \underline{F} \underline{r}(t) \quad (3.1)$$

wobei die Erregung durch vektorielles farbiges Rauschen $\underline{r}(t)$ als stationäre Antwort eines Formfilters auf vektorielles weißes Rauschen $\underline{h}(t)$ gegeben ist:

$$\dot{\underline{r}}(t) = \underline{W} \underline{r}(t) + \underline{C} \underline{h}(t) \quad (3.2)$$

Desweiteren sei vorausgesetzt, daß sich die später benötigten Schnittgrößen $\underline{y}(t)$ (Kräfte und/oder Momente) aus den Verschiebungen berechnen lassen durch

$$\underline{y}(t) = \underline{G} \underline{x}(t) \quad (3.3)$$

und die jeweils interessierenden Spannungen $s_i(t)$ in den Querschnittsflächen A_i durch

$$s_i(t) = \gamma \frac{y_i(t)}{A_i^x} \quad (3.4)$$

mit den Konstanten γ und x , die von der Belastungsart und den gewählten Entwurfsparametern abhängen (siehe Kapitel 5).

3.1 Die allgemeine Lösung

Für das oben beschriebene System kann nun die Struktur der in der Ljapunov-Gleichung auftretenden Systemmatrix explizit angegeben werden.

Mit dem Zustandsvektor ($\underline{v} = \dot{\underline{x}}$)

$$\underline{z}(t) = \begin{vmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{v}(t) \\ \underline{r}(t) \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

können (3.1) und (3.2) zusammengefaßt werden zur erweiterten Zustandsgleichung

$$\dot{\underline{z}}(t) = \underline{A} \underline{z}(t) + \underline{B} \underline{h}(t) \quad (3.6)$$

mit

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{D} & \underline{M}^{-1}\underline{F} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{W} \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

und

$$\underline{B} = \begin{vmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{C} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

Die symmetrische Kovarianzmatrix \underline{P}_{zz} der Dauerlösung von $\underline{z}(t)$ ist gemäß (2.97) und (2.106) Lösung der Ljapunov'schen Matrixgleichung

$$\underline{A} \underline{P}_{zz} + \underline{P}_{zz} \underline{A}^T + \underline{B} \underline{B}^T = \underline{0} \quad (3.9)$$

Ist $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\underline{r} \in \mathbb{R}^m$, dann ist $\underline{z} \in \mathbb{R}^{2n+m}$, und \underline{P}_{zz} hat unter Berücksichtigung der Symmetrie $\frac{1}{2}(2n+m)(2n+m+1)$ unbekannte Koeffizienten.

Da die Ljapunov-Gleichung - z.B. in der Regelungstechnik - häufig vorkommt, sind verschiedene Lösungsverfahren entwickelt worden (siehe hierzu z.B. [26, 28]), wobei eine Möglichkeit in der Auswertung des Integrals (2.106) besteht. Ein Rechnerprogramm von Chen und Shieh [29] wandelt (3.9) um in ein lineares Gleichungssystem

$$\underline{A}^* \underline{p} = - \underline{b} \quad (3.10)$$

das dann mit den üblichen Methoden behandelt werden kann. Bei großen Systemen empfiehlt sich jedoch eher ein iteratives Lösungsverfahren [30, 31].

Die Zahl der Unbekannten kann aber noch weiter reduziert werden, indem man die spezielle Form der Systemmatrix \underline{A} berücksichtigt [32, 33].

Durch entsprechende Partitionierung von \underline{P}_{zz}

$$\underline{P}_{zz} = \begin{vmatrix} \underline{P}_{xx} & \underline{P}_{xv} & \underline{P}_{xr} \\ \underline{P}_{xv}^T & \underline{P}_{vv} & \underline{P}_{vr} \\ \underline{P}_{xr}^T & \underline{P}_{vr}^T & \underline{P}_{rr} \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

erhält man aus (3.9) die Matrixgleichungen

$$\underline{W} \underline{P}_{rr} + \underline{P}_{rr} \underline{W}^T + \underline{C} \underline{C}^T = \underline{0} \quad (3.12)$$

$$\underline{P}_{vr} + \underline{P}_{xr} \underline{W}^T = \underline{0} \quad (3.13)$$

$$\underline{P}_{vr} \underline{W}^T - \underline{M}^{-1} \underline{K} \underline{P}_{xr} - \underline{M}^{-1} \underline{D} \underline{P}_{vr} + \underline{M}^{-1} \underline{F} \underline{P}_{rr} = \underline{0} \quad (3.14)$$

$$\underline{P}_{xv} + \underline{P}_{xv}^T = \underline{0} \quad (3.15)$$

$$\underline{P}_{vv} - \underline{M}^{-1} \underline{K} \underline{P}_{xx} - \underline{M}^{-1} \underline{D} \underline{P}_{xv}^T + \underline{M}^{-1} \underline{F} \underline{P}_{xr}^T = \underline{0} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \underline{M}^{-1} \underline{K} \underline{P}_{xv} + \underline{M}^{-1} \underline{D} \underline{P}_{vv} - \underline{M}^{-1} \underline{F} \underline{P}_{vr}^T \\ & + (\underline{M}^{-1} \underline{K} \underline{P}_{xv} + \underline{M}^{-1} \underline{D} \underline{P}_{vv} - \underline{M}^{-1} \underline{F} \underline{P}_{vr}^T)^T = \underline{0} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Gleichung (3.15) zeigt, daß die Kovarianzmatrix von Wegen und Geschwindigkeiten schiefsymmetrisch ist, was die Zahl der Unbekannten um $\frac{1}{2}n(n+1)$ verringert.

Man kann nun die Ljapunov-Gleichung (3.12) für die symmetrische ($m \times m$) Kovarianzmatrix der Erregung \underline{P}_{rr} mit einem der bekannten Verfahren lösen. Gleichung (3.14) ist nach Einsetzen von (3.13) eine Matrixengleichung für \underline{P}_{xr} , woraus dann mit (3.13) \underline{P}_{vr} berechnet wird. Unter Berücksichtigung von (3.15) und der Symmetrien von \underline{P}_{xx} und \underline{P}_{vv} können aus (3.16) und (3.17) \underline{P}_{xx} , \underline{P}_{vv} und \underline{P}_{xv} bestimmt werden.

Bei bekannter Kovarianzmatrix der Verschiebungen \underline{P}_{xx} ermittelt man die Kovarianzmatrix der Schnittgrößen $\underline{y}(t)$ mit (3.3) und (2.31):

$$\underline{P}_{yy} = \underline{G} \underline{P}_{xx} \underline{G}^T \quad (3.18)$$

und aus deren Standardabweichungen die eigentlich gesuchten Standardabweichungen der Spannungen:

$$(\underline{\sigma}_s)_i = \gamma \frac{\sqrt{(P_{yy})_{ii}}}{A_i^x} = \gamma \frac{(\underline{\sigma}_y)_i}{A_i^x} \quad (3.19)$$

Obwohl der erforderliche Rechenaufwand sicherlich wesentlich geringer ist als bei Anwendung der Spektralmethode, wächst er immer noch sehr schnell mit der Ordnung des Systems.

3.2 Die Lösung mit modaler Analyse

Da die Optimierung der im folgenden untersuchten Systeme nur auf iterativem Wege möglich ist, wobei jede Iteration die Berechnung der Kovarianzmatrix der stochastischen Differentialgleichung erfordert, kommt es entscheidend darauf an, die Lösung der Ljapunov-Gleichung möglichst effektiv zu ermitteln.

Die bekannten, zuvor kurz skizzierten Verfahren erweisen sich selbst bei Ausnutzung der besonderen Struktur der Systemmatrix immer noch als sehr aufwendig.

In den hier betrachteten Anwendungsfällen kann davon ausgegangen werden, daß stets eine schwache Dämpfung vorliegt, die nur durch den Werkstoff selbst bedingt ist und nicht durch zusätzliche konstruktive Maßnahmen bewirkt wird. Diese Überlegung rechtfertigt die Annahme modaler Dämpfung und damit die Anwendung der modalen Analyse, da sich die Eigenschwingungsformen von ungedämpften und schwach gedämpften Systemen nur geringfügig unterscheiden.

Die Lösung des Eigenwertproblems des homogenen, ungedämpften Systems

$$(\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{x} = \underline{0} \quad (3.20)$$

liefert die Eigenfrequenzen ω_i und die Modalmatrix \underline{X} , die aus den normierten Eigenvektoren besteht.

Durch die Transformation

$$\underline{x}(t) = \underline{X} \underline{q}(t) \quad (3.21)$$

kann nun das ursprüngliche Differentialgleichungssystem (3.1) entkoppelt werden:

$$\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{D}^* \dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}^* \underline{q}(t) = \underline{F}^* \underline{r}(t) \quad (3.22)$$

mit

$$\underline{F}^* = \underline{X}^T \underline{F} \quad (3.23)$$

und den Diagonalmatrizen

$$(\underline{D}^*)_{ik} = \delta_{ik} 2D_i \omega_i \quad (3.24)$$

$$(\underline{K}^*)_{ik} = \delta_{ik} \omega_i^2 \quad (3.25)$$

wobei D_i das Lehr'sche Dämpfungsmaß der i -ten Hauptschwingung ist.

Eine andere Anwendungsmöglichkeit der modalen Analyse ergibt sich, wenn die ursprüngliche Dämpfungsmatrix eine Linearkombination von Massen- und Steifigkeitsmatrix ist:

$$\underline{D} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K} \quad (3.26)$$

Dann ist in (3.24) und in den folgenden Beziehungen $2D_i \omega_i$ durch $(\alpha + \beta \omega_i^2)$ zu ersetzen.

Die oben beschriebene Kovarianzanalyse ist natürlich in entsprechender Form auch auf das Differentialgleichungssystem der Hauptschwingungen (3.22) anwendbar.

In (3.7) und (3.11) sind dann die folgenden Größen zu ersetzen:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &\rightarrow \underline{q}(t) \\ \underline{v}(t) &\rightarrow \dot{\underline{q}}(t) \\ \underline{M}^{-1} \underline{D} &\rightarrow \underline{D}^* \\ \underline{M}^{-1} \underline{K} &\rightarrow \underline{K}^* \\ \underline{M}^{-1} \underline{F} &\rightarrow \underline{F}^* \end{aligned} \tag{3.27}$$

Der entscheidende Vorteil ist jetzt jedoch, daß sich wegen der Diagonalform von \underline{D}^* und \underline{K}^* mit den zuvor berechneten Matrizen \underline{P}_{rr} , \underline{P}_{qr} und $\underline{P}_{\dot{q}r}$ die Bestimmungsgleichungen (3.16) und (3.17) für \underline{P}_{qq} , $\underline{P}_{q\dot{q}}$ und $\underline{P}_{\dot{q}\dot{q}}$ entkoppeln lassen.

Mit den Abkürzungen

$$V_{ik} = (\underline{P}_{\dot{q}r} \underline{F}^{*T})_{ik} \tag{3.28}$$

$$Q_{ik} = (\underline{P}_{qr} \underline{F}^{*T})_{ik} \tag{3.29}$$

erhält man $(\underline{P}_{qq} = \underline{P}_{qq}^T, \underline{P}_{\dot{q}\dot{q}} = \underline{P}_{\dot{q}\dot{q}}^T, \underline{P}_{q\dot{q}} = -\underline{P}_{\dot{q}q}^T)$

$$(\underline{P}_{\dot{q}\dot{q}})_{ik} - \omega_i^2 (\underline{P}_{qq})_{ik} + 2D_i \omega_i (\underline{P}_{q\dot{q}})_{ik} = -Q_{ki} \tag{3.30}$$

$$(\underline{P}_{\dot{q}\dot{q}})_{ik} - \omega_k^2 (\underline{P}_{qq})_{ik} - 2D_k \omega_k (\underline{P}_{q\dot{q}})_{ik} = -Q_{ik} \tag{3.31}$$

$$(\omega_i^2 - \omega_k^2) (\underline{P}_{q\dot{q}})_{ik} + (2D_i\omega_i + 2D_k\omega_k) (\underline{P}_{\dot{q}\dot{q}})_{ik} = V_{ik} + V_{ki} \quad (3.32)$$

woraus sich mit

$$Y_{ik} = \frac{1}{(\omega_i^2 - \omega_k^2)^2 + \omega_i\omega_k(2D_i\omega_k + 2D_k\omega_i)(2D_i\omega_i + 2D_k\omega_k)} \quad (3.33)$$

die Koeffizienten der benötigten Kovarianzmatrix ergeben:

$$\begin{aligned} (\underline{P}_{qq})_{ik} &= Y_{ik} [(\omega_k^2 - \omega_i^2)(Q_{ik} - Q_{ki}) \\ &+ (2D_i\omega_i + 2D_k\omega_k)(2D_i\omega_i Q_{ik} + 2D_k\omega_k Q_{ki} + V_{ik} + V_{ki})] \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} (\underline{P}_{\dot{q}\dot{q}})_{ik} &= Y_{ik} [(\omega_k^2 - \omega_i^2)(\omega_i^2 Q_{ik} - \omega_k^2 Q_{ki}) \\ &+ \omega_i\omega_k(2D_i\omega_k + 2D_k\omega_i)(V_{ik} + V_{ki})] \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} (\underline{P}_{q\dot{q}})_{ik} &= Y_{ik} [(2D_i\omega_i + 2D_k\omega_k)(\omega_i^2 Q_{ik} - \omega_k^2 Q_{ki}) \\ &+ (\omega_i^2 - \omega_k^2)(V_{ik} + V_{ki})] \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$i, k = 1, \dots, n$$

Die Kovarianzmatrizen der ursprünglichen Koordinaten $\underline{x}(t)$ können daraus mit (2.31) und (3.21) berechnet werden:

$$\underline{P}_{xx} = \underline{X} \underline{P}_{qq} \underline{X}^T \quad (3.37)$$

$$\underline{P}_{vv} = \underline{X} \underline{P}_{\dot{q}\dot{q}} \underline{X}^T \quad (3.38)$$

$$\underline{P}_{xv} = \underline{X} \underline{P}_{q\dot{q}} \underline{X}^T \quad (3.39)$$

$$\underline{P}_{xr} = \underline{X} \underline{P}_{qr} \quad (3.40)$$

$$\underline{P}_{vr} = \underline{X} \underline{P}_{\dot{q}r} \quad (3.41)$$

woraus man mit (3.18) und (3.19) die Standardabweichungen der Spannungen erhält.

Der Rechenaufwand zur Ermittlung der $\frac{1}{2}n(3n+1)$ Unbekannten aus den Gleichungen (3.16) und (3.17) besteht hier also im wesentlichen aus der Lösung des Eigenwertproblems n-ter Ordnung mit anschließender Matrizenmultiplikation.

Eine Abschätzung mit Hilfe der an der TR440 verfügbaren Rechnerprozeduren EVGEN, MAMU und GLSYSP zeigt, daß die Lösung mit modaler Analyse um mehr als einen Faktor $0,1 n^3$ schneller ist als die Lösung des entsprechenden linearen Gleichungssystems.

Ein weiterer Vorteil der modalen Analyse liegt darin, daß bei großen Systemen die Ermittlung und Berücksichtigung nur der niedrigsten Eigenfrequenzen und der entsprechenden Eigenformen ausreichend ist für eine gute Genauigkeit der Ergebnisse, wodurch weitere Rechenzeit gespart werden kann.

Im Sonderfall, daß auch \underline{W} in Gleichung (3.2) eine Diagonalmatrix ist - oder zuvor auf Diagonalform transformiert wurde -, können auch die Koeffizienten der übrigen Matrizen direkt angegeben werden . Mit

$$(\underline{W})_{ik} = - \delta_{ik} W_i \quad (3.42)$$

erhält man

$$(\underline{P}_{rr})_{ik} = \frac{(\underline{C} \underline{C}^T)_{ik}}{W_i + W_k} \quad (3.43)$$

$$(\underline{P}_{qr})_{jk} = \frac{(\underline{F}^* \underline{P}_{rr})_{jk}}{\omega_j^2 + 2D_j \omega_j W_k + W_k^2} \quad (3.44)$$

$$(\underline{P}_{\dot{q}r})_{jk} = W_k (\underline{P}_{qr})_{jk} \quad (3.45)$$

$$i, k = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

4. Optimierung

Für die hier behandelten diskretisierten Stäbe unter stochastischer Erregung lautet die Optimierungsaufgabe: Ermittle bei vorgegebenem Stabvolumen $V(A_i) = \sum_{i=1}^n c_i A_i = V_0$ diejenigen Querschnittsflächen A_i , bei denen die größte auftretende Standardabweichung der Spannungen minimal wird!

[Der Index \cdot_s für Spannung wird im folgenden bei den Standardabweichungen zugunsten einer übersichtlicheren Schreibweise weggelassen.]

Für die mathematische Formulierung der Aufgabenstellung wird eine neue, unabhängige Variable $\hat{\sigma}$ eingeführt, die gleichzeitig Zielfunktion ist, und die im optimalen Fall identisch ist mit der maximalen Standardabweichung $(\sigma_i)_{\max}$ der Spannungen.

Damit erhält man die Zielfunktion

$$\min_{(A_i, \hat{\sigma})} \hat{\sigma} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

die Nebenbedingungen

$$g_k = \sigma_k(A_i) - \hat{\sigma} \leq 0 \quad k = 1, \dots, m \quad (4.2)$$

$$g_{m+1} = \sum_i c_i A_i - V_0 = 0 \quad (4.3)$$

und die Vorzeichenbedingungen

$$A_i \geq 0 \quad (4.4)$$

Die duale Aufgabenstellung, das Stabvolumen zu minimieren bei vorgegebener oberer Schranke für die Standardabweichungen der Spannungen führt auf

$$\min_{(A_i)} [V = \sum_i c_i A_i] \quad (4.5)$$

mit

$$g_k = \sigma_k(A_i) - \sigma_{zul} \leq 0 \quad (4.6)$$

und

$$A_i \geq 0 \quad (4.7)$$

4.1 Die Optimalitätsbedingungen

Die notwendigen Optimalitätsbedingungen für die Optimierungsaufgabe (4.1) - (4.4) mit nichtlinearen Nebenbedingungen erhält man mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren, wobei vorausgesetzt wird, daß im optimalen Punkt Zielfunktion und Nebenbedingungen stetige partielle Ableitungen besitzen, und daß dort die Gradientenvektoren ∇g_k der aktiven Nebenbedingungen linear unabhängig sind.

Überführt man die Ungleichheitsnebenbedingungen (4.2) mit Hilfe von nichtnegativen Schlupfvariablen s_k in Gleichheitsbedingungen

$$g_k = \sigma_k(A_i) - \hat{\sigma} + s_k = 0 \quad (4.8)$$

$$s_k \geq 0$$

so muß die Lagrange'sche Funktion

$$L = \hat{\sigma} + \sum_{k=1}^m \lambda_k g_k + \mu g_{m+1} \quad (4.9)$$

zum Minimum werden [34], d. h. ausgehend vom Optimum muß jede zulässige ($A_i, s_k \geq 0$), aber sonst beliebige Variation der unabhängigen Variablen zu einer Vergrößerung der Lagrange'schen Funktion führen.

Die Veränderungen der Standardabweichungen der Spannungen infolge von Querschnittsänderungen werden dabei beschrieben durch ihre Gradienten

$$\delta\sigma_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\sigma_k}{\partial A_i} \delta A_i \quad (4.10)$$

Für die Variation von (4.9) findet man also

$$\begin{aligned} \delta L = & \delta\hat{\sigma} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial\sigma_k}{\partial A_i} \delta A_i - \delta\hat{\sigma} + \delta s_k \right) + \mu \sum_{i=1}^n c_i \delta A_i \\ & + \sum_{k=1}^m \delta\lambda_k g_k + \delta\mu g_{m+1} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

und daraus nach Eliminierung der Schlupfvariablen durch (4.8) die notwendigen Bedingungen für ein Minimum der Zielfunktion:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1 \quad (4.12)$$

$$\lambda_k \begin{cases} = 0 \\ \geq 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \sigma_k - \hat{\sigma} < 0 \\ \sigma_k - \hat{\sigma} = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \sigma_k}{\partial A_i} + \mu c_i \begin{cases} = 0 \\ \geq 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} A_i > 0 \\ A_i = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$k = 1, \dots, m$$

wobei offen bleibt, ob es sich hierbei um ein lokales oder globales Optimum handelt.

Die Gleichungen (4.12) und (4.13) zeigen, daß bei der optimalen Lösung mindestens ein σ_j den Wert von $\hat{\sigma}$ annimmt ($\lambda_j \neq 0$). Da aber andererseits alle anderen σ_k höchstens gleich groß sind, wird also über $\hat{\sigma}$ wirklich die größte Standardabweichung der Spannungen minimiert.

Entsprechende Bedingungen erhält man für das duale Problem (4.5) - (4.7) mit Hilfe des Fritz-John-Theorems [34], wenn man berücksichtigt, daß in Ausnahmefällen die Standardabweichungen der Spannungen unabhängig vom vorgegebenen Volumen werden können.

Für die Überprüfung berechneter Querschnittsverläufe auf ihre Optimalität werden die Spannungsgradienten in (4.14) angenähert durch Differenzen

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial A_i} \approx \frac{\Delta \sigma_k(\Delta A_i)}{\Delta A_i} \quad (4.15)$$

4.2 Der Stab gleicher Festigkeit

Zur Lösung der Optimierungsaufgabe wird zunächst der Stab gleicher Festigkeit bestimmt, was hier bedeutet, daß die Standardabweichungen aller Spannungen gleich groß sind. Dieses Vorgehen ist sinnvoll, weil der Stab gleicher Festigkeit bereits von der Anschauung her ein gutes Ergebnis verspricht, weil er in vielen Fällen bei deterministischer Erregung optimal ist [1, 4, 5] und weil er mit relativ geringem numerischen Aufwand zu ermitteln ist.

Im Fall der Erregung durch skalares farbiges Rauschen (2.117) ergibt sich ein weiterer Vorteil dadurch, daß für den statischen Grenzfall ($\omega_F = 0$) der Stab gleicher Festigkeit direkt angegeben werden kann und zumindest bei statisch bestimmten Systemen auch optimal ist. Da hier der gesamte Bereich der Filterfrequenz ($0 \leq \omega_F < \infty$) untersucht wird, liegt damit bereits ein guter Anfangsquerschnittsverlauf für die iterative Ermittlung der Lösungen bei höheren Filterfrequenzen vor.

Bei der Iteration werden zunächst für einen vorzugebenden Anfangsquerschnittsverlauf A_i die entsprechenden Standardabweichungen der Spannungen σ_i berechnet. (Bei der Biegeschwingung sind die σ_i die Standardabweichungen der Normalspannungen in den Randfasern.)

Es wird nun angenommen, daß sich der Verlauf der Standardabweichungen der Schnittgrößen $(\underline{\sigma}_y)_i$ infolge von Querschnittsänderungen nicht wesentlich verändert, der Einfluß durch Massenträgheit und Statisch-Unbestimmtheit wird also zunächst vernachlässigt. Mit (3.19) erhält man dann aus der Forderung nach gleichen Standardabweichungen der Spannungen die Iterationsvorschrift für die neuen Querschnitte \bar{A}_i :

$$\bar{A}_i = k (\underline{\sigma}_y)_i \frac{1}{x} \quad (4.16)$$

wobei der Faktor k zur Einhaltung des vorgeschriebenen Volumens dient.

In einigen Fällen kann mit relativ geringem zusätzlichen Rechenaufwand eine weitere Verbesserung erzielt werden durch den Stab gleicher Festigkeit, bei dem ein (optimaler) Teil des zur Verfügung stehenden Volumens als Einzelmasse ($m_E = \varepsilon \rho V_0$) an einer Stelle des Stabes konzentriert wird. Die Optimierung dieser Einzelmasse erfolgt mit dem Direct-Search-Verfahren, wobei mit jeweils vorgegebener Masse der entsprechende Stab gleicher Festigkeit über (4.16) ermittelt wird.

4.3 Der optimale Stab

Da der Stab gleicher Festigkeit (eventuell mit optimaler Einzelmasse) i. a. nicht optimal ist, muß auf die ursprüngliche Aufgabenstellung (4.1) - (4.4) zurückgegangen werden, die jedoch wegen der nichtlinearen Nebenbedingungen nicht direkt lösbar ist.

Wird aber der Zusammenhang zwischen den Standardabweichungen der Spannungen und den Querschnitten in der Umgebung eines bekannten Zustandes (A_i, σ_k) linearisiert, so können die Methoden der linearen Programmierung angewandt werden. Man erhält dann für den neuen Zustand die Zielfunktion

$$\bar{\sigma} = \hat{\sigma} + \Delta\hat{\sigma} \quad (4.17)$$

die Querschnitte

$$\bar{A}_i = A_i + \Delta A_i \quad (4.18)$$

und die Standardabweichungen der Spannungen

$$\bar{\sigma}_k = \sigma_k + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \sigma_k}{\partial A_i} \right|_{A_i} \Delta A_i \quad (4.19)$$

wobei die Querschnittsänderungen noch beschränkt werden müssen, um die Linearisierung zu rechtfertigen.

Da der bekannte Zustand die Nebenbedingungen erfüllt, ergibt sich die folgende lineare Optimierungsaufgabe für die Zuwächse:

Zielfunktion

$$\min_{(\Delta A_i, \Delta \hat{\sigma})} \Delta \hat{\sigma} \quad (4.20)$$

Nebenbedingungen

$$g_k = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial \sigma_k}{\partial A_i} \right|_{A_i} \Delta A_i - \Delta \hat{\sigma} + \sigma_k - \hat{\sigma} \leq 0 \quad (4.21)$$

$$g_{m+1} = \sum_{i=1}^n c_i \Delta A_i = 0 \quad (4.22)$$

und

$$- a_i \leq \Delta A_i \leq a_i \quad (4.23)$$

$$i = 1, \dots, n$$

$$k = 1, \dots, m$$

Die Lösung dieser Optimierungsaufgabe wird ermittelt mit der Simplexmethode [35], wobei - nach Einführung von nicht-negativen Schlupfvariablen für die Ungleichheitsnebenbedingungen - das Optimum auf den Ecken des bezüglich der Nebenbedingungen zulässigen Gebietes gesucht wird.

Ausgehend vom Stab gleicher Festigkeit wird der Querschnittsverlauf auf diese Weise iterativ so lange verbessert, bis er im Rahmen der geforderten Genauigkeit die Optimalitätsbedingungen erfüllt.

Dieses Vorgehen erfordert jedoch einen hohen Rechenaufwand, da einerseits pro Optimierungsschritt n Systemberechnungen zur Ermittlung der Spannungsgradienten nach (4.15) erforderlich sind und andererseits - wegen der Beschränkungen der Querschnittsänderungen - Verbesserungen nur allmählich zu erreichen sind.

5. Numerische Durchführung

5.1 Allgemeines

Das Optimierungsverfahren wurde getestet an einigen Beispielen für Stäbe, die durch skalares farbiges Rauschen mit verschwindendem Mittelwert zur Längs- und Biegeschwingung angeregt werden.

Betrachtet werden schlanke, gerade Stäbe im Rahmen der elementaren Theorie unter Vernachlässigung von Schubdeformation und Drehträgheit aus homogenem, isotropem und linear-elastischem Werkstoff.

Der kontinuierliche Verlauf von Querschnittsfläche und Massenbelegung wird ersetzt durch ein System von masselosen Federn und Einzelmassen (Lumped-Mass-System).

Dazu wird der Stab der Länge l in n Abschnitte gleicher Länge $\Delta l = \frac{l}{n}$ unterteilt. Bei feiner werdender Unterteilung ($n \rightarrow \infty$) konvergiert das Ersatzsystem gegen das ursprüngliche. Allerdings wird diese Feinheit der Diskretisierung begrenzt durch Speicherplatz, numerische Fehler und Rechenzeit, die hier etwa quadratisch mit der Ordnung des Systems wächst.

Die Beispiele wurden gerechnet mit 20 Elementen, wodurch der relative Fehler durch Diskretisierung bei den ersten 4 Eigenfrequenzen des Stabes mit konstantem Querschnitt und bei Querschnitten und Spannungen des statisch optimalen Stabes (zum Teil wesentlich) weniger als 1% beträgt.

Nach modaler Analyse des Systems und Lösung der Ljapunov-Gleichung können die Standardabweichungen der Spannungen im eingeschwungenen Zustand leicht ermittelt werden, wobei mit für alle Hauptschwingungen konstantem Lehr'schen Dämpfungsmaß $D_i = D$ (meist $D = 5\%$) gerechnet wurde.

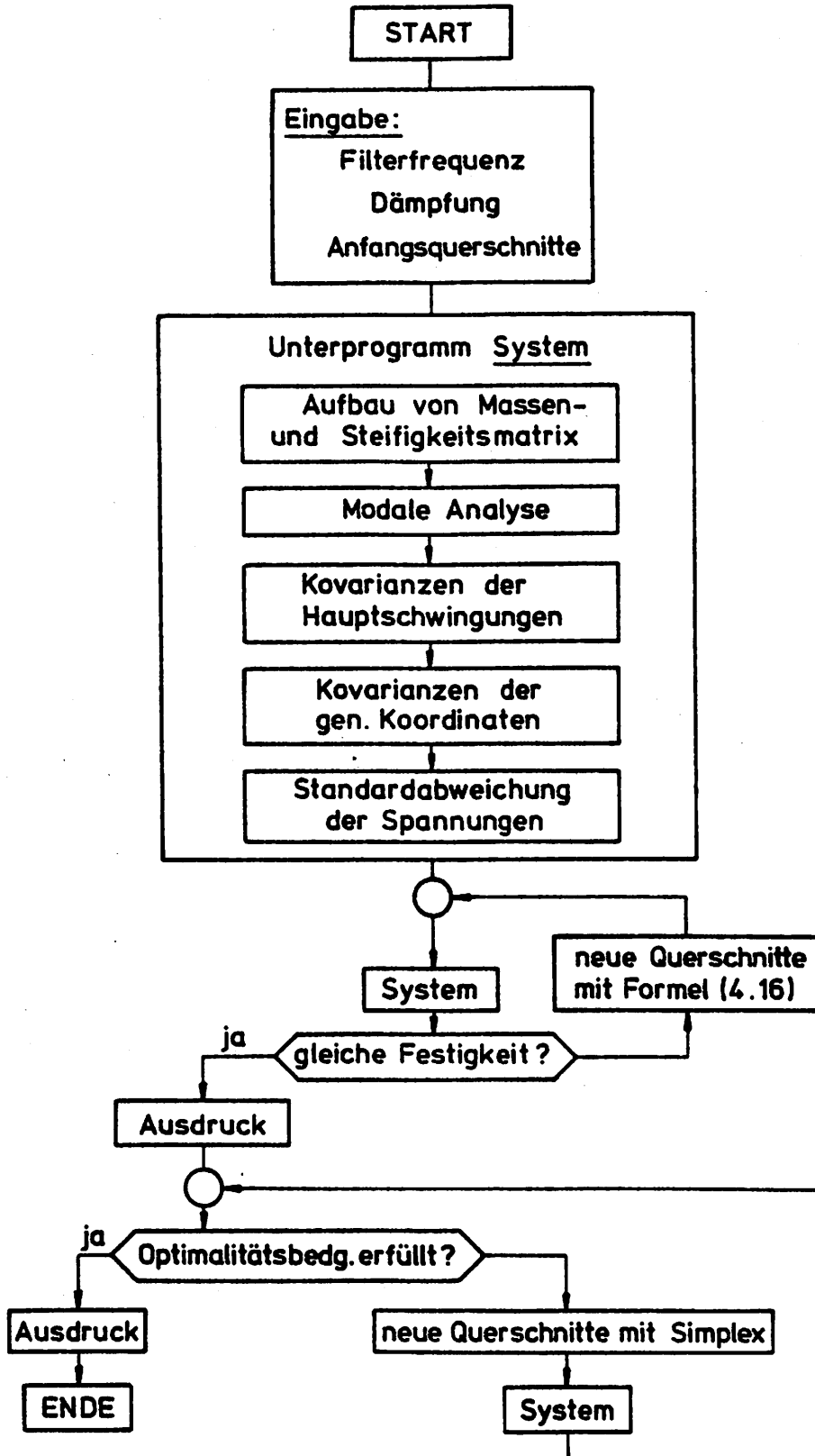
Zunächst wurde - ausgehend vom bekannten statischen Verlauf ($\omega_F = 0$) - für den gesamten Bereich der Filterfrequenz ($0 \leq \omega_F < \infty$) der Stab gleicher Festigkeit bestimmt. Das gewählte Iterationsverfahren konvergiert i. a. sehr schnell und für beliebige Anfangsquerschnitte.

Der so ermittelte Stab wurde gegebenenfalls mit Hilfe der linearen Programmierung so lange verbessert, bis er die Optimalitätsbedingungen erfüllt. Diese garantieren zwar kein globales Optimum; es konnten jedoch bei allen Beispielen trotz verschiedener Anfangsquerschnittsverläufe keine anderen Lösungen gefunden werden.

Die numerischen Berechnungen wurden durchgeführt am Telefunken-Rechner TR440 des Bochumer Rechenzentrums.

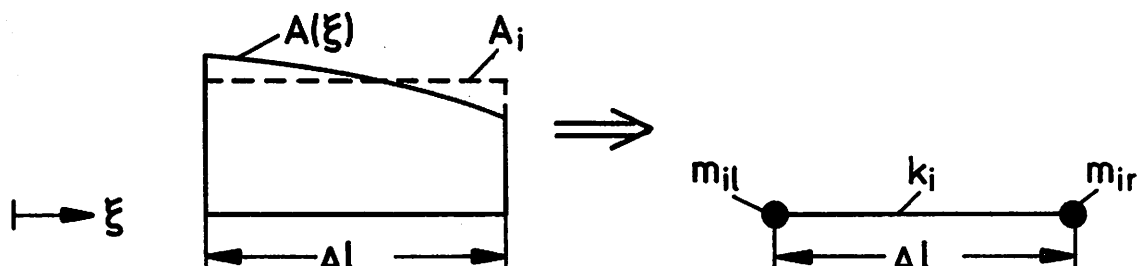
Dabei wurden die vorhandenen Rechnerprozeduren TRED2 und TDIAG2 zur Lösung des Eigenwertproblems und SIMPLX für das Simplex-Verfahren benutzt.

Einen Überblick über den Programmablauf gibt das folgende Flußdiagramm.



5.2 Die Längsschwingung

Bei der Längsschwingung wird der Querschnittsverlauf $A(\xi)$ - mit der dimensionslosen, auf die Stablänge l bezogenen Koordinate ξ der Stabachse - durch abschnittsweise konstante Querschnitte A_i ersetzt. Für diese Abschnitte wird dann das jeweilige Ersatzsystem bestimmt.



Mit der Dichte ρ erhält man für die Ersatzmassen aus der Forderung, daß die Gesamtmasse und die Lage des Schwerpunktes beider Systeme gleich sein sollen

$$m_{il} = m_{ir} = \frac{1}{2} A_i \rho \Delta l \quad (5.1)$$

An den Knoten werden die Teilmassen zweier benachbarter Elemente zusammengefaßt:

$$m_i = m_{ir} + m_{i+1l} = \frac{1}{2} (A_i + A_{i+1}) \rho \Delta l \quad (5.2)$$

Mit dem Elastizitätsmodul E ergibt sich für die Ersatzfederkonstante bei gleicher Formänderungsarbeit unter konstanter Normalkraft

$$k_i = \frac{E A_i}{\Delta l} \quad (5.3)$$

Aus dem Gleichgewicht und der Differentialgleichung des Stabelementes



wird die Element-Steifigkeitsmatrix aufgestellt:

$$\begin{vmatrix} N_{il} \\ N_{ir} \end{vmatrix} = k_i \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{il} \\ u_{ir} \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

Mit den Verträglichkeitsbedingungen

$$u_i = u_{ir} = u_{i+1l} \quad (5.5)$$

und dem Gleichgewicht am Knoten



$$m_i \ddot{u}_i + (N_{ir} + N_{i+1l}) = F_i \quad (5.6)$$

wird dann unter Berücksichtigung der Randbedingungen die Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammengebaut. Man erhält so das Differentialgleichungssystem der ungedämpften Längsschwingung

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{f} \quad (5.7)$$

Nach dessen Lösung, also mit bekannten Verschiebungen, können die Normalkräfte aus (5.4) berechnet werden

$$N_i = N_{ir} = \frac{E A_i}{\Delta l} (u_i - u_{i-1}) \quad (5.8)$$

woraus sich wiederum (als Sonderfall von Gleichung (3.4) mit $\gamma = 1$, $x = 1$) die Normalspannungen ergeben

$$s_i = \frac{N_i}{A_i} = \frac{E}{\Delta l} (u_i - u_{i-1}) \quad (5.9)$$

Die Iterationsformel für den Stab gleicher Festigkeit (4.16) hat die spezielle Form

$$\bar{A}_i = k (\sigma_N)_i \quad (5.10)$$

5.3 Die Biegeschwingung

Bei der Biegeschwingung hängt die Ersatzsteifigkeit ab vom Flächenträgheitsmoment und damit von der Querschnittsform des Ausgangssystems.

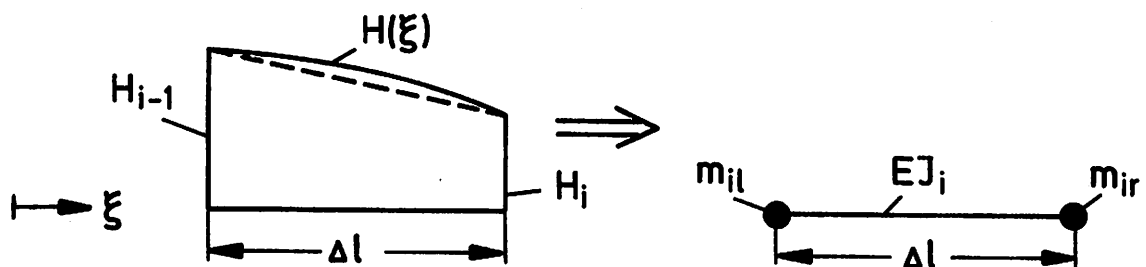
Für die betrachteten Beispiele wird ein Rechteckquerschnitt mit konstanter Breite und veränderlicher Höhe angenommen:

$$A(\xi) = B H(\xi) \quad (5.11)$$

mit dem Flächenträgheitsmoment

$$I(\xi) = \frac{1}{12} B H(\xi)^3 \quad (5.12)$$

Der Verlauf der Querschnittshöhe wird nun stückweise linearisiert und daraus das Ersatzsystem gebildet:



Die Ersatzmassen sind bei gleicher Gesamtmasse und gleichem Schwerpunkt

$$m_{i1} = \frac{1}{6} (2 H_{i-1} + H_i) \rho B \Delta l \quad (5.13)$$

$$m_{ir} = \frac{1}{6} (H_{i-1} + 2 H_i) \rho B \Delta l \quad (5.14)$$

und die Knotenmassen im allgemeinen Fall

$$m_i = m_{ir} + m_{i+1l} = \frac{1}{6} (H_{i-1} + 4 H_i + H_{i+1}) \rho B \Delta l \quad (5.15)$$

Für das Ersatzträgheitsmoment findet man aus der Forderung, daß die Formänderungsarbeit unter konstanter Momentenbelastung für Ausgangs- und Ersatzsystem gleich sein soll

$$I_i = \frac{1}{6} B \frac{H_{i-1}^2 H_i^2}{H_{i-1} + H_i} \quad (5.16)$$

was sich auch ergibt, wenn man gleiche Relativverdrehung der Enden bei konstantem Moment verlangt.

Der Fall, daß das Biegemoment an einem Knoten i des Stabes verschwindet, wird gesondert betrachtet. Man erhält über die Formänderungsarbeit bei linearem Momentenverlauf (nach einer Reihenentwicklung) für $M_i = 0$, $H_i \neq 0$

$$I_i = \frac{1}{6} B \frac{(H_{i-1} + H_i)^3}{3 \left(\frac{H_i}{H_{i-1}} + 1 \right)^2 + 4} \quad (5.17)$$

Die beiden Ersatzträgheitsmomente (5.16) und (5.17) sind exakt bei ursprünglich konstantem Querschnittsverlauf $H_{i-1} = H_i$. Sie liefern jedoch schlechte oder sogar unsinnige Ergebnisse ($I_i = 0$), wenn der Querschnitt an einer

Stelle i des Stabes sehr klein wird oder verschwindet, was z. B. beim Stab gleicher Festigkeit an den Enden vorkommen kann. Ausgehend von dem Querschnittsverlauf, der bei linearem Moment auf konstante Spannungen in diesem Abschnitt führt, findet man (wieder über die Formänderungsarbeit) für $M_i = 0, H_i = 0$

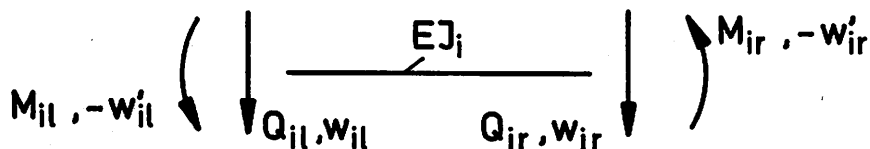
$$I_i = \frac{1}{24} B H_{i-1}^3 \quad (5.18)$$

mit den Ersatzmassen

$$m_{il} = \frac{2}{5} H_{i-1} \rho B \Delta l \quad (5.19)$$

$$m_{ir} = \frac{4}{15} H_{i-1} \rho B \Delta l \quad (5.20)$$

Analog zum Längsschwinger führt die Betrachtung des i -ten Elementes



auf die Element-Steifigkeitsmatrix

$$\begin{vmatrix} Q_{il} \\ Q_{ir} \\ M_{il} \\ M_{ir} \end{vmatrix} = \frac{2E I_i}{\Delta l^3} \begin{vmatrix} 6 & -6 & 3\Delta l & 3\Delta l \\ -6 & 6 & -3\Delta l & -3\Delta l \\ -3\Delta l & 3\Delta l & -2\Delta l^2 & -1\Delta l^2 \\ -3\Delta l & 3\Delta l & -1\Delta l^2 & -2\Delta l^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} w_{il} \\ w_{ir} \\ w'_{il} \\ w'_{ir} \end{vmatrix}$$

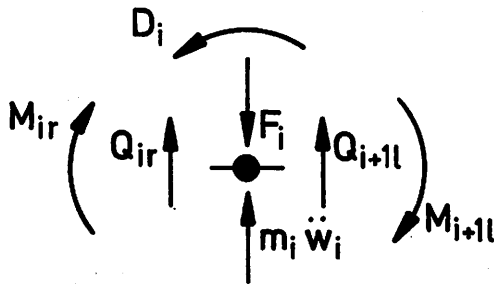
(5.21)

Mit

$$w_i = w_{ir} = w_{i+1l} \quad (5.22)$$

$$w_i' = w_{ir}' = w_{i+1l}' \quad (5.23)$$

und dem Knotengleichgewicht



$$m_i \ddot{w}_i + (Q_{ir} + Q_{i+1l}) = F_i \quad (5.24)$$

$$(M_{ir} + M_{i+1l}) = D_i \quad (5.25)$$

erhält man nach Einbau der Randbedingungen durch entsprechende Partitionierung (siehe (5.21)) die beiden Matrizen-
gleichungen

$$\underline{M} \ddot{\underline{w}} + \underline{K}_1 \underline{w} + \underline{K}_2 \underline{w}' = \underline{f}_1 \quad (5.26)$$

$$\underline{K}_2^T \underline{w} + \underline{K}_3 \underline{w}' = \underline{d} \quad (5.27)$$

Da die Drehträgeit nicht berücksichtigt wurde, kann mit
(5.27) \underline{w}' in (5.26) eliminiert werden:

$$\underline{w}' = \underline{K}_3^{-1} (\underline{d} - \underline{K}_2^T \underline{w}) \quad (5.28)$$

sodaß man schließlich mit

$$\underline{K} = \underline{K}_1 - \underline{K}_2 \underline{K}_3^{-1} \underline{K}_2^T \quad (5.29)$$

$$\underline{f} = \underline{f}_1 - \underline{K}_2 \underline{K}_3^{-1} \underline{d} \quad (5.30)$$

das Differentialgleichungssystem der ungedämpften Biegeschwingung erhält

$$\underline{M} \ddot{\underline{w}} + \underline{K} \underline{w} = \underline{f} \quad (5.31)$$

Die Lösung von (5.31) liefert die Verschiebungen $\underline{w}(t)$, mit denen man über (5.28) die Verdrehungen $\underline{w}'(t)$ und über (5.21) die Schnittmomente berechnen kann:

$$M_i = M_{ir} = \frac{2E I_i}{\Delta l^2} (3 w_i - 3 w_{i-1} - 2 \Delta l w_i' - \Delta l w_{i-1}') \quad (5.32)$$

Mit dem Widerstandsmoment

$$W_i = \frac{1}{6} B H_i^2 \quad (5.33)$$

sind die Normalspannungen in den Randfasern

$$s_i = \frac{M_i}{W_i} \quad (5.34)$$

was in Gleichung (3.4) $\gamma = 6 B$ und $x = 2$ bedeutet. Die Iterationsformel (4.16) lautet hier

$$\bar{H}_i = k \sqrt{(\sigma_M)_i} \quad (5.35)$$

5.4 Inversion einer symmetrischen Tridiagonalmatrix

Für die hier betrachteten einläufigen Systeme ist die $(m \times m)$ Matrix \underline{K}_3 in (5.27) symmetrisch und nur auf der Haupt- und den Nebendiagonalen besetzt. Dadurch kann die für Gleichung (5.28) benötigte symmetrische Inverse $\underline{X} = \underline{K}_3^{-1}$ besonders leicht berechnet werden. Mit den Abkürzungen

$$a_i = (\underline{K}_3)_{i,i} \quad i = 1, \dots, m \quad (5.36)$$

$$b_i = (\underline{K}_3)_{i,i+1} = (\underline{K}_3)_{i+1,i} \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (5.37)$$

und den Hilfsgrößen

$$c_m = - \frac{b_{m-1}}{a_m} \quad (5.38)$$

$$c_i = - \frac{b_{i-1}}{a_i + b_i c_{i+1}} \quad i = m-1, \dots, 2 \quad (5.39)$$

berechnet man spaltenweise die Koeffizienten der Inversen:

$$X_{1,1} = \frac{1}{a_1 + b_1 c_2} \quad (5.40)$$

$$X_{i,i} = \frac{1 - b_{i-1} X_{i-1,i}}{a_i + b_i c_{i+1}} \quad i = 2, \dots, m-1 \quad (5.41)$$

$$X_{m,m} = \frac{1 - b_{m-1} X_{m-1,m}}{a_m} \quad (5.42)$$

$$X_{k,i} = c_i X_{k-1,i} = X_{i,k} \quad k = i+1, \dots, m \quad (5.43)$$

Gegenüber der im Rechenzentrum verfügbaren Prozedur MATINV ist diese Matrizeninversion etwa um den Faktor m schneller.

6. Ergebnisse

Die Erregung wird in allen Beispielen beschrieben durch Gleichung (2.117) :

$$\dot{r}(t) = -\omega_F r(t) + C h(t) \quad (6.1)$$

was in den Beispielen 4 und 5 bedeutet, daß für die angenommene verteilte Belastung gleiches Zeitverhalten - also vollständige Korrelation - vorausgesetzt wird.

Bei den Querschnittsverläufen in Abhängigkeit von Filterfrequenz ω_F und Dämpfung $D_i = D$ werden jeweils die Fälle dargestellt, bei denen die Unterschiede am stärksten ausgeprägt sind.

Die Querschnitte werden bezogen auf den des Stabes mit konstantem Querschnitt, also für den Längsschwinger

$$A(\xi) = A_0 = \frac{V_0}{1} \quad (6.2)$$

und für den Biegeschwinger (mit Rechteckquerschnitt und konstanter Breite B)

$$H(\xi) = H_0 = \frac{V_0}{B1} \quad (6.3)$$

Eine dimensionslose Darstellung ist in allgemeiner Form möglich, wenn die Filterfrequenz mit dem Dimensionsfaktor $\bar{\omega}$ der jeweiligen Eigenfrequenzen vorgegeben wird, d.h. für die Längsschwingung

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}} \quad (6.4)$$

und für die Biegeschwingung

$$\bar{\omega} = \frac{H_0}{1} \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}} \quad (6.5)$$

Damit sind dann alle Ergebnisse gültig für die angegebenen Werte der Filterfrequenz und der Dämpfung und für beliebige Werte des Erregungsparameters C , des Elastizitätsmoduls E , der Dichte ρ , der Stablänge l , der Querschnittsbreite B und des vorgegebenen Stabvolumens V_0 .

Der Erfolg der Optimierung wird gezeigt durch die Gegenüberstellung der jeweiligen maximalen Standardabweichungen der Spannungen $\hat{\sigma}$ des Stabes mit konstantem Querschnitt $A(\xi) = A_0$, des statisch optimierten Stabes $A(\xi) = A_{\text{opt}}(\omega_F=0)$, des Stabes gleicher Festigkeit $\hat{\sigma} = \sigma = \text{konst.}$ und des optimalen Stabes $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_{\text{min}}$. Einige Verläufe haben einen Knick an der Stelle, wo die maximale Standardabweichung von dem einen zum anderen Ende des Stabes springt.

Da die optimalen Querschnitte jeweils nur für einige wenige Filterfrequenzen ermittelt wurden, sind diese berechneten Werte besonders gekennzeichnet (o).

Zur besseren Übersicht bei niedrigen und bei hohen Filterfrequenzen (siehe Kapitel 2.4) werden die maximalen Standardabweichungen der Spannungen bei ihrer Darstellung einmal bezogen auf die Standardabweichung der Erregung

$$\sqrt{R_{rr}(0)} = \frac{C}{\sqrt{2\omega_F}} \quad (6.6)$$

was zum Dimensionsfaktor $\bar{\sigma}$ führt,

und zum anderen auf

$$\sqrt{S_{rr}(0)} = \frac{C}{\omega_F} \quad (6.7)$$

mit dem Dimensionsfaktor σ^* .

Aus den minimalen Standardabweichungen bei vorgegebenem Volumen kann auch die Lösung für die duale Aufgabe der Volumenminimierung angegeben werden.

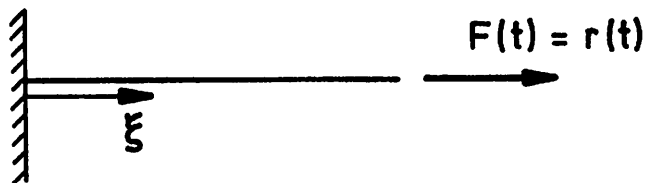
Für den Längsschwinger von Beispiel 1 erhält man dafür bis auf einen konstanten Maßstabsfaktor die gleichen Ergebnisse.

Die Lösungen von Beispiel 2 sind unabhängig vom Stabvolumen.

Bei der Biegeschwingung (Beispiel 3 und 4) werden die entsprechenden Verläufe dargestellt, wobei die Dimensionsfaktoren $\tilde{\omega}$ und \tilde{V} (statt $\bar{\omega}$ und $\bar{\sigma}$) ausgedrückt werden durch die zulässige Standardabweichung der Spannungen σ_{zul} .

6.1 Der Längsschwinger unter Einzelkraft

Es wird ein eingespannter Stab betrachtet, der an seinem freien Ende durch eine Einzelkraft in Stabachsenrichtung belastet wird:



Die Dimensionsfaktoren der Standardabweichungen der Spannungen sind hier

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{A_0} \frac{C}{\sqrt{2\omega_F}} \quad (6.8)$$

$$\sigma^* = \frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{A_0} \frac{C}{\omega_F} \quad (6.9)$$

Der statisch optimale Verlauf ($\omega_F = 0$) ist

$$A(\xi) = A_0 \quad (6.10)$$

$$\sigma(\xi) = 1 \bar{\sigma} \quad (6.11)$$

Der Einfluß von Filterfrequenz und Dämpfung auf den Stab gleicher Festigkeit ist in den Abbildungen 2 und 3 dargestellt. Bei $D = 5\%$ ist dieser optimal für Filterfrequenzen $\omega_F < 2\bar{\omega}$. Für $\omega_F \geq 10\bar{\omega}$ kann die (konstante) Standardabweichung der Spannungen noch um bis zu 4,5% verringert werden durch eine Einzelmasse ($m_E \approx 0,15 - 0,2 \rho V_0$) an der Kraftangriffsstelle.

Geringfügig kleiner sind die größten Standardabweichungen des optimalen Stabes (Abb. 4 und 5) - bis zu 6,5% gegenüber dem Stab gleicher Festigkeit ohne Einzelmasse.

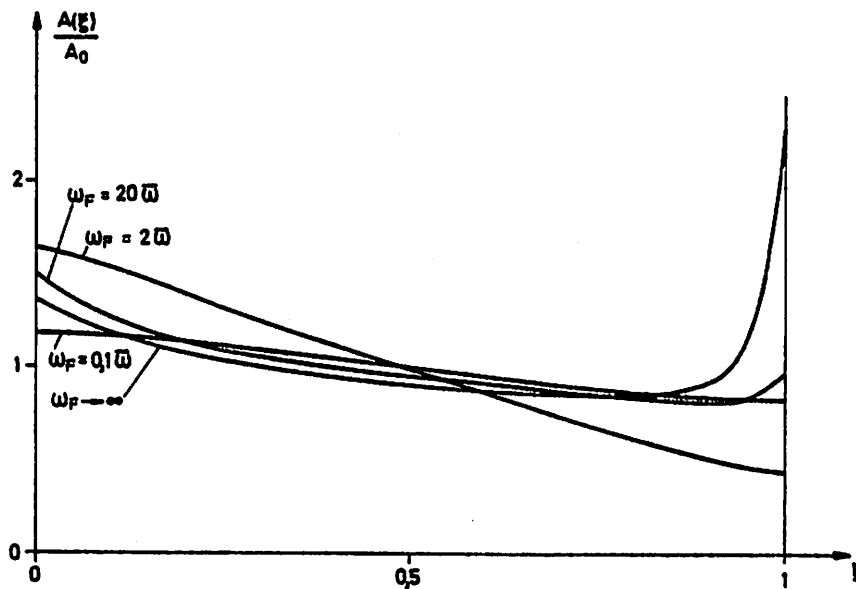


Abb. 2: Querschnittsverläufe, $\sigma = \text{konst.}$, $D = 5\%$

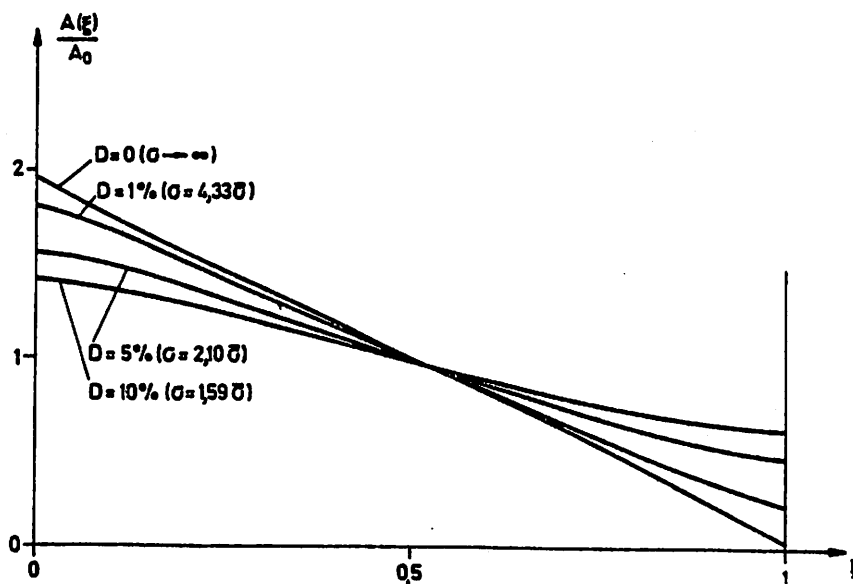


Abb. 3: Querschnittsverläufe, $\sigma = \text{konst.}$, $\omega_F = 1\bar{\omega}$

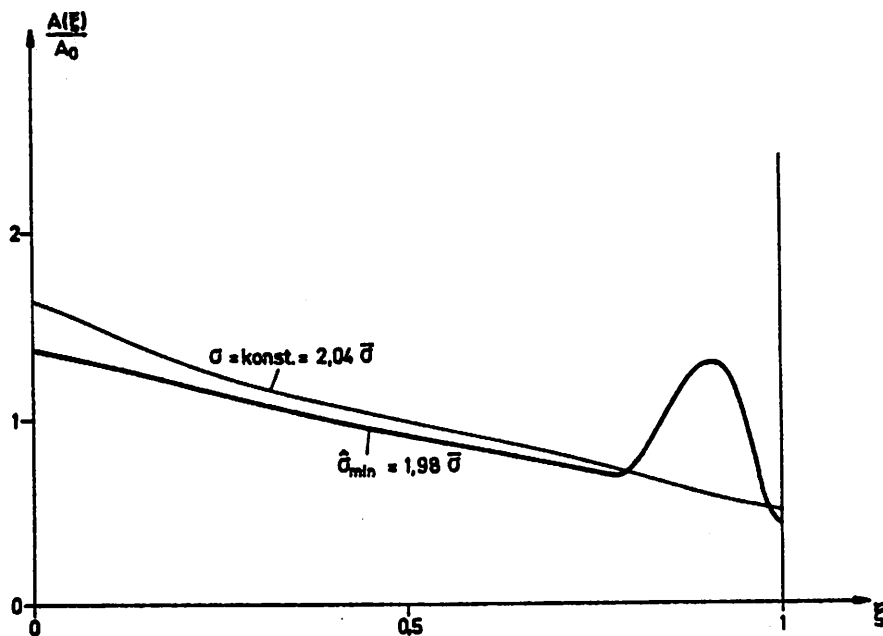


Abb. 4: Querschnittsverläufe, $D = 5\%$, $\omega_F = 5\bar{\omega}$

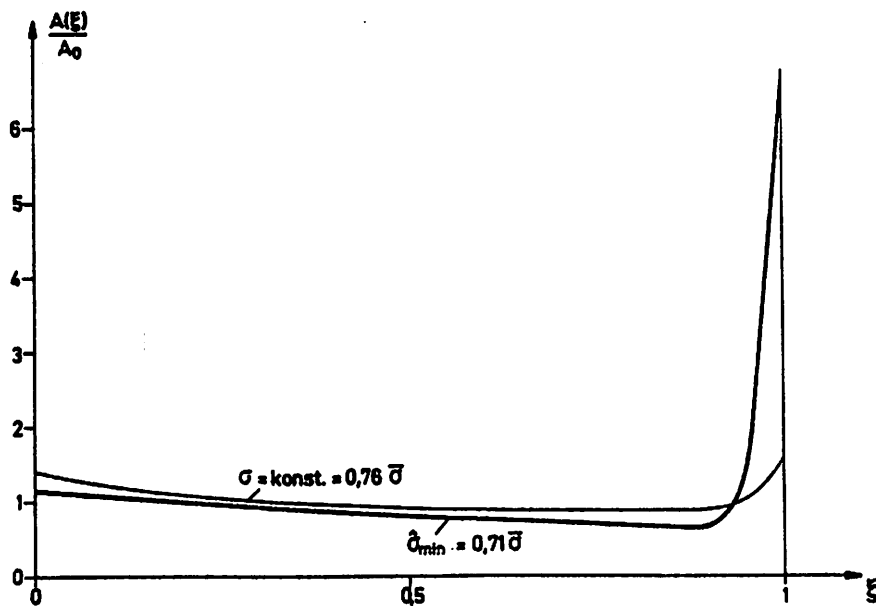


Abb. 5: Querschnittsverläufe, $D = 5\%$, $\omega_F = 50\bar{\omega}$

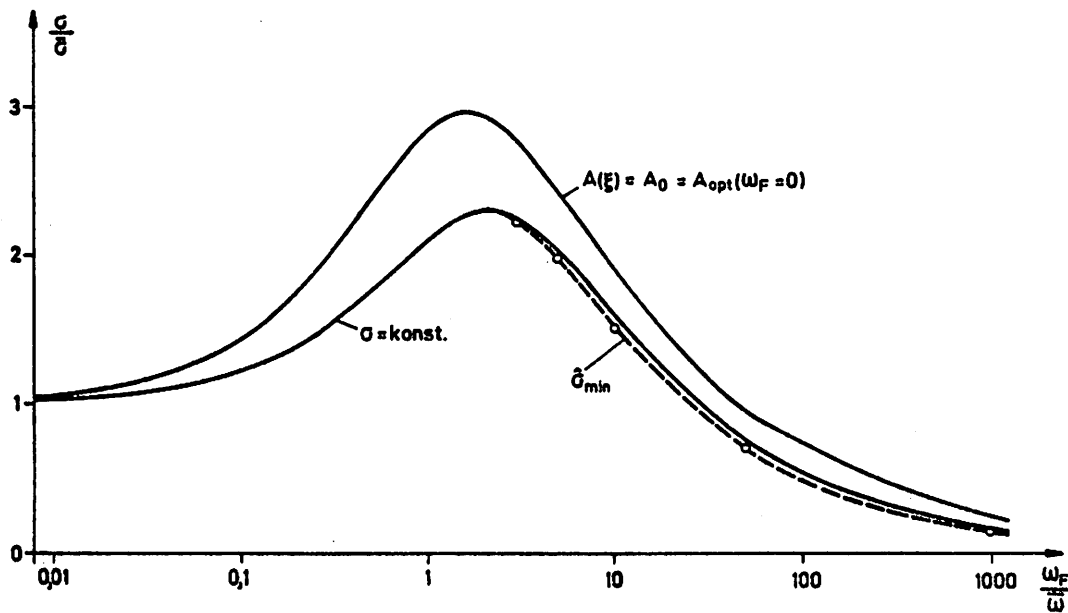


Abb. 6: max. Standardabweichungen der Spannungen $[\bar{\sigma}]$, $D = 5\%$

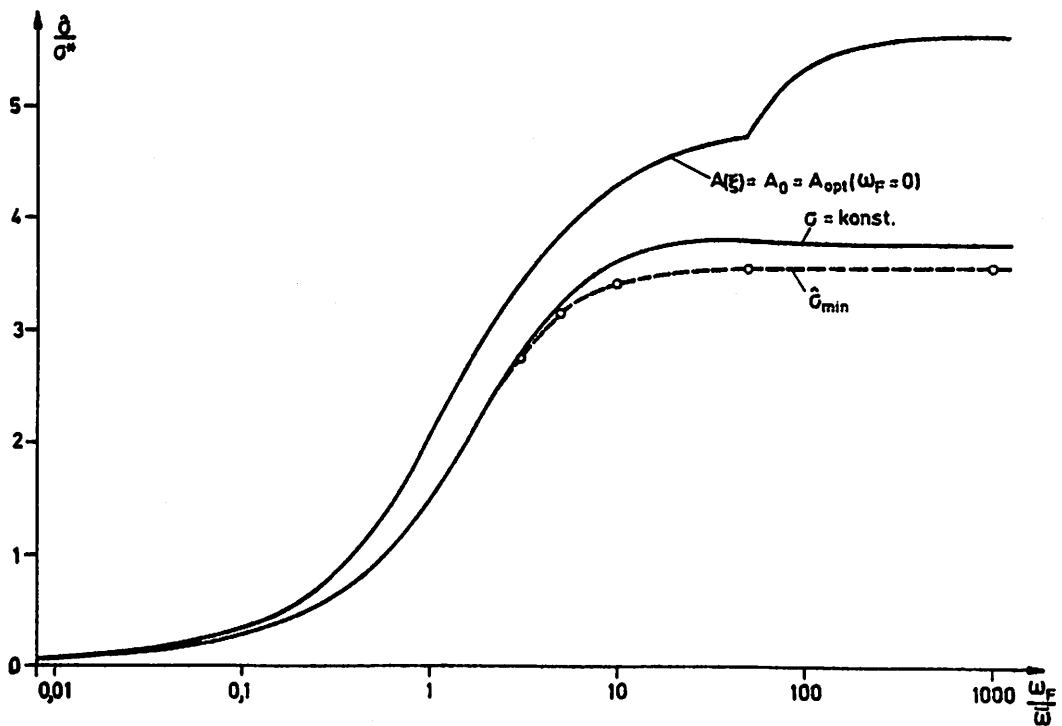
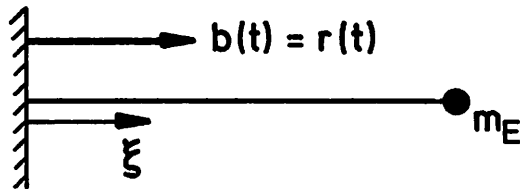


Abb. 7: max. Standardabweichungen der Spannungen $[\sigma^*]$, $D = 5\%$

6.2 Der auflagerbeschleunigte Längsschwinger

Die Einspannung des Stabes wird in Längsrichtung durch farbiges Rauschen beschleunigt:



Die optimale Lösung wäre (mit $m_E = 0$), das gesamte Volumen in die Einspannstelle zu verlegen.

Um diesen trivialen Fall zu verhindern, wird zusätzlich 0,1% des vorgegebenen Volumens am Ende des Stabes als Einzelmasse konzentriert ($m_E = 0,001 \rho V_0$).

Das Differentialgleichungssystem erhält man durch Einführung von Relativkoordinaten gegenüber der Einspannung. Die Standardabweichungen der Spannungen werden bezogen auf

$$\bar{\sigma} = \rho l \frac{C}{\sqrt{2}\omega_F} \quad (6.12)$$

und

$$\sigma^* = \rho l \sqrt{\omega} \frac{C}{\omega_F} \quad (6.13)$$

Das statische Optimum ($\omega_F = 0$) ist mit

$$a = 1 + \frac{\rho V_0}{m_E} \quad (6.14)$$

$$A(\xi) = \ln(a) \frac{m_E}{\rho V_0} a^{(1-\xi)} A_0 \quad (6.15)$$

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{\ln(a)} \bar{\sigma} \quad (6.16)$$

Der Stab gleicher Festigkeit ($D = 5\%$) ist optimal bis auf den Bereich $0,1\bar{\omega} < \omega_F < 3\bar{\omega}$, wo durch Vergrößerung des Einspannquerschnittes noch Verbesserungen bis zu $0,3\%$ möglich sind (Abb. 10). Diese sind jedoch in Abb. 11 und 12 nicht dargestellt, da sie außerhalb der Zeichengenauigkeit liegen.

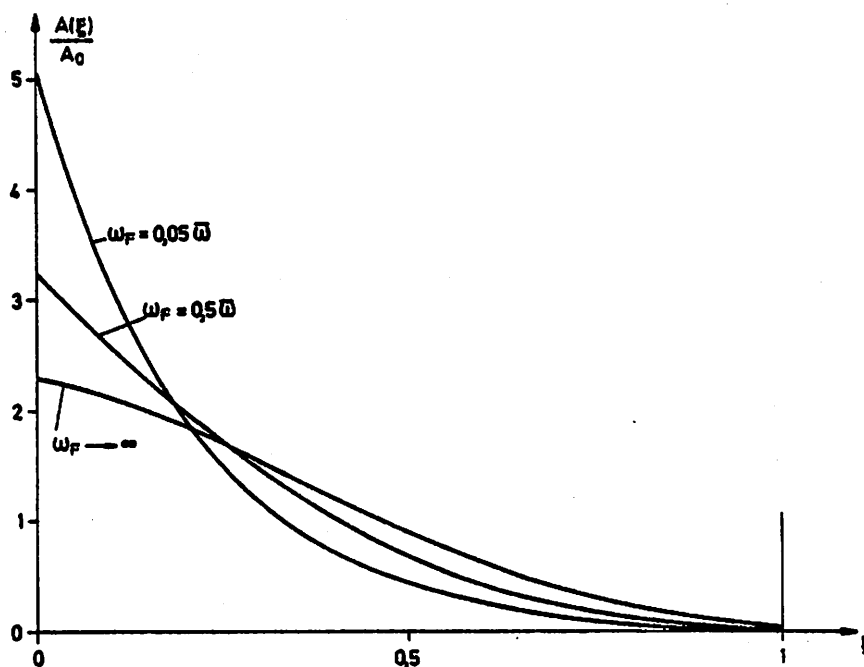


Abb. 8: Querschnittsverläufe, $\sigma = \text{konst.}$, $D = 5\%$

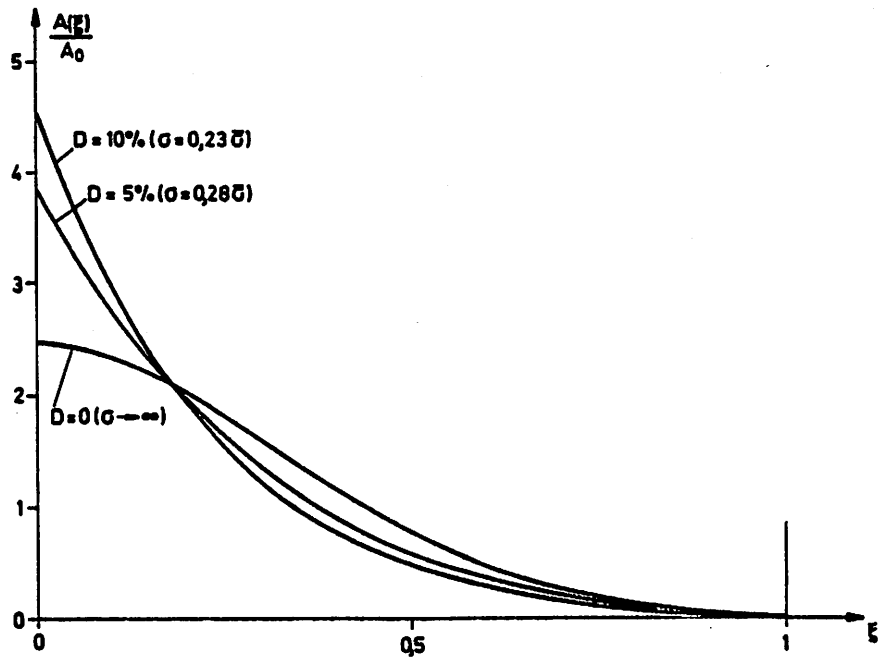


Abb. 9: Querschnittsverläufe, $\sigma = \text{konst.}$, $\omega_F = 0,2\bar{\omega}$

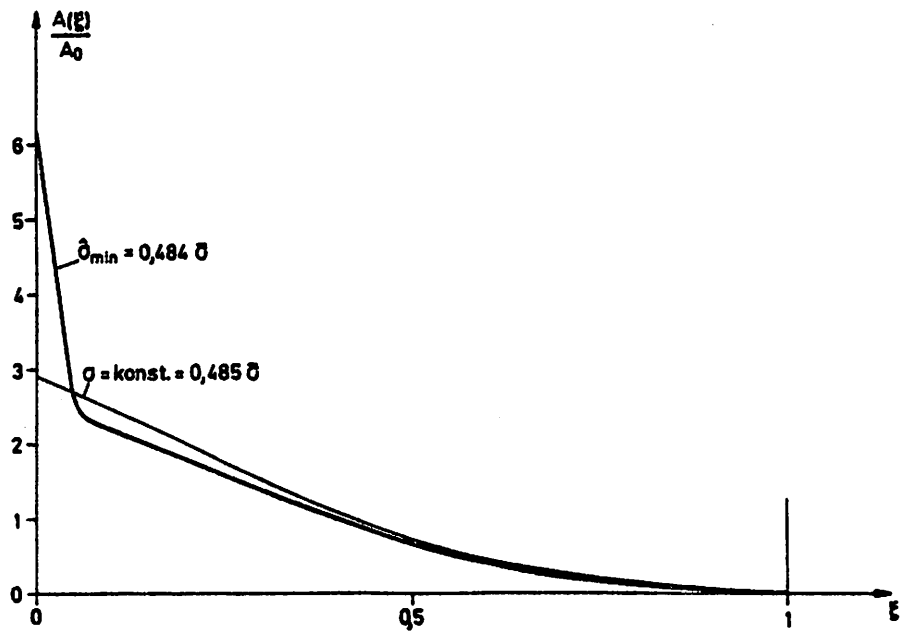


Abb. 10: Querschnittsverläufe, $D = 5\%$, $\omega_F = 1\bar{\omega}$

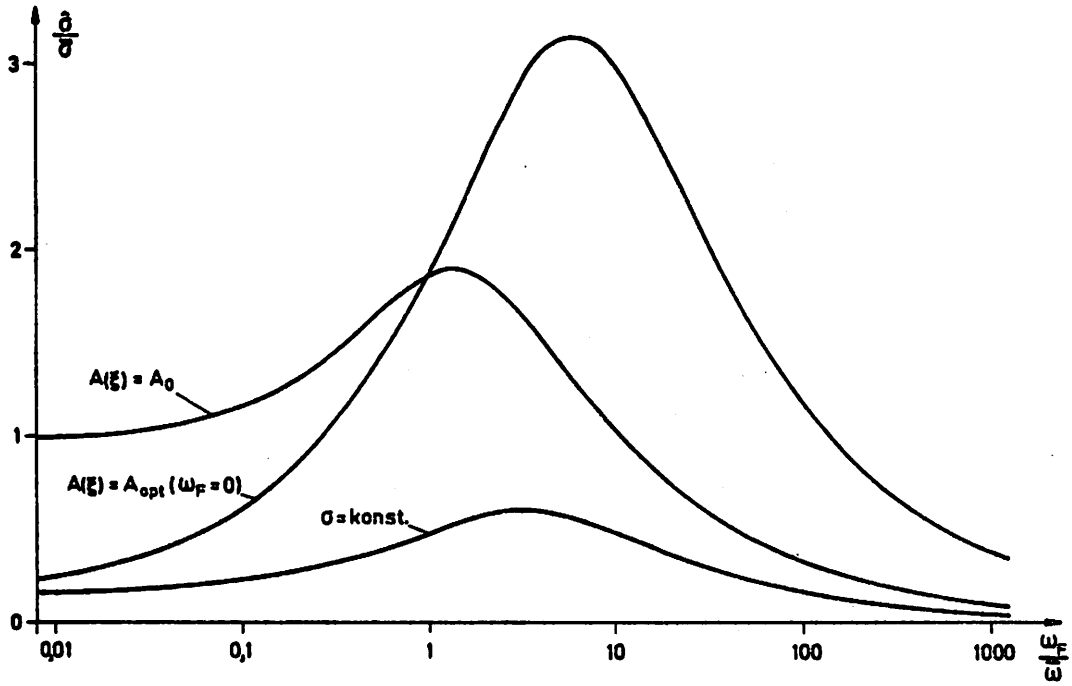


Abb. 11: max. Standardabw. der Spannungen $[\bar{\sigma}]$, $D = 5\%$

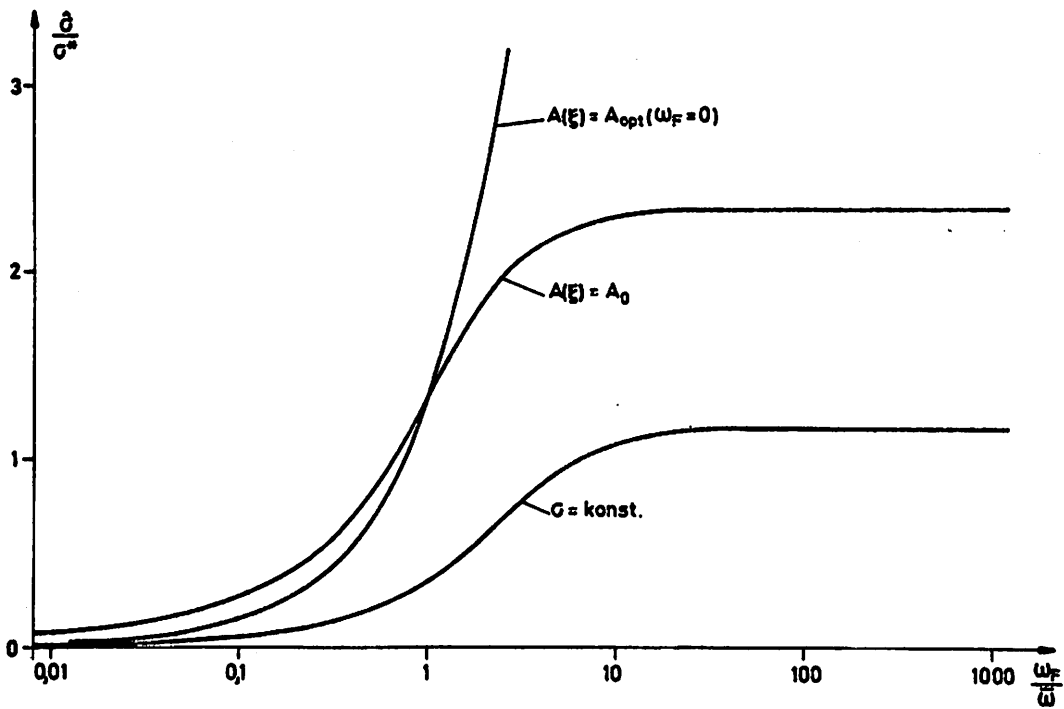
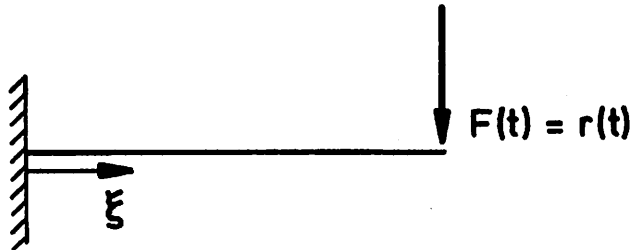


Abb. 12: max. Standardabw. der Spannungen $[\sigma^*]$, $D = 5\%$

6.3 Der Biegeschwinger unter Einzelkraft

Der eingespannte Stab wird durch eine Einzelkraft zur Biegeschwingung angeregt:



Mit der Abkürzung

$$F_0 = \frac{C}{\sqrt{2\omega_F}} \quad (6.17)$$

erhält man

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{B H_0^2} F_0 \quad (6.18)$$

$$\sigma^* = \frac{1}{B H_0^2} \sqrt{\bar{\omega}} \frac{C}{\omega_F} \quad (6.19)$$

und

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{F_0}{B l \sigma_{zul}}} \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}} \quad (6.20)$$

$$\tilde{V} = 1 \sqrt{\frac{B l F_0}{\sigma_{zul}}} \quad (6.21)$$

Für $\omega_F = 0$ ist der optimale Verlauf

$$H(\xi) = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \xi} H_0 \quad (6.22)$$

$$\sigma(\xi) = \frac{8}{3} \bar{\sigma} \quad (6.23)$$

Abb. 15 zeigt hier zusätzlich den Einfluß von Dämpfung und Filterfrequenz auf den Einspannquerschnitt des Stabes gleicher Festigkeit.

Bei 5% Dämpfung ist dieser Stab optimal bis $\omega_F = 1,65\bar{\omega}$.

Für Filterfrequenzen $\omega_F > 4\bar{\omega}$ können durch eine Einzelmasse an der Kraftangriffsstelle ($m_E \approx 0,1 - 0,15 \rho V_0$) Verbesserungen von bis zu 20% erreicht werden, die auch für

$\omega_F > 10\bar{\omega}$ die Optimalitätsbedingungen erfüllen (Abb. 18).

Im übrigen Bereich $1,65\bar{\omega} < \omega_F < 10\bar{\omega}$ verringert der optimale Stab (zum Teil auch mit Einzelmasse) die maximalen Standardabweichungen noch weiter - allerdings nur um weniger als 1% (Abb. 16 und 17).

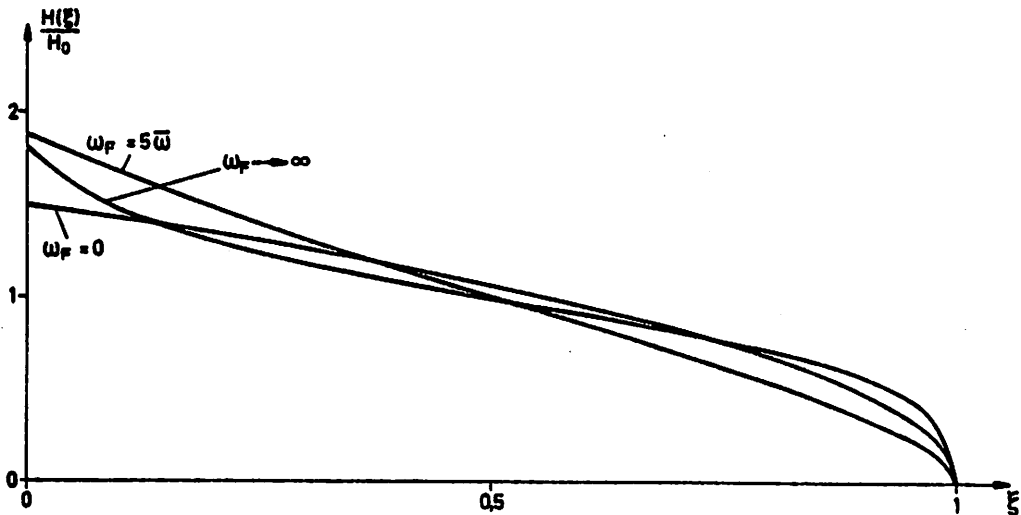


Abb. 13: Querschnittsverläufe, $\sigma = \text{konst.}$, $D = 5\%$

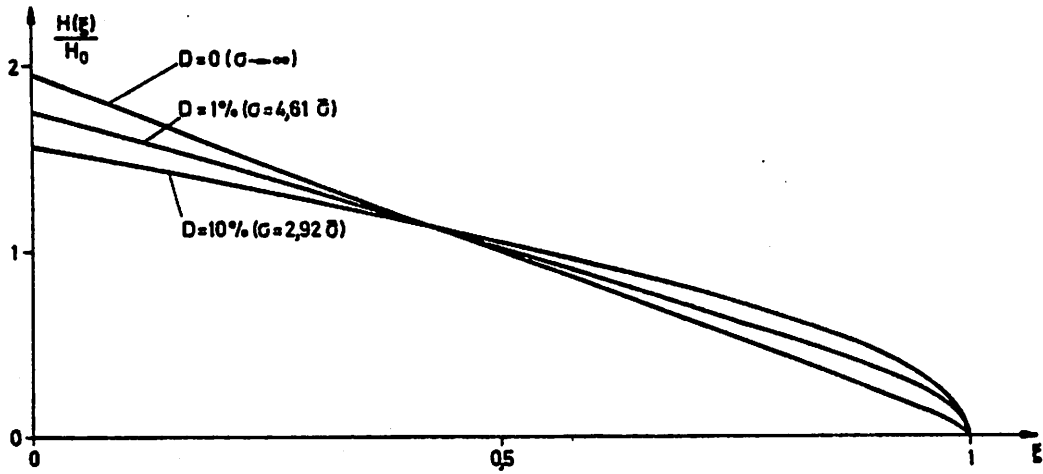


Abb. 14: Querschnittsverläufe, $\sigma = \text{konst.}$, $\omega_F = 0,1\bar{\omega}$

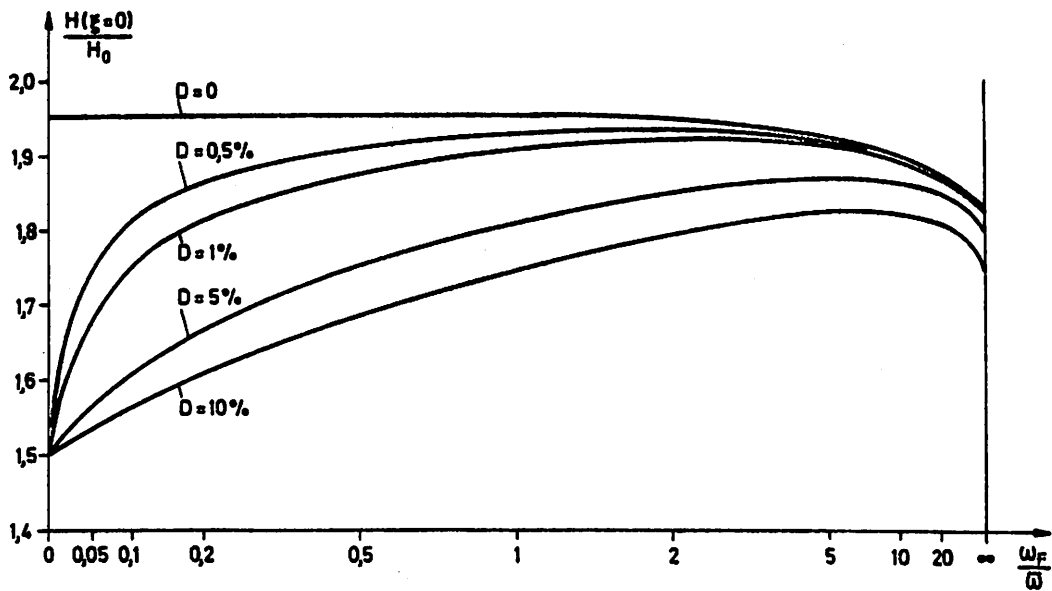


Abb. 15: Einspannquerschnitt, $\sigma = \text{konst.}$

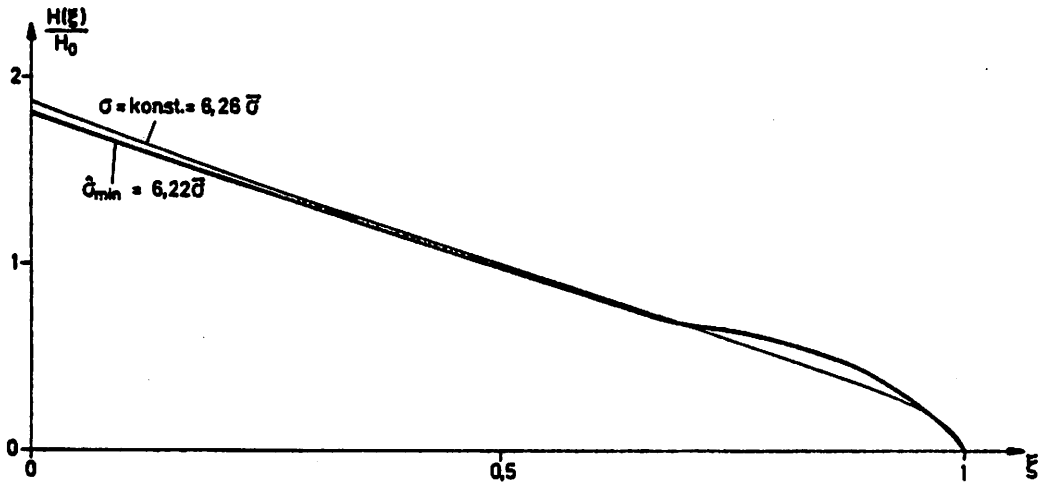


Abb. 16: Querschnittsverläufe, $D = 5\%$, $\omega_F = 3\bar{\omega}$

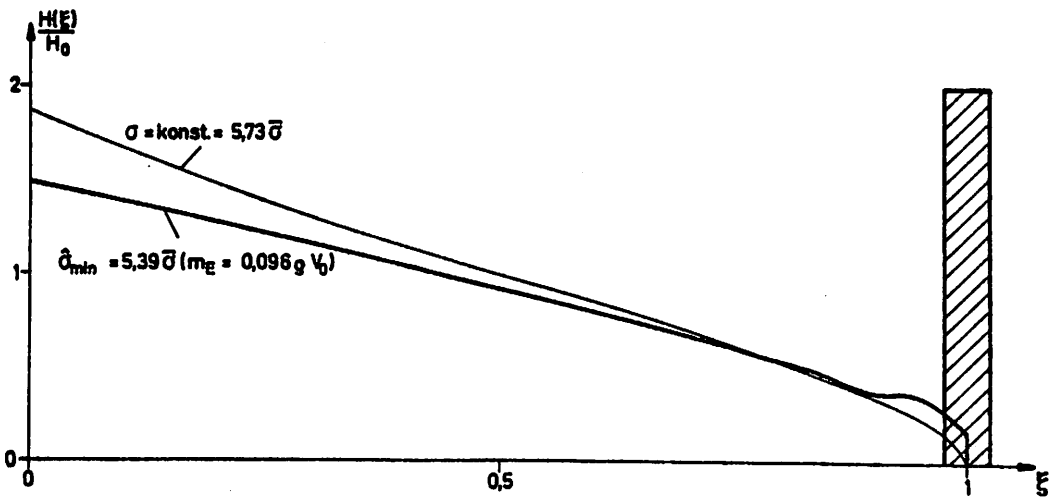


Abb. 17: Querschnittsverläufe, $D = 5\%$, $\omega_F = 5\bar{\omega}$

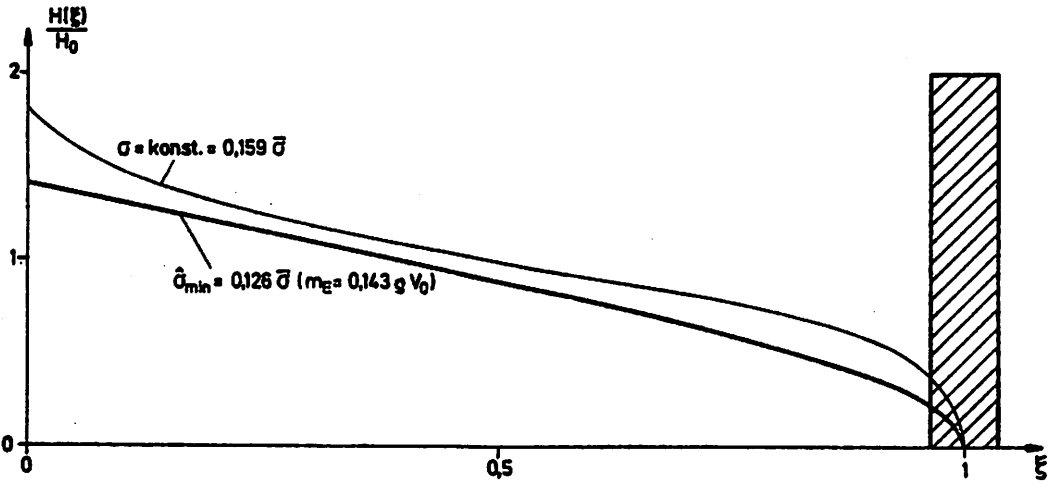


Abb. 18: Querschnittsverläufe, $D = 5\%$, $\omega_F = 10^4 \bar{\omega}$

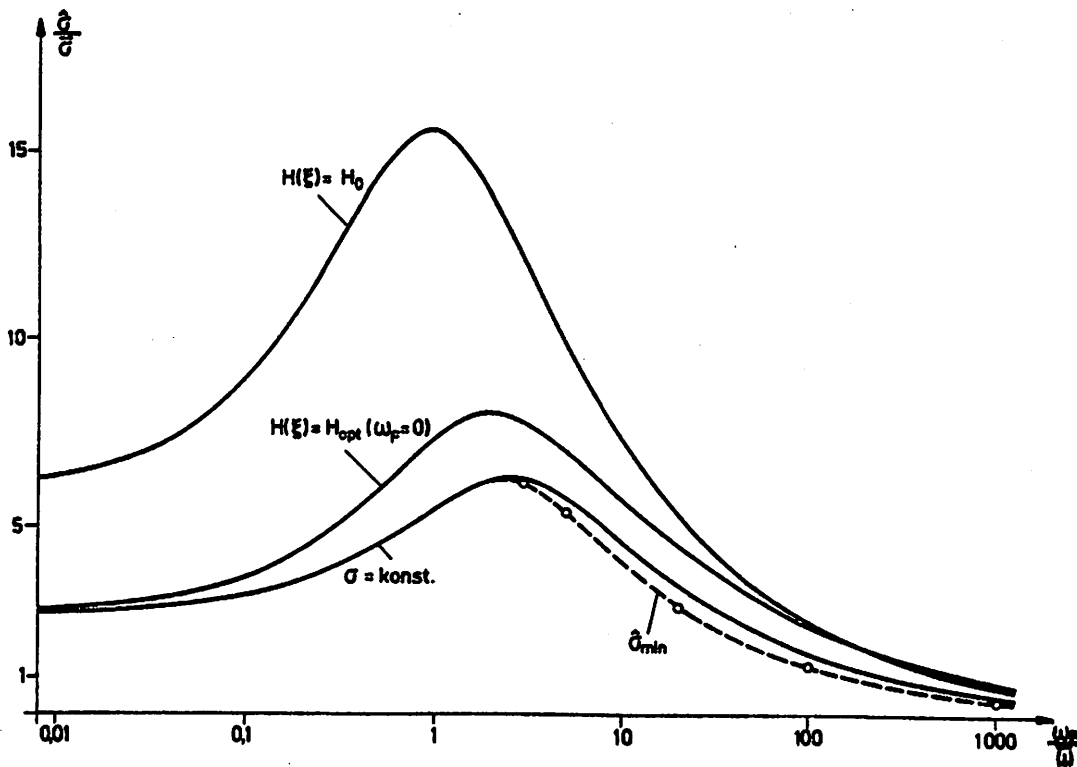


Abb. 19: max. Standardabw. der Spannungen $[\bar{\sigma}]$, $D = 5\%$

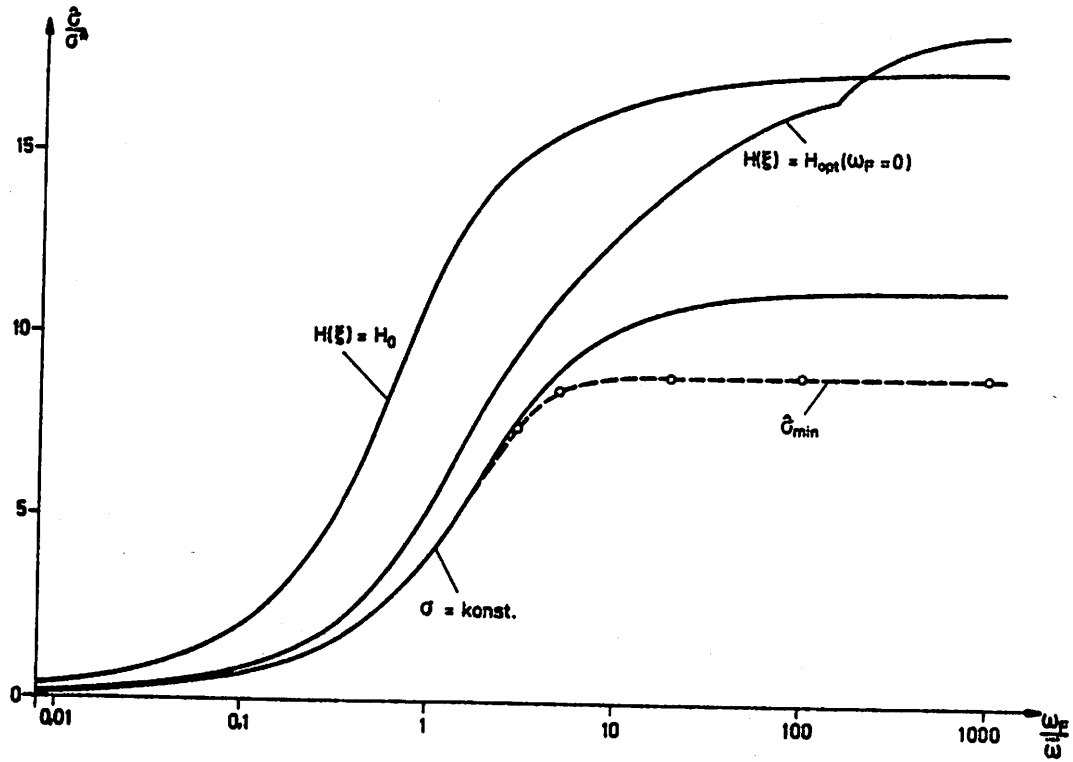


Abb. 20: max. Standardabw. der Spannungen $[\sigma^*]$, $D = 5\%$

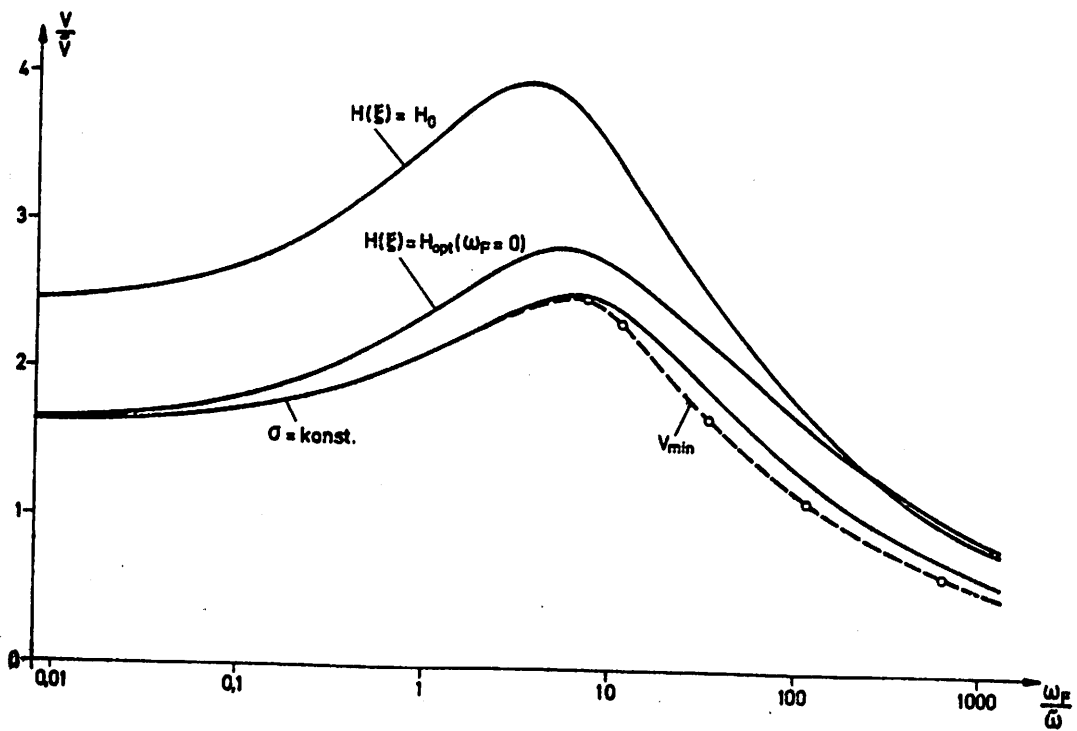
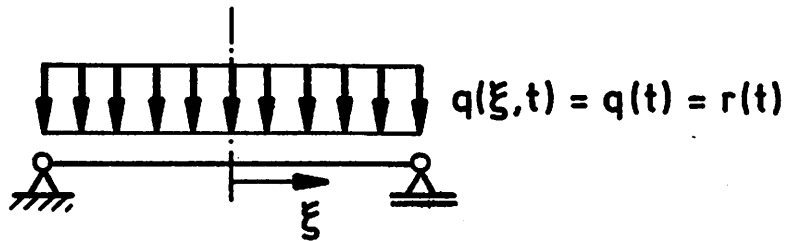


Abb. 21: erforderliches Volumen für $\sigma \leq \sigma_{zul}$, $D = 5\%$

6.4 Der Biegeschwinger unter verteilter Belastung

Ein beidseitig gelenkig gelagerter Stab wird durch eine verteilte Querbelastung zu Schwingungen angeregt:



Mit

$$q_0 = \frac{C}{\sqrt{2\omega_F}} \quad (6.24)$$

gilt hier

$$\bar{\sigma} = \frac{1^2}{B H_0^2} q_0 \quad (6.25)$$

$$\sigma^* = \frac{1^2}{B H_0^2} \sqrt{\omega} \frac{C}{\omega_F} \quad (6.26)$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{q_0}{B \sigma_{zul}}} \sqrt{\frac{E}{\rho l^2}} \quad (6.27)$$

$$\tilde{V} = 1^2 \sqrt{\frac{B q_0}{\sigma_{zul}}} \quad (6.28)$$

Das statische Optimum ist

$$H(\xi) = \frac{8}{\pi} \sqrt{0,25 - \xi^2} H_0 \quad (6.29)$$

$$\sigma(\xi) = 3 \left(\frac{\pi}{8}\right)^2 \bar{\sigma} \quad (6.30)$$

Die Ergebnisse sind hier mit einem zusätzlichen Fehler behaftet, da die kontinuierliche Querbelastung zu Einzelkräften an den Knoten diskretisiert wird.

Bei allen Filterfrequenzen und beliebigen Anfangsquerschnittsverläufen liefert das Iterationsverfahren einen symmetrischen Verlauf des Stabes gleicher Festigkeit, der auch die Optimalitätsbedingungen erfüllt.

Durch Berücksichtigung der Symmetrie kann bei gleicher Rechenzeit die Genauigkeit etwa verdoppelt werden.

Der Einfluß von Filterfrequenz und Dämpfung ist hier so gering (Abb. 22 und 23), daß bereits der statisch optimale Verlauf eine sehr gute Näherung für das Optimum ergibt (Abb. 24 - 26).

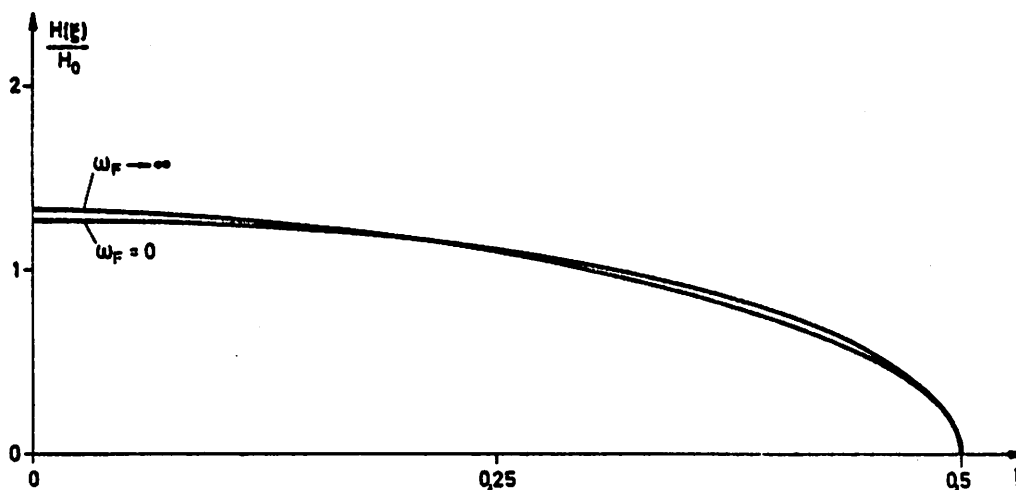


Abb. 22: Querschnittsverläufe, $\sigma = \text{konst.}$, $D = 5\%$

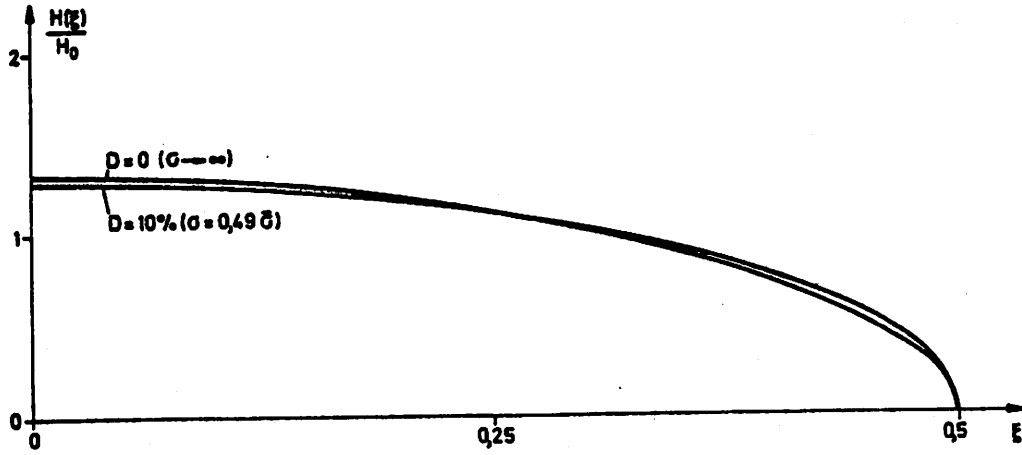


Abb. 23: Querschnittsverläufe, $\sigma = \text{konst.}$, $\omega_F = 0,1\bar{\omega}$

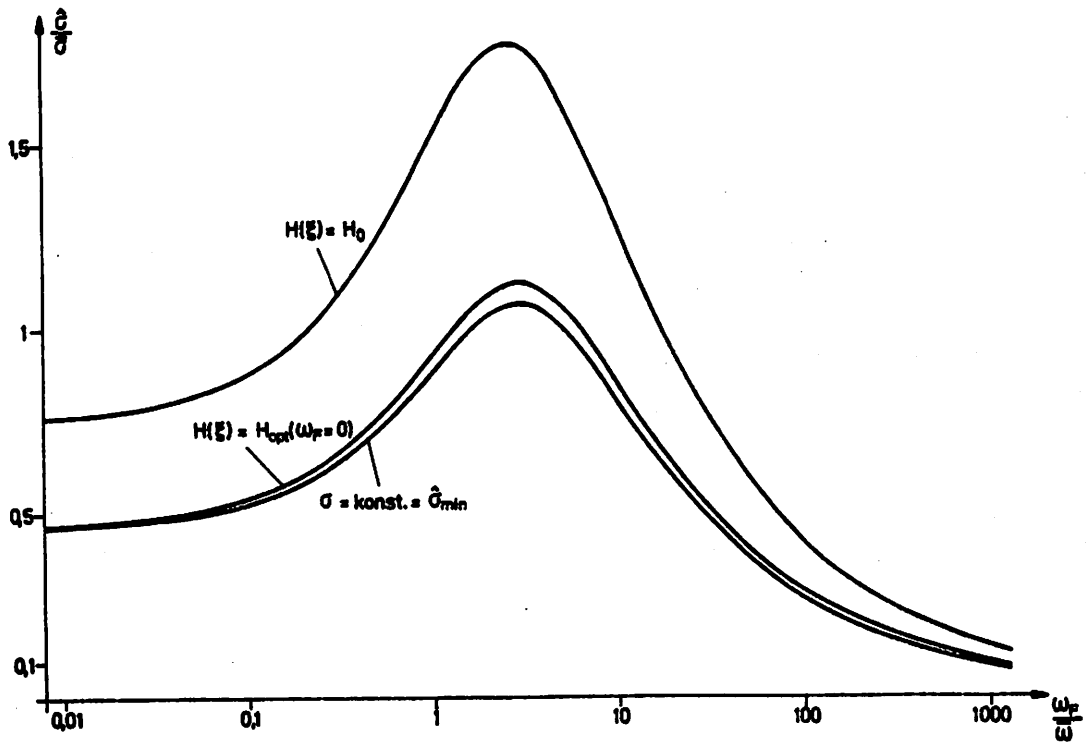


Abb. 24: max. Standardabw. der Spannungen $[\hat{\sigma}]$, $D = 5\%$

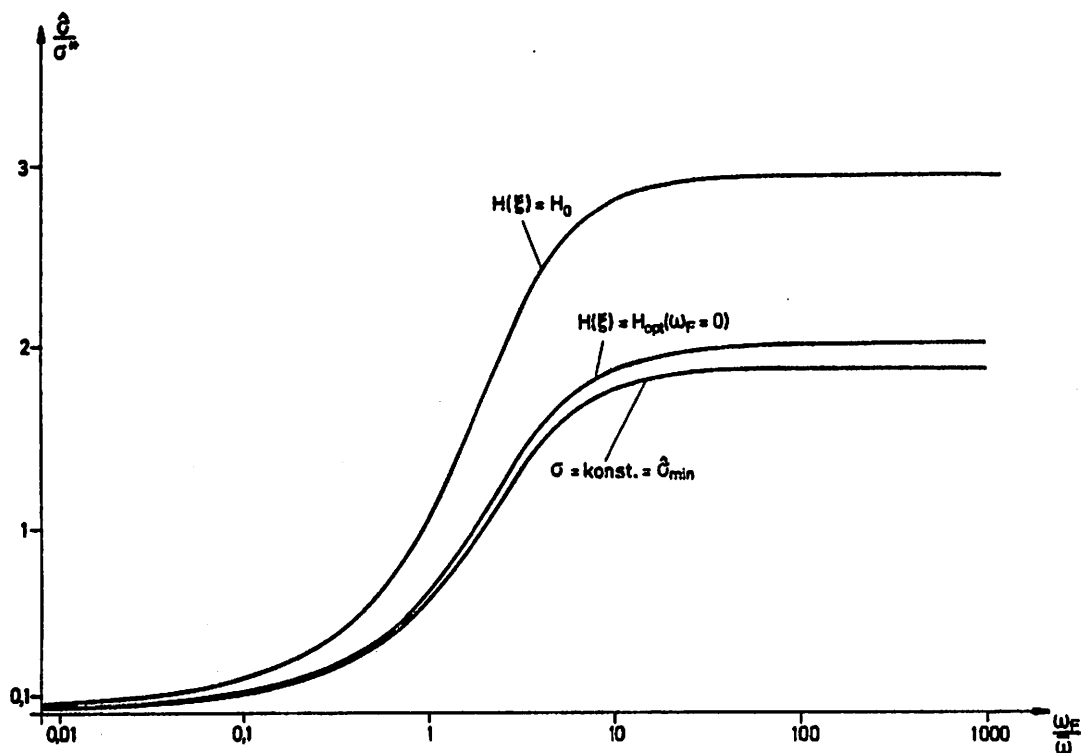


Abb. 25: max. Standardabw. der Spannungen $[\sigma^*]$, $D = 5\%$

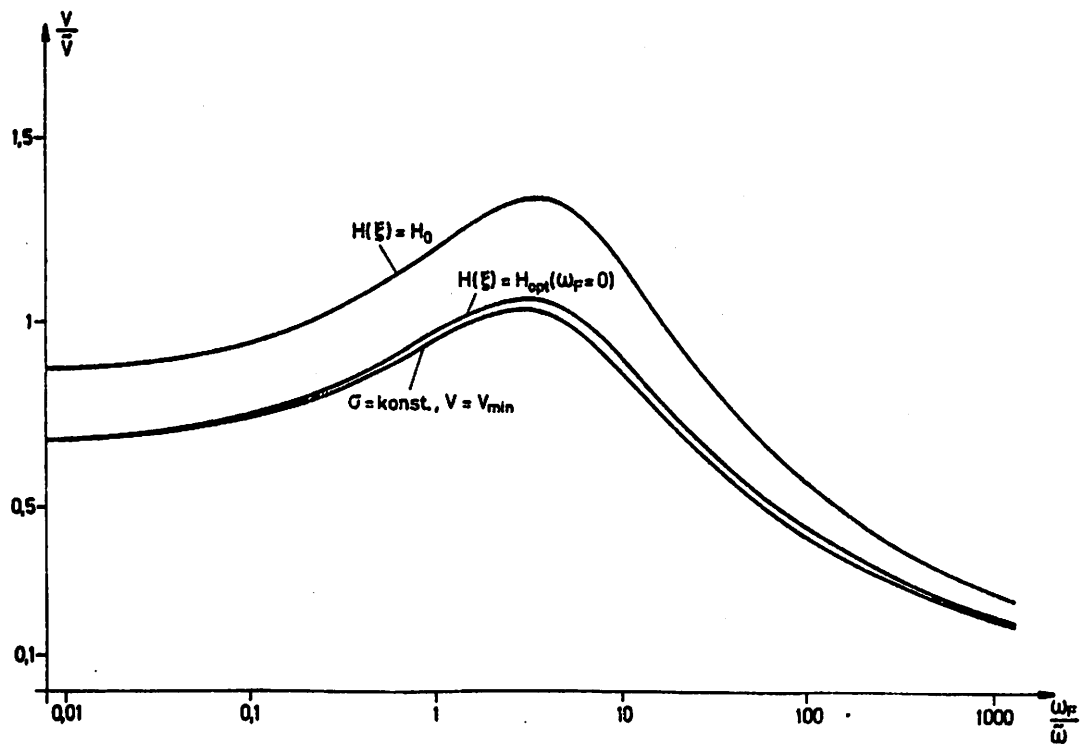
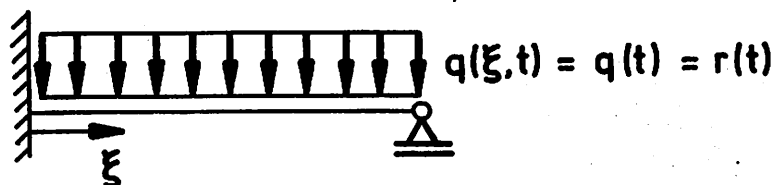


Abb. 26: erforderliches Volumen für $\sigma \leq \sigma_{zul}$, $D = 5\%$

6.5 Der statisch unbestimmte Biegeschwinger

Der Stab von Beispiel 4 wird durch eine Einspannung des linken Endes statisch unbestimmt:



Die Beziehungen (6.24) - (6.28) bleiben hier gültig. Für $\omega_F = 0$ erhält man den Stab gleicher Festigkeit, der auch die Optimalitätsbedingungen erfüllt: mit

$$a = 0,3451 \quad (6.31)$$

$$H(\xi) = 2 \sqrt{\left| (1 - \xi) \left(1 - \frac{1}{a}\xi \right) \right|} H_0 \quad (6.32)$$

$$\sigma(\xi) = 0,75 a \bar{\sigma} \quad (6.33)$$

Bei der Iteration zur Ermittlung des Stabes gleicher Festigkeit treten numerische Schwierigkeiten auf, weil die Standardabweichungen des Biegemomentes einen Nulldurchgang haben.

Da an dieser Stelle auch der Querschnitt verschwinden muß, beschreibt das normale Ersatzträgheitsmoment (5.16) dort die Steifigkeit des Stabes zu schlecht. Das führt dazu, daß die Iteration bereits bei $\omega_F = 0$ in Abhängigkeit vom gewählten Anfangsquerschnittsverlauf gegen unterschiedliche Querschnitte konvergiert - und zwar mit einem durchschnittlichen relativen Fehler gegenüber dem exakten Verlauf von bis zu 10%.

Die einfachste Lösung wäre hier, von der ursprünglichen Aufgabenstellung etwas abzugehen und einen Mindestquerschnitt $H_{\min} \leq H(\xi)$ vorzuschreiben, was ja auch aus konstruktiven Gründen sinnvoll ist.

Eine andere Möglichkeit - ohne die Einschränkung der geänderten Aufgabenstellung - ist die Wahl eines besseren Ersatzträgheitsmomentes nach (5.18) für die Elemente links und rechts vom Momentennulldurchgang.

Das Problem hierbei ist, daß diese Stelle nicht vor jedem Iterationsschritt bekannt ist.

Das kann man aber erreichen durch die Einführung eines Gelenkes, das dann so lange verschoben wird, bis die Standardabweichung der Relativverdrehung des Gelenkes verschwindet. Dieses Vorgehen erfordert natürlich eine zusätzliche Iteration, es konvergiert aber bei allen gerechneten Filterfrequenzen ($D = 5\%$) und für beliebige Anfangsquerschnitte gegen einen eindeutigen Stab gleicher Festigkeit, der auch optimal ist (Abb. 27).

Die Tabelle zeigt den Erfolg der Optimierung gegenüber dem Stab mit konstantem Querschnitt.

Mit dem statisch optimalen Stab - dann allerdings mit einem festen Gelenk an der Stelle $\xi = a$ - lassen sich gegenüber $H(\xi) = H_0$ Verbesserungen von mindestens 44% (bei $\omega_F \rightarrow \infty$) erzielen.

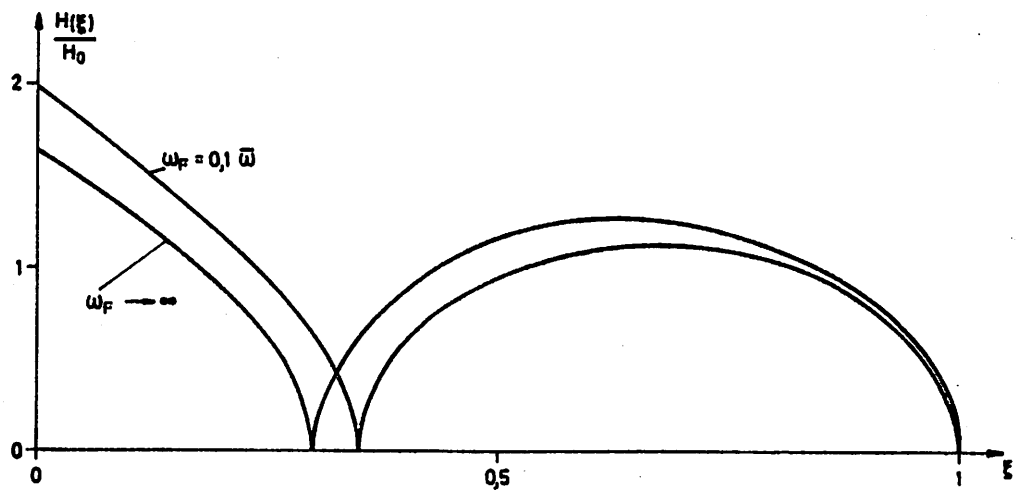


Abb. 27: Querschnittsverläufe, $\sigma = \text{konst.}$, $D = 5\%$

| $\omega_F/\bar{\omega}$ | $\sigma_1 = \hat{\sigma}(H(\xi) = H_0)$ | | $\sigma_2 = \text{konst} = \hat{\sigma}_{\min}$ | | $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} / 0/0$ |
|-------------------------|---|-------|---|-------|--|
| | /σ | /σ* | /σ | /σ* | |
| 0 | 0,750 | 0 | 0,259 | 0 | 65,5 |
| 0,1 | 0,804 | 0,180 | 0,279 | 0,062 | 65,3 |
| 1 | 1,148 | 0,812 | 0,430 | 0,304 | 62,6 |
| 10 | 1,213 | 2,712 | 0,541 | 1,209 | 55,4 |
| → ∞ | 0 | 2,998 | 0 | 1,418 | 52,7 |

Tabelle: max. Standardabw. der Spannungen, $D = 5\%$

7. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Iterationsverfahren vorgestellt, mit dem Querschnittsverläufe von diskretisierten Stäben unter zufälliger Erregung so bemessen werden können, daß bei vorgegebenem Volumen die größte Standardabweichung der Spannungen minimal wird.

Der wesentliche Rechenaufwand bei der Optimierung besteht in der Ermittlung der Standardabweichungen der Spannungen bei vorgegebenem Querschnittsverlauf. Unter der Voraussetzung modaler Dämpfung kann diese Rechenzeit mit dem vorgeschlagenen Verfahren zur Lösung der Ljapunov-Gleichung erheblich reduziert werden.

Zur Lösung der nichtlinearen Optimierungsaufgabe wird zunächst iterativ der Stab gleicher Festigkeit bestimmt. In vielen Fällen - bei niedrigen Filterfrequenzen immer - ist dieser bereits optimal.

Die Standardabweichungen der Spannungen werden durch die Dämpfung sehr stark beeinflusst - sie sind bei hohen Filterfrequenzen ungefähr proportional zu $\frac{1}{\sqrt{D}}$. Andererseits bewirken unterschiedliche Dämpfungen i. a. nur geringe Änderungen bei den Querschnittsverläufen gleicher Festigkeit, wobei der größte Einfluß bei kleinen Filterfrequenzen liegt.

Eine weitere Verringerung der Standardabweichungen der Spannungen ist möglich bei angreifenden Einzelkräften und großen Filterfrequenzen durch den Stab gleicher Festigkeit mit optimaler Einzelmasse an der Kraftangriffsstelle.

Die mit Hilfe der linearen Programmierung optimierten Stäbe haben alle Materialanhäufungen in gewissen Bereichen, wo dann die im restlichen Stab konstante Standardabweichung der Spannungen unterschritten wird.

Die Optimierung der gewählten Beispiele zeigt, daß gegenüber dem Stab mit konstantem Querschnitt die entscheidende Verbesserung von durchschnittlich etwa 50% durch den Stab gleicher Festigkeit (eventuell mit Einzelmasse) zu erzielen ist.

Eine besonders bei niedrigen Filterfrequenzen brauchbare Näherung hierfür erhält man häufig bereits durch den statisch optimierten Stab.

Dagegen ist es eine wesentliche Erkenntnis dieser Arbeit, daß die durch die eigentliche Optimierung erreichbaren Verbesserungen gegenüber dem Stab gleicher Festigkeit nur sehr gering sind, sodaß sich der hierzu erforderliche hohe Rechenaufwand nicht lohnt.

Literaturverzeichnis

- [1] Wasiutyński, Z. and Brandt, A.
"The present state of knowledge in the field of optimum design of structures"
Appl. Mech. Rev., Vol. 16 (1963), S. 341 - 350
- [2] Sheu, C. Y. and Prager, W.
"Recent developments in optimal structural design"
Appl. Mech. Rev., Vol. 21 (1968), S. 985 - 992
- [3] Niordson, F. I. and Pedersen, P.
"A review of optimal structural design"
Proc. 13th Congr. Theoret. Appl. Mech.
Held: Moscow 1972
Springer, Berlin, 1973
- [4] Ullenboom, W.
"Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung"
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 11
Ruhr-Universität Bochum, 1977
- [5] Lauert, H. A.
"Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen"
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 15
Ruhr-Universität Bochum, 1979
- [6] Moses, F.
"Approaches to structural reliability and optimization"
SM Study No. 1, Solid Mechanics Division
University of Waterloo, 1969, S. 81 - 120

- [7] Ghista, D. N.
"Structural optimization with probability of failure constraint"
NASA, Techn. Note D-3777, 1966

- [8] Khachaturian, N. and Haider, G. S.
"Probabilistic design of determinate structures"
Proc. Specialty Conference, ASCE
New York, 1966, S. 623 - 647

- [9] Parimi, S. R. and Cohn, M. Z.
"Optimal criteria in probabilistic structural design"
Proc. IUTAM Symp. on Optim. Struct. Design
Held: Warsaw 1973
Springer, Berlin, 1975

- [10] Crandall, S. H.
"Random vibration"
Appl. Mech. Rev., Vol. 12 (1959), S. 739 - 742

- [11] Lin, Y. K.
"Random processes"
Appl. Mech. Rev., Vol. 22 (1969), S. 825 - 831

- [12] Vanmarcke, E. H.
"Some recent developments in random vibration"
Appl. Mech. Rev., Vol. 32 (1979), S. 1197 - 1202

- [13] Wonham, W. M.
"Optimal stochastic control"
Automatica, Vol. 5 (1969), S. 113 - 118

- [14] Dahlberg, T.
"An optimized speed-controlled suspension of a 2-dof vehicle travelling on a randomly profiled road"
Journal of Sound and Vibration, Vol. 62 (1979),
S. 541 - 546
- [15] Nigam, N. C.
"Structural optimization in random vibration environment"
AIAA Journal, Vol. 10 (1972), S. 551 - 553
- [16] Narayanan, S. and Nigam, N. C.
"Optimum structural design of sheet-stringer panels subjected to jet noise excitation"
Proc. IUTAM Symp. on Stoch. Problems in Dynamics
Held: Southampton 1976
Pitman, London, 1977
- [17] Crandall, S. H. and Mark, W. D.
"Random vibration in mechanical systems"
Academic Press, New York, 1963
- [18] Yang, J.-N. and Shinozuka, M.
"On the first-excursion probability in stationary narrow-band random vibration"
Journal of Appl. Mech., Transactions ASME
Vol. 38 (1971), S. 1017 - 1022
- [19] Vanmarcke, E. H.
"On the distribution of the first-passage time for normal stationary random processes"
Journal of Appl. Mech., Transactions ASME
Vol. 42 (1975), S. 215 - 220

- [20] Arnold, L.
"Stochastische Differentialgleichungen"
Oldenbourg, München, 1973
- [21] Schneeweiss, W. G.
"Zufallsprozesse in dynamischen Systemen"
Springer, Berlin, 1974
- [22] Heinrich, W. und Henning, K.
"Zufallsschwingungen mechanischer Systeme"
Vieweg, Braunschweig, 1978
- [23] Fábíán, L.
"Zufallsschwingungen und ihre Behandlung"
Springer, Berlin, 1973
- [24] Wedig, W.
"Zufallsschwingungen"
VDI-Berichte 221, S. 85 - 97
VDI, Düsseldorf, 1974
- [25] Schiehlen, W.
"Kovarianzanalyse von Zufallsschwingungen"
VDI-Berichte 221, S. 105 - 110
VDI, Düsseldorf, 1974
- [26] Müller, P. C. und Schiehlen, W.
"Lineare Schwingungen"
Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1976
- [27] Goßmann, E.; Krings, W. und Waller, H.
"Numerische Behandlung linearer Tragwerksschwingungen bei deterministischen und stochastischen Erregungen"
KIB-Berichte, Heft 25/26, S. 96 - 117
Ruhr-Universität Bochum, 1976

- [28] Müller, P. C.
"Solution of the matrix equations $A X + X B = - Q$
and $S^T X + X S = - Q^*$ "
SIAM J. Appl. Math., Vol. 18 (1970), S. 682 - 687
- [29] Chen, C. F. and Shieh, L. S.
"A note on expanding $P A + A^T P = - Q$ "
IEEE Trans. Aut. Cont., Vol. 13 (1968), S. 122 - 123
- [30] Smith, R. A.
"Matrix equation $X A + B X = C$ "
SIAM J. Appl. Math., Vol. 16 (1968), S. 198 - 201
- [31] Kreisselmeier, G.
"A solution of the bilinear equation $A Y + Y B = - Q$ "
SIAM J. Appl. Math., Vol. 23 (1972), S. 334 - 338
- [32] Schiehlen, W.
"Zur Untersuchung von Zufallsschwingungen"
ZAMM, Vol. 54 (1974), S. T64 - T65
- [33] Müller, P. C.
"Lineare stationäre Zufallsschwingungen bei
farbigem Rauschen"
ZAMM, Vol. 58 (1978), S. T164 - T 165
- [34] Aoki, M.
"Introduction to optimization techniques"
Macmillan, New York, 1971
- [35] Collatz, L. und Wetterling, W.
"Optimierungsaufgaben"
Springer, Berlin, 1966

- [36] Müller, P. C.; Popp, K. und Schiehlen, W.
"Berechnungsverfahren für stochastische Fahrzeug-
schwingungen"
Ingenieur-Archiv, Vol. 49 (1980), S. 235 - 254

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 22**