



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Berend Fischer

Zur zyklischen,
elastoplastischen Beanspruchung
eines dickwandigen Zylinders bei
endlichen Verzerrungen

Heft Nr. 9



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Meinem Kollegen Georg Zander mit freundlichen
Grüßen überreicht von Berend Fischer

Institut für Mechanik

22.04.1977

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Berend Fischer

**Zur zyklischen, elastoplastischen
Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders
bei endlichen Verzerrungen**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 9

April 1977

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistententätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann danke ich für die Unterstützung und für die Übernahme des Referates, Herrn Prof. Dr.-Ing. O. Bruhns für die Anregung zu diesem Thema und die Übernahme des Korreferates sowie Herrn Dr.-Ing. K. Thermann für wertvolle Anregungen.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Otto Bruhns

Tag der Einreichung: 24.11.1976

Tag der mündlichen Prüfung: 31. 1.1977

© 1977 Dr.-Ing. Berend Fischer

Hustadtring 151 XI, 4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit soll ein dickwandiger Zylinder zyklischen, elastoplastischen Beanspruchungen unterworfen werden. Die Beanspruchung wird durch zyklisch wechselnde Innenbelastung oder Außenrandverschiebung verursacht. Mit der Theorie für endliche Verzerrungen gelingt es, sämtliche Spannungs- und Formänderungswerte des Problems für lineare, isotrope Werkstoffverfestigung zu ermitteln. Besondere Aufmerksamkeit wird der Fließgrenze nach der Entlastung im zweiten Halbzyklus gewidmet. Eine Variante der zyklischen Beanspruchung ist die, bei der die resultierende Normalkraft in Axialrichtung verschwindet. Das sekundäre Fließen wird für alle Verfestigungsmoduli und Radienverhältnisse bei kleinen Verzerrungen untersucht.

Summary

Paper deals with large elasto-plastic deformations of a thick-walled cylinder under cyclically varying internal pressure. Both deformations- and stress cycles are investigated. A theory is presented, which gives the complete solution of stresses and deformations for a material with linear isotropic workhardening. Special consideration is given to the yield point after unloading in the second half-cycle. It is assumed that in axial direction either the strain or the resulting normal force vanish. Secondary yielding in the case of small deformations will be investigated for all moduli of workhardening and for all ratios of diameters.

Inhaltsverzeichnis

<u>Bezeichnungen</u>	4
1. <u>Einführung</u>	7
2. <u>Stoffunabhängige Grundlagen</u>	
2.1 Koordinatensystem	11
2.2 Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit und Verzerrungstensor	13
2.3 Spannungstensor	15
2.4 Gleichgewichtsbedingung	15
3. <u>Stoffgesetze</u>	
3.1 Allgemeines	16
3.2 Elastische Formänderungen	16
3.3 Plastische Formänderungen	
3.3.1 Allgemeines	17
3.3.2 Fließbedingung	18
3.3.3 Formänderungsgesetz	21
3.4 Elastoplastische Formänderungen	21
4. <u>Geometrische Untersuchungen</u>	
4.1 Allgemeines	22
4.2 Transformationsmatrizen und Metriktensoren	24
4.3 Verzerrungstensor und Verzerrungs- geschwindigkeitstensor	25
4.4 Christoffelsymbole	26
4.5 Gleichgewichtsbedingung	26
5. <u>Elastoplastische, zyklische Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders</u>	
5.1 Elastische Formänderungen	27
5.2 Plastische Formänderungen	
5.2.1 Allgemeines	28
5.2.2 Fließbedingung	29

5.2.3 Isotrope Werkstoffverfestigung	30
5.2.4 Plastische Formänderungen	31
5.3 Elastoplastische Formänderungen	32
5.4 Differentialgleichungen für zyklische Beanspruchungen	
5.4.1 Allgemeines	33
5.4.2 Differentialgleichungen im elastischen Bereich	39
5.4.3 Differentialgleichungen im elastoplastischen Bereich	40
5.5 Rand- und Übergangsbedingungen	41
6. <u>Numerische Lösung der Differentialgleichungen</u>	42
7. <u>Ergebnisse</u>	
7.1 Allgemeines	45
7.2 Einige Bemerkungen zum 1. und 2. Halbzyklus	46
7.3 Verschiebungszyklen	
7.3.1 Spannungsverteilung	52
7.3.2 Restspannungen	61
7.3.3 Axialkraft N_3	65
7.3.4 Verschiebungen	68
7.3.5 Last-Verformungsdiagramm	68
7.3.6 Dickenänderung	74
7.4 Spannungszyklen	
7.4.1 Spannungsverteilung	74
7.4.2 Restspannungen	84
7.4.3 Axialkraft N_3	87
7.4.4 Verschiebungen	87
7.4.5 Last-Verformungsdiagramm	87
7.4.6 Dickenänderung	93
8. <u>Dickwandiger Zylinder ohne Normalkraft in Axialrichtung</u>	
8.1 Allgemeines	93
8.2 Differentialgleichungen für zyklische Beanspruchung	94

8.3 Ergebnisse	97
9. <u>Sekundäres Fließen im 2. Halbzyklus</u>	102
<u>Zusammenfassung</u>	113
<u>Literaturverzeichnis</u>	115

Bezeichnungen

X^a	Raumfeste Koordinaten
ϑ^k	Körperfeste Koordinaten
γ^a	Zylinderkoordinaten
t	Zeit
\vec{r}	Ortsvektor
\underline{e}_a	Basisvektoren des raumfesten KS
\underline{g}_k	Basisvektoren des körperfesten KS
g_{ik}	Metriktensor
δ_k^i	Kroneckerdelta
Γ_{kl}^i	Christoffelsymbole zweiter Art
g	Determinante des Metriktensors
v^i	Körperpunktgeschwindigkeit gegen raumfestes KS
E_k^i	Verzerrungstensor
d_k^i	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
G_k^i	Spannungstensor, körperbezogen
\mathcal{N}_k^i	Spannungsdeviator, körperbezogen

$\sigma_{(r)}^{(i)}$	Physikalische Spannung
\bar{p}	Hydrostatischer Druck
T_i	Invarianten des Spannungsdeviators
F	Plastizitätsbedingung
h	Verfestigungsfunktion
w	Plastische Arbeit
σ	Spannung im Zugversuch
ϵ	Natürliche Dehnung im Zugversuch
λ	Proportionalitätsgröße im Stoffgesetz
ρ	Radialspannung am Zylinderinnenrand
σ_0	Fließspannung
u	Verschiebung
l	Zylinderlänge
n	Zykluszahl
V	Volumen
G	Gleitmodul
E	Elastizitätsmodul
K	Kompressionsmodul
B	Plastizitätsmodul

ν	Querkontraktionszahl
ρ	Massendichte
$() _0$	Kovariante Ableitung nach der Zeit
$(\dot{})$	Substantielle Ableitung nach der Zeit
$() _i$	Kovariante Ableitung nach der Körper- koordinate
$()_{,i}$	Partielle Ableitung nach der Körper- koordinate
$()'$	Partielle Ableitung nach $\vartheta^1 = \vartheta$
$()^+$	Partielle Ableitung nach ϑ^3
$(\overset{\circ}{})$	Tensor bezogen auf den Ausgangszustand
$(\overline{})$	Größe, die die Fließgrenze erreicht hat
$(\bar{})$	Größe am Anfang oder Ende eines Halbzyklusses

1. Einführung

Seit über hundert Jahren wird das Problem des dickwandigen Zylinders wegen seiner vielfältigen Anwendung in der Technik sowohl theoretisch als auch praktisch intensiv bearbeitet. Im Jahre 1866 gibt Lamé [1] für einen an den Enden geschlossenen Zylinder eine erste geschlossene Lösung bei kleinen, elastischen Verzerrungen an. Der Zylinder steht dabei unter Innen- und Außendruck.

Zu den ersten Arbeiten über den elastoplastischen Zustand eines dickwandigen Zylinders gehören die Untersuchungen von Turner [2] am Anfang dieses Jahrhunderts. Turner wendet die Fließhypothese von Tresca an. Der Werkstoff ist inkompressibel. Später berechnet Nádai [3] die Axialspannungsverteilung für einen ebenen Verzerrungszustand. Dabei vernachlässigt er die elastischen Anteile der Verzerrungen im elastoplastischen Bereich des unter Innendruck stehenden Zylinders.

Die Untersuchungen von Cook [4], der mit der Trescaschen Fließspannungshypothese und der finiten Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Hencky [5] arbeitet, gehen von der Annahme aus, daß die Axialspannungsverteilung über den Querschnitt konstant sei. Die ersten vollständigen Lösungen, die die Kompressibilität des Werkstoffes, verbunden mit der von Misesschen Fließbedingung und der finiten Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Hencky-Iljushin berücksichtigen, stammen von Belayev und Sinitskij [6] und von Sokolovskij [7]. Dabei nimmt Sokolovskij eine Werkstoffverfestigung an.

Die folgenden Arbeiten unterscheiden sich von [6] und [7] entweder im elastoplastischen Bereich und in der Verfestigung oder durch die Lösungsart, geschlossene oder numerische Lösung, und durch die Zylinderend-

bedingungen. Allen und Sopwith [8], Steele [9] und MacGregor, Coffin und Fisher [10] bevorzugen die finite Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Hencky. In [8] und [9] wird die Fließbedingung von Tresca benutzt. Steele berücksichtigt ferner eine Werkstoffverfestigung, während MacGregor und Mitarbeiter mit dem v. Misesschen Fließkriterium arbeiten. Allen und Sopwith geben geschlossene Lösungen für alle drei wichtigen Endbedingungen, wie

- a) ebenen Deformationszustand ($\epsilon_z = 0$),
- b) ebenen Spannungszustand ($\sigma_z = 0$, offener Zylinder) und
- c) geschlossenes Zylinderende

an. Steele legt geschlossene Lösungen für die Endbedingungen b und c vor, ohne jedoch die elastischen Anteile im plastischen Bereich zu berücksichtigen. Eine numerische Lösung legen MacGregor und Mitarbeiter für die Endbedingung b vor, ohne die elastischen Anteile im plastischen Bereich zu vernachlässigen.

Einen anderen Weg, der hauptsächlich numerische Lösungen liefert, gehen Hill, Lee und Tupper [11], [12], Hill [13] sowie Hodge und White [14], indem sie an die Stelle des finiten Spannungs-Dehnungs-Gesetzes von Hencky die inkrementelle Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Prandtl-Reuß [15], [16] setzen. Hill und Mitarbeiter benutzen die Trescasche Fließbedingung mit der Endbedingung a bzw. c. Hodge und White arbeiten mit einem ebenen Deformationszustand und gebrauchen das v. Misessche Fließkriterium, das auf partielle Differentialgleichungen führt, die ebenso wie die Gleichungen in [11] bis [13] numerisch gelöst werden.

Eine Arbeit, die die v. Misessche Fließhypothese und die inkrementelle Spannungs-Dehnungs-Beziehung für kleine Verformungen nutzt, stammt von Chu [17]. In den numerischen Lösungen sind die Werkstoffverfestigung

und alle drei möglichen Endbedingungen für einen dickwandigen Zylinder berücksichtigt.

Koiter [18] gebraucht die Fließbedingung von Tresca und die mit ihr verbundene Normalitätsregel. Außerdem rechnet Koiter mit inkompressiblem Stoffverhalten, das zu einfacheren Lösungen führt. Die Lösungen für die Spannungen und Dehnungen stimmen allgemein gut mit denen von Hill und Mitarbeitern überein, ausgenommen davon sind allerdings die Spannung und die Dehnung in Axialrichtung.

Mit den vorliegenden Arbeiten hat das Problem des dickwandigen Zylinders einen gewissen Abschluß gefunden. Die zuvor genannten Arbeiten beschränken sich auf kleine Verzerrungen. Celep [19] beschreibt den Zylinder unter großen Verformungen.

Zu den zyklischen Prozessen ist folgendes zu sagen: Das Problem der zyklischen Beanspruchung wird um 1950 von Swift [20] und später von Ronay [21], [22] bearbeitet. Es werden Effekte zweiter Ordnung untersucht. Es handelt sich hier um den Poynting-Effekt, einer Längenänderung tordierter Stäbe.

Weiter seien die Arbeit von Mróz [23], der mit einem allgemeineren Verfestigungsmodell einen Körper unter stationärem Zug mit alternierender Torsion untersucht, sowie die Arbeit von Bruhns [24] genannt, der ein spezielles elastisch-plastisches Stoffgesetz annimmt. Dabei erlaubt die Fließbedingung sowohl eine isotrope als auch eine kinematische Arbeitsverfestigung. Mit diesem allgemeinen, nichtlinearen Verfestigungsansatz lassen sich zyklische Formänderungsprozesse mit realem Werkstoffverhalten beschreiben.

Mioduchowski und Thermann [25] untersuchen die zyklische Torsion eines Kreiszylinders bei endlichen Verzerrungen. Für die plastische Deformation wird die Theorie des plastischen Potentials mit der v. Misesschen Fließbedingung bei isotrop linearer Werkstoffverfestigung zugrundegelegt. Auch hier läßt sich ein Poynting-Effekt bei Berücksichtigung des elastischen Deformationsgeschwindigkeitsanteils nachweisen.

Die theoretischen und experimentellen Untersuchungen von Lücke [26] zur zyklischen, elastoplastischen Blechbiegung dienen dem Ziel, die Effektivität verschiedener Stoffgesetze zu vergleichen.

In der hier vorliegenden Arbeit soll ein elastoplastisch beanspruchter, dickwandiger Zylinder bei endlichen Verzerrungen mit einem ebenen Deformationszustand und der daraus resultierenden Längsbeanspruchung an den Zylinderenden durch Innendruck bzw. -zug zyklisch belastet werden. In einer weiteren Untersuchung wird die Kraft N_z in Axialrichtung durch geeignete Steuerung der Dehnung in Axialrichtung auf Null reduziert. Die Untersuchungen sollen an folgende Voraussetzungen geknüpft sein:

1. Der Werkstoff sei homogen und isotrop und behalte diese Eigenschaften während der Verformungsvorgänge bei.
2. Der Werkstoff sei kompressibel für elastische und inkompressibel für plastische Formänderungen.
3. Im elastischen Bereich soll das Hookesche Spannungs-Dehnungs-Gesetz gelten. Im plastischen Bereich soll der Zylinder sich isotrop, linear verfestigen. Die Verzerrungsgeschwindigkeit genüge der Normalenregel:

$$d_k^i = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial G_k^i}$$

Als Fließbedingung sei die Trescasche Fließbedingung angewandt.

4. Es soll ein ebener Verzerrungszustand vorliegen.
5. Die Formänderungen sollen sich am Zylinder so langsam vollziehen, daß keine Trägheitskräfte wirksam werden.
6. Die Formänderungen sollen isotherm sein.

Diese einschränkenden Annahmen werden in den folgenden Kapiteln noch weiter diskutiert werden. Im Kapitel 2 werden die bekannten stoffunabhängigen Grundlagen der Kontinuumsmechanik, die für diese Arbeit benötigt werden, erläutert, und in Kapitel 3 werden die Stoffgesetze eingeführt. Es folgen im Kapitel 4 die geometrischen Untersuchungen. Aus diesen Grundlagen werden im Kapitel 5 die Differentialgleichungen sowohl für den elastischen als auch für den elastoplastischen Bereich bei zyklischer Beanspruchung des dickwandigen Zylinders entwickelt. Die numerische Lösung der Differentialgleichungen wird in Kapitel 6 beschrieben. Das Kapitel 7 wird den Ergebnissen der zuvor entwickelten Gleichungen gewidmet, während im achten Kapitel der dickwandige Zylinder ohne Normalkraft in Axialrichtung untersucht wird. Das Kapitel 9 dient der Untersuchung von unterschiedlichen Radienverhältnissen und dem Einfluß dieser auf das elastoplastische Verhalten im dickwandigen Zylinder.

2. Stoffunabhängige Grundlagen

2.1 Koordinatensystem

Zur Beschreibung der Deformation eines Körpers führen wir

- a) ein körperfestes Koordinatensystem \mathcal{Y}^k mit

- den Basisvektoren \underline{g}_k und
b) ein raumfestes, kartesisches Koordinatensystem X^a mit den Basisvektoren \underline{e}_a ein*).

Damit lassen sich alle interessierenden Größen entweder im körperfesten Bezugssystem, das sämtliche Verformungen des Körpers mitmacht, oder im raumfesten Koordinatensystem beschreiben.

Die Lage eines materiellen Punktes im Raum wird durch

$$X^a = X^a(\varphi^k, t) \quad (2.1)$$

beschrieben.

Statt der Zeit als Parameter kann auch eine andere Größe, die den Formänderungsvorgang beschreibt, als Parameter verwendet werden.

Die Basisvektoren des körperfesten Koordinatensystems ergeben sich zu

$$\underline{g}_k = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi^k} \quad (2.2)$$

Der Ortsvektor lautet in raumfesten Koordinaten

$$\underline{r} = X^a \underline{e}_a \quad (2.3)$$

Damit erhalten wir den Zusammenhang zwischen den Basisvektoren des körperfesten und des raumfesten Systems zu

$$\underline{g}_k = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \varphi^k} = \frac{\partial X^a}{\partial \varphi^k} \underline{e}_a \quad (2.4)$$

*) Im folgenden beziehen sich lateinische Indizes auf das körperfeste, griechische Indizes auf das raumfeste Koordinatensystem. Die Indizes sollen von 1 bis 3 laufen.

Die Metrikoeffizienten

$$\begin{aligned}
 g_{ik} &= \underline{g}^i \cdot \underline{g}_k \\
 &= \frac{\partial x^d}{\partial \varphi^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \varphi^k} \underline{e}_d \underline{e}_\beta \\
 &= \frac{\partial x^d}{\partial \varphi^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \varphi^k} \delta_{d\beta}
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

bestimmen die Metrik des verformten Körpers. Seine kontravarianten Komponenten werden durch

$$g^{ir} g_{rk} = \delta_k^i
 \tag{2.6}$$

definiert.

2.2 Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit und Verzerrungstensor

Der Gradient des Geschwindigkeitsfeldes $v^i|_k$ für Körperpunkte läßt sich wie bei Lehmann [27] additiv in den Deformator (d_k^i), den wir auch als Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit bezeichnen, als symmetrischen Anteil und in den Rotor (ω_k^i bzw. ω_k^i) als antisymmetrischen Anteil zerlegen.

$$\begin{aligned}
 v^i|_k &= \frac{1}{2} (v^i|_k + v_k|i) + \frac{1}{2} (v^i|_k - v_k|i) \\
 &= d_k^i + \omega_k^i
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit d_k^i läßt sich auch durch die Metrikoeffizienten ausdrücken (Lehmann [28]).

$$d_k^i = \frac{1}{2} g^{i\tau} (\dot{g}_{\tau k}) = -\frac{1}{2} (\dot{g}^{i\tau}) g_{\tau k} \quad (2.8)$$

Der übergesetzte Punkt bedeutet die substantielle Differentiation nach der Zeit bei festgehaltenen Körperkoordinaten g^k .

Nach Lehmann [28] setzen wir die Formänderungsgeschwindigkeit gleich dem substantiellen Differentialquotienten nach der Zeit eines Verzerrungstensors ϵ_k^i .

$$\begin{aligned} d_k^i &= \epsilon_k^i |_0 \\ &= \dot{\epsilon}_k^i + \epsilon_k^m d_m^i - \epsilon_m^i d_k^m \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die letzten beiden Terme von Gleichung (2.9) fallen fort, da die Formänderungen des Zylinders coaxial verlaufen, was bedeutet, daß die Hauptachsen des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors und des Verzerrungstensors übereinstimmen. Wir erhalten damit

$$d_k^i = \dot{\epsilon}_k^i \quad (2.10)$$

Die Gleichung (2.10) läßt sich integrieren, und mit Gleichung (2.8) führt diese Rechnung auf den bekannten logarithmischen Verzerrungstensor

$$\epsilon_k^i = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\dot{g}^{i\tau} g_{\tau k}}{g} \right), \quad (2.11)$$

der von Hencky [29] eingeführt worden ist.

Die Spur dieses Tensors

$$\epsilon_r^r = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\dot{g}}{g} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\dot{V}}{V} \right) \quad (2.12)$$

gibt die Volumenänderung wieder. Die übergesetzte o gibt an, daß sich die Größe im Ausgangszustand befindet. Dabei ist g die Determinante des Metriktensors.

2.3 Spannungstensor

Wegen der einfacheren Invariantenbildung führen wir den Spannungstensor G^i_k gemischtvariant ein. Dieser läßt sich durch Spurbildung in einen Deviator und in einen Kugeltensor

$$G^i_k = \tau^i_k - \bar{\pi} \delta^i_k \quad (2.13)$$

mit $\bar{\pi} = -\frac{1}{3} G^r_r$ aufspalten.

Die Spannungen sind auf das verzerrte, körperfeste Koordinatensystem bezogen. Die physikalischen Komponenten der Spannungen erhalten wir nach [28] zu

$$G^{(i)}_k = \sqrt{\frac{g^{kk}}{g^{ii}}} G^i_k \quad (2.14)$$

Die Maßzahlen des Tensors G^i_k sind demnach in einem Hauptachsensystem gleich ihren physikalischen Komponenten.

$$G^{(i)}_i = G^i_i \quad (i \text{ nicht summiert})$$

2.4 Gleichgewichtsbedingungen

Die drei Bedingungen für das Kräftegleichgewicht am verformten Körperelement sind nach [30]

$$G^i_k |_{,i} = 0 \quad (2.15)$$

Massen- und Volumenkräfte sind in dieser Beziehung nicht enthalten.

Ausgeschrieben lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_{k,i}^i + \Gamma_{im}^i \sigma_k^m - \Gamma_{ki}^m \sigma_m^i = 0, \quad (2.16)$$

Die Christoffelsymbole zweiter Art werden aus den Metrikoeffizienten gebildet.

$$\Gamma_{ik}^m = \frac{1}{2} g^{m\tau} (g_{k\tau,i} + g_{\tau i,k} - g_{ik,\tau}) \quad (2.17)$$

3. Stoffgesetze

3.1 Allgemeines

In Kapitel 2 wurden Grundlagen wie Spannungstensor und Verzerrungstensor formuliert, die stoffunabhängig sind. Das Stoffgesetz soll nun für elastische und elasto-plastische Werkstoffe den Zusammenhang zwischen Spannungen und den kinematischen Größen wie Verzerrungen und Verzerrungsgeschwindigkeiten beschreiben.

3.2 Elastische Formänderungen

Die Beziehung zwischen Spannungen und Verzerrungen im elastischen Bereich sei durch die umkehrbar eindeutige, tensorlineare Beziehung gegeben, die Hencky in [29] entwickelt hat.

$$S_k^i = 2G (\epsilon_k^i - \frac{1}{3} \epsilon_\tau^\tau \delta_k^i) + K \epsilon_\tau^\tau \delta_k^i \quad (3.1)$$

S_k^i ist der Kirchhoffsche Spannungstensor, der sich von dem üblicherweise definierten Spannungstensor G_k^i durch das Stoffdichteverhältnis $\frac{\rho_0}{\rho}$ unterscheidet.

$$S_k^i = \frac{\rho_0}{\rho} G_k^i = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} G_k^i \quad (3.2)$$

Für die Biegung haben Bruhns und Thermann [31] den Kirchhoffschen Spannungstensor S_k^i durch den Tensor G_k^i ersetzt. Der dabei entstandene Fehler ist vernachlässigbar gering. Das Hookesche Spannungs-Dehnungsgesetz lautet dann

$$G_k^i = 2G \left(\varepsilon_k^i - \frac{1}{3} \varepsilon_r^r \delta_k^i \right) + K \varepsilon_r^r \delta_k^i \quad (3.3)$$

Folgender Zusammenhang besteht zwischen den Materialkonstanten in (3.3):

$$K = 2G \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} = E \frac{1}{3(1-2\nu)} \quad (3.4)$$

3.3 Plastische Formänderungen

3.3.1 Allgemeines

Elastische Formänderungen sind durch das elastische Formänderungsgesetz vollständig beschrieben. Allgemein wird das plastische Stoffverhalten durch zwei Beziehungen bestimmt. Diese sind

- a) die Plastizitätsbedingung, bestehend aus der Fließbedingung, dem Verfestigungsgesetz und der Belastungsbedingung sowie
- b) das Formänderungsgesetz.

Die Fließbedingung zeigt als eine Funktion der Spannungen an, wie sich der elastische Bereich gegen den plastischen Bereich abgrenzt. Bei Werkstoffverfestigung und bei idealplastischem Werkstoff läßt sie sich allgemein schreiben als

$$F(G_k^i; \dots) = f(G_k^i; \dots) - k^2 = 0 \quad (3.5)$$

Für idealplastische Werkstoffe ist $k = k_0$ eine Konstante. Bei isotroper Werkstoffverfestigung nehmen wir nach Hill [13] k als eine Funktion der plastischen Arbeit w an (workhardening). Für die Belastungsbedingung gilt

$$\frac{\partial f}{\partial G_k^i} G_k^i \Big|_0 > 0 \quad (3.6)$$

3.3.2 Fließbedingung

Die Fließbedingung kennzeichnet den Beginn des plastischen Fließens. Durch Experimente bestätigt läßt sich sagen, daß die Fließbedingung vom hydrostatischen Spannungszustand unabhängig ist. Das Fließen läßt sich mit Hilfe des Spannungsdeviators (2.13) beschreiben. Mathematisch formuliert bedeutet dieses, daß die allgemeine Fließbedingung für isotrope Werkstoffe lautet

$$F(T_2, T_3) = 0, \quad (3.7)$$

d. h. (3.5) läßt sich als eine Funktion der Invarianten T_2 und T_3 des Spannungsdeviators angeben:

$$F(G_k^i, k^2) = f(T_2, T_3) - k^2 = 0 \quad (3.8)$$

Als Invarianten führen wir ein

$$T_2 = \tau_k^i \tau_i^k; \quad T_3 = \det(\tau_k^i).$$

In dieser Arbeit soll die Fließbedingung von Tresca angewandt werden. Allgemein formuliert läßt sich die Fließbedingung analog [32] schreiben

$$F(G_k^i, k^2) = \frac{1}{2} T_2^3 - 3 T_3^2 - 9 k^2 T_2^2 + 48 k^4 T_2 - 64 k^2 = 0 \quad (3.9)$$

Im Hauptachsensystem, wie es hier vorliegt, ist es sinnvoller, die Fließbedingung als Funktion der Hauptspannungen zu formulieren.

$$\begin{aligned} & [(\sigma_1^1 - \sigma_2^2)^2 - 4k^2] \cdot [(\sigma_2^2 - \sigma_3^3)^2 - 4k^2] \cdot \\ & [(\sigma_3^3 - \sigma_1^1)^2 - 4k^2] = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aus dieser Gleichung folgern wir, daß während des Fließens eine der Differenzen, nämlich die betragsmäßig größte, den Wert $2k$ annimmt.

Außer der Trescaschen Fließbedingung wäre noch die v. Misessche Fließbedingung zu erörtern, die lautet

$$F(\sigma_k^i, k^2) = T_2 - k^2 = 0 \quad (3.11)$$

Als Funktion der Hauptspannung schreiben wir sie als

$$\begin{aligned} & (\sigma_1^1 - \sigma_2^2)^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^3)^2 + (\sigma_3^3 - \sigma_1^1)^2 \\ & + 3k^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die vorherstehende Fließbedingung würde auf ein wesentlich komplizierteres Stoffgesetz im plastischen Bereich führen, als es bei der Fließbedingung von Tresca der Fall ist. Wie aus Abb. 3-1 zu erkennen ist, ist für den ebenen Verzerrungszustand die Darstellung der Fließkurven von Tresca bzw. von v. Mises stark von der Querkontraktionszahl ν abhängig. Für $\nu = 0.3$ bildet sich in der Spannungsebene $\sigma_1^1 - \sigma_2^2$ für die Fließbedingung von Tresca ein doppeltsymmetrisch verzerrter Polyeder aus, der von der v. Mises-Ellipse umgeben ist. Die Fließkurven stimmen gut überein, so daß wir die Trescasche Fließbedingung wählen können.

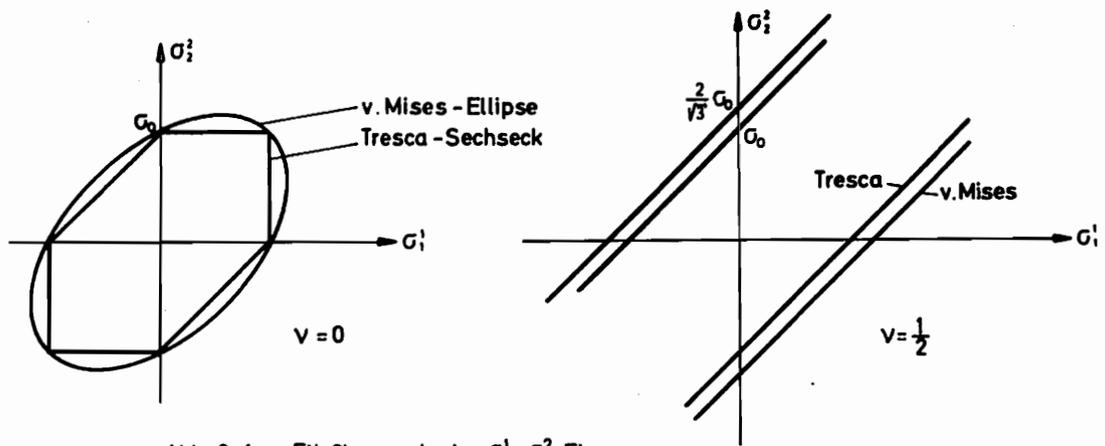


Abb. 3-1 Fließkurven in der σ_1 σ_2 Ebene

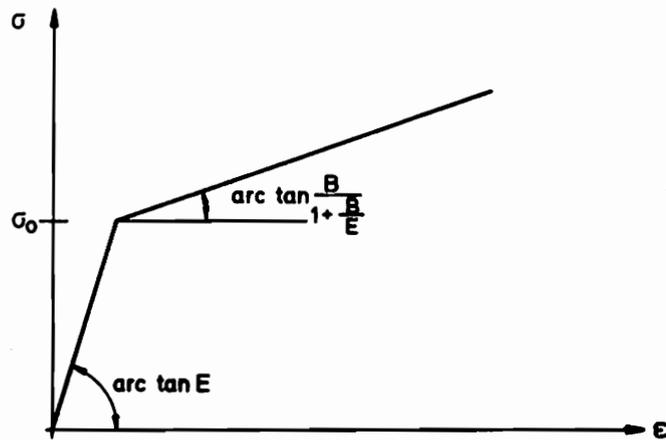


Abb. 3-2 Verfestigung im Zugversuch

Über das bis jetzt noch unbestimmte Verfestigungsgesetz

$$k^2 = k^2(\omega) \quad (3.13)$$

läßt sich sagen, daß dieses über das noch einzuführende Formänderungsgesetz (vgl. Kapitel 3.3.3) dem einaxialen Zugversuch angepaßt wird. Ein linearer Ansatz für den Zugversuch mit σ_0 als Fließspannung wird gewählt.

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{B}(\sigma - \sigma_0); \quad \sigma > \sigma_0 \quad (3.14)$$

(vgl. Abb. 3-2)

3.3.3 Formänderungsgesetz

Für das Formänderungsgesetz erhalten wir unter Zugrundelegung der Theorie des plastischen Potentials

$$d_{nl}^i = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_i^k}; \quad (\dot{\lambda} > 0) \quad (3.15)$$

Die skalarwertige Funktion $\dot{\lambda}$ ist dabei aus der Verfestigung zu bestimmen.

3.4 Elastoplastische Formänderungen

Die Verzerrungsgeschwindigkeit setzt sich bei elastoplastischer Formänderung aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammen (vgl. [32]).

$$d_{nl}^i = d_{el}^i + d_{nl}^i \quad (3.16)$$

d_{el}^i ist durch die Beziehung (3.15) gegeben.

Den elastischen Anteil der Verzerrungsgeschwindigkeit erhalten wir, wenn wir das elastische Stoffgesetz (3.1) in die Differentialform überführen. Für (3.16) können wir, da wir mit koaxialen Formänderungen in einem

Hauptachsensystem arbeiten (und nur dann), schreiben

$$\dot{\epsilon}_k^i = \dot{\epsilon}_{kl}^i + \dot{\epsilon}_{rl}^i \quad (3.17)$$

Für die Entlastungen, die bis zum Eintreten eines erneuten Fließens elastisch verlaufen, lautet die Verzerrungsgeschwindigkeit

$$d_k^i = d_{kl}^i \quad (3.18)$$

4. Geometrische Untersuchungen

4.1 Allgemeines

Wir betrachten einen dickwandigen Zylinder nach Abb. 4-1. Die Verzerrungen des Zylinders werden in einem raum- und in einem körperfesten Koordinatensystem beschrieben.

Bei der Verformung soll die Geometrie des Zylinders folgende drei Bedingungen erfüllen:

- a) Die Radien bleiben gerade.
- b) Ebene Querschnittsflächen bleiben eben.
- c) Die Rotationsachse bleibt unveränderlich, und damit bleiben kreiszylindrische Mantelflächen kreiszylindrisch.

Als raumfestes Koordinatensystem wählen wir ein Zylinderkoordinatensystem

$$y^\alpha = y^1, y^2, y^3 \quad (4.1)$$

Die körperfesten Koordinaten seien zu Beginn der Form-

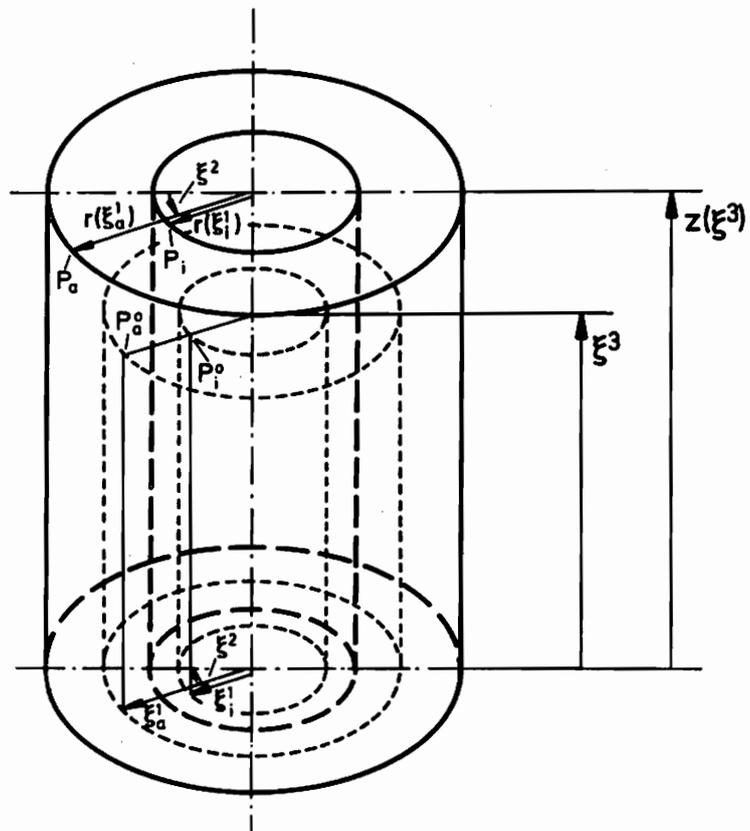


Abb. 4 -1 Koordinatensysteme am unverformten und am verformten dickwandigen Zylinder

änderungen ($t = 0$) mit den raumfesten identisch, d. h.

$$\dot{y}^1 = \dot{y}^1 ; \dot{y}^2 = \dot{y}^2 ; \dot{y}^3 = \dot{y}^3 , \quad (4.2)$$

während im verformten Zustand gilt

$$y^1 = r(y^1) ; y^2 = y^2 ; y^3 = z(y^3). \quad (4.3)$$

4.2 Transformationsmatrizen und Metriktensoren

Die Transformationsmatrizen erhalten wir aus den Transformationsformeln für die Koordinatendifferentiale am verformten Körper zum Zeitpunkt t zu

$$\frac{\partial y^i}{\partial y^k} = \begin{pmatrix} \tau^1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z^+ \end{pmatrix} \quad \frac{\partial y^i}{\partial y^k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau^1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z^+} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } ()' = \frac{\partial}{\partial y^1} () \quad \text{und} \quad ()^+ = \frac{\partial}{\partial y^3} () . \quad (4.4)$$

Mit den raumbezogenen Metriktensoren

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

und den Transformationsmatrizen ergeben sich als körper-

bezogene Metriktensoren

$$g_{ik} = \frac{\partial y^a}{\partial y^i} \frac{\partial y^b}{\partial y^k} g_{ab}$$

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} \tau^{12} & 0 & 0 \\ 0 & \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^{+2} \end{pmatrix} \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau^{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tau^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z^{+2}} \end{pmatrix} .$$

(4.6)

Die Metrik für den unverformten Zustand erhalten wir aus den oben angeschriebenen Matrizen, wenn wir dort

$$\tau = \vartheta^1 ; \quad \tau' = 1 ; \quad z^+ = 1 \quad \text{setzen.}$$

4.3 Verzerrungstensor und Verzerrungsgeschwindigkeitentensor

Der Verzerrungstensor (2.11) verknüpft die Metrik des verformten Bezugssystems mit der des unverformten Systems. Körperbezogen lautet der Verzerrungstensor

$$E_{ik}^i = \frac{1}{2} \ln(\overset{\circ}{g}^{i\tau} g_{\tau k})$$

$$E_{ik}^i = \begin{pmatrix} \ln(\tau') & 0 & 0 \\ 0 & \ln\left(\frac{\tau}{\vartheta}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(z^+) \end{pmatrix} .$$

(4.7)

Der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit ergibt sich körperbezogen zu

$$d_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{i\tau} (\dot{g}_{\tau k}) = -\frac{1}{2} (\dot{g}^{i\tau}) g_{\tau k} \quad (4.8)$$

und lautet damit

$$d_{kl}^i = \begin{pmatrix} \frac{\dot{\tau}^i}{\tau^i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\tau}^i}{\tau^i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{N}^i}{N^i} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

4.4 Christoffelsymbole

Die Christoffelsymbole zweiter Art, die zur Formulierung der Gleichgewichtsbedingung im körperfesten Koordinatensystem benötigt werden, lassen sich nach (2.17) berechnen.

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{\dot{\tau}^1}{\tau^1} \\ \Gamma^1_{22} &= -\frac{\dot{\tau}^1}{\tau^1} \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{\dot{\tau}^1}{\tau^1} \\ \Gamma^3_{33} &= \frac{\dot{N}^{++}}{N^+}, \text{ alle übrigen } \Gamma^i_{kl} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.5 Gleichgewichtsbedingung

Nach (2.15) und (2.16) gilt

$$G_k^i|_i = G_{k,i}^i + \Gamma_{im}^i G_k^m - \Gamma_{ki}^m G_m^i = 0$$

Damit läßt sich das Gleichgewicht in radialer Richtung wie folgt schreiben

$$\sigma_{1,i}^i + \Gamma_{1m}^i \sigma_1^m - \Gamma_{1i}^m \sigma_m^i = 0 \quad (4.11)$$

und mit den Christoffelsymbolen (4.10)

$$\sigma_1^{1'} + (\sigma_1^1 - \sigma_2^2) \frac{r^1}{r} = 0 \quad (4.12)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen in azimuthaler und in axialer Richtung sind identisch erfüllt.

5. Elastoplastische, zyklische Beanspruchungen eines dickwandigen Zylinders

5.1 Elastische Formänderungen

Aus der Verbindung der Formänderungsgrößen (4.7) und (4.9) und der Gleichgewichtsbeziehung (4.12) erhalten wir mit Hilfe des Formänderungsgesetzes ein System von Gleichungen, das in diesem Fall aus gewöhnlichen Differentialgleichungen besteht.

Bei der Auflösung des Gleichungssystems entweder nach den Spannungs- oder nach den Formänderungsgrößen entscheiden wir uns für die Formänderungsgrößen, da bei dem betrachteten ebenen Verzerrungszustand eine Vereinfachung der Differentialgleichungen möglich wird.

Lösen wir das Stoffgesetz (3.3) nach den Verzerrungsgrößen auf, so wird

$$\epsilon_k^i = \frac{1}{2G} \left(\sigma_k^i - \frac{1}{3} \sigma_r^r \delta_k^i \right) + \frac{1}{g_K} \sigma_r^r \delta_k^i \quad (5.1)$$

Die später benötigte differentielle Form des Stoffgesetzes lautet bei den hier betrachteten coaxialen

Formänderungen

$$d_k^i = \frac{1}{2G} \left(\dot{G}_k^i - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{G}_+^+ \delta_k^i \right) \quad (5.2)$$

Durch die Einführung eines ebenen Verzerrungszustandes, d. h.

$$d_3^3 = \dot{\epsilon}_3^3 = 0 \quad (5.3)$$

folgt aus (5.2)

$$\dot{G}_3^3 = \nu (\dot{G}_1^1 + \dot{G}_2^2) \quad (5.4)$$

und das Formänderungsgesetz (5.2) vereinfacht sich damit zu

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1^1 &= \frac{1}{2G} [(1-\nu) \dot{G}_1^1 - \nu \dot{G}_2^2] \\ \dot{\epsilon}_2^2 &= \frac{1}{2G} [(1-\nu) \dot{G}_2^2 - \nu \dot{G}_1^1] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wir bilden von Gleichung (5.5) die Summe und die Differenz

$$(\epsilon_2^2 + \epsilon_1^1)' = \frac{1-2\nu}{2G} (\sigma_2^2 + \sigma_1^1)' \quad (5.6)$$

$$(\epsilon_2^2 - \epsilon_1^1)' = \frac{1}{2G} (\sigma_2^2 - \sigma_1^1)' \quad (5.7)$$

5.2 Plastische Formänderungen

5.2.1 Allgemeines

Die Größe $\dot{\lambda}$ im Formänderungsgesetz (3.15) ist eine positive, skalarwertige Funktion. Sie läßt sich aus der Forderung bestimmen, daß die Plastizitätsbedingung

während der plastischen Deformation stets erfüllt bleibt, das bedingt

$$\dot{F} = 0 \quad (5.8)$$

bzw.

$$\dot{F} = \dot{f} - \frac{dk^2}{dw} \dot{w} = 0 \quad (5.9)$$

Für den Zuwachs der plastischen Arbeit gilt

$$\dot{w} = \tau_{nk}^i \frac{d^i k}{nl} \quad (5.10)$$

Überschieben wir beide Seiten des Stoffgesetzes (3.15) mit τ_{nk}^i , so wird

$$\tau_{nk}^i \frac{d^i k}{nl} = \lambda \tau_{nk}^i \frac{\partial F}{\partial G_i^k} \quad (5.11)$$

Mit (5.9) und (5.10) erhalten wir schließlich

$$\lambda = \frac{\dot{f}}{\frac{dk^2}{dw} \frac{\partial F}{\partial G_i^k} \tau_{nk}^i} \quad (5.12)$$

und das Stoffgesetz (3.15) läßt sich damit schreiben

$$\frac{d^i k}{nl} = \frac{\dot{f}}{\frac{dk^2}{dw} \frac{\partial F}{\partial G_s^r} \tau_{rs}^i} \frac{\partial F}{\partial G_i^k} \quad (5.13)$$

5.2.2 Fließbedingung

In Kapitel 3.3.2 hatten wir die Fließbedingung von Tresca gewählt. Die Fließbedingung ist in der angegebenen Form (3.10) abhängig von den Spannungsebenen. Bei

wachsenden Formänderungen läßt sich die Größenordnung der Spannungen abschätzen.

In dem dickwandigen Zylinder breitet sich vom Innenrand beginnend zum Außenrand hin mit steigender Belastung bzw. Verformung eine elastoplastische Zone aus. Dabei zeigt es sich, daß die Radialspannungen stets negativ und die Azimutalspannungen stets positiv sind, und damit die maximale Spannungsdifferenz darstellt. Eine andere maximale Spannungsdifferenz mit der Axialspannung ist nicht möglich, da diese durch

$$\sigma_3 = \nu (\sigma_1 + \sigma_2)$$

von der Azimutal- und der Radialspannung abhängig ist. Durch vorherstehende Erkenntnis läßt sich die Fließbedingung nach Tresca angeben zu

$$F = (\sigma_2 - \sigma_1) - 4k^2 = 0 \quad (5.14)$$

Da der Parameter k^2 im allgemeinen Falle keine konstante Größe ist, muß dieser noch bestimmt werden.

5.2.3 Isotrope Werkstoffverfestigung

Wie bereits in Kapitel 3.3.1 angegeben, ist die isotrope Werkstoffverfestigung eine Funktion der plastischen Arbeit. Wir wählen einen linearen Ansatz der Form

$$k^2(w) = k_0^2 + 2Bw \quad (5.15)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{dk^2(w)}{dw} = 2B \quad (5.16)$$

Wir wollen nun überprüfen, ob das Stoffgesetz (5.13) in den einachsigen Spannungszustand des Zugversuches ent-

sprechend Gleichung (3.14) übergeht. Aus der Fließbedingung nach Tresca (3.10) erhalten wir für den einachsigen Spannungszustand mit

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma \quad \text{und} \quad \epsilon_1 = \epsilon, \\ \sigma_2 &= \sigma_3 = 0 \quad \text{und} \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0. \end{aligned}$$

Aus dem Stoffgesetz (5.13) läßt sich herleiten

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{B}, \quad (5.17)$$

$$\epsilon_{el} = \frac{\sigma}{E}. \quad (5.18)$$

Somit läßt sich schreiben

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{el} + \dot{\epsilon}_{pl} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\dot{\sigma}}{B}. \quad (5.19)$$

Diese Gleichung läßt sich integrieren

$$\epsilon - \epsilon_0 = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{B} - \frac{\sigma_0}{E} - \frac{\sigma_0}{B}, \quad (5.20)$$

mit $\epsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E}$ vereinfacht sich die Gleichung

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{B} (\sigma - \sigma_0). \quad (5.21)$$

Es ist dasselbe Ergebnis wie das in Gleichung (3.14).

5.2.4 Plastische Formänderungen

Aus Gleichung (5.14) erhalten wir den zur Auswertung benötigten Tensor

$$\frac{\partial F}{\partial G_i^k} = \begin{pmatrix} -2(\sigma_2^2 - \sigma_1) & 0 & 0 \\ 0 & 2(\sigma_2^2 - \sigma_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Mit der Beziehung (5.13) lassen sich die plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten angeben zu

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{pl}^1 &= -\frac{1}{B} (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \cdot \\ \dot{\varepsilon}_{pl}^2 &= \frac{1}{B} (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \cdot \\ \dot{\varepsilon}_{pl}^3 &= 0\end{aligned}\quad (5.23)$$

Zum weiteren läßt sich hier ablesen, daß

$$\dot{\varepsilon}_{pl}^1 = -\dot{\varepsilon}_{pl}^2 \quad (5.24)$$

ist. Dieses Ergebnis stimmt mit der Inkompressibilitätsbedingung überein, die im plastischen Bereich gilt.

5.3 Elastoplastische Formänderungen

Berücksichtigen wir die Gleichung (3.16), so ergeben sich mit den Gleichungen (5.5) und (5.23) für die elastoplastischen Formänderungen

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \frac{1}{2G} [(1-\nu) \dot{\sigma}_1^1 - \nu \dot{\sigma}_2^2] - \frac{1}{B} (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \cdot \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{1}{2G} [(1-\nu) \dot{\sigma}_2^2 - \nu \dot{\sigma}_1^1] + \frac{1}{B} (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \cdot\end{aligned}\quad (5.25)$$

Subtrahieren wir obige Gleichungen, so erhalten wir

$$(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^1) \cdot = \left(\frac{1}{2G} + \frac{2}{B} \right) (\sigma_2^2 - \sigma_1^1) \cdot \quad (5.26)$$

Diese Gleichung gilt für den elastoplastischen Bereich. Wir addieren beide Gleichungen von (5.25) und erhalten

$$(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^1) \cdot = \frac{1-2\nu}{2G} (\sigma_2^2 + \sigma_1^1) \cdot \quad (5.27)$$

Im Vergleich mit Gleichung (5.6) können wir sagen, daß (5.27) stets gilt, also sowohl im elastischen als auch im elastoplastischen Bereich. Während die Gleichung (5.7) nur im elastischen Bereich gültig ist.

5.4 Die Differentialgleichungen für zyklische Beanspruchungen

5.4.1 Allgemeines

Wir betrachten einen Zylinder, der durch Innendruck p beansprucht wird. Vom spannungs- und verzerrungsfreien Zustand aus wird der Innendruck zunächst bis zu einem vorgegebenen Wert p_+ gesteigert. Sodann wird der Innendruck abgebaut, bis der untere vorgegebene Grenzwert p_- erreicht ist. Der Druck soll nun weiter zwischen p_+ und p_- wechseln. Durch je zwei Umkehrpunkte der Belastungsrichtung von p_+ zu p_- wird ein Spannungshalbzyklus definiert.

Wir können Halbzyklen auch definieren, indem wir vorschreiben, daß bestimmte geometrische Größen, etwa die meßtechnisch leicht zu erfassende Außenrandverschiebung u_a , innerhalb vorgegebener Schranken wechseln. Es handelt sich hierbei um einen Verschiebungshalbzyklus.

Zur Beschreibung des Spannungs- und Deformationsverhaltens unter zyklischer Beanspruchung betrachten wir irgendeinen Halbzyklus. Der zu den Grenzwerten des Innendrucks p_+ oder p_- bzw. der Verschiebungen u_{a+} oder u_{a-} gehörende Spannungs- und Verformungszustand zu Beginn des zu untersuchenden Halbzyklusses sei bekannt. Alle Größen dieses Zustandes kennzeichnen wir durch einen Querstrich (siehe Abb. 5-1).

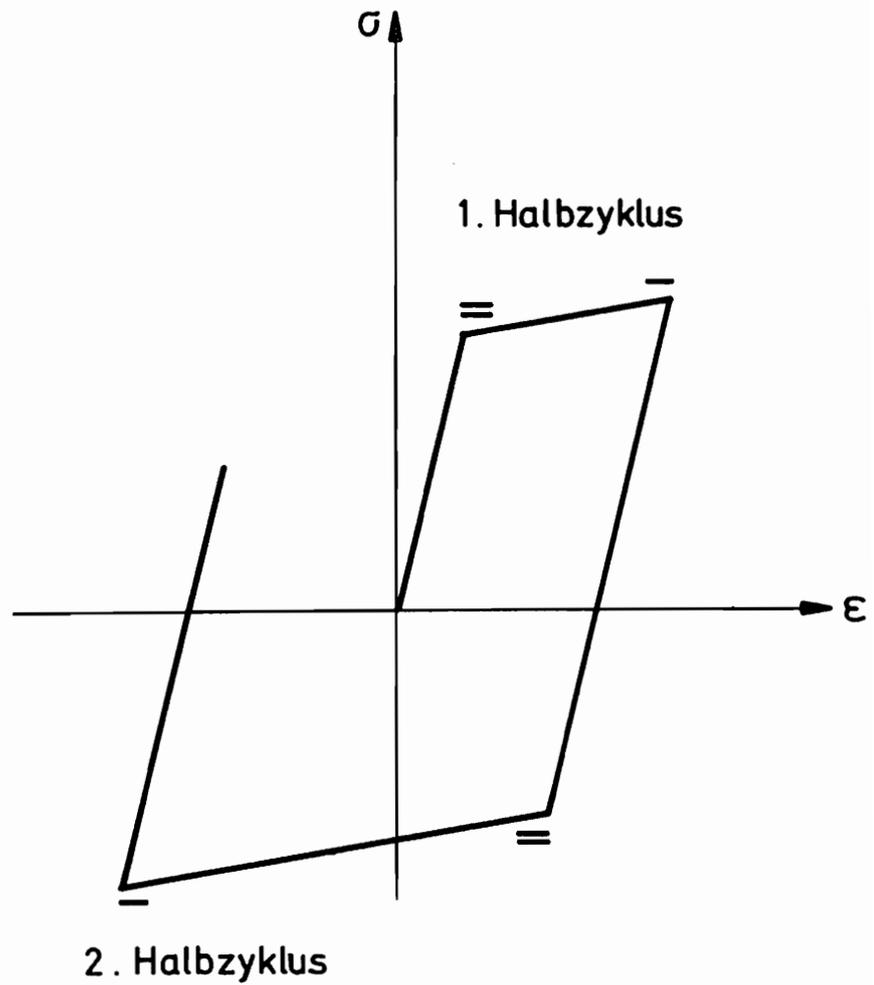


Abb. 5-1 Quergestrichene Größen in den Halbzyklen für eine Faser im elastoplastischen Bereich

Wir denken uns den Zylinder vom Innenrand mit der Körperkoordinate \mathcal{G}_i bis zum Außenrand \mathcal{G}_a in z Fasern unterteilt. Nun greifen wir eine beliebige Faser heraus und beobachten, was im i -ten Halbzyklus mit dieser Faser geschieht. Der Ausgangszustand der Faser ist durch die einfach quergestrichenen Größen, den Endzustand des $(i-1)$ -ten Halbzyklusses, gekennzeichnet, d. h. die Faser befindet sich entweder in einem elastischen oder in einem elastoplastischen Zustand. Die Faser wird nun erneut im i -ten Halbzyklus beansprucht, das bedeutet, daß die Entlastung der Faser wie immer elastisch abläuft. Wird die Beanspruchung mit gewechseltem Vorzeichen weiter gesteigert, kann die Faser die Fließgrenze mit entgegengesetztem Vorzeichen gegenüber dem $(i-1)$ -ten Halbzyklus erreichen oder sie bleibt bis zum Ende des Halbzyklusses elastisch. Hat die Faser die Fließgrenze erreicht, dann werden wir diese Zwischenstation durch doppelt quergestrichene Größen markieren (siehe Abb. 5-1). Die weitere Beanspruchung der Faser verläuft bis zum Halbzyklusende elastoplastisch.

Die einfach und doppelt quergestrichenen Größen stellen gleichzeitig die Übergangsbedingungen für eine mathematische Beschreibung des Formänderungsvorganges dar. Den zuvor beschriebenen Zyklusverlauf mit elastischer oder entlastender Beanspruchung können wir mit dem elastischen Stoffgesetz (5.5) bzw. (5.6) und (5.7) mathematisch beschreiben, wenn wir die Summen und Differenzen über die Zeit integrieren. Solange sich die Faser im elastischen Zustand befindet, gelten

$$\varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^1 - (\bar{\varepsilon}_2^2 - \bar{\varepsilon}_1^1) =$$

$$\frac{1-2\nu}{2G} [\sigma_2^2 + \sigma_1^1 - (\bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_1^1)] \quad (5.28)$$

und

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^1 - (\bar{\varepsilon}_2^2 - \bar{\varepsilon}_1^1) = \\ \frac{1}{2G} [\sigma_2^2 - \sigma_1^1 - (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1)] \end{aligned} \quad (5.29)$$

Die elastoplastische Beanspruchung in einem i-ten Halbzyklus beschreiben wir, indem wir das elastoplastische Stoffgesetz (5.25) bzw. die Summen (5.27) und die Differenzen (5.26) über die Zeit integrieren. Der Anfangszustand einer elastoplastischen Beanspruchung wird mit doppelt quergestrichenen Größen für die Spannungen und Verzerrungen kenntlich gemacht und stellt zugleich das Ende einer elastischen Beanspruchung dar.

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^1 - (\bar{\varepsilon}_2^2 + \bar{\varepsilon}_1^1) = \\ \frac{1-2\nu}{2G} [\sigma_2^2 + \sigma_1^1 - (\bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_1^1)] \end{aligned} \quad (5.30)$$

In der Gleichung (5.30) wie auch in Gleichung (5.27) fehlt jegliches Glied mit dem Plastizitätsmodul B. Darin drückt sich die Inkompressibilität im Plastischen aus, da

$$\varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^3 = 0 \quad (5.31)$$

sein muß. In unserem Fall gilt, da ε_3^3 laut Voraussetzung schon Null ist, daß

$$\varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2 = 0 \quad (5.32)$$

sind.

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^1 - (\bar{\varepsilon}_2^2 - \bar{\varepsilon}_1^1) = \\ \left(\frac{1}{2G} + \frac{2}{B} \right) [\sigma_2^2 - \sigma_1^1 - (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1)] \end{aligned} \quad (5.33)$$

In Gleichung (5.33) wollen wir die doppelt quergestrichenen Größen durch einfach quergestrichene Größen ausdrücken. Dazu betrachten wir eine Faser beim Übergang vom elastischen zum elastoplastischen Zustand. Dann gilt für ihren elastischen Zustand nach Gleichung (5.29)

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_2^2 - \bar{\epsilon}_1^1 - (\bar{\epsilon}_2^2 - \bar{\epsilon}_1^1) = \\ \frac{1}{2G} [\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1 - (\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1)] \end{aligned} \quad (5.34)$$

Gleichung (5.34) nach $(\bar{\epsilon}_2^2 - \bar{\epsilon}_1^1)$ aufgelöst und in Gleichung (5.33) eingesetzt, liefert

$$\begin{aligned} (\epsilon_2^2 - \epsilon_1^1) = (\bar{\epsilon}_2^2 - \bar{\epsilon}_1^1) + \left(\frac{1}{2G} + \frac{2}{B}\right)(\sigma_2^2 - \sigma_1^1) \\ - \frac{2}{B}(\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1) - \frac{1}{2G}(\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Das Ende einer elastischen Deformation ist, wie schon oben gesagt, durch das Erreichen der Fließgrenze gekennzeichnet.

$$(\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1) = \bar{k} \quad (5.36)$$

Für die Fließgrenze gilt

$$a) \quad \bar{k} = -(\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1) \quad (5.37)$$

wenn $|\sigma_2^2 - \sigma_1^1| > k_0$ ist, das bedeutet für eine Faser, die in dem $(i-1)$ -ten Halbzyklus die Fließgrenze erreicht hatte, daß sie im i -ten Halbzyklus wieder zu fließen beginnt, wenn sie die negative Spannungsdifferenz $(\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1)$ betragsmäßig erreicht.

$$b) \quad \bar{k} = -\operatorname{sgn}(\bar{\sigma}_2^2 - \bar{\sigma}_1^1) k_0 \quad (5.38)$$

Dieser Fall tritt zum Beispiel dann ein, wenn eine Faser im $(i-1)$ -ten Halbzyklus noch elastisch war und im i -ten Halbzyklus die Spannungsdifferenz größer oder gleich der Anfangsfließspannung k_0 wird.

Wir stellen fest, daß die Gleichungen (5.28) und (5.30) immer gelten sowohl im elastischen als auch im elastoplastischen Bereich. Nur in der elastischen Zone hat Gleichung (5.29) ihre Gültigkeit, und nur in der elastoplastischen Zone gilt Gleichung (5.35) mit (5.36). Als weitere Gleichung ist die Gleichgewichtsbedingung (4.12) gegeben.

$$\sigma_1^1 + (\sigma_1^1 - \sigma_2^2) \frac{\tau^1}{\tau} = 0 \quad (5.39)$$

Damit benötigen wir sowohl im Elastischen als auch im Elastoplastischen für die Unbekannten σ_1^1 , σ_2^2 , r , ε_1^1 , ε_2^2 jeweils fünf Gleichungen. Für den ersten Halbzyklus sind die einfach quergestrichenen Größen Null, weil der Körper vor Beginn der Beanspruchung keine Eigenspannung und keine Vorverformung haben soll, d. h. der Körper ist spannungs- und dehnungsfrei.

Die vorherstehenden Überlegungen setzen voraus, daß Fasern, die während der einsinnigen Druckänderung innerhalb eines Halbzyklusses erneut plastisch fließen, nicht vor Erreichen des Umkehrpunktes entlastet werden. Dazu ist erforderlich, daß die Belastungsbedingung (3.6), die hier auf

$$[(\sigma_2^2 - \sigma_1^1)^2]^{\cdot} > 0 \quad (5.40)$$

führt, erfüllt bleibt. Dieses bedeutet, daß die Spannungsdifferenz $(\sigma_2^2 - \sigma_1^1)$ innerhalb eines Halbzyklusses positiv ist und monoton wächst oder negativ ist und monoton fällt. Die Einhaltung der Bedingung kann überprüft werden, indem der Innendruck innerhalb eines Halbzyklusses schrittweise geändert wird.

5.4.2 Die Differentialgleichungen für zyklische
Beanspruchungen im elastischen Bereich

Aus Gleichung (5.28) und (5.29) ergibt sich

$$\varepsilon_1^1 = \bar{\varepsilon}_1^1 - \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_2^2 - \bar{\varepsilon}_2^2) + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} (G_1^1 - \bar{G}_1^1) \quad (5.41)$$

Wir ersetzen $\bar{\varepsilon}_1^1$ noch mit Gleichung (5.28) und erhalten nach längerer Zwischenrechnung die erste Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} \tau^1 = \exp \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[\nu \ln \left(\frac{\tau}{\tau} \right) - (1-2\nu) \{ \bar{\varepsilon}_2^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2G} [G_1^1 + (1-\nu)\bar{G}_2^2 - \nu \bar{G}_1^1] \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Um in der Gleichgewichtsbedingung nur mit der Variablen G_1^1 zu rechnen, benötigen wir die Gleichungen (5.28) und (5.42) und erhalten

$$\begin{aligned} G_2^2 = \frac{1}{1-\nu} \left\{ 2G \left[\ln \left(\frac{\tau}{\tau} \right) - \bar{\varepsilon}_2^2 \right] \right. \\ \left. + \nu [G_1^1 - \bar{G}_1^1] + \bar{G}_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.43)$$

G_2^2 aus Gleichung (5.43) in die Gleichgewichtsbedingung (5.39) eingesetzt, liefert die zweite Differentialgleichung

$$\begin{aligned} G_1^1 = \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[2G \left(\ln \left(\frac{\tau}{\tau} \right) - \bar{\varepsilon}_2^2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. - (1-2\nu)G_1^1 - \nu \bar{G}_1^1 \right] + \bar{G}_2^2 \right\} \frac{\tau^1}{\tau} \end{aligned} \quad (5.44)$$

5.4.3 Die Differentialgleichungen für zyklische
Beanspruchungen im elastoplastischen Bereich

Mit den Gleichungen (5.30), (5.34), (5.35) und (5.36) erhalten wir

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^1 &= \bar{\varepsilon}_1^1 + \frac{1}{B(1-\nu)+2G} \left[\frac{1-2\nu}{2G} \{ (B+4G) \sigma_1^1 \right. \\ &\quad \left. - (B+2G) \bar{\sigma}_1^1 - 2G \bar{\sigma}_2^2 + 2G \bar{k} \} \right. \\ &\quad \left. - (\nu B+2G) (\varepsilon_2^2 - \bar{\varepsilon}_2^2) \right] \end{aligned} \quad (5.45)$$

Auch hier ersetzen wir $\bar{\varepsilon}_1^1$ nach Gleichung (5.30) und erhalten nach längerer Zwischenrechnung eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \tau^1 &= \exp \left\{ \frac{1}{B(1-\nu)+2G} \left[\frac{1-2\nu}{2G} \{ (B+4G) \sigma_1^1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \nu B \bar{\sigma}_1^1 + (1-\nu) B \bar{\sigma}_2^2 + 2G \bar{k} \} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\nu B+2G) \varepsilon_2^2 - (1-2\nu) B \bar{\varepsilon}_2^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Die Azimutalspannung σ_2^2 berechnen wir mit den Gleichungen (5.30) und (5.46) zu

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= \frac{1}{B(1-\nu)+2G} \left\{ 2BG (\varepsilon_2^2 - \bar{\varepsilon}_2^2) \right. \\ &\quad \left. + (\nu B+2G) \sigma_1^1 - \nu B \bar{\sigma}_1^1 \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu) B \bar{\sigma}_2^2 + 2G \bar{k} \right\} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Die zweite Differentialgleichung ergibt sich aus Gleichung (5.47), eingesetzt in die Gleichgewichtsbedingung (5.39).

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= \left\{ \frac{1}{B(1-\nu) + 2G} [2BG(\epsilon_2 - \bar{\epsilon}_2) \right. \\ &\quad - (1 - 2\nu) B \sigma_1 - \nu B \bar{\sigma}_1 \\ &\quad \left. + (1 - \nu) B \bar{\sigma}_2 + 2G \bar{k}] \right\} \frac{r}{r} \quad (5.48) \end{aligned}$$

An dieser Stelle sei bemerkt, daß die Größen B, G und ν Konstanten und \bar{k} gespeicherte Werte aus dem vorhergehenden Zyklus sind. Eine geschlossene Lösung der Differentialgleichungen (5.42), (5.44), (5.46) und (5.48) ist nicht möglich. Auf numerische Lösungen werden wir in Kapitel 6 eingehen.

5.5 Rand- und Übergangsbedingungen

Es können sich bei elastoplastischer Beanspruchung des dickwandigen Zylinders zwei Bereiche mit unterschiedlichem Formänderungsverhalten ausbilden: eine elastische Zone und eine elastoplastische Zone. Für die elastische Zone besitzt das Differentialgleichungssystem (5.42), (5.44) Gültigkeit und für die elastoplastische Zone das System (5.46), (5.48).

Um die vier Integrationskonstanten dieser Systeme zu bestimmen, stehen folgende Bedingungen zur Verfügung:

1. Die Radialspannung muß am Außenrand verschwinden.

$$\sigma_1'(r_a) = 0 \quad (5.49)$$

2. Die Radialspannung am Innenrand erreicht den Druckwert $\pm p$.

$$\sigma_1^1(\rho_i) = \pm p \quad (5.50)$$

3. Der Übergang der Spannungen an der elastoplastischen Grenze ρ_{gr} vom elastischen Bereich in den elastoplastischen Bereich und umgekehrt muß stetig erfolgen. Dabei stellt ρ_{gr} eine weitere unbekannte Funktion dar, die aber durch die Fließbedingung festgelegt wird.

$$\sigma_1^1(\rho_{gr})_{elpl} = \sigma_1^1(\rho_{gr})_{el} \quad (5.51)$$

$$\sigma_2^2(\rho_{gr})_{elpl} = \sigma_2^2(\rho_{gr})_{el} \quad (5.52)$$

6. Numerische Lösung der Differentialgleichungen für einen dickwandigen, elastoplastisch beanspruchten Zylinder
-

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir die Differentialgleichungen für den elastischen und für den elastoplastischen Bereich entwickelt und gesehen, daß sich keine geschlossene Lösung angeben läßt. Um den Spannungs- und Verzerrungszustand des elastoplastisch beanspruchten Zylinders zu berechnen, haben wir für zwei Bereiche je zwei gekoppelte, lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung, also vier Differentialgleichungen, zu lösen. Die vier freien Konstanten der allgemeinen Lösungen dieser Differentialgleichungen können wir mit Hilfe der Rand- und Übergangsbedingungen (5.49) bis (5.52) angeben. Eine weitere unbekannte Größe ist die elastoplastische Grenze zwischen dem elastischen und dem elastoplastischen Bereich. Sie wird dadurch

festgelegt, daß an dieser Stelle die Spannungen des elastischen Bereichs die Fließgrenze erreichen.

Unsere Aufgabe wird es sein, ein gekoppeltes, nicht-lineares Randwertproblem zu lösen. Wir werden das Randwertproblem in ein Anfangswertproblem umwandeln, indem wir den Randwert $\sigma_1(\xi_2) = 0$ als Anfangswert betrachten und mit einem zweiten, "geratenen" Anfangswert das Problem als Anfangswertproblem lösen. Die zweite noch unbenutzte Randbedingung am anderen Rande des Zylinders dient dazu, die geratene Anfangsbedingung zu kontrollieren, d. h. zu prüfen, ob die Lösungsfunktion der geratenen Anfangsbedingung mit der zweiten Randbedingung übereinstimmt oder nicht. Gibt es einen "geratenen" Anfangswert, dessen Lösung an der Stelle ξ_2 mit dem zweiten Randwert $\sigma_1(\xi_2)$ übereinstimmt, dann ist das Randwertproblem auf ein Anfangswertproblem zurückgeführt worden.

Für die numerische Lösung wählen wir das Verfahren von Runge-Kutta. Dieses Verfahren eignet sich gut für die Lösung von Anfangswertaufgaben. Eine Schwierigkeit dieses Verfahrens ist die Fehlerfortpflanzung, die bei der Wahl zu großer Schrittweiten über lange Intervalle die Ergebnisse verfälschen. Bei zu kleinen Schrittweiten erhöht sich der Rechenaufwand unnötig. Wir verwenden ein Verfahren, bei dem während der Rechnung die Schrittweite automatisch verändert und optimal bemessen wird [35]. Die optimale Schrittweite ist dann erreicht, wenn der relative Fehler der Lösung die Fehlerschranke, die mit 10^{-4} festgelegt wird, nicht überschreitet.

Das Programm (siehe Abb. 6-1) beginnt mit dem Aufruf der quergestrichenen Größen für den ersten Halbzyklus, die in diesem Falle größtenteils Null sind. Eine Verschiebung des Außenrandes wird als Anfangswert vorgegeben. Mit diesem Wert wird eine Lösung des Differentialgleichungssystems in den Ortskoordinaten berechnet. Bei den Verschiebungszyklen ist die Verschiebung des Außen-

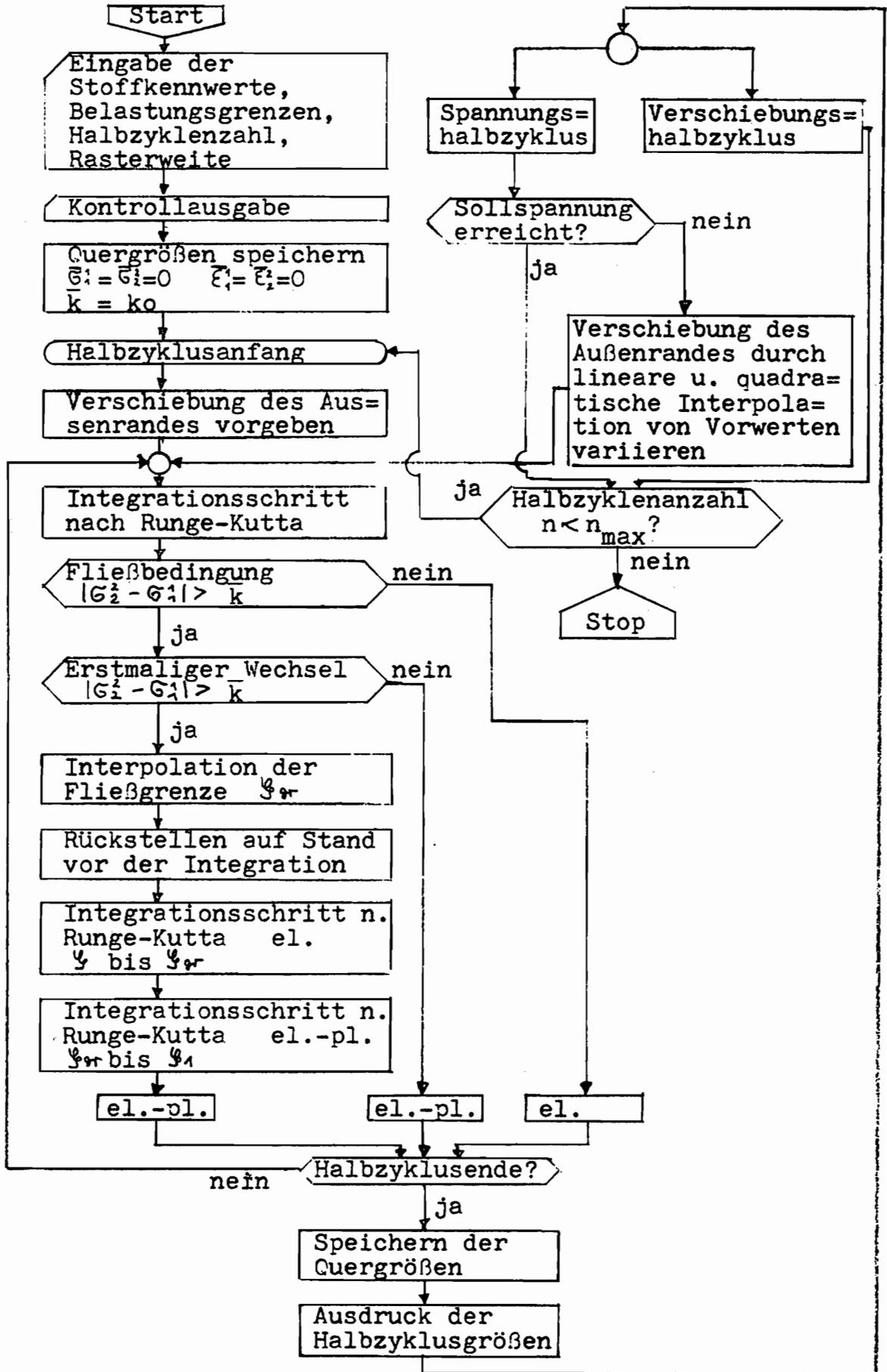


Abb. 6 - 1 Programmablauf

randes die kennzeichnende Größe. Das Gleichungssystem läßt sich relativ schnell lösen. Komplizierter wird die Lösung des Differentialgleichungssystems, wenn der Innendruck als Belastungsgrenze vorgegeben wird. Dann muß die Verschiebung des Außenrandes, d. h. der Anfangswert, so gezielt variiert werden, bis die Lösung des Gleichungssystems den vorgegebenen Innendruck bzw. -zug erreicht hat. Der variierte Anfangswert der Verschiebung des Außenrandes liefert den Innendruck bzw. -zug, der als Randwert am Innenrand vorgegeben ist.

Weitere Erläuterungen sollen zu dem in der Programmsprache ALGOL geschriebenen und in einem Flußdiagramm (Abb. 6-1) dargestellten Programm nicht gegeben werden. Die umfangreichen numerischen Berechnung wurden auf der TR 440 im Rechenzentrum der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt.

7. Ergebnisse

7.1 Allgemeines

Im Kapitel 6 wurden die zur Lösung der Differentialgleichungen aus Kapitel 5 erforderlichen Rechenprogramme erläutert. Mit dem Programm ist es möglich, die Spannungs- und Formänderungswerte sowohl für Spannungszyklen als auch für Verschiebungszyklen zu berechnen.

Die Zyklen lassen sich noch weiter unterteilen, indem wir zwischen großen und kleinen Beanspruchungen unterscheiden. Zu jeder dieser vier Gruppen kommt noch eine Vielfalt von Parametern. Aus diesem Grunde werden nur die wichtigsten Ergebnisse in dieser Arbeit dargestellt. Die dimensionslosen Parameter sind

B/G bezogener Verfestigungsmodul,
 G/G_0 bezogener Schubmodul,

- σ / σ_0 bezogene Spannungsgröße des Innendrucks
bzw. -zugs,
 u_a / ϱ_a bezogene Verschiebungsgröße des Außenrandes,
 ν Querkontraktionszahl,
 n Anzahl der Halbzyklen.

Die Ergebnisse wurden für das konstante, dimensionsfreie Radienverhältnis $\varrho_a = 1$ und $\varrho_i / \varrho_a = 0.5$ berechnet. Im Kapitel 9 werden wir verschiedene andere Radienverhältnisse und deren Auswirkungen untersuchen.

7.2 Einige Bemerkungen zum 1. und 2. Halbzyklus

Zunächst wollen wir das Last-Verschiebungsdiagramm für den ersten Halbzyklus betrachten (siehe Abb. 7-1). Jeder durch einen unterschiedlichen Verfestigungsmodul B/G gekennzeichnete Kurvenzug besitzt ein Minimum, das durch die gestrichelte Linie markiert wird. Das bedeutet, daß zu jedem Lastwert bei einem bestimmten Verfestigungsmodul zwei Verschiebungswerte gehören. Bei einer Betrachtung des Last-Verformungsdiagramms arbeiten wir nur mit dem kleineren Verschiebungswert. Stabilitätsuntersuchungen sollen in dieser Arbeit ausgeschlossen sein. Der zweite, größere Verschiebungswert liegt jenseits des Lastminimums. Er läßt sich nur realisieren, indem die Verschiebung über den Verschiebungswert, der zum Lastminimum gehört, gesteigert wird. Aus dem Last-Verschiebungsdiagramm können wir zudem ablesen, welchen maximalen Innendruck bzw. -zug wir bei einem bestimmten Verfestigungsmodul B/G in einem Spannungszyklus erreichen können.

Wir betrachten einen dickwandigen Zylinder, der im ersten Halbzyklus voll elastoplastisch beansprucht war. Der zweite Halbzyklus beginnt mit einer Entlastung und wird mit einer Wiederbelastung weitergeführt, d. h. in Verschiebungszyklen wird die Verschiebung u_a / ϱ_a in Gegenrichtung bis zu $-u_a / \varrho_a$ aufgebracht, und bei

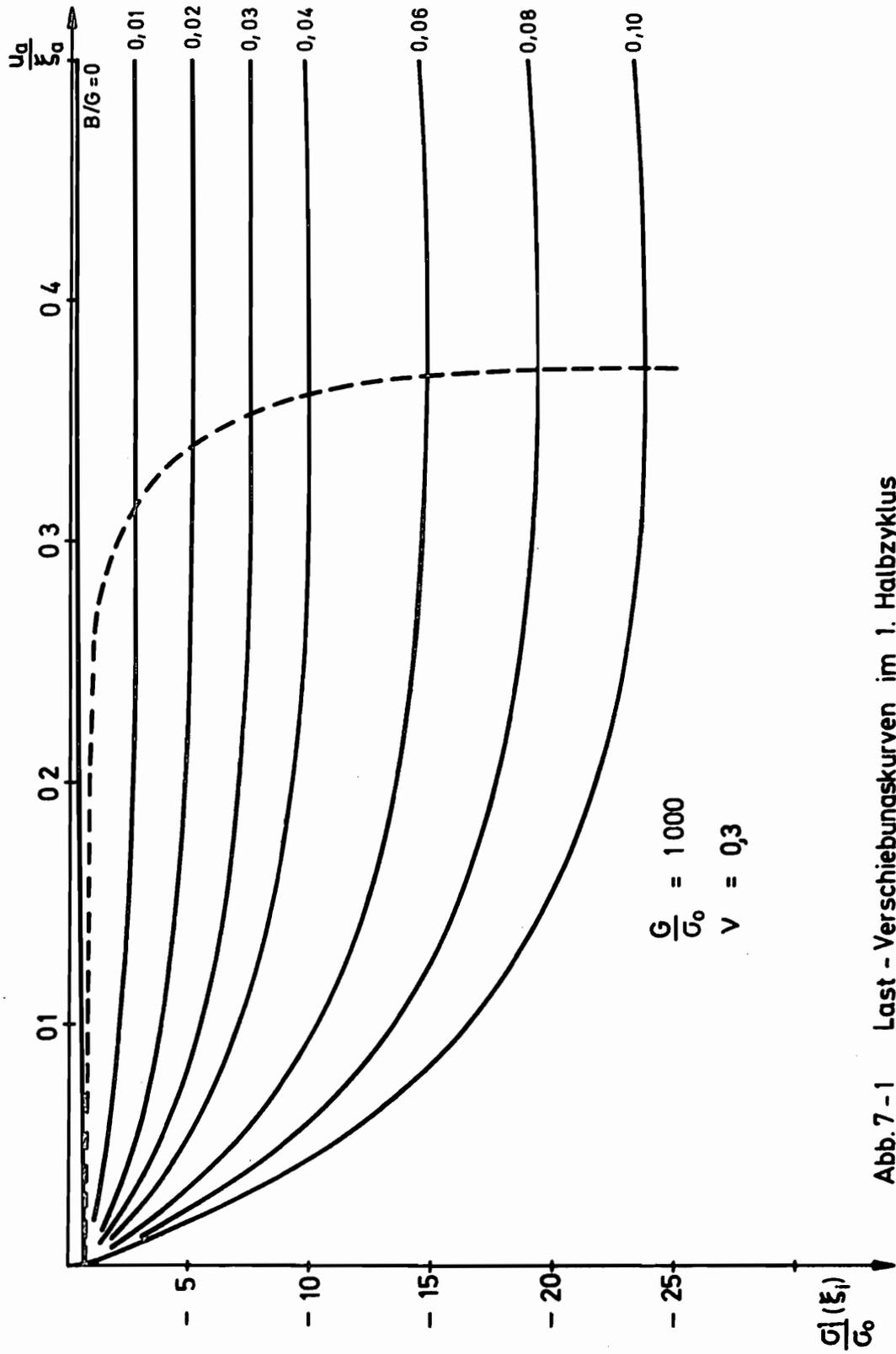


Abb. 7-1 Last - Verschiebungskurven im 1. Halbzyklus

Spannungszyklen wird die Innenspannung $\sigma_i(\epsilon_i)/\sigma_a$ abgebaut und anschließend mit entgegengesetzten Vorzeichen aufgebaut. Bei kleinen Spannungen bzw. Verschiebungen verhält sich der entlastete, dickwandige Zylinder zuerst elastisch und beginnt mit steigender Beanspruchung an der Innenseite $\epsilon_i/\epsilon_a = 0.5$ zu plastifizieren, bis der Zylinder bis zum Außenrand $\epsilon_a = 1$ elastoplastisch wird. In Abb. 7-2 ist der Verlauf der Fließgrenze σ_{gr}/σ_a bei Belastung in Gegenrichtung für relativ "kleine" Verschiebungen dargestellt.

Ein anderer Kurvenverlauf der Fließgrenze liegt bei "großer" Verschiebung vor. Auch hier verhält sich der dickwandige Zylinder bei Entlastung zuerst elastisch. Bei Steigerung der Beanspruchung in Gegenrichtung wird er dann an der Außenseite plastisch, und die Kurve der elastoplastischen Grenze σ_{gr}/σ_a verläuft zuerst steiler und anschließend zum Innenrand hin (siehe Abb. 7-3). Diesen andersartigen Verlauf der Fließgrenze werden wir später noch durch den Eigenspannungszustand bei "großen" Beanspruchungen zu klären haben.

Es liegt nun nahe zu vermuten, daß es zwischen diesen sehr unterschiedlichen Kurven der Fließgrenze noch weitere Verläufe für die elastoplastische Grenze gibt. Wir finden im Bereich relativ "großer" Beanspruchung einen Bereich, in dem der Zylinder sich nach der Entlastung zunächst elastisch verhält und bei wachsender Beanspruchung in Gegenrichtung mitten in der Zylinderlaibung elastoplastisch wird (siehe Abb. 7-4). Die Fließgrenze σ_{gr}/σ_a breitet sich anschließend sowohl zum Innenrand $\epsilon_i/\epsilon_a = 0.5$ als auch zum Außenrand $\epsilon_a = 1$ aus. Diese unterschiedlichen Verläufe der Fließgrenze, die hier für Verschiebungszyklen beschrieben sind, treten auch bei Spannungszyklen auf.

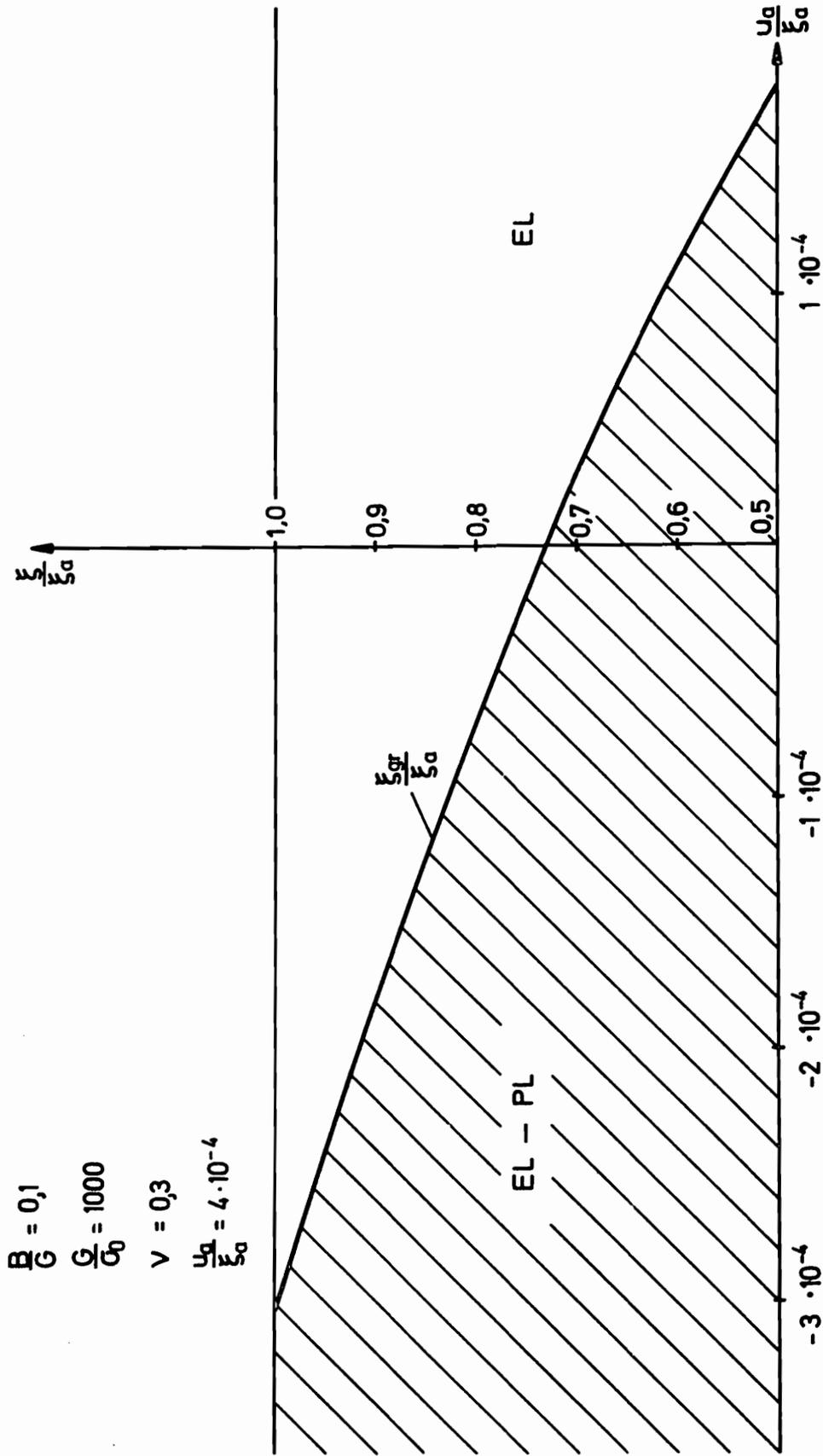


Abb. 7-2 Elastoplastische Grenze bei Belastung in Gegenrichtung

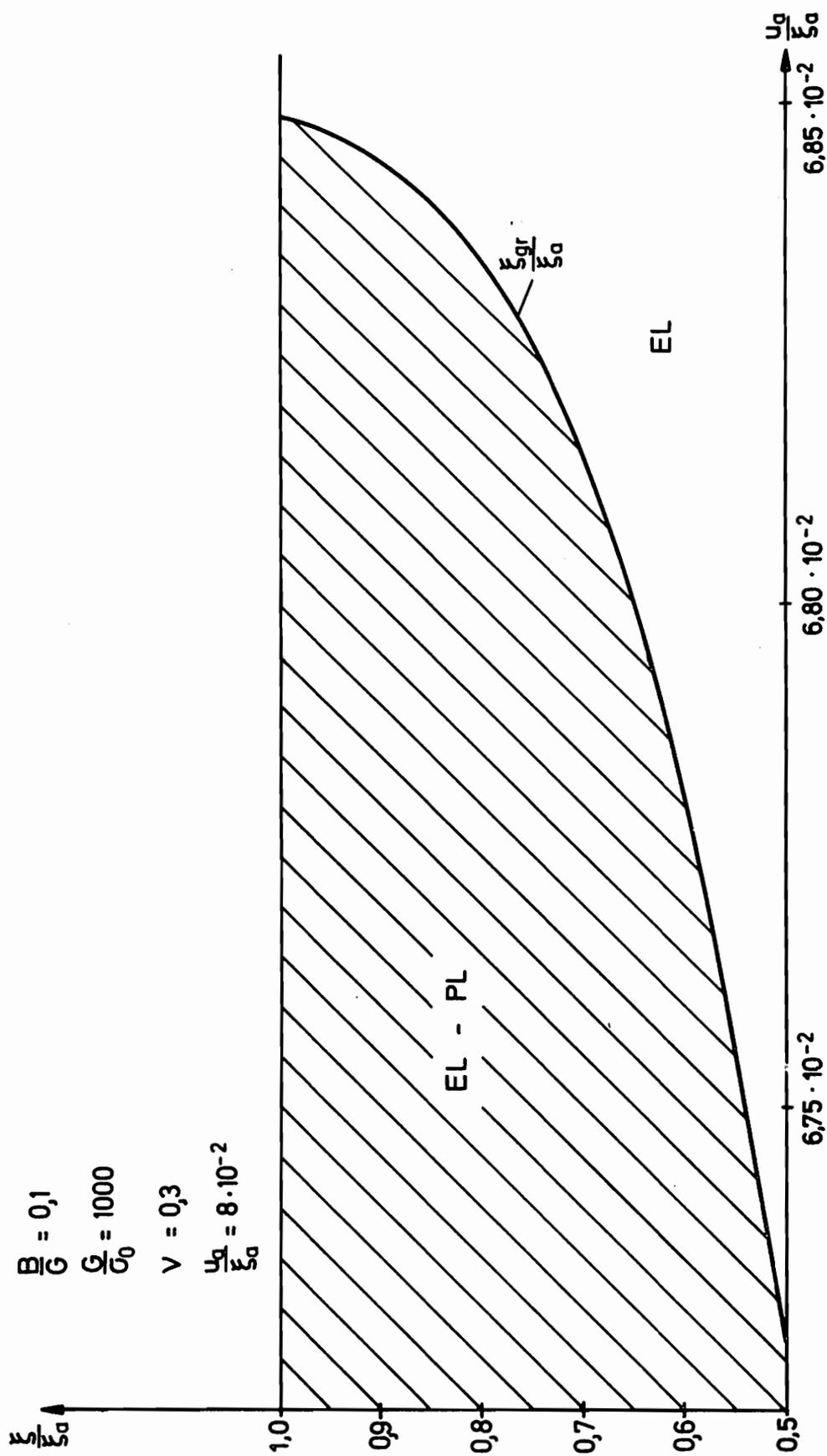


Abb. 7-3 Elastoplastische Grenze bei Belastung in Gegenrichtung

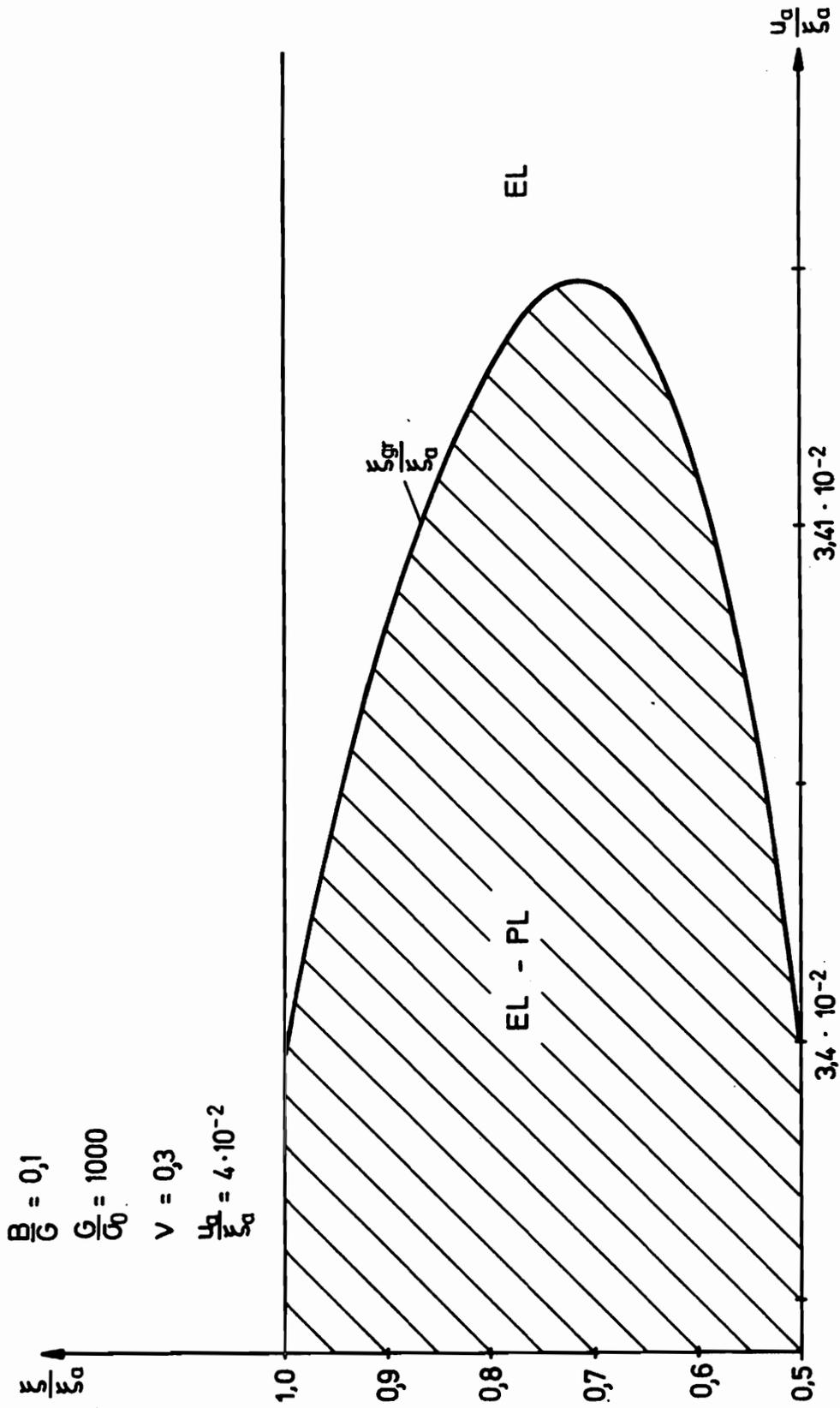


Abb. 7-4 Elastoplastische Grenze bei Belastung in Gegenrichtung

7.3 Verschiebungszyklen

7.3.1 Spannungsverteilung

Es gilt die Definition für den Verschiebungszyklus aus Kapitel 5.4.1. Die Verschiebung variiert zwischen den Werten $|\mu_a / \varphi_a|$.

Zunächst rechnen wir mit kleinen Verschiebungen. Betrachten wir die Abbildungen 7-5 und 7-6, so stellen wir fest, daß die Werte für die Radialspannung σ_1 / σ_0 , für die Azimutalspannung σ_2^1 / σ_0 und für die Axialspannung σ_3^1 / σ_0 von der ungeraden Halbzyklenzahl zur geraden Halbzyklenzahl die Vorzeichen wechseln und die elastoplastische Grenze φ_r / φ_a an der Stelle bei diesem Beispiel $\varphi / \varphi_a = 0.75$ festliegt. Mit steigender Halbzyklenanzahl läßt sich die Tendenz zu einem durchgehenden Kurvenzug ohne Knickstelle, die durch das elastoplastische Verhalten bedingt ist, erkennen. Ziehen wir in unsere Betrachtungen die Abbildungen 7-7 bis 7-10 mit ein, so können wir sagen, daß sich in diesen Darstellungen mit steigendem Wert der Querkontraktionszahlen der elastoplastische Bereich ausweitet.

Rechnen wir bei gleicher Verschiebungsgröße μ_a / φ_a und gleicher Querkontraktionszahl ν jedoch mit einem kleineren Verfestigungsmodul B/G , so erhalten wir die Kurven in Abbildung 7-11 und 7-12. Diese Kurven haben mit dem 19. bzw. 20. Halbzyklus beim Verfestigungsmodul $B/G = 0.01$ ihren Endzustand noch nicht erreicht. Vergleichen wir diese mit denen der Abbildungen 7-5 und 7-6, so stellen wir fest, daß mit steigendem Wert des Verfestigungsmoduls erwartungsgemäß die Spannungswerte im elastoplastischen Bereich größer werden. Besonders deutlich läßt sich diese Tendenz bei der Azimutalspannung σ_2^1 / σ_0 ablesen, wo bei der Betrachtung des Kurvenzuges aus dem 19. und 20. Halbzyklus bei 10 mal größerem

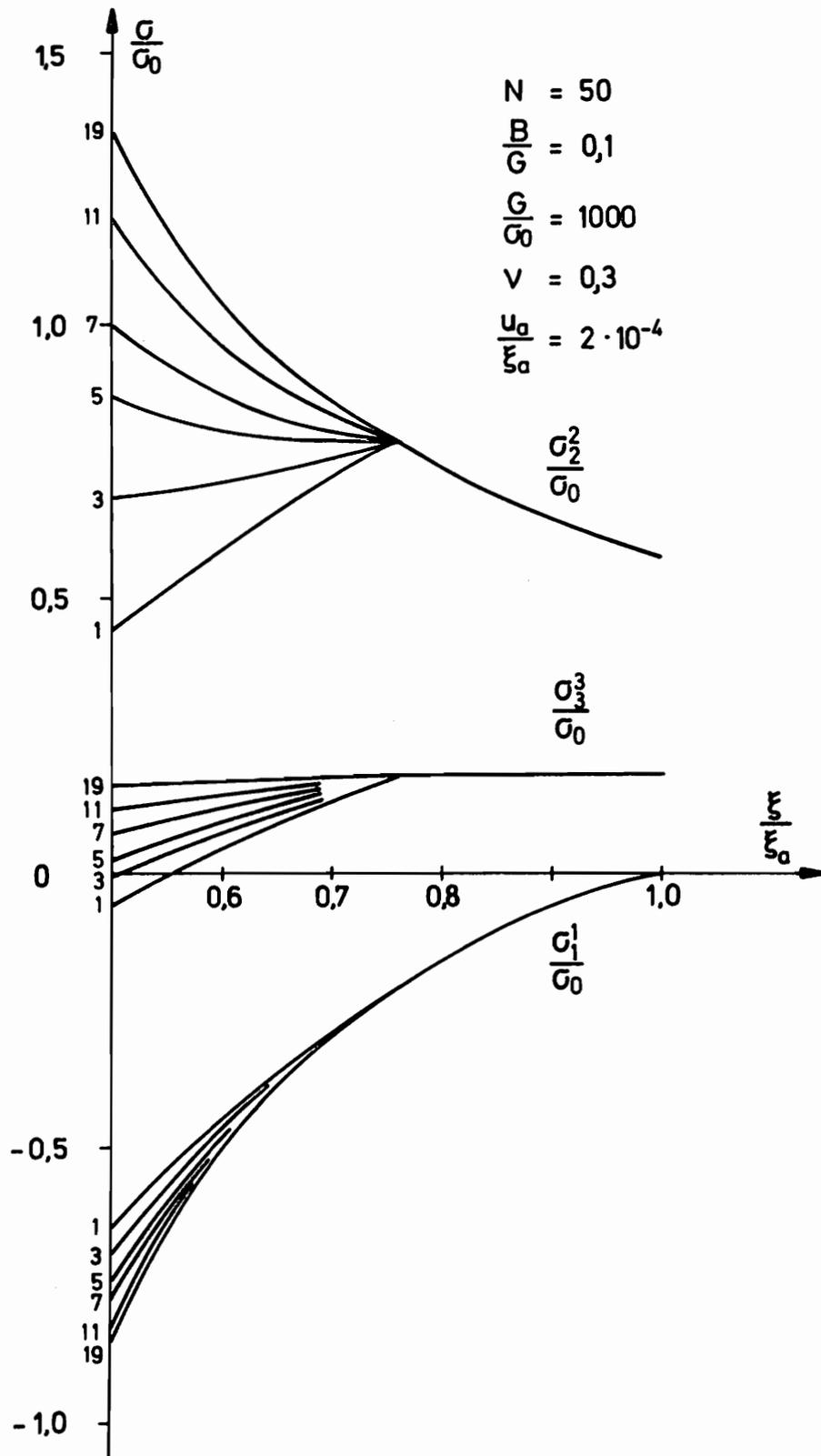


Abb. 7 - 5 Spannungsverlauf bei Verschiebungszyklen

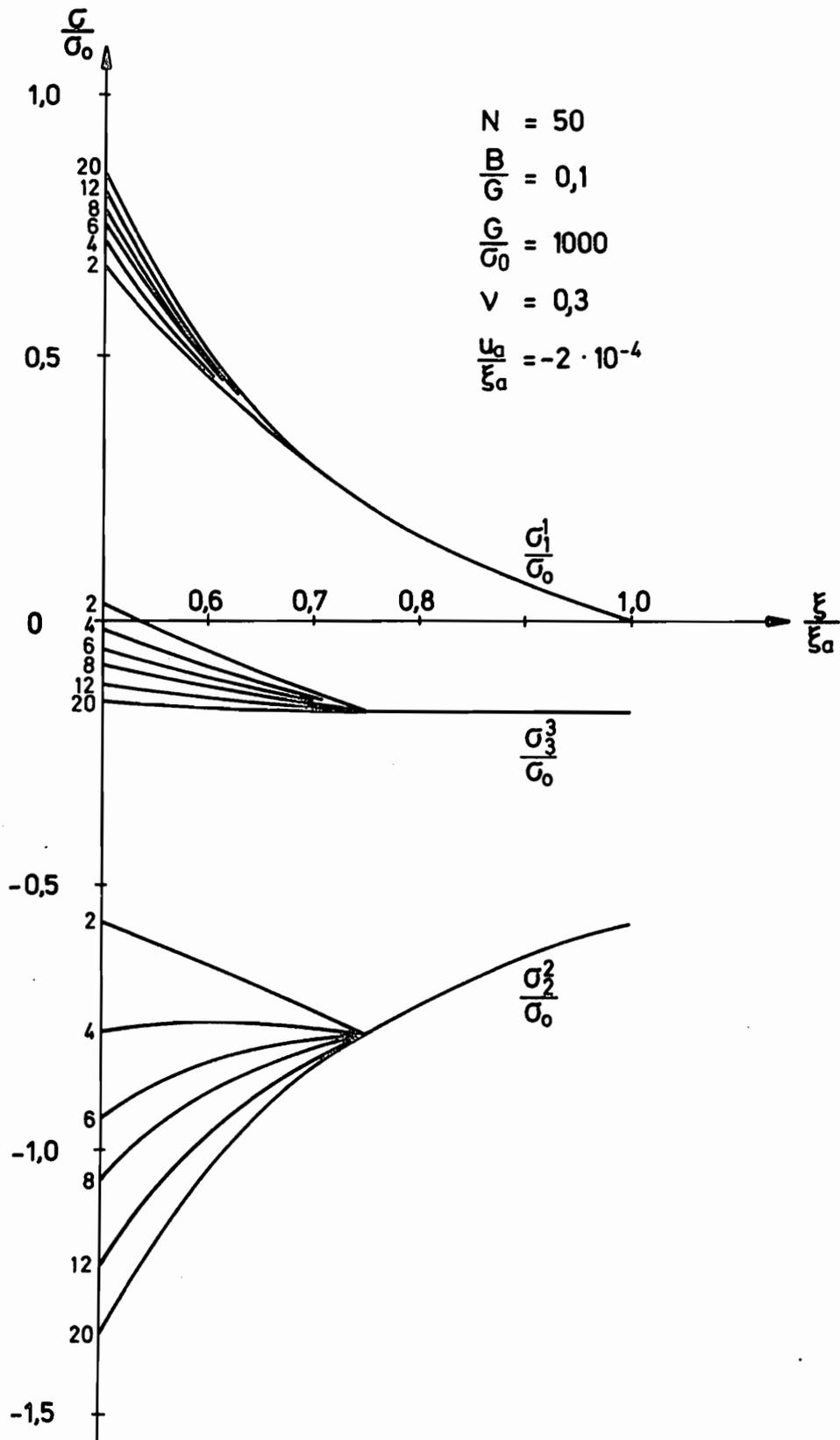


Abb. 7-6 Spannungsverlauf bei Verschiebungszyklen

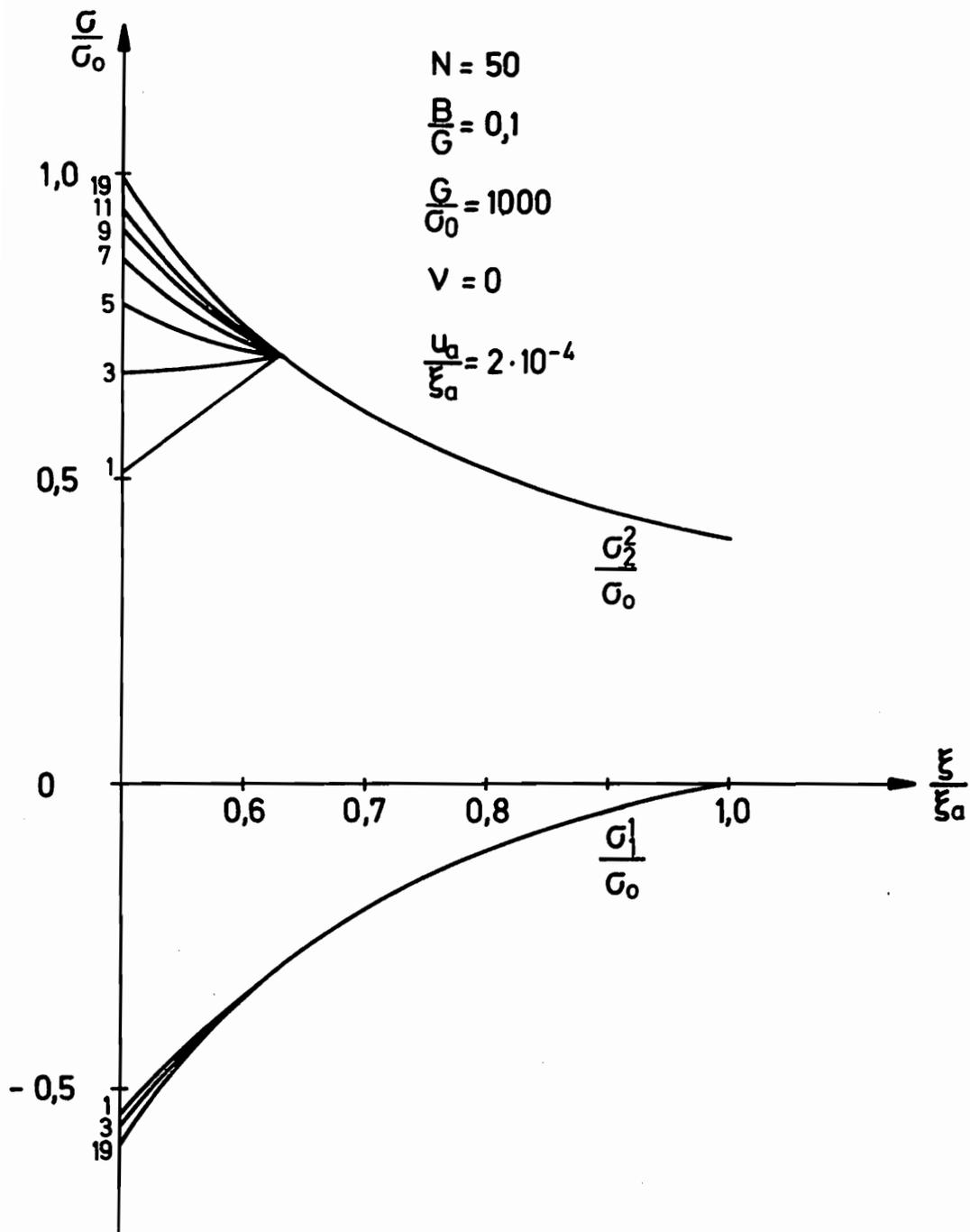


Abb.7-7 Spannungsverlauf bei Verschiebungszyklen

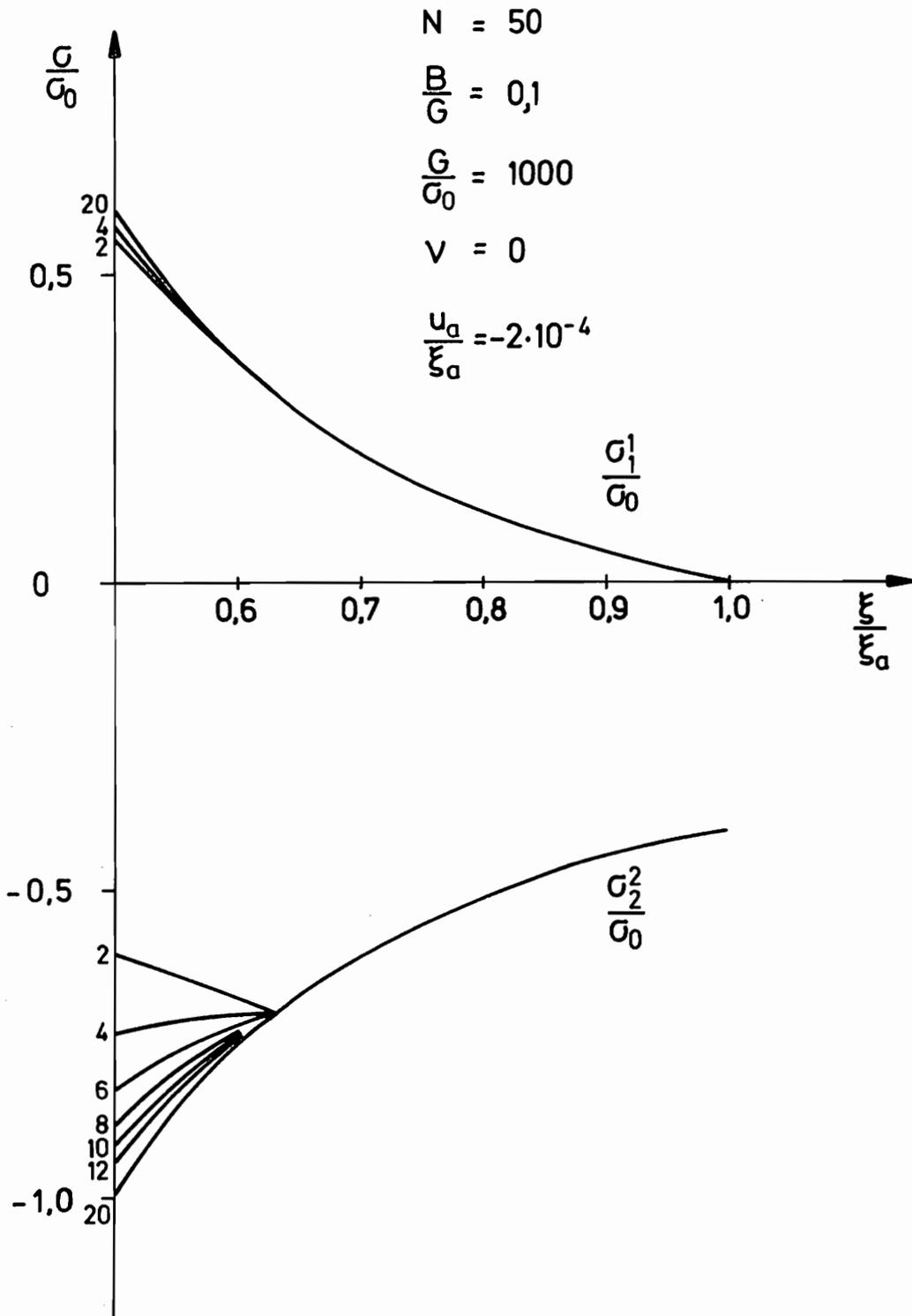


Abb. 7 - 8 Spannungsverlauf bei Verschiebungszyklen

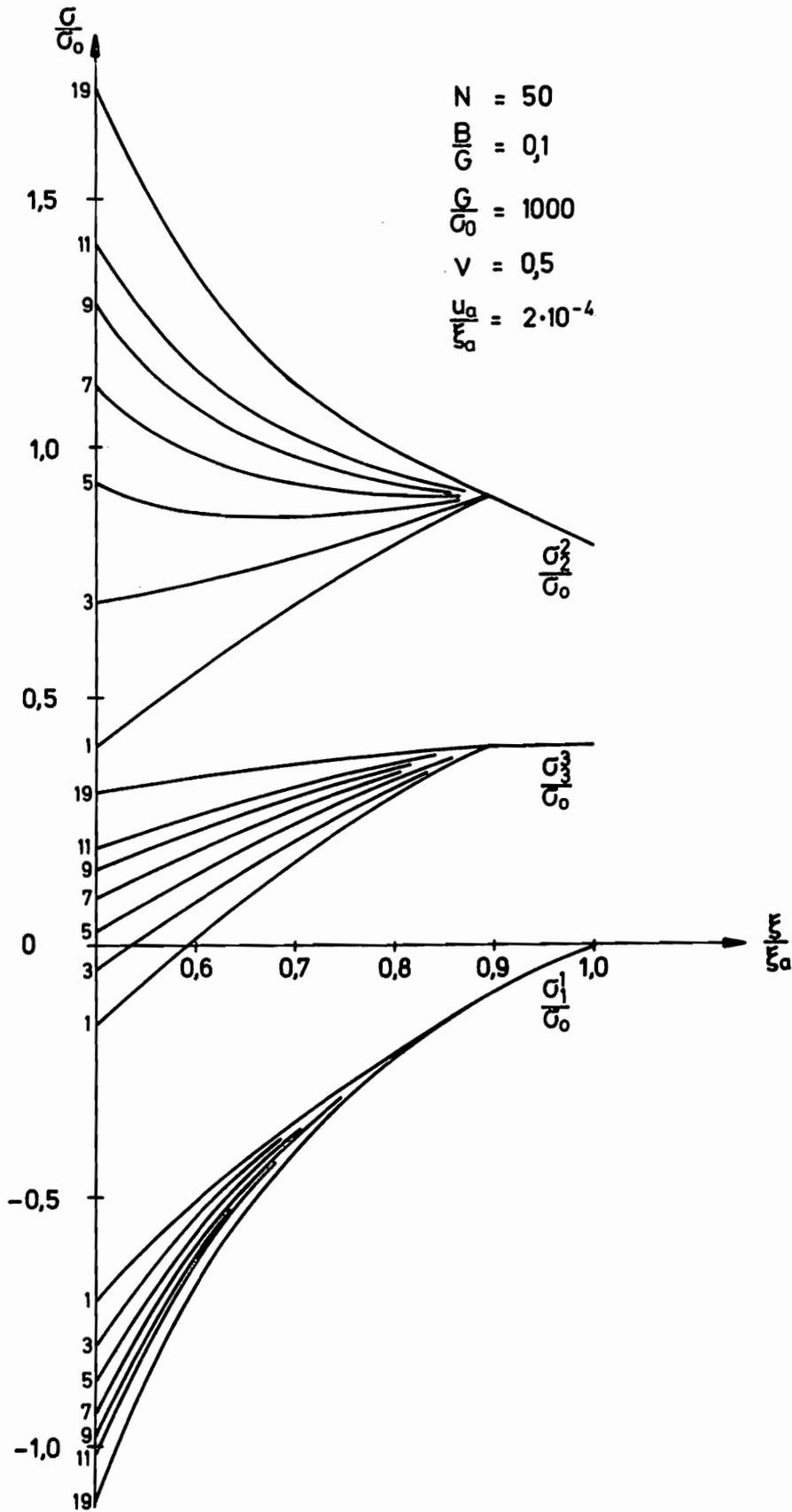


Abb. 7-9 Spannungsverlauf bei Verschiebungszyklen

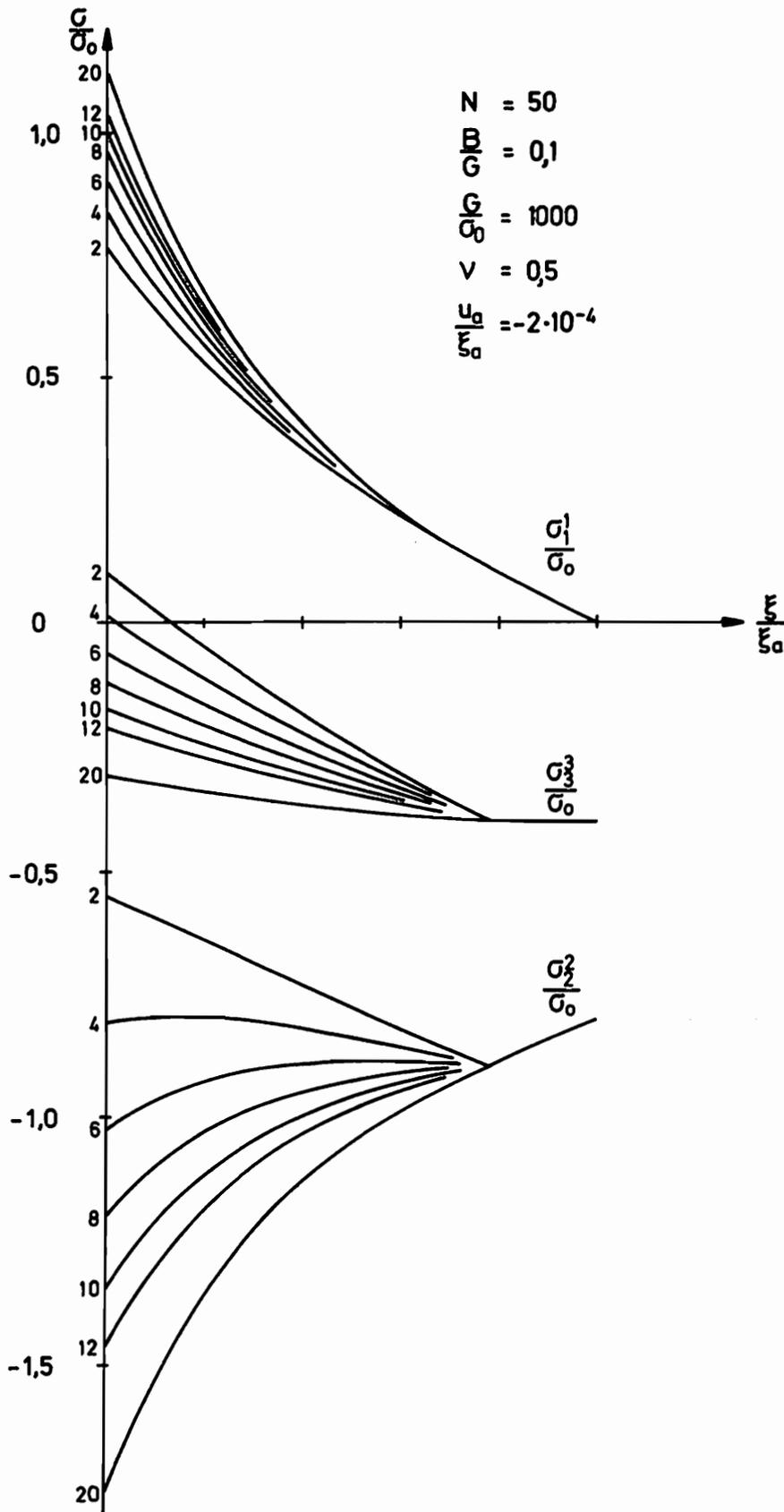


Abb. 7 - 10 Spannungsverlauf bei Verschiebungszyklen

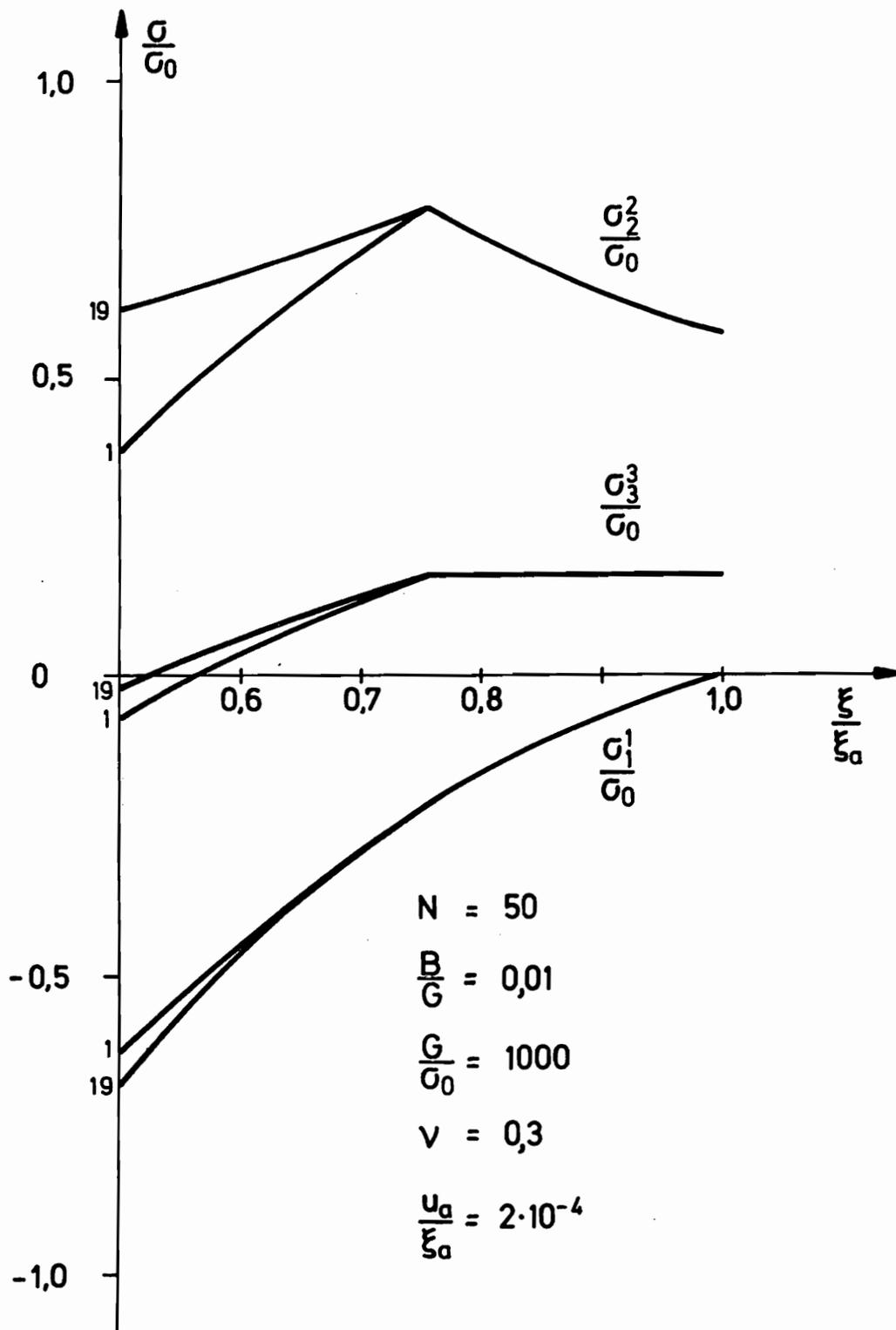


Abb. 7 - 11 Spannungsverlauf bei Verschiebungszyklen

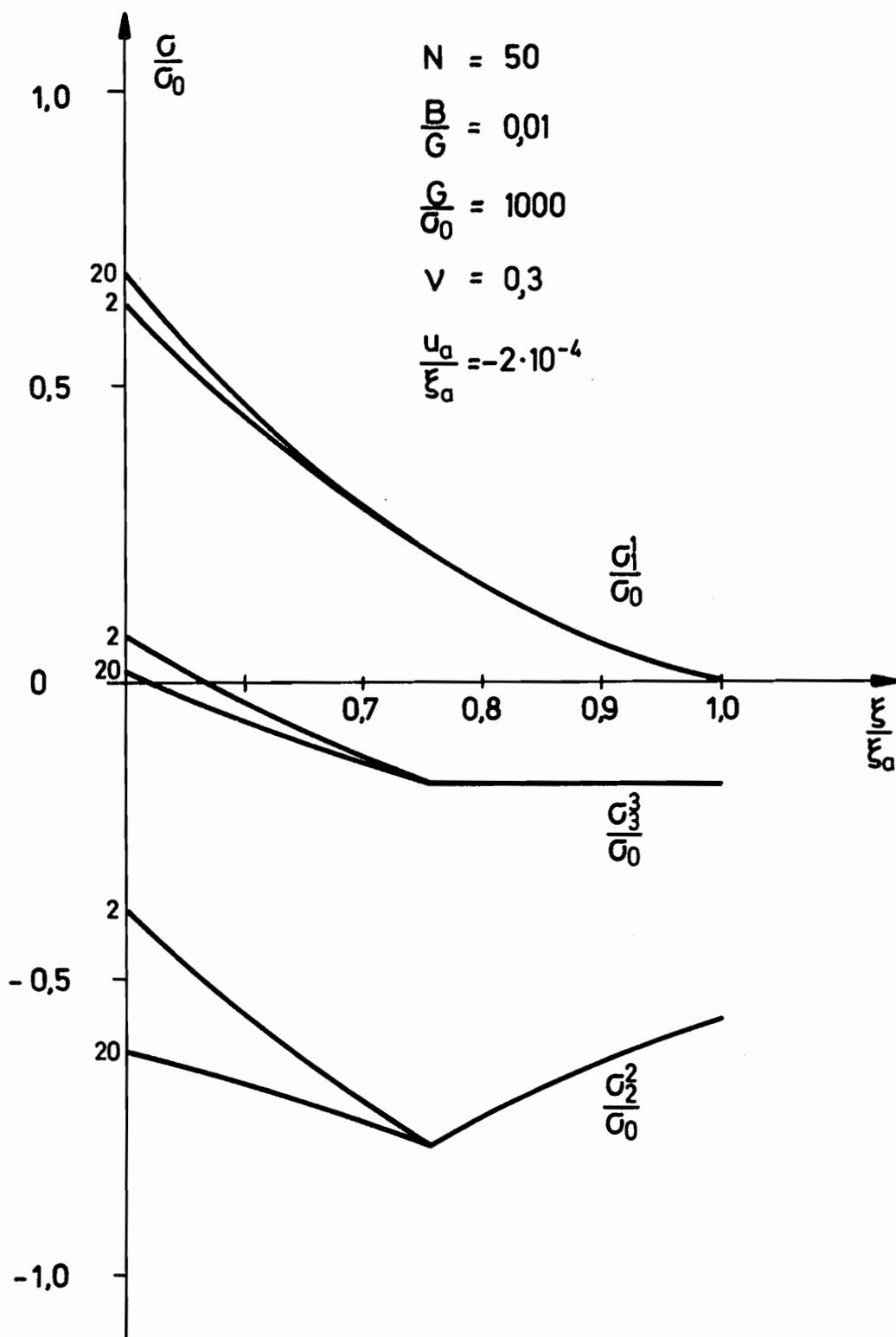


Abb. 7 - 12 Spannungsverlauf bei Verschiebungszyklen

Wert des Verfestigungsmoduls B/G ein nahezu glatter Kurvenzug vom Innen- zum Außenrand auffällt, während bei einem geringeren Wert von B/G ein deutlicher Knick im Kurvenverlauf zu sehen ist, der durch die geringere Verfestigung im elastoplastischen Bereich verursacht wird. Da wir mit Kennwerten im metallischen Bereich rechnen wollen, entscheiden wir uns beim Verfestigungsmodul B/G für den Wert 0.1 und bei der Querkontraktionszahl ν für den Wert 0.3. Mit diesen Werten für die Parameter B/G und ν wollen wir die weiteren Berechnungen durchführen.

In den Abbildungen 7-13 und 7-14 liegen die Spannungskurven für große Verschiebungen vor. Mit steigender Halbzyklenzahl wachsen auch die Spannungen an. Der Zylinder ist am Ende eines jeden Halbzyklusses voll elastoplastisch. Auf Übergangszonen bei der Entlastung wurde in Abschnitt 7.2 eingegangen.

7.3.2 Restspannungen

Zur Berechnung der Restspannungen stehen uns zwei Verfahren zur Verfügung. Das erste Verfahren berechnet die Restspannungen exakt, während das zweite eine Approximation darstellt. In der exakten Lösung wird der Zylinder nach dem ersten Halbzyklus so weit entlastet, bis die Radialspannung G_1^1 / G_0 am Innenrand Null ist. Durch eine Integration des beschriebenen Entlastungszustandes erhalten wir eine exakte Lösung. Nur ist die hierfür erforderliche Integration sehr rechenzeitintensiv.

Es werden deshalb im zweiten Verfahren die Restspannungen und die zugehörigen Verschiebungen für kleine Verformungen geschlossen angegeben, indem elastische Spannungen den elastoplastischen superponiert werden. Die Abweichungen des Approximationsverfahrens gegenüber dem exakten Verfahren ist in Abbildung 7-15 dargestellt.

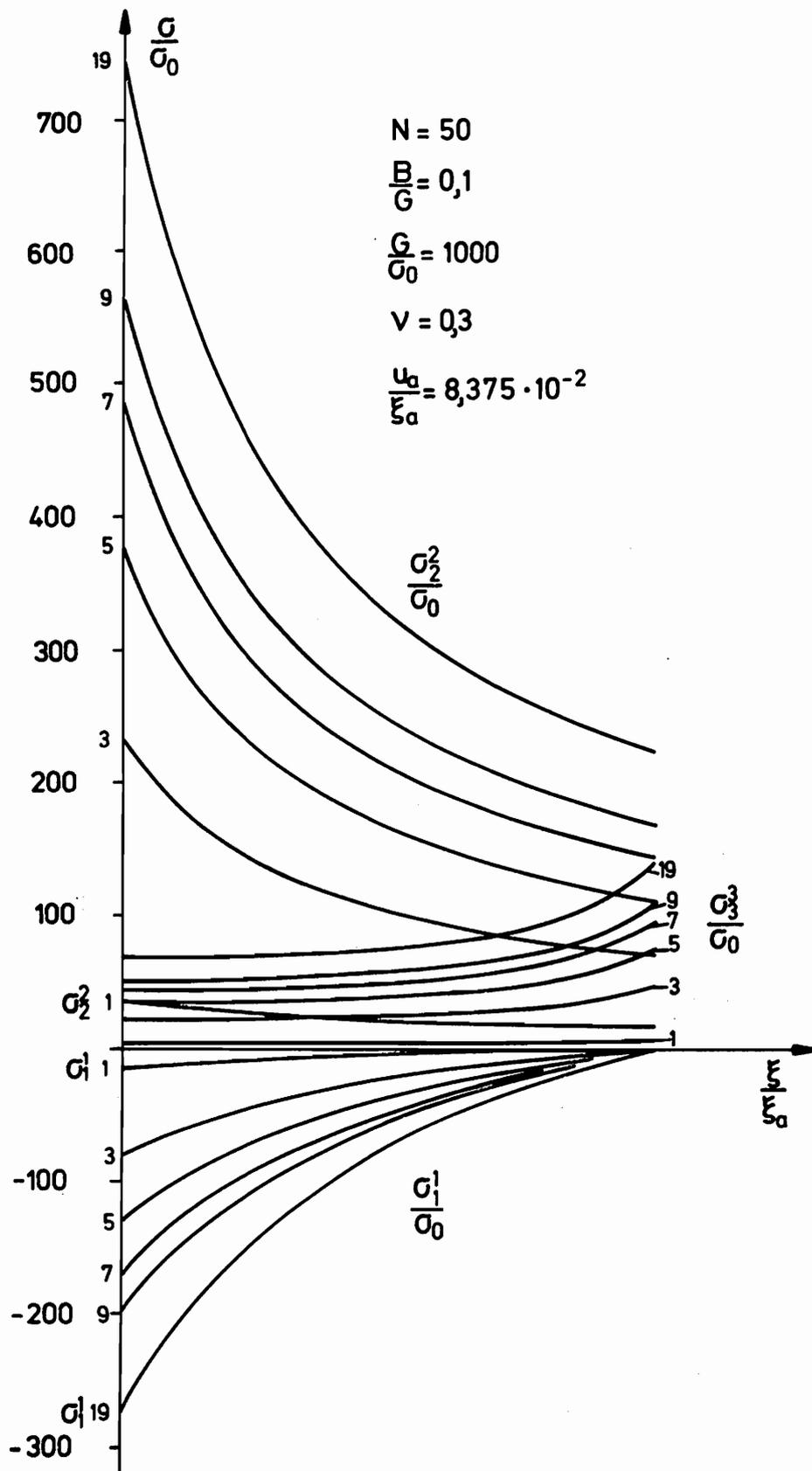


Abb. 7 - 13 Spannungsverlauf bei Verschiebungszyklen

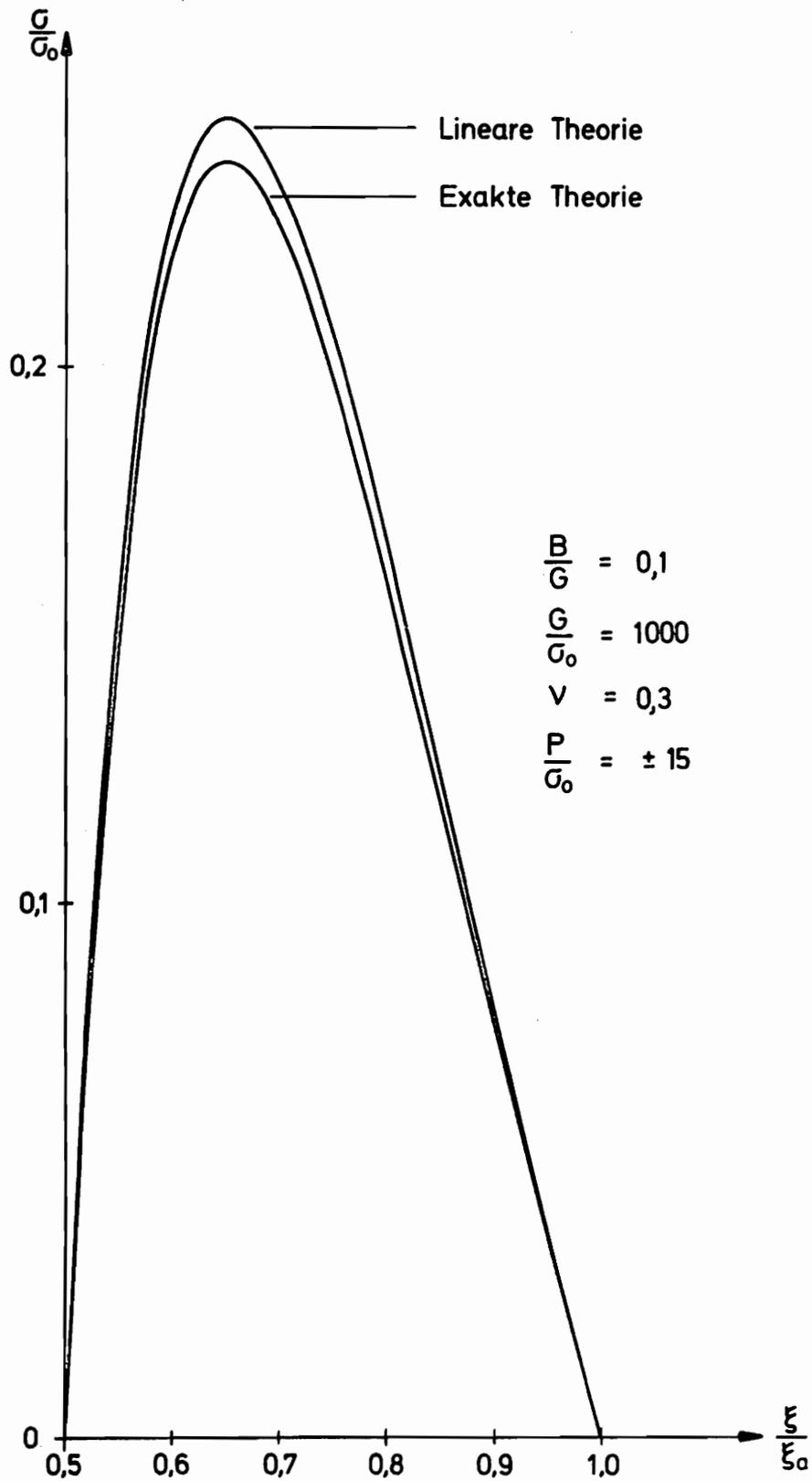


Abb. 7 - 15 Vergleich der Restspannungen σ_1/σ_0 im 1. Halbzyklus

Der relative Fehler beträgt in diesem sehr ungünstigen Beispiel 3,6 %.

Wir werden die Restspannungen wegen der geringen Abweichung und dem minimalen Rechenaufwand nach dem zweiten Verfahren lösen. Für die geschlossene Lösung bei kleinen Verformungen gelten

$$\sigma_{\alpha}^1 = - \tau \frac{\left(\frac{\tau_a}{\tau}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\tau_a}{\tau_i}\right)^2 - 1} \quad (7.1)$$

$$\sigma_{\alpha}^2 = \tau \frac{\left(\frac{\tau_a}{\tau}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\tau_a}{\tau_i}\right)^2 - 1} \quad (7.2)$$

$$\sigma_{\alpha}^3 = \tau \frac{2 \nu}{\left(\frac{\tau_a}{\tau_i}\right)^2 - 1} \quad (7.3)$$

$$\mu_{\alpha} = \frac{\tau}{2G} \left[(1 - \nu) \sigma_{\alpha}^2 - \nu \sigma_{\alpha}^1 \right] \quad (7.4)$$

In den Abbildungen 7-16 und 7-17 sind die Eigenspannungen bei kleinen Verzerrungen für die Radialspannung $\sigma_{\alpha}^1 / \sigma_0$, für die Azimutalspannung $\sigma_{\alpha}^2 / \sigma_0$ und für die Axialspannung $\sigma_{\alpha}^3 / \sigma_0$ im 1. und 19. bzw. im 2. und 20. Halbzyklus dargestellt. Es fällt wieder auf, daß die Spannungen von ungeraden Halbzyklenzahlen zu geraden Halbzyklenzahlen die Vorzeichen wechseln und daß die Restspannungen vom 1. zum 19. bzw. vom 2. zum 20. Zyklus sehr stark abklingen, so daß bei noch höherer Zyklusanzahl kaum noch Eigenspannungen zu erwarten sind.

7.3.3 Axialkraft N_3

Die Axialkraft ist die Spannungsergebnierende der Axialspannung σ_{α}^3 , die sich aus der Integration der Axial-

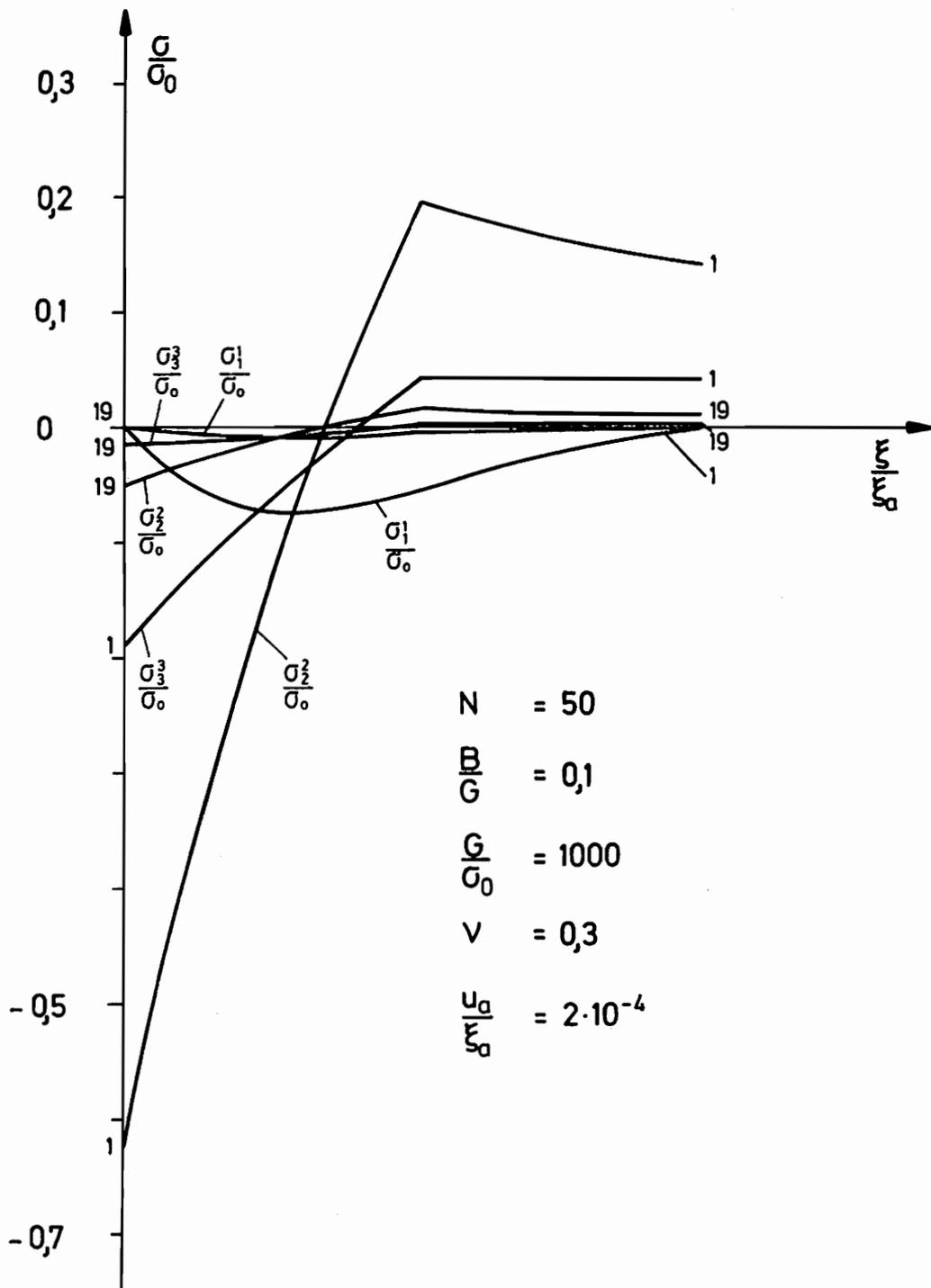


Abb. 7 - 16 Restspannungen

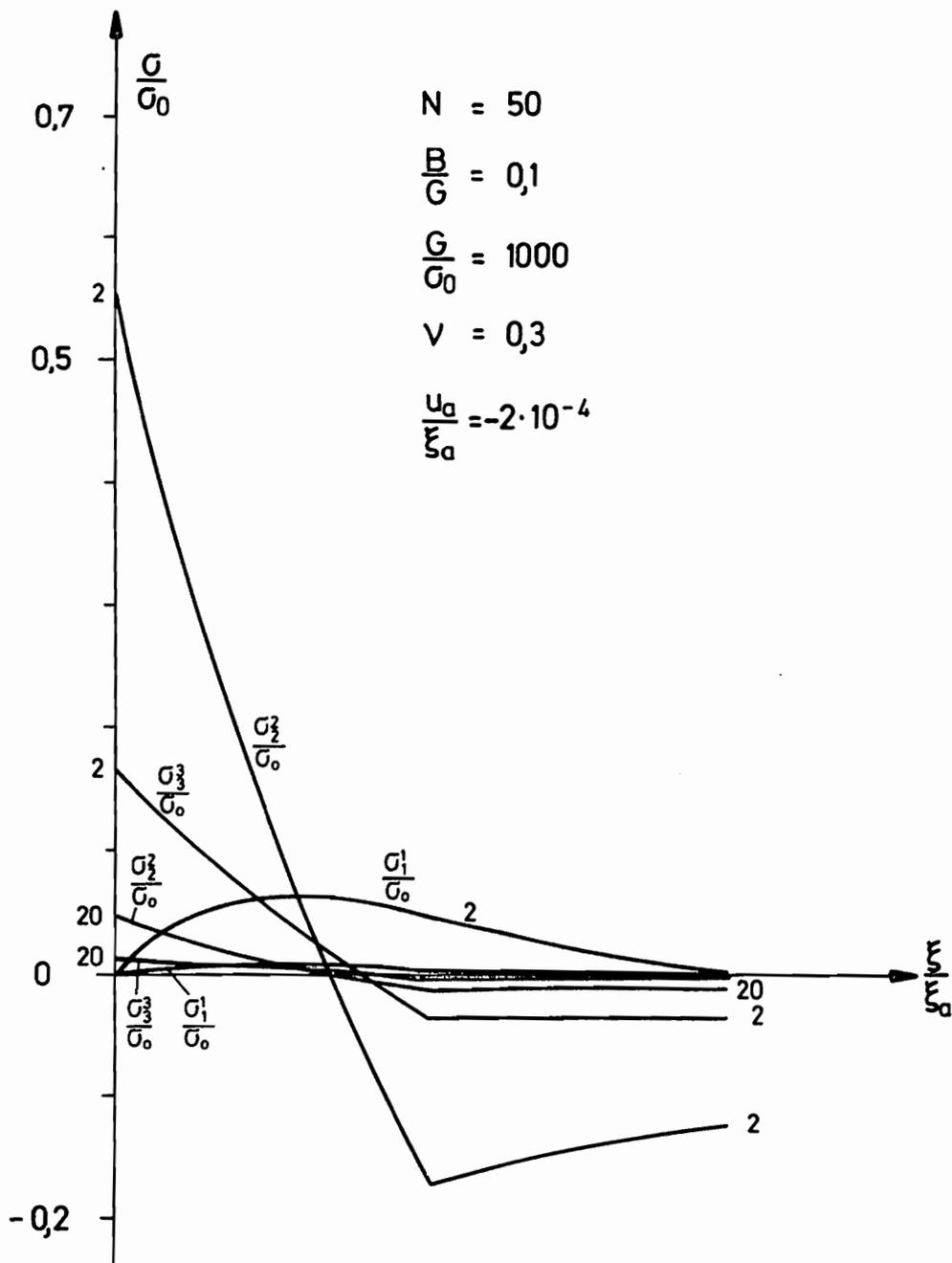


Abb. 7 - 17 Restspannungen

spannung über den Querschnitt ergibt.

$$N_3 = 2\pi G_0 \varphi_0^2 \int_{\frac{\tau}{\varphi_0}}^{\frac{\tau}{\varphi_0}} \left(\frac{G_3}{G_0}\right) \left(\frac{\tau}{\varphi_0}\right) d\left(\frac{\tau}{\varphi_0}\right) \quad (7.5)$$

Die in Abbildung 7-18 für unterschiedliche Parameter der Querkontraktionszahl ν und dem Verfestigungsmodul B/G dargestellten Axialkräfte streben, wie schon bei den Spannungen, hervorgerufen durch kleine Verschiebungen, mit steigender Zyklenzahl einem Grenzwert zu. Ein ähnliches Verhalten zeigen die in Abbildung 7-19 dargestellten Axialkräfte N_3 für große Verschiebungen. Nur scheinen diese Kräfte erst bei einer höheren Zyklenzahl einem Grenzwert zuzustreben.

7.3.4 Verschiebungen

Die Verschiebungen aus den Spannungen und aus den Restspannungen sind in Abbildung 7-20 abgebildet. Die Verschiebungen aus kleinen Verformungen liegen symmetrisch zur Abszisse, und zwar die mit ungerader Halbzyklenzahl im positiven und die mit gerader Halbzyklenzahl im negativen Wertebereich. Eine Abweichung der Verschiebungswerte untereinander finden wir nur im elastoplastischen Bereich. Besonders auffällig ist auch hier das Abklingen der Verschiebungswerte für die Eigenspannungen bei steigender Halbzyklenanzahl im elastoplastischen Bereich, während im elastischen Bereich wie erwartet die Verschiebungen Null sind.

7.3.5 Last-Verformungs-Diagramm

Das Lastverformungsdiagramm in Abbildung 7-21 ist für kleinere Verschiebungen aufgetragen. Vom dritten Halbzyklus an bemerken wir, daß die Last-Verschiebungskurven mit steigender Halbzyklenanzahl immer stärker zum elastischen Teil des ersten Halbzyklusses tendieren,

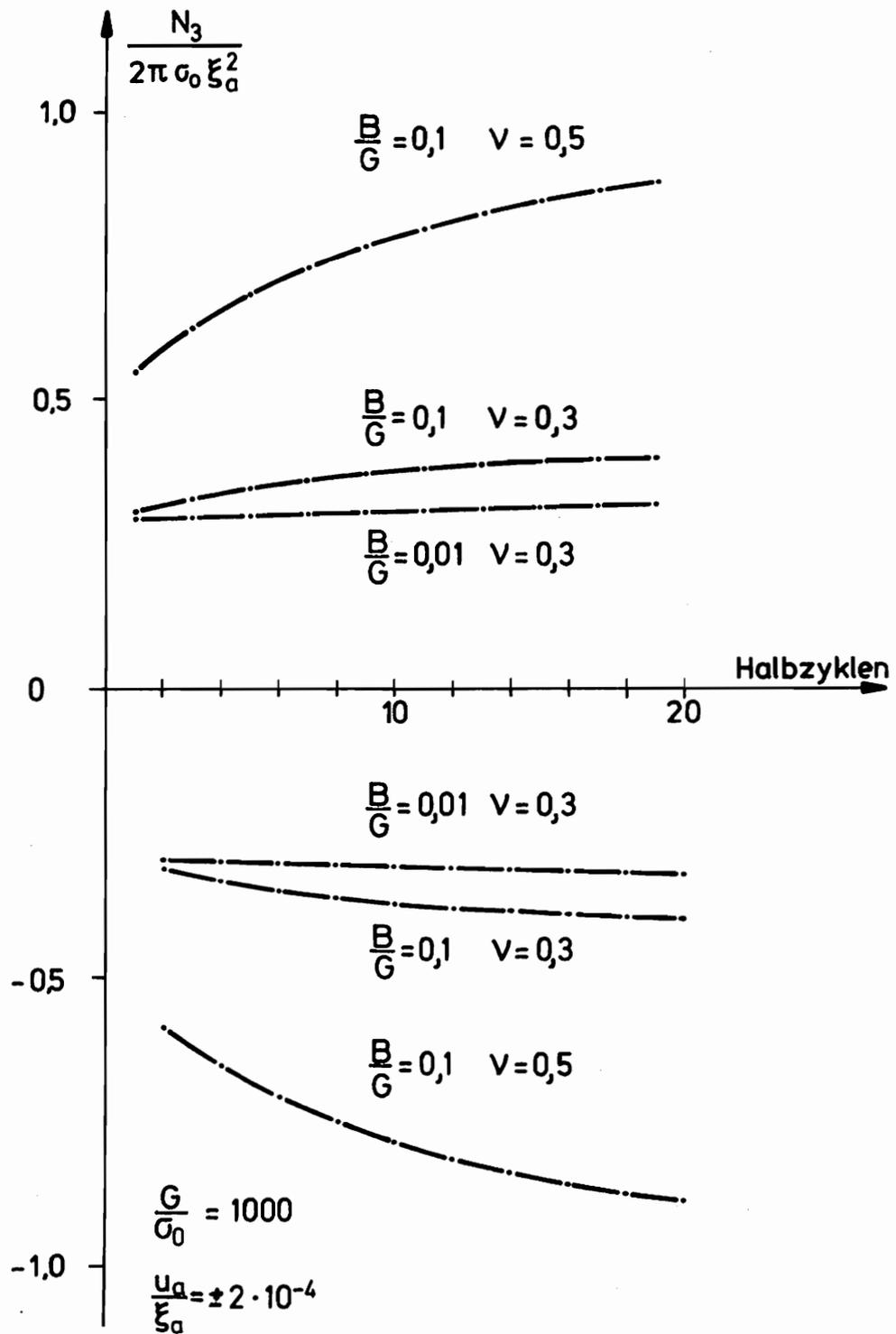


Abb. 7 - 18 Axialkraft N_3

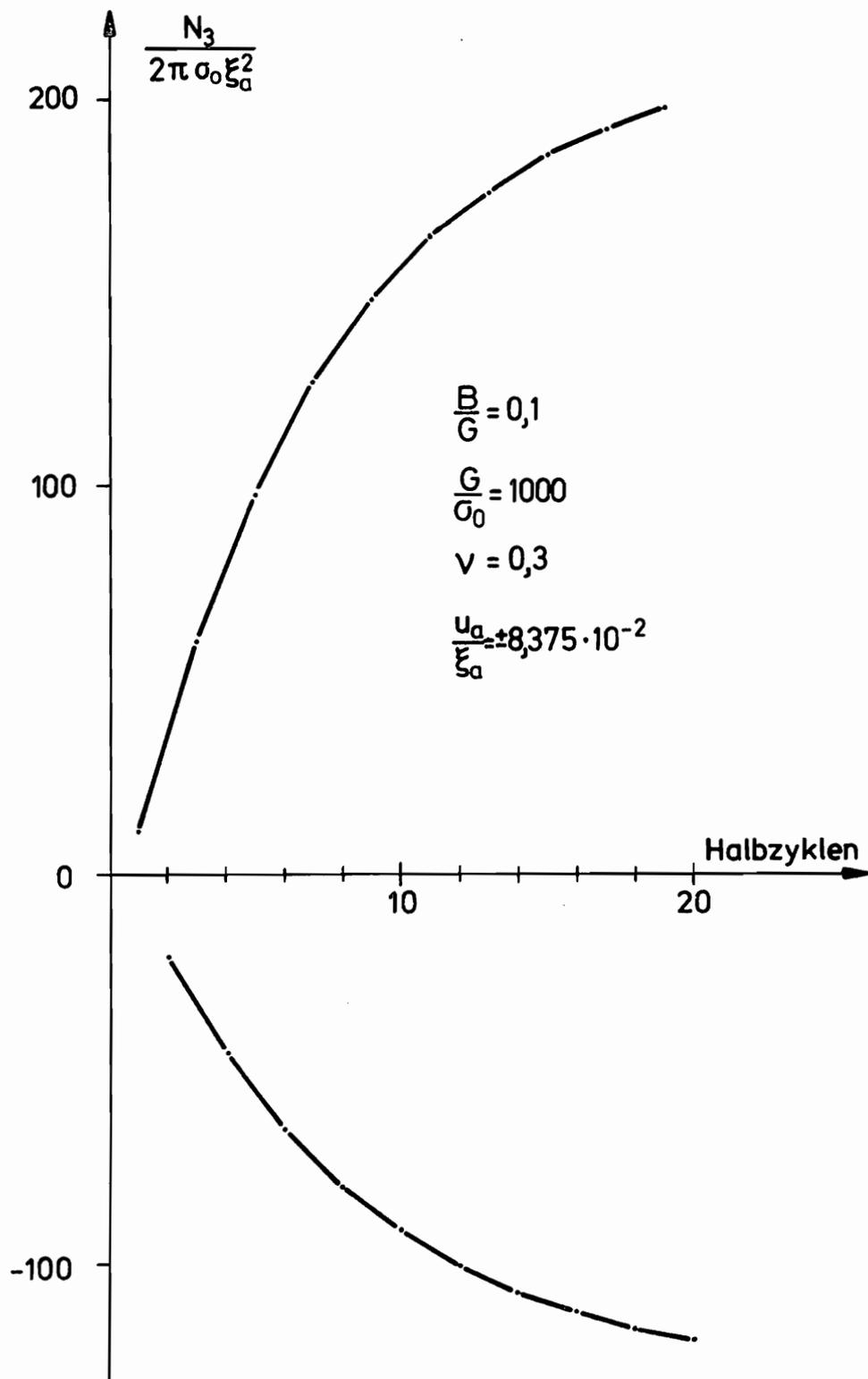


Abb. 7 - 19 Axialkraft N_3

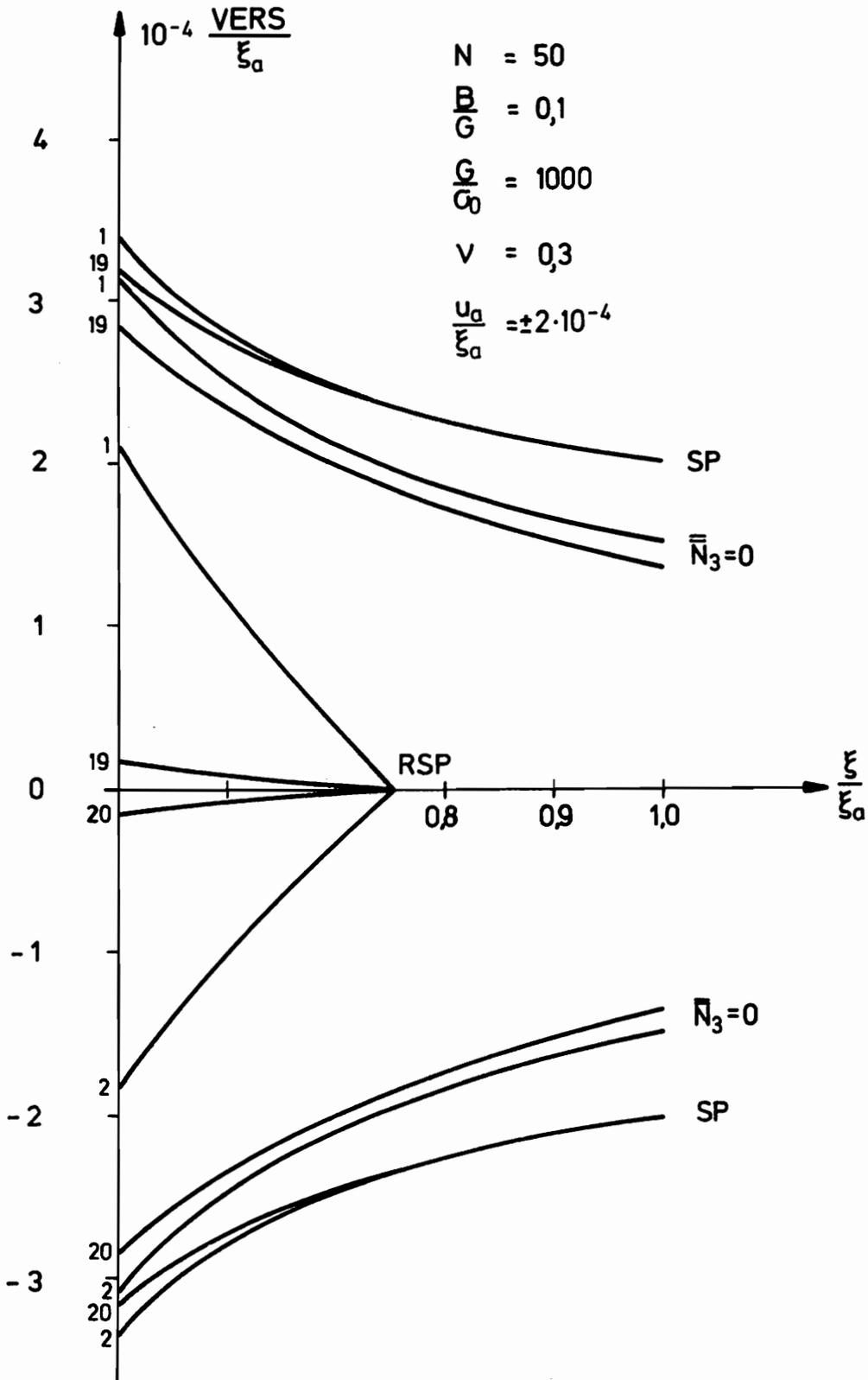


Abb. 7 - 20 Verschiebungen

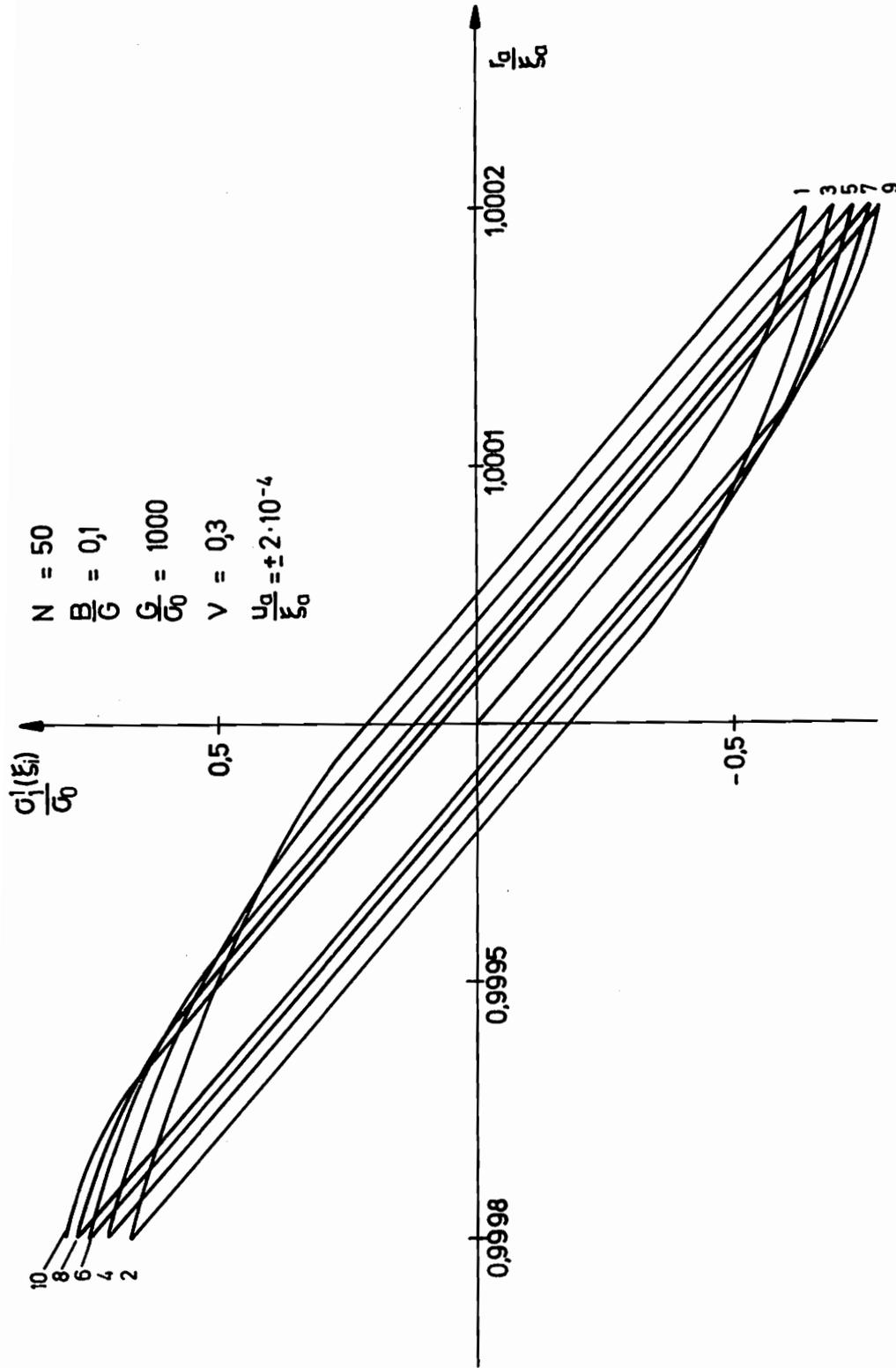


Abb. 7-21 Last-Verformungs - Diagramm

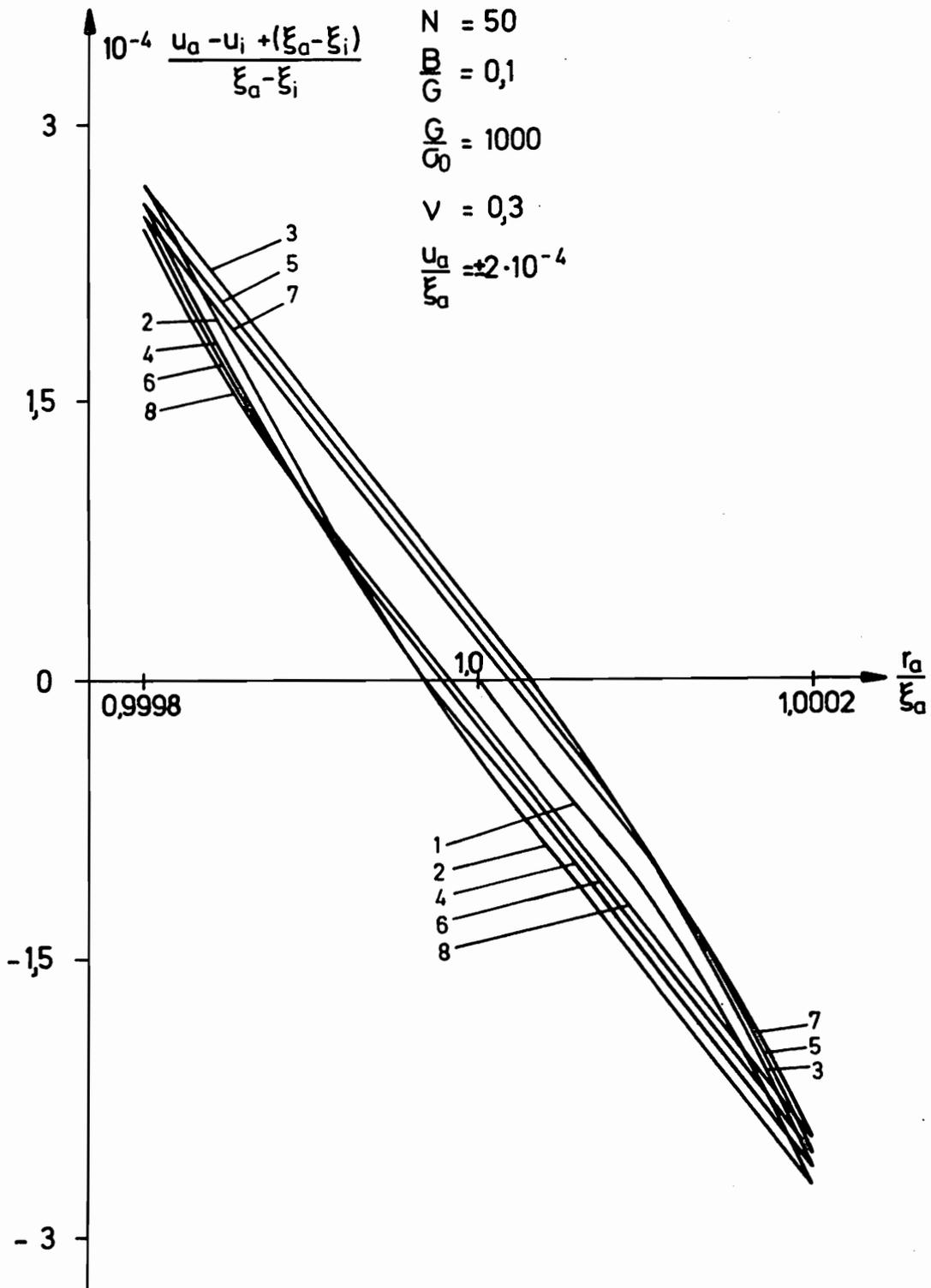


Abb. 7-22 Dickenänderung

so daß wir feststellen können, daß sich mit großer Zyklenanzahl eine elastische Last-Verformungskurve einstellen wird.

7.3.6 Dickenänderung

Bei jedem Halbzyklus stellen wir fest, daß die Innenrandverschiebung u_i sich gegenüber der Außenrandverschiebung u_a infolge der zyklischen Beanspruchung geändert hat. Aus dieser Beobachtung können wir die Dickenänderung des Zylinders berechnen.

$$\frac{u_a - u_i + (\varrho_a - \varrho_i)}{\varrho_a - \varrho_i} = \text{bezogene Dickenänderung} \quad (7.6)$$

In Abbildung 7-22 sehen wir diese bezogene Dickenänderung des dickwandigen Zylinders für kleine Verformungen. Aus der Abbildung können wir ablesen, daß sich mit steigender Zyklenzahl eine Gerade über den ganzen Änderungsbereich einstellt.

7.4 Spannungszyklen

7.4.1 Spannungsverteilung

Für den Spannungszyklus gilt die Definition aus dem Kapitel 5.4.1. Die Spannung am Zylinderinnenrand variiert zwischen $-\sigma_1 / \sigma_0$ und $+\sigma_1 / \sigma_0$. In den Abbildungen 7-23 bis 7-28 sind die Spannungszyklen für die drei Querkontraktionszahlen $\nu = 0, 0.3$ und 0.5 für kleine Spannungen dargestellt. Bei den Kurvenverläufen für die Azimutalspannung σ_2 / σ_0 und damit verbunden für die Axialspannung σ_3 / σ_0 fallen sofort die Knickstellen auf. Nehmen wir den ersten Halbzyklus, so erkennen wir eine Knickstelle im Kurvenverlauf, die durch das unterschiedliche Werkstoffverhalten in den benachbarten Bereichen bedingt ist. Der Bereich vom Innenrand ϱ_i bis zur elastoplastischen Grenze ϱ_{gr} verhält sich elasto-

plastisch und von ϱ_r bis zum Außenrand ϱ_a elastisch. Beim zweiten Halbzyklus, der durch die alte Knickstelle aus dem ersten Halbzyklus und eine zweite neue Knickstelle gekennzeichnet ist, ist die elastoplastische Grenze ϱ_r in die Richtung des Innenrandes ϱ_i des Zylinders gewandert, d. h. daß die elastoplastische Zone geschrumpft ist und die elastische Zone sich um den Bereich zwischen der Fließgrenze aus dem vorhergehenden Halbzyklus, hier dem ersten Halbzyklus, und der neuen elastoplastischen Grenze aus dem hier betrachteten Halbzyklus sich erweitert hat. Mit der Anzahl der Halbzyklen wächst auch die Zahl der Knickstellen, und wandert die elastoplastische Grenze ϱ_r in die Richtung des Zylinderinnenrandes ϱ_i .

Die Unterschiede aus den drei verschiedenen Querkontraktionszahlen lassen sich am besten an der Azimutalspannung G_i / G_0 erkennen. Bei der Querkontraktionszahl $\nu = 0$ ist die Differenz zwischen dem ersten und dritten Halbzyklus im Vergleich mit den Kurven für $\nu = 0.3$ und $\nu = 0.5$ am größten und für $\nu = 0.5$ am kleinsten. Die Ausgangskurven des ersten Halbzyklus sind für alle drei Querkontraktionszahlen nahezu identisch, und die Kurven für den 19. und 20. Halbzyklus sind fast deckungsgleich. Wir werden uns wie bei den Verschiebungszyklen auf die Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$ beschränken und weiterhin nur mit dem Verfestigungsmodul $B/G = 0.1$ rechnen. Mit der Größenordnung dieser Kenndaten befinden wir uns im Bereich metallischer Werkstoffe.

Die Abbildungen 7-29 und 7-30 zeigen die Spannungsverläufe für große Spannungen. Der Zylinder ist im ersten Halbzyklus voll elastoplastisch. Im zweiten Halbzyklus ist der Zylinder im Gegensatz zu den Spannungsverläufen bei kleinen Spannungen vom Außenrand ϱ_a bis zur elastoplastischen Grenze bei $\varrho_r / \varrho_a = 0.664$ elastoplastisch

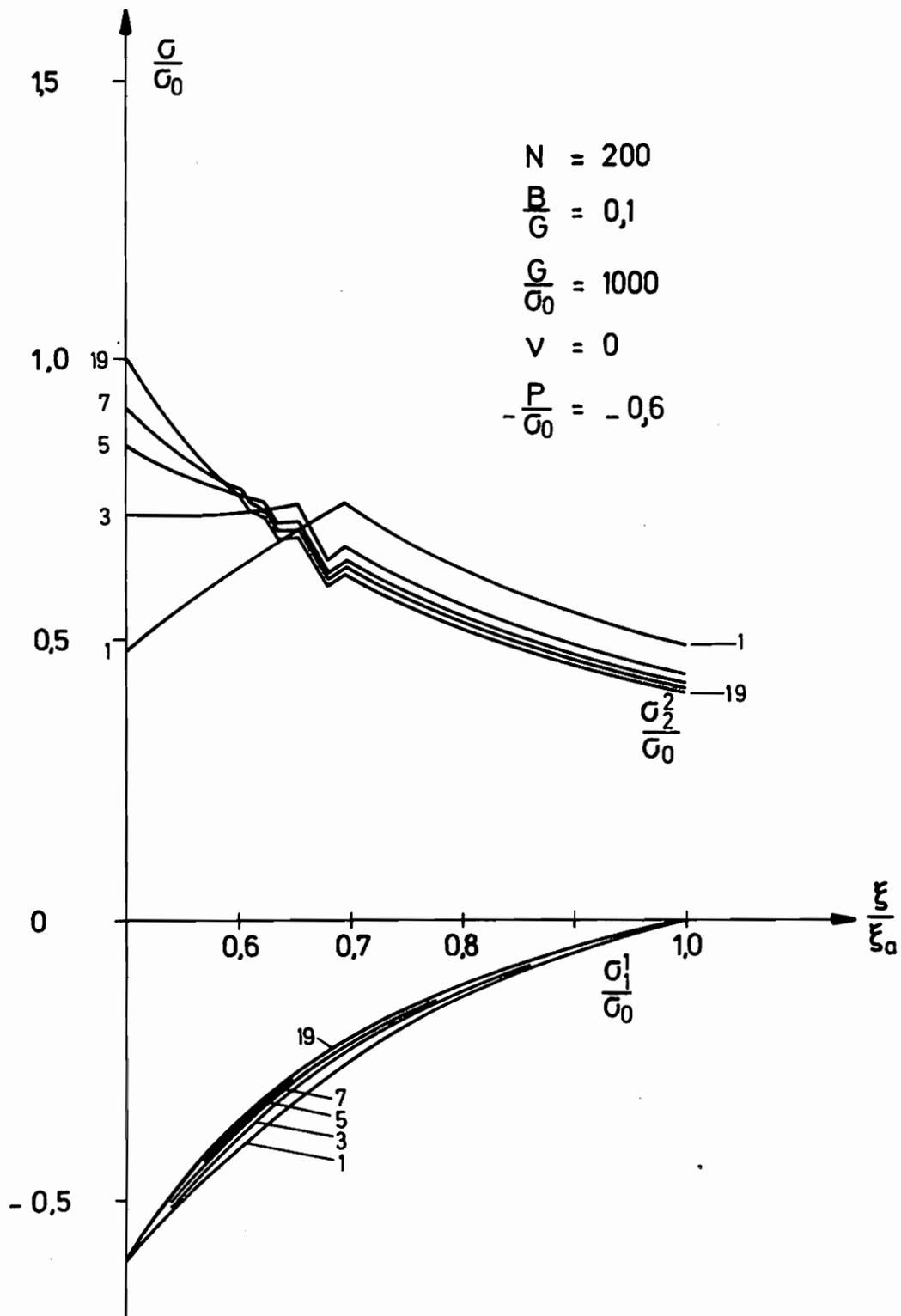


Abb. 7-23 Spannungsverlauf bei Spannungszyklen

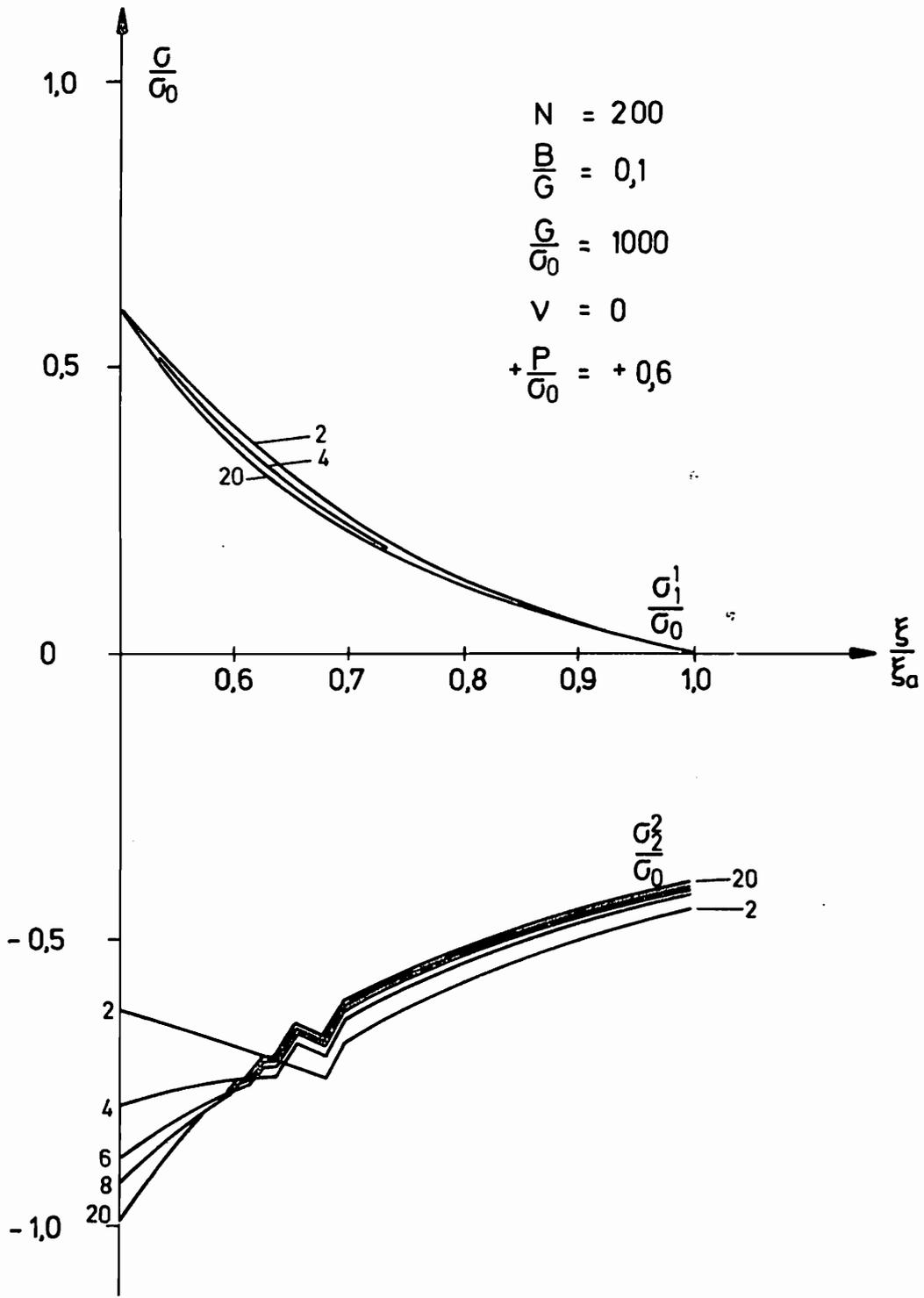


Abb. 7-24 Spannungsverlauf bei Spannungszyklen

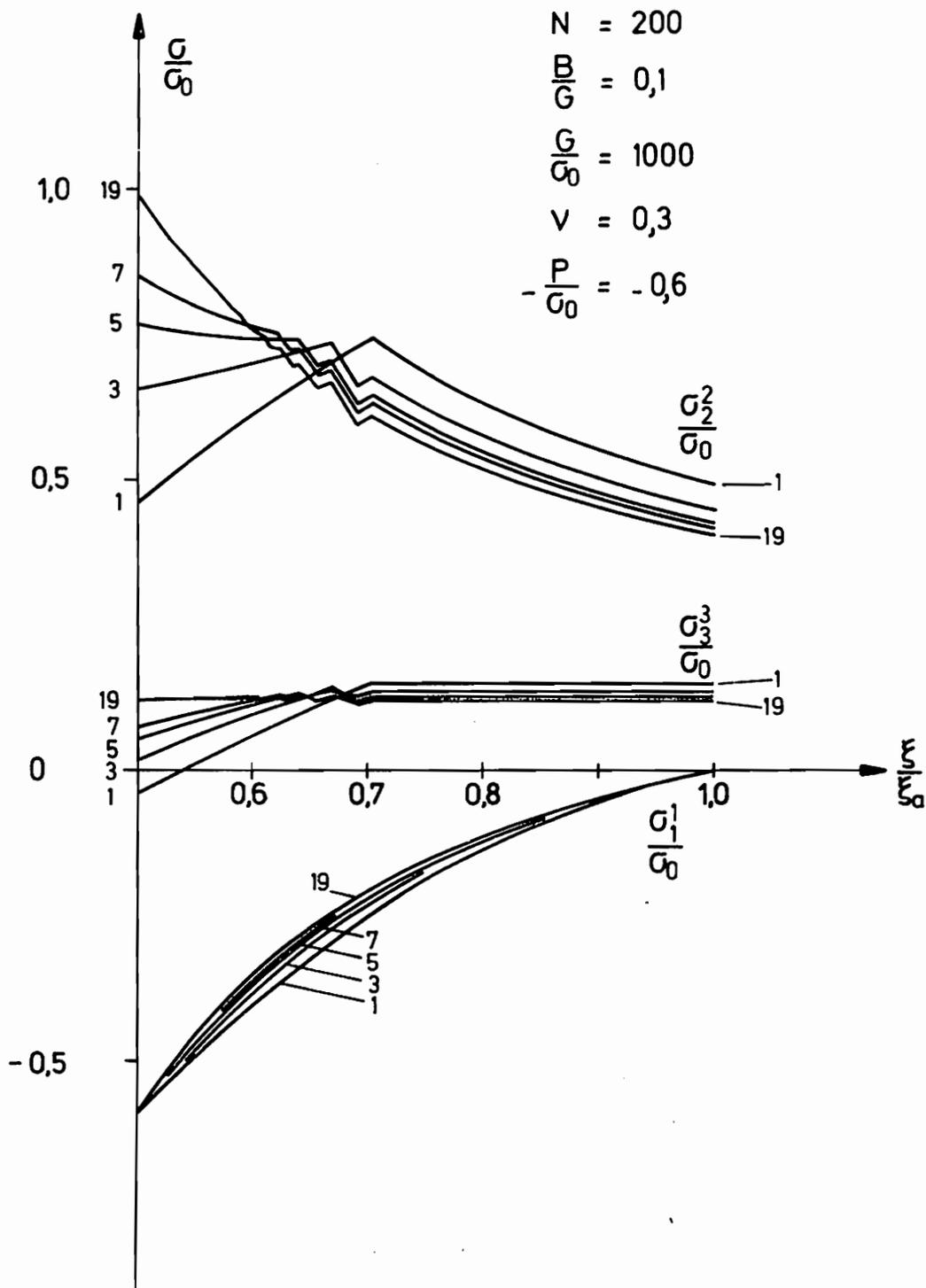


Abb. 7 - 25 Spannungsverlauf bei Spannungszyklen

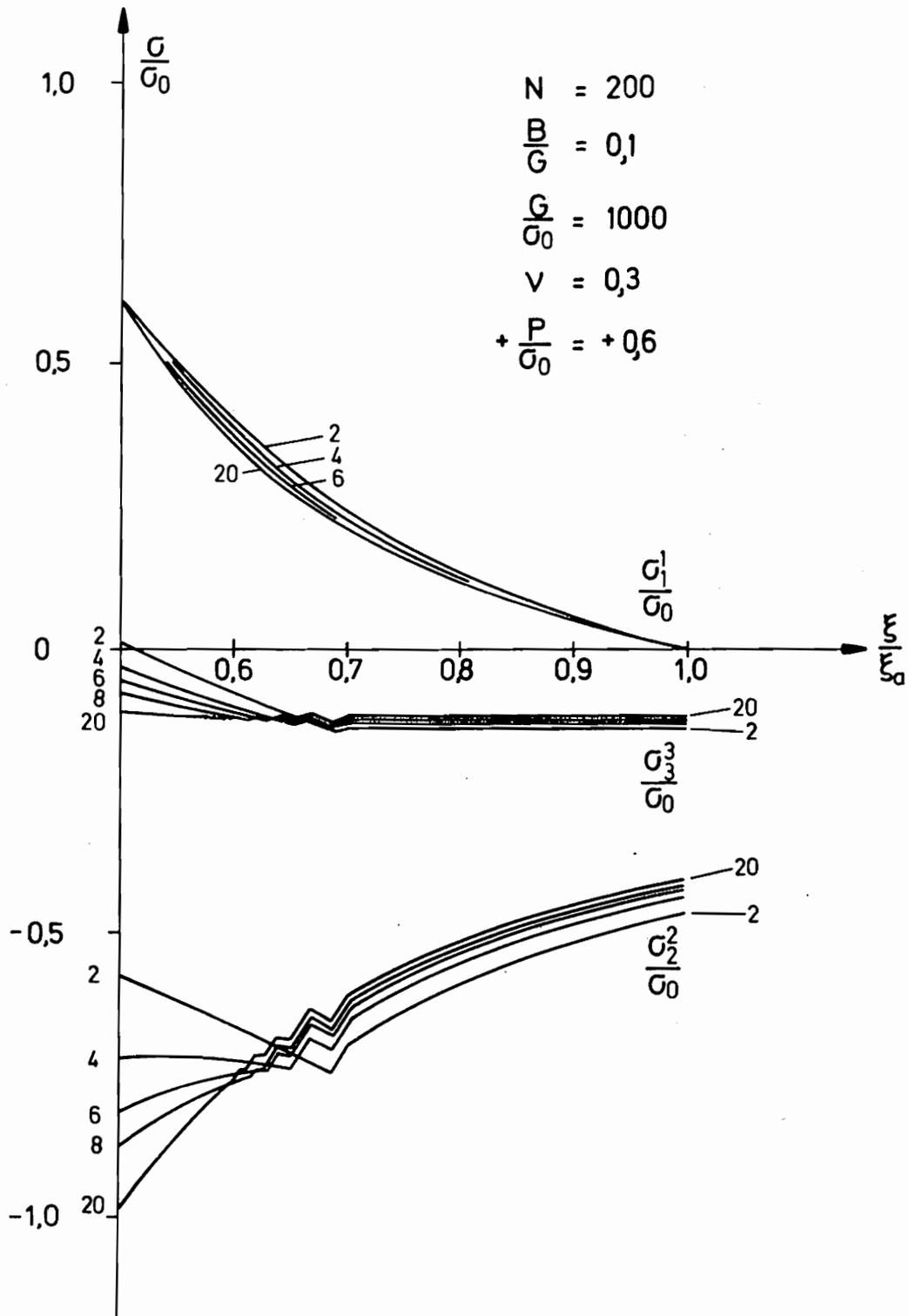


Abb. 7-26 Spannungsverlauf bei Spannungszyklen

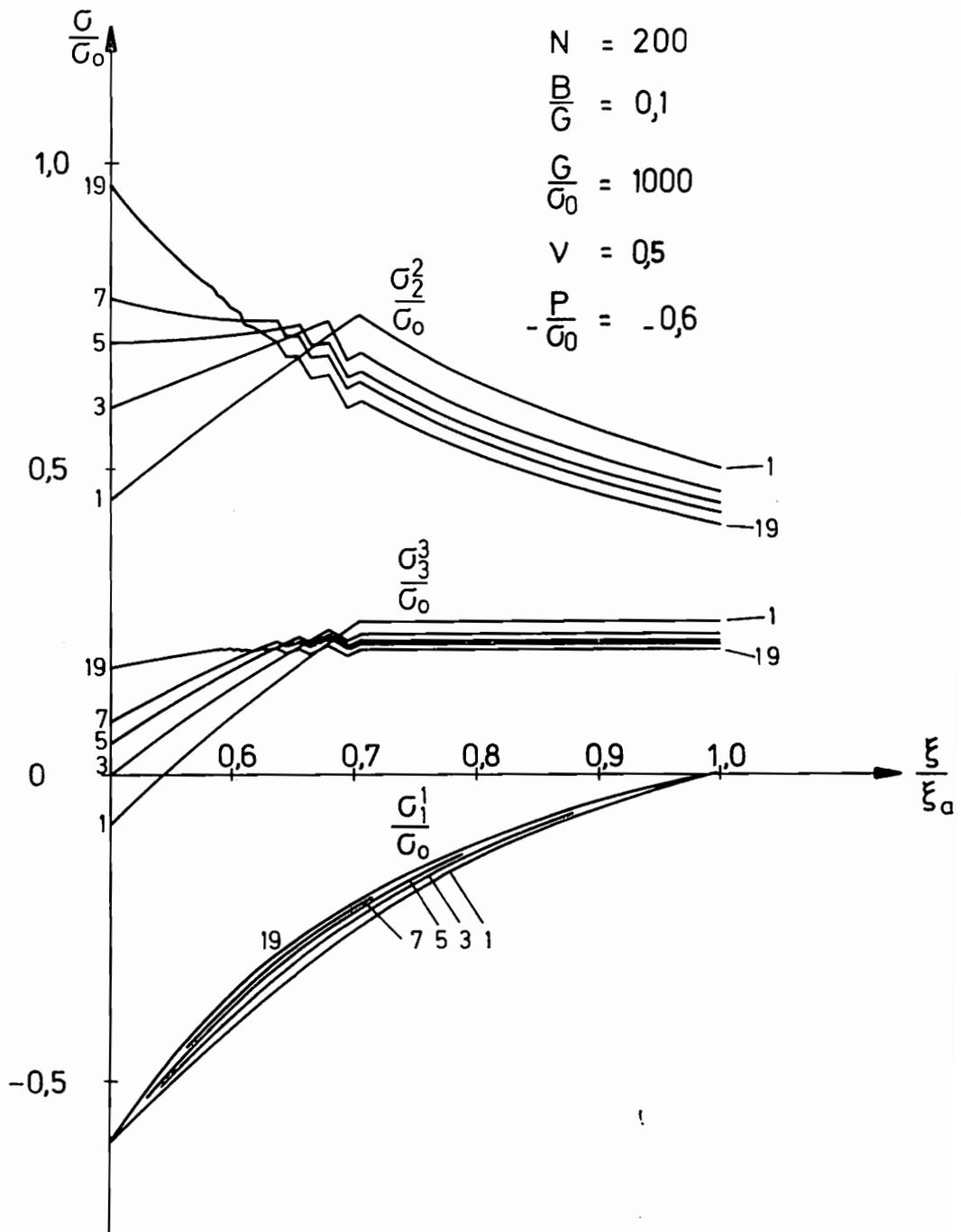


Abb. 7-27 Spannungsverlauf bei Spannungszyklen

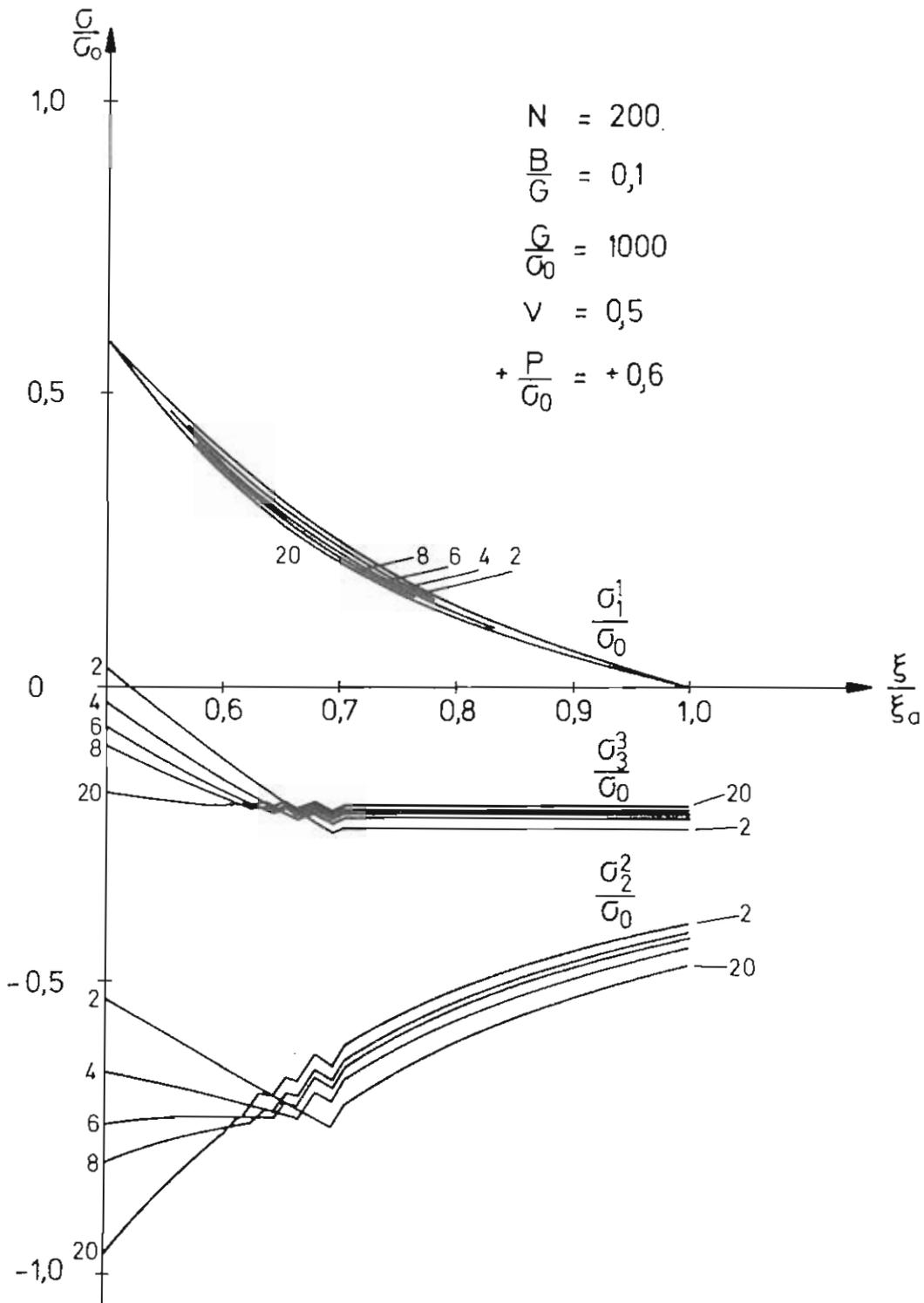


Abb. 7-28 Spannungsverlauf bei Spannungszyklen

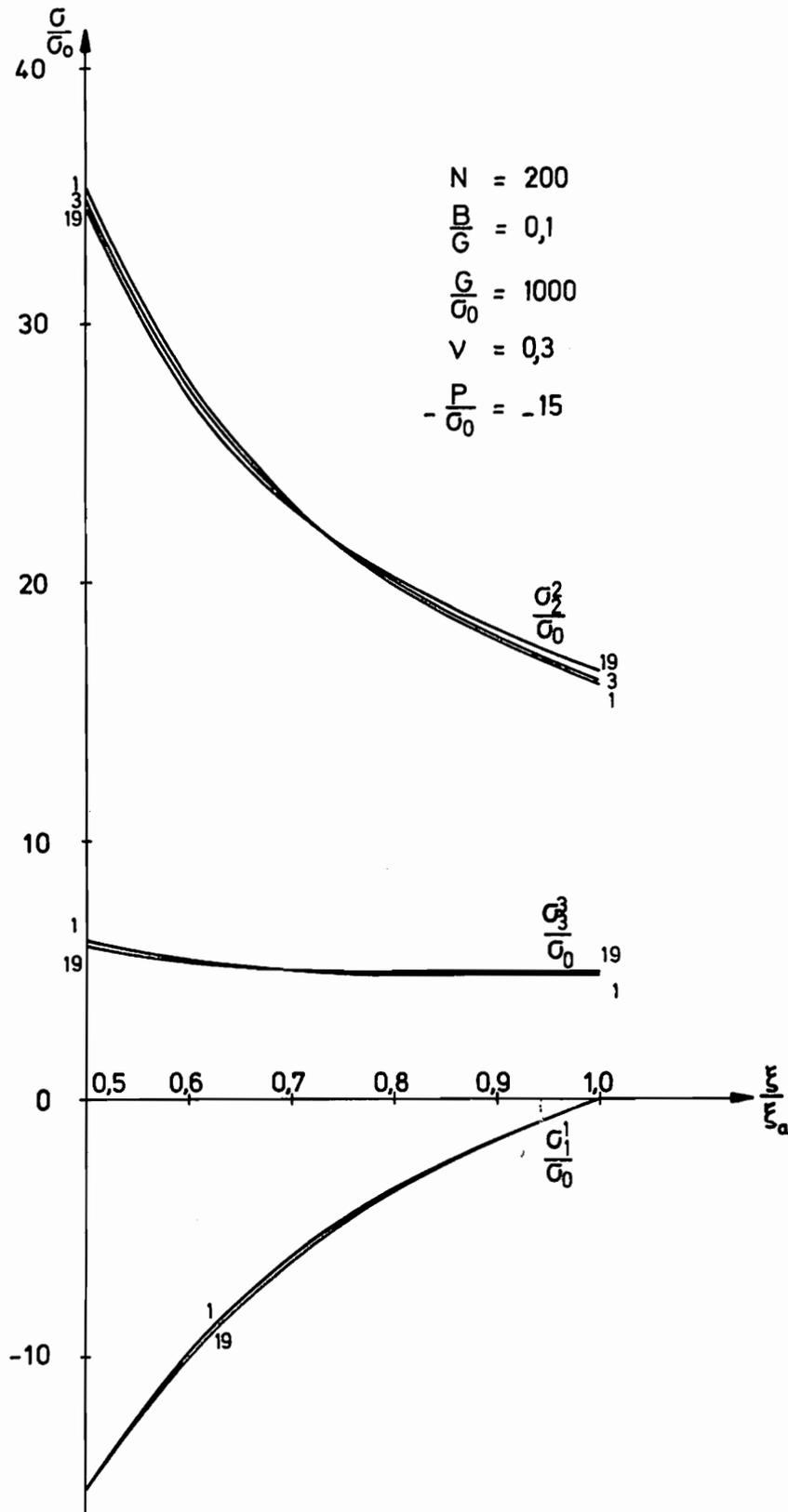


Abb. 7-29 Spannungsverlauf bei Spannungszyklen

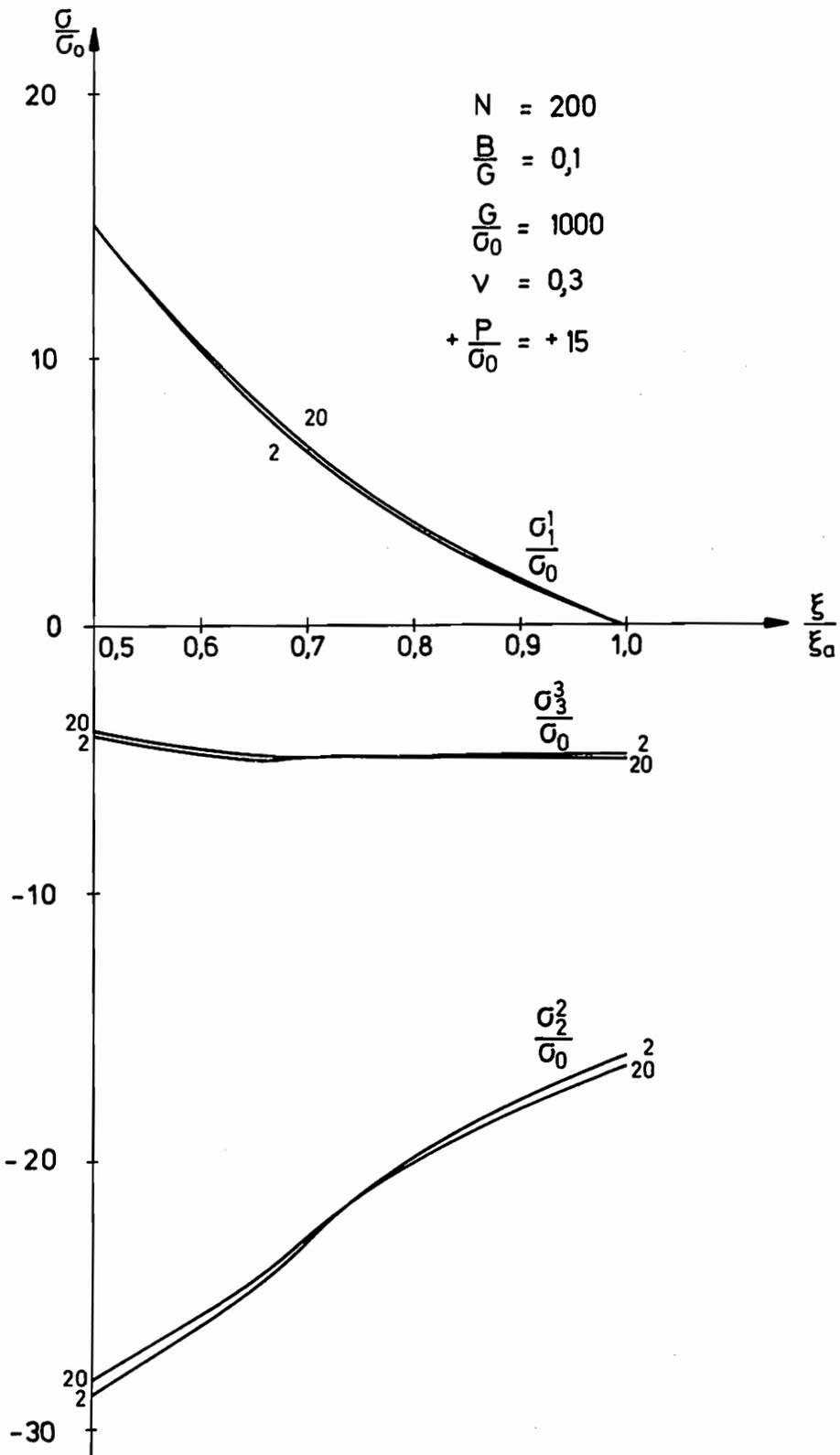


Abb. 7 - 30 Spannungsverlauf bei Spannungszyklen

und von σ_{gr} bis zum Innenrand σ_i elastisch. Wie wir bereits in Kapitel 7.2 und bei der Abbildung 7-3 gesehen haben, verhält sich der dickwandige Zylinder bei großen Beanspruchungen ganz anders als bei kleinen Beanspruchungen. Auch hier wandert die elastoplastische Grenze σ_{gr} , aber jetzt in Richtung des Außenrandes. Im 20. Halbzyklus liegt die elastoplastische Grenze inzwischen bei $\sigma_{gr} / \sigma_a = 0.773$. Ein weiterer Unterschied zum Verhalten bei kleinen Spannungen ist, daß mit steigender Halbzyklenanzahl die Radialspannung σ_1 / σ_0 zwischen dem Innenrand σ_i und dem Außenrand σ_a bei großen Spannungen wächst, während bei kleinen Spannungen die Radialspannung in diesen Grenzen abnimmt.

7.4.2 Restspannungen

Die Restspannungen bei großen Spannungen wechseln ihre Vorzeichen nicht mehr wie bei den kleinen Spannungen. Siehe Abbildung 7-31 und 7-32. Der Grund hierfür ist in der großen Verformung zu suchen, die der dickwandige Zylinder bei großen Spannungen im ersten Halbzyklus erfährt. Die Eigenspannungen der Radial-, Azimutal- und Axialspannung sind nicht von gerader zu ungerader und mit wachsender Halbzyklenanzahl konstant, sondern ändern ihre Werte innerhalb einer bestimmten Größenordnung. Aber die Eigenspannungen bleiben doch in beachtlicher Größe wegen der bleibenden Verformung aus dem ersten Halbzyklus, wie wir aus Abbildung 7-36 erkennen können, bestehen. Bei der Azimutalspannung σ_2 / σ_0 und folglich auch bei der Axialspannung σ_3 / σ_0 sind wieder die Knickstellen im Kurvenverlauf zu sehen, die durch das unterschiedliche Werkstoffverhalten verursacht werden. Auch an diesen Kurvenverläufen der Eigenspannungen sehen wir deutlich, wie die elastoplastische Grenze σ_{gr} zum Außenrand σ_a wandert und damit der elastische Bereich vom Innenrand σ_i mit steigender

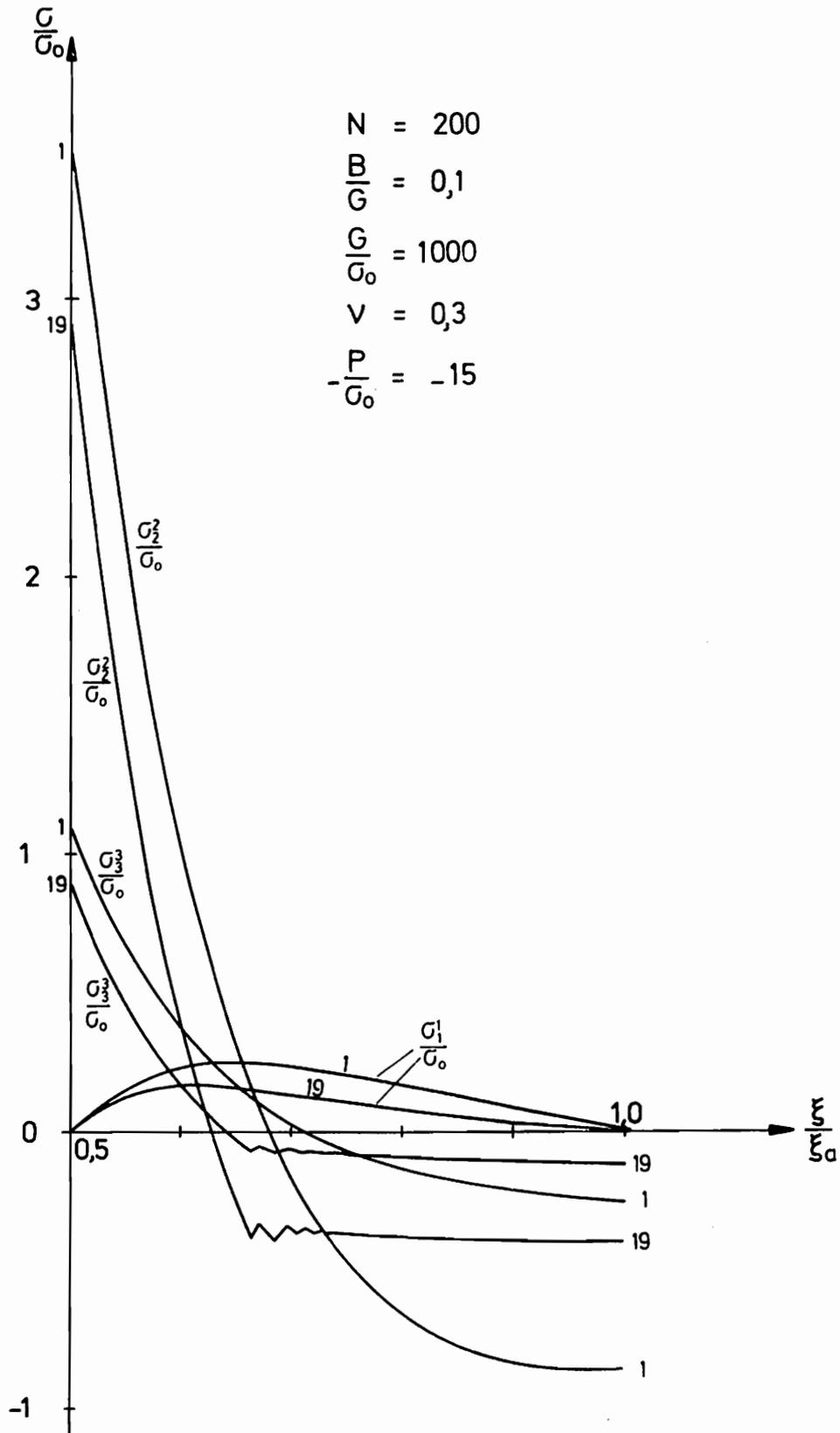


Abb. 7 - 31 Restspannungen

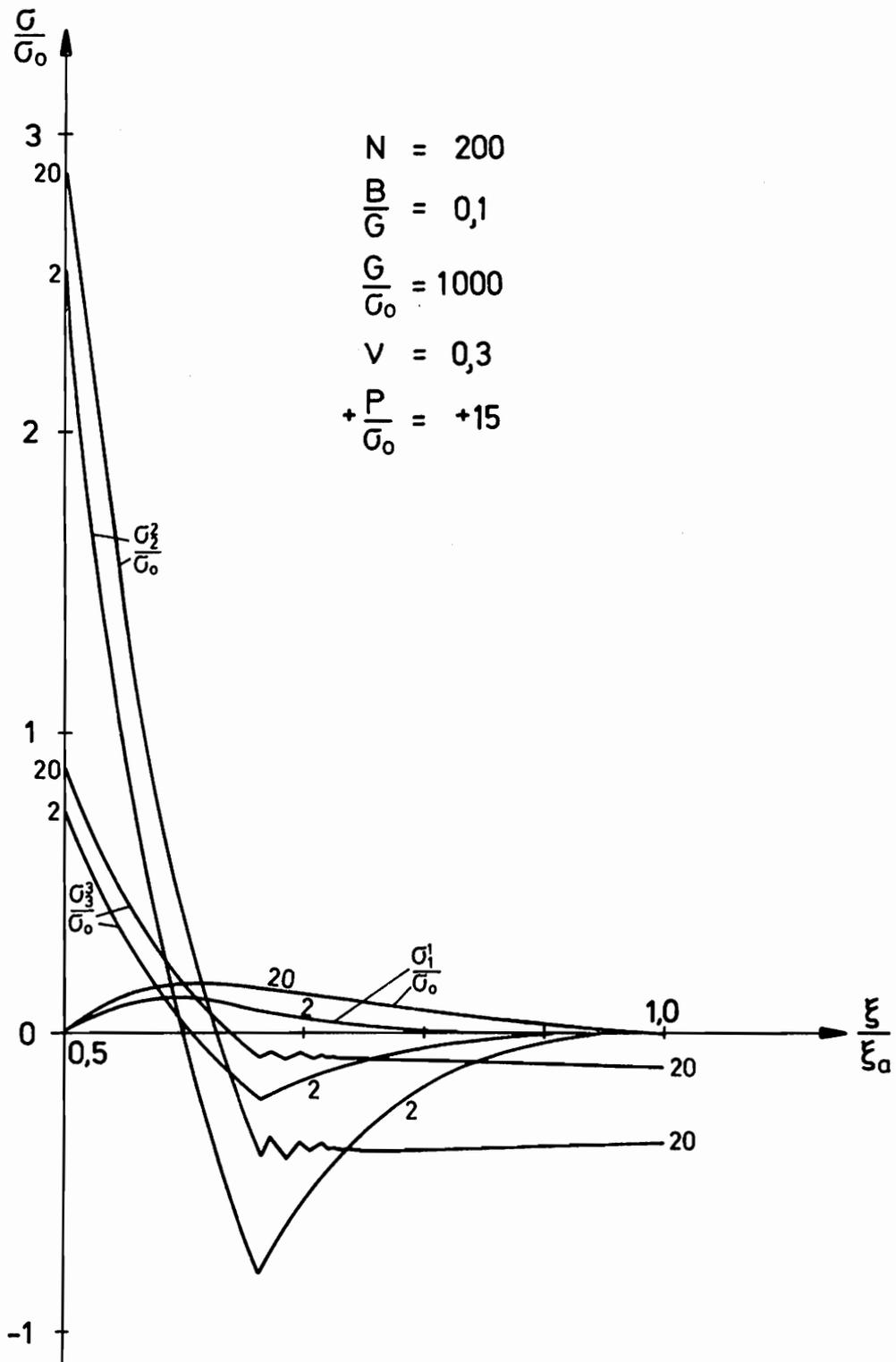


Abb. 7 - 32 Restspannungen

Zyklenanzahl vergrößert wird.

7.4.5 Axialkraft N_3

In Abbildung 7-33 sind die Axialkräfte für unterschiedliche Querkontraktionszahlen ν bei kleinen Spannungen dargestellt. Die Abbildung 7-34 zeigt die Axialkräfte unter großen Spannungen. Auffallend ist die konstante Größe der Axialkraft N_3 , deren Verhalten unmittelbar an den Spannungsverläufen für die Axialspannung σ_3^s / σ_0 , in den Abbildungen 7-25 bis 7-30 vergleichbar, abzulesen ist.

7.4.4 Verschiebungen

Die in Abbildung 7-35 gezeichneten Verschiebungskurven für größere Spannungen lassen erkennen, daß die Verschiebungen für die Spannungen nicht mehr um die Ausgangslage pendelt wie bei kleinen und großen Verschiebungen bzw. bei kleinen Spannungen, sondern daß der Mittelwert für diese Verschiebungen die Verschiebungskurve der Restspannungen ist. Die Verschiebungen zwischen dem 1. und 19. bzw. zwischen dem 2. und 20. Halbzyklus haben untereinander kaum nennenswerte Abweichungen.

7.4.5 Last-Verschiebungskurve

Die Last-Verschiebungskurve für große Spannungen, in Abbildung 7-36 dargestellt, zeigt im ersten Halbzyklus eine große Verformung auf, die auch für den besonderen Eigenspannungszustand des dickwandigen Zylinders kennzeichnend ist. Die vom zweiten Halbzyklus an gezeichneten Last-Verschiebungskurven nähern sich mit steigender Zyklenzahl einer Geraden an.

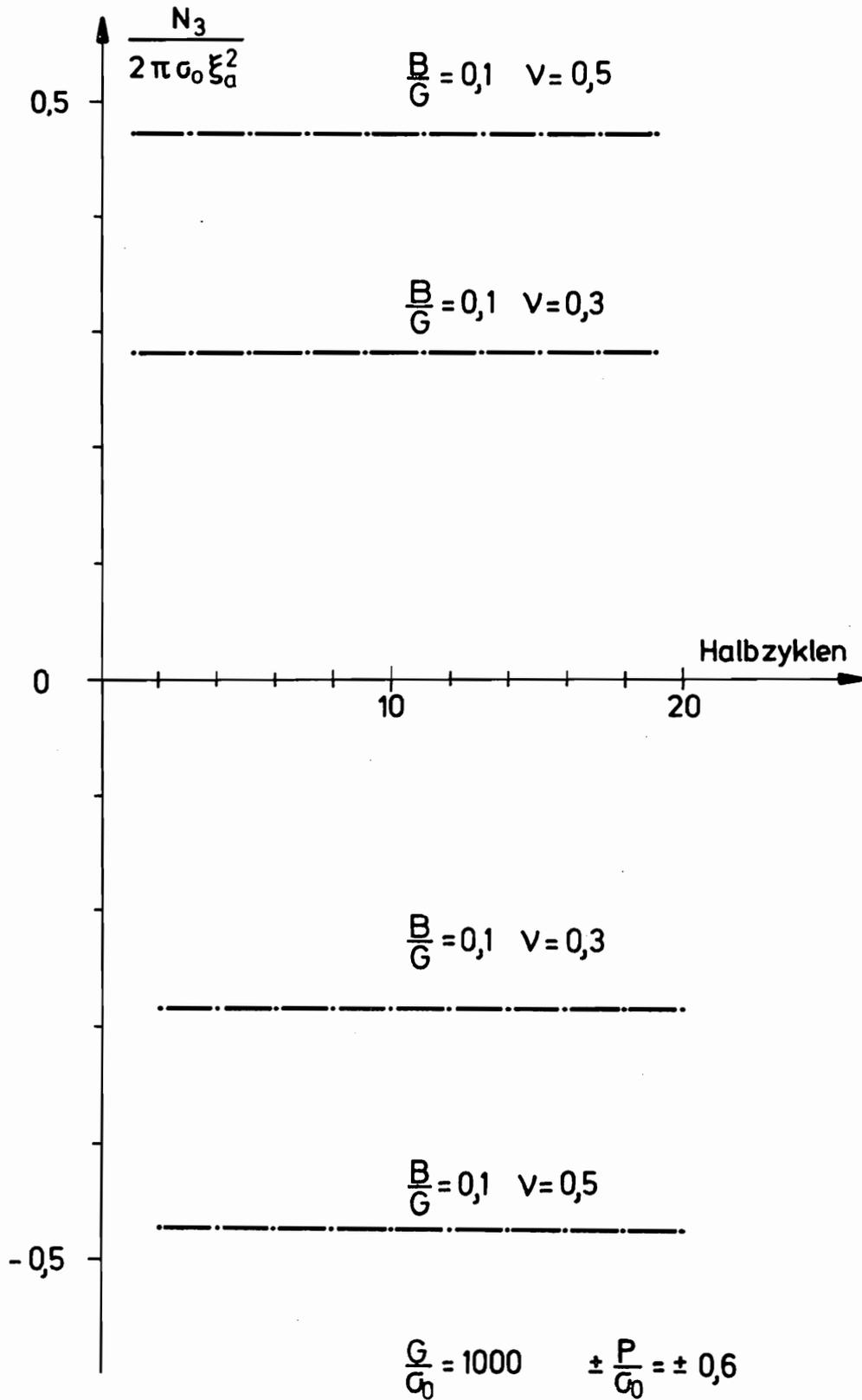


Abb.7 - 33 Axialkraft N_3

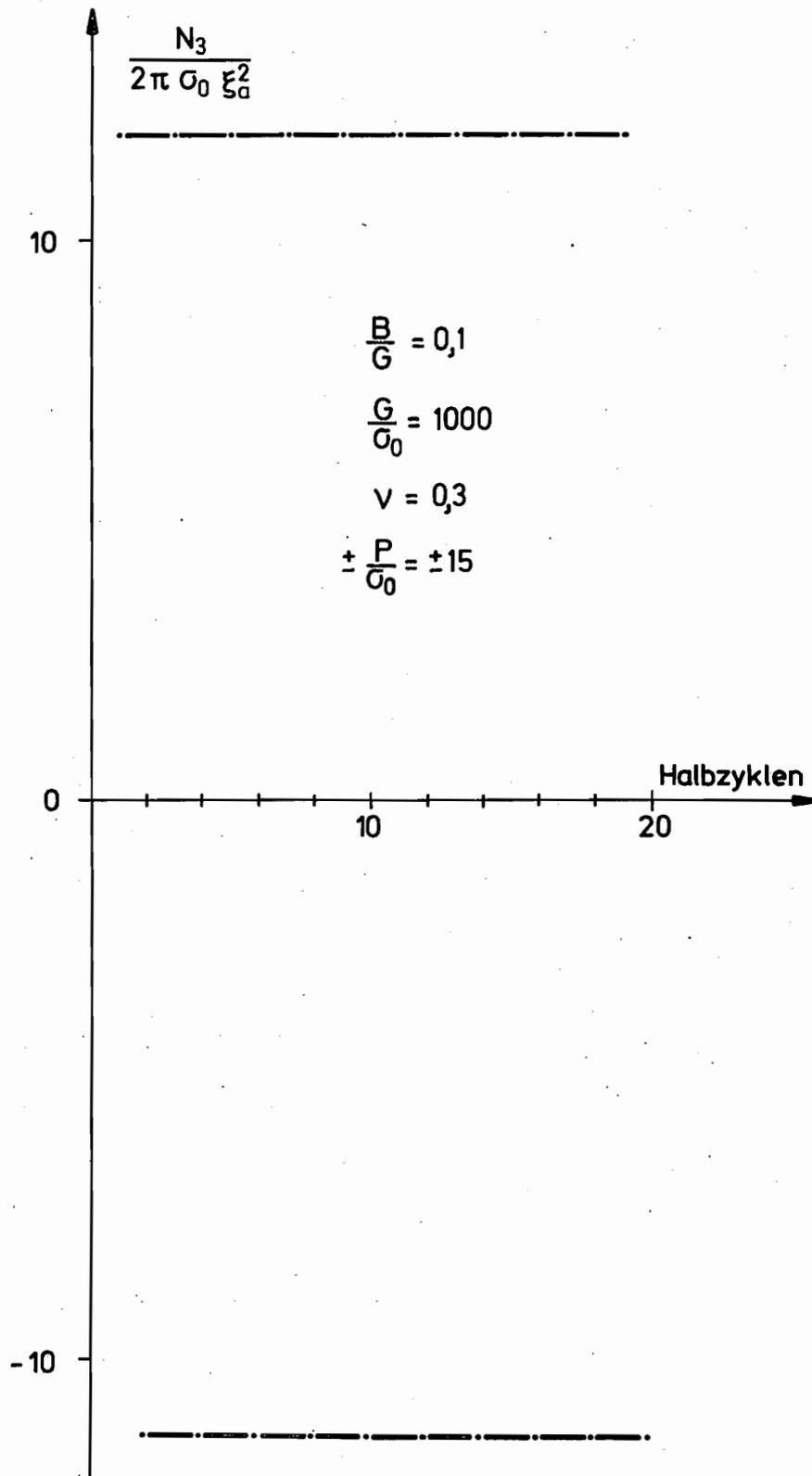


Abb.7-34 Axialkraft N_3

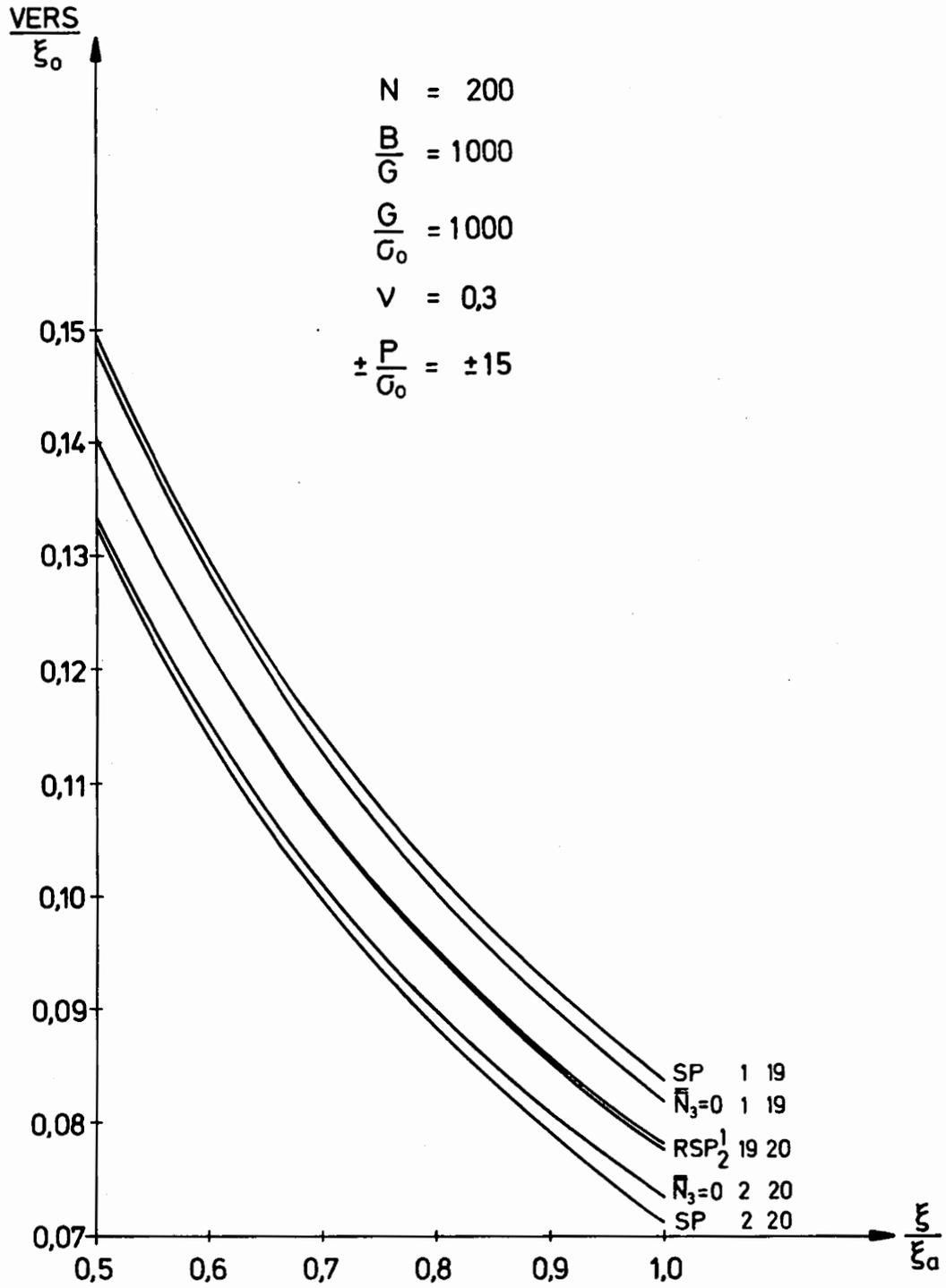


Abb.7 - 35 Verschiebungen

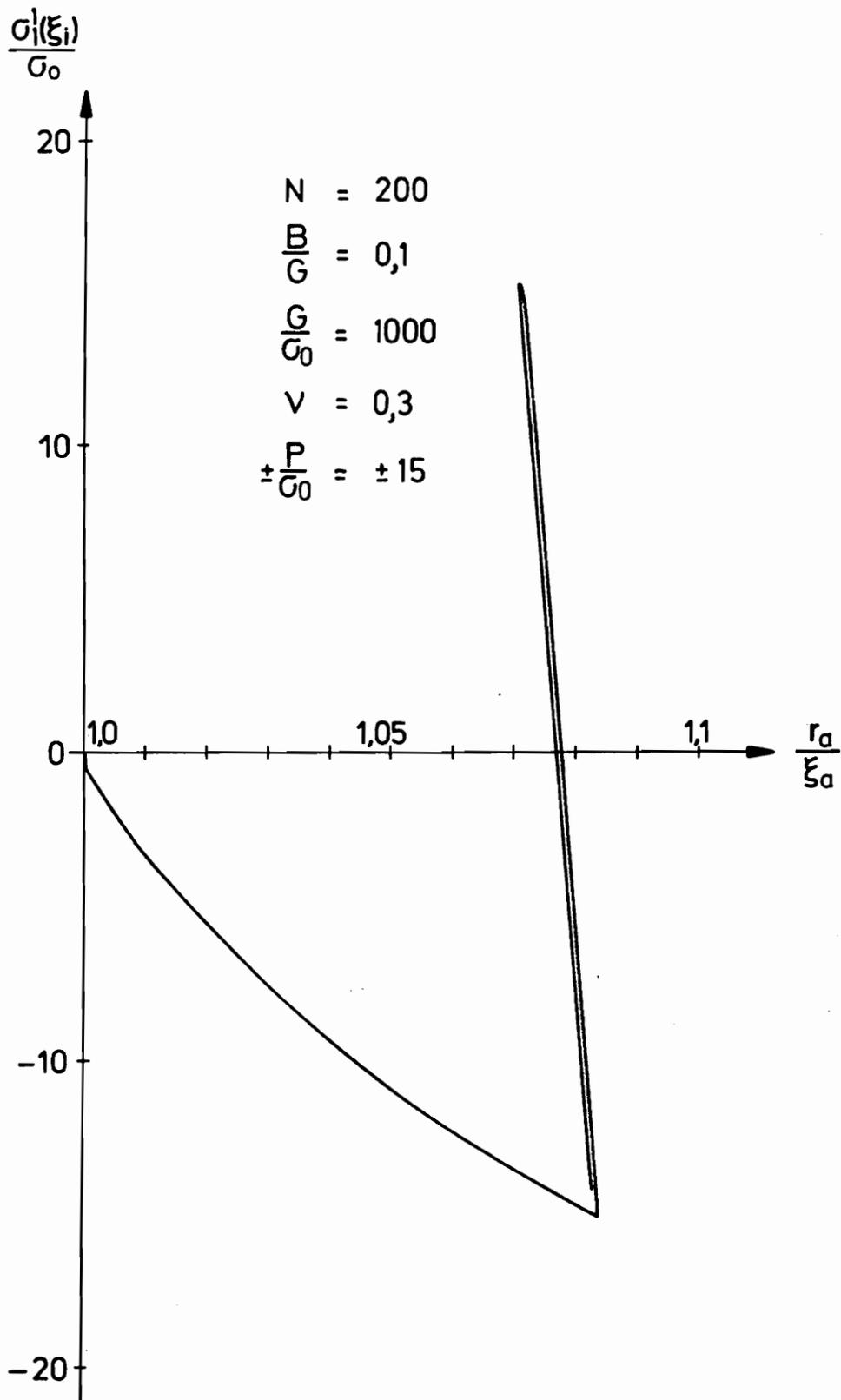


Abb. 7 - 36 Last - Verformungs - Diagramm

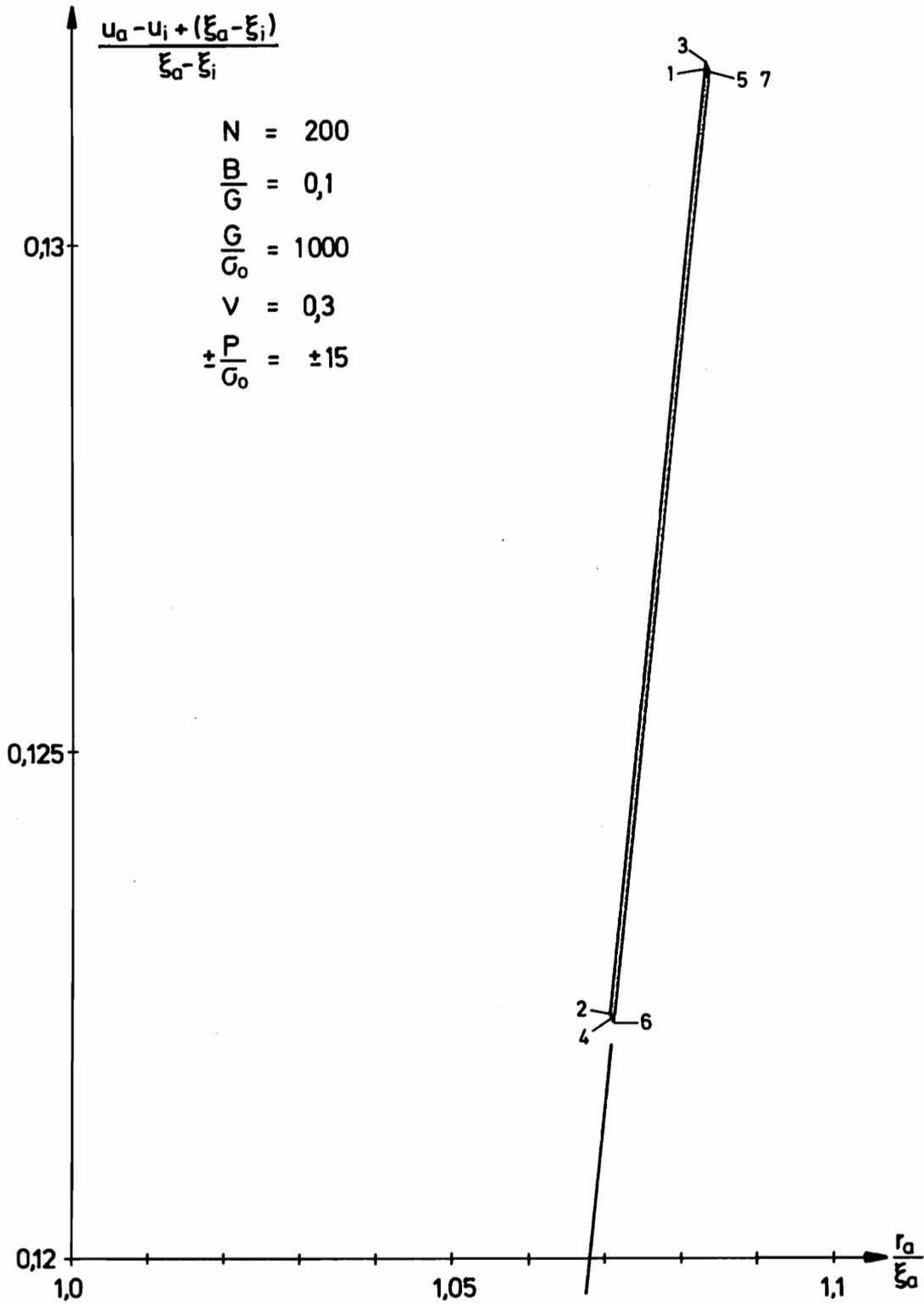


Abb. 7 - 37 Dickenänderung

7.4.6 Dickenänderung

Wie auch in Abbildung 7-37 zu sehen ist, setzt mit steigender Zyklenzahl ein Trend zu einer Geraden für die Dickenänderung ein.

8. Der dickwandige Zylinder ohne Normalkraft in Axialrichtung

8.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird die zuvor entwickelte Theorie, die für einen ebenen Verzerrungszustand gilt, dahin ausgebaut, daß eine konstante, nur zeitabhängige, aber von den Körperkoordinaten unabhängige Verzerrungsgeschwindigkeitskomponente

$$\dot{\alpha}_3 = \frac{\dot{\ell}}{\ell} \quad (8.1)$$

eingeführt wird. Diese Verzerrungsgeschwindigkeitskomponente verursacht in dem weiterhin vorliegenden ebenen Verzerrungszustand ebenfalls eine Kraft in Axialrichtung, die wir mit \bar{N}_3 bezeichnen wollen. Die Axialkraft N_3 , die wir aus der Integration der Axialspannung G_3^3 über den Querschnitt berechnet haben, liegt weiterhin vor. Die Verzerrung in Axialrichtung muß nun so bestimmt werden, daß bei einer Integration der Axialspannung über den Querschnitt die resultierende Axialkraft \bar{N}_3 , die aus N_3 und \bar{N}_3 gebildet wird, Null wird. Mit Gleichung (8.1) entwickeln wir die elastischen und die elastoplastischen Formänderungen analog zu den Kapiteln 5.1 und 5.2. Es ergeben sich für die rein elastischen Gleichungen

$$\dot{\epsilon}_1^1 = \frac{1}{2G} \left[(1-\nu) \dot{G}_1^1 - \nu \dot{G}_2^2 - 2\nu G \dot{\epsilon}_3^3 \right] \quad (8.2)$$

$$\dot{\epsilon}_2^2 = \frac{1}{2G} \left[(1-\nu) \dot{G}_2^2 - \nu \dot{G}_1^1 - 2\nu G \dot{\epsilon}_3^3 \right] \quad (8.3)$$

und für die elastoplastischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1^1 &= \frac{1}{2G} [(1-\nu) \dot{\sigma}_1^1 - \nu \dot{\sigma}_2^2 - 2\nu G \dot{\epsilon}_3^3] \\ &\quad - \frac{1}{B} (\sigma_2^2 - \sigma_1^1) \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_2^2 &= \frac{1}{2G} [(1-\nu) \dot{\sigma}_2^2 - \nu \dot{\sigma}_1^1 - 2\nu G \dot{\epsilon}_3^3] \\ &\quad + \frac{1}{B} (\sigma_2^2 - \sigma_1^1) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Bei den elastoplastischen Gleichungen (8.4) und (8.5) stellt sich die Frage nach der Gültigkeit der Hauptspannungsdifferenz $(\sigma_2^2 - \sigma_1^1)$ aus der Trescaschen Fließbedingung (5.14). Durch die Axialkraft \bar{N}_3 im Verhältnis zur Axialkraft N_3 werden die Radialspannung und die Azimutalspannung kaum beeinflusst werden, während die Axialspannung nur noch kleiner wird, so daß die Fließbedingung (5.14) angewandt werden muß. Erst wenn die Axialkraft \bar{N}_3 größer als die Axialkraft N_3 sein sollte, werden die anderen Hauptspannungsdifferenzen der Trescaschen Fließbedingung (3.10) maßgebend werden.

8.2 Die Differentialgleichungen für zyklische Beanspruchung

Die Differentialgleichungen entwickeln wir entsprechend dem Kapitel 5.4. Für den elastischen Bereich gelten die Gleichungen:

Die Verzerrungen in Radialrichtung sind

$$\begin{aligned} \epsilon_1^1 &= \bar{\epsilon}_1^1 - \frac{\nu}{1-\nu} \left[\epsilon_2^2 - \bar{\epsilon}_2^2 + \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} (\sigma_1^1 - \bar{\sigma}_1^1) \end{aligned} \quad (8.6)$$

Als erste Differentialgleichung für die elastische Zone erhalten wir

$$\begin{aligned} r' = \exp \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[\nu \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - (1-2\nu) \bar{\epsilon}_2^2 \right. \right. \\ \left. \left. - \nu (3-2\nu) \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1-2\nu}{2G} \left[G_1^1 - \nu \bar{G}_1^1 + (1-\nu) \bar{G}_2^2 \right] \right] \right\} . \end{aligned} \quad (8.7)$$

Die Azimutalspannung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} G_2^2 = \frac{1}{1-\nu} \left\{ 2G \left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \bar{\epsilon}_2^2 - \frac{\nu}{1-2\nu} \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \right] \right. \\ \left. + \nu (G_1^1 - \bar{G}_1^1) \right\} + \bar{G}_2^2 . \end{aligned} \quad (8.8)$$

Aus der Gleichgewichtsbeziehung berechnen wir mit (8.8) die zweite Differentialgleichung für den elastischen Bereich zu

$$\begin{aligned} G_1^1 = \left\{ \frac{1}{1-\nu} \left[2G \left\{ \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \bar{\epsilon}_2^2 - \frac{\nu}{1-2\nu} \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - (1-2\nu) G_1^1 - \nu \bar{G}_1^1 \right] + \bar{G}_2^2 \right\} \frac{r'}{r} . \end{aligned} \quad (8.9)$$

Die elastoplastische Zone im dickwandigen Zylinder beschreiben wir mit den folgenden Gleichungen. Für die Verzerrung in Radialrichtung gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^1 &= \bar{\varepsilon}_1^1 + \frac{1}{B(1-\nu)+2G} \left[\frac{1-2\nu}{2G} \{ (B+4G)G_1^1 \right. \\ &\quad \left. - (B+2G)\bar{G}_1^1 - 2G\bar{G}_2^2 + 2G\bar{k} \right] \\ &\quad - \nu(B+4G) \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) - (\nu B+2G)(\varepsilon_2^2 - \bar{\varepsilon}_2^2) \end{aligned} \quad (8.10)$$

Für die elastoplastische Zone lautet die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \tau^1 &= \exp \left\{ \frac{1}{B(1-\nu)+2G} \left[\frac{1-2\nu}{2G} \{ (B+4G)G_1^1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \nu B\bar{G}_1^1 + (1-\nu)B\bar{G}_2^2 + 2G\bar{k} \right] \right. \\ &\quad \left. - \nu \{ (3-2\nu)B + 8G \} \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \right. \\ &\quad \left. - (\nu B+2G) \ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) - (1-2\nu)B\bar{\varepsilon}_2^2 \right\} \quad (8.11) \end{aligned}$$

Für die Azimutalspannung schreiben wir

$$\begin{aligned} G_2^2 &= \frac{1}{B(1-\nu)+2G} \left\{ 2BG \left(\ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) - \bar{\varepsilon}_2^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\nu G}{1-2\nu} (B+4G) \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \right. \\ &\quad \left. + (\nu B+2G)G_1^1 - \nu B\bar{G}_1^1 \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu)B\bar{G}_2^2 + 2G\bar{k} \right\} \quad (8.12) \end{aligned}$$

Als weitere Differentialgleichung für den elastoplastischen Bereich erhalten wir nach dem Einsetzen von (8.12) in die Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned}
 \sigma_1' = & \left\{ \frac{1}{B(1-\nu) + 2G} [2BG \left(\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \bar{\epsilon}_2^z \right) \right. \\
 & - \frac{2\nu G}{1-2\nu} (B + 4G) \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \\
 & - (1-2\nu)B\sigma_1' - \nu B\bar{\sigma}_1' \\
 & \left. + (1-\nu)B\bar{\sigma}_2^z + 2G\bar{k} \right\} \frac{\tau}{\pi} \quad (8.13)
 \end{aligned}$$

Eine geschlossene Lösung des vorliegenden Systems von Differentialgleichungen ist nicht möglich. Seine numerische Lösung erfolgt in der gleichen Art und Weise wie sie in Kapitel 6 erarbeitet wurde.

8.3 Ergebnisse

Bei der Radialspannung σ_1' und der Azimutalspannung σ_2^z sind keine Veränderungen gegenüber den Ergebnissen aus Kapitel 7 zu verzeichnen. In den Abbildung 8-1 und 8-2 sind die Ergebnisse aus kleinen Verschiebungen und in den Abbildungen 8-3 und 8-4 aus großen Spannungen dargestellt. Wie erwartet, stellen wir in der Spannungsverteilung der Axialspannung σ_3^z einen Ausgleich fest, so daß in der Axialrichtung \mathcal{Y}^z keine Normalkraft \bar{N}_3 mehr wirkt.

Die Verschiebungen, die der Zylinder bei kleinen Verschiebungsbeanspruchungen über den Zylinderquerschnitt erfährt, liegen wieder symmetrisch zur Abszisse (Abbildung 7-20). Allerdings gehen die Verschiebungen mit steigender Zyklenzahl zurück. In Abbildung 7-35 sind auch die Verschiebungen für verschwindende Axialkraft $\bar{N}_3 = 0$ bei großen Spannungen eingezeichnet. Diese Verschiebungskurven, die in den geraden bzw. ungeraden Halbzyklen übereinstimmen, sind durch die außergewöhn-

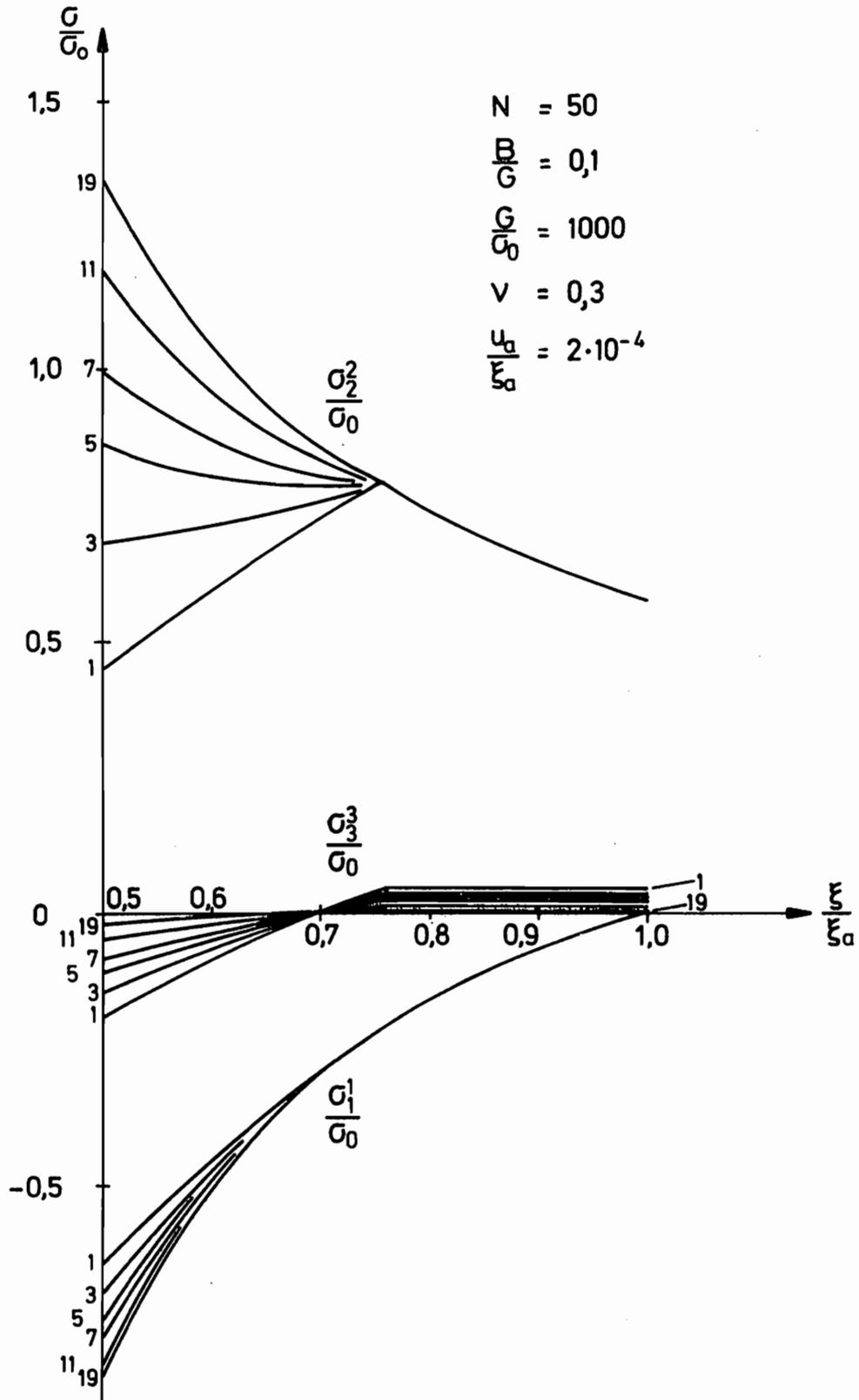


Abb. 8 - 1 Axialkraft $\bar{N}_3 = 0$

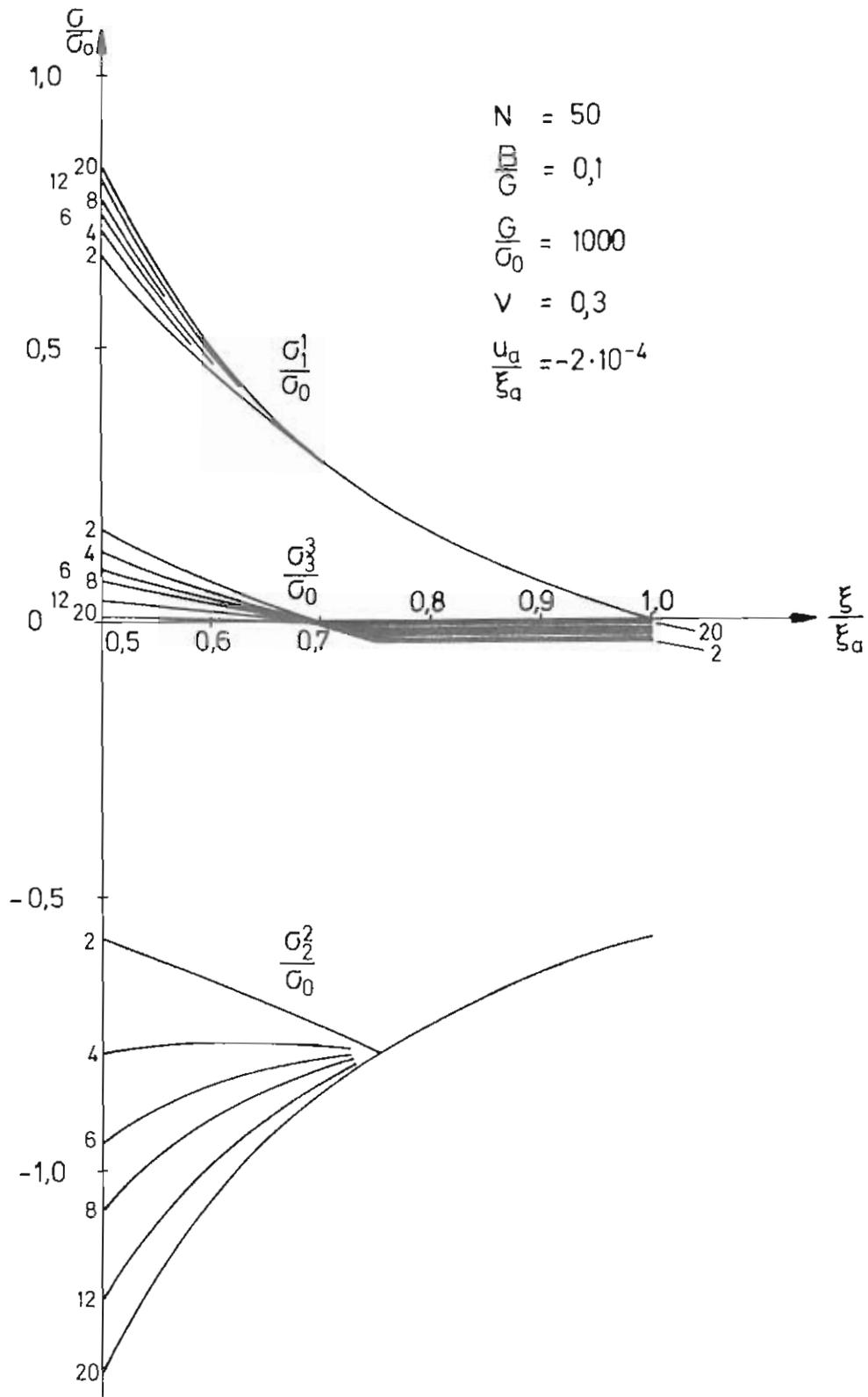


Abb. 8 - 2 Axialkraft $\bar{N}_3 = 0$

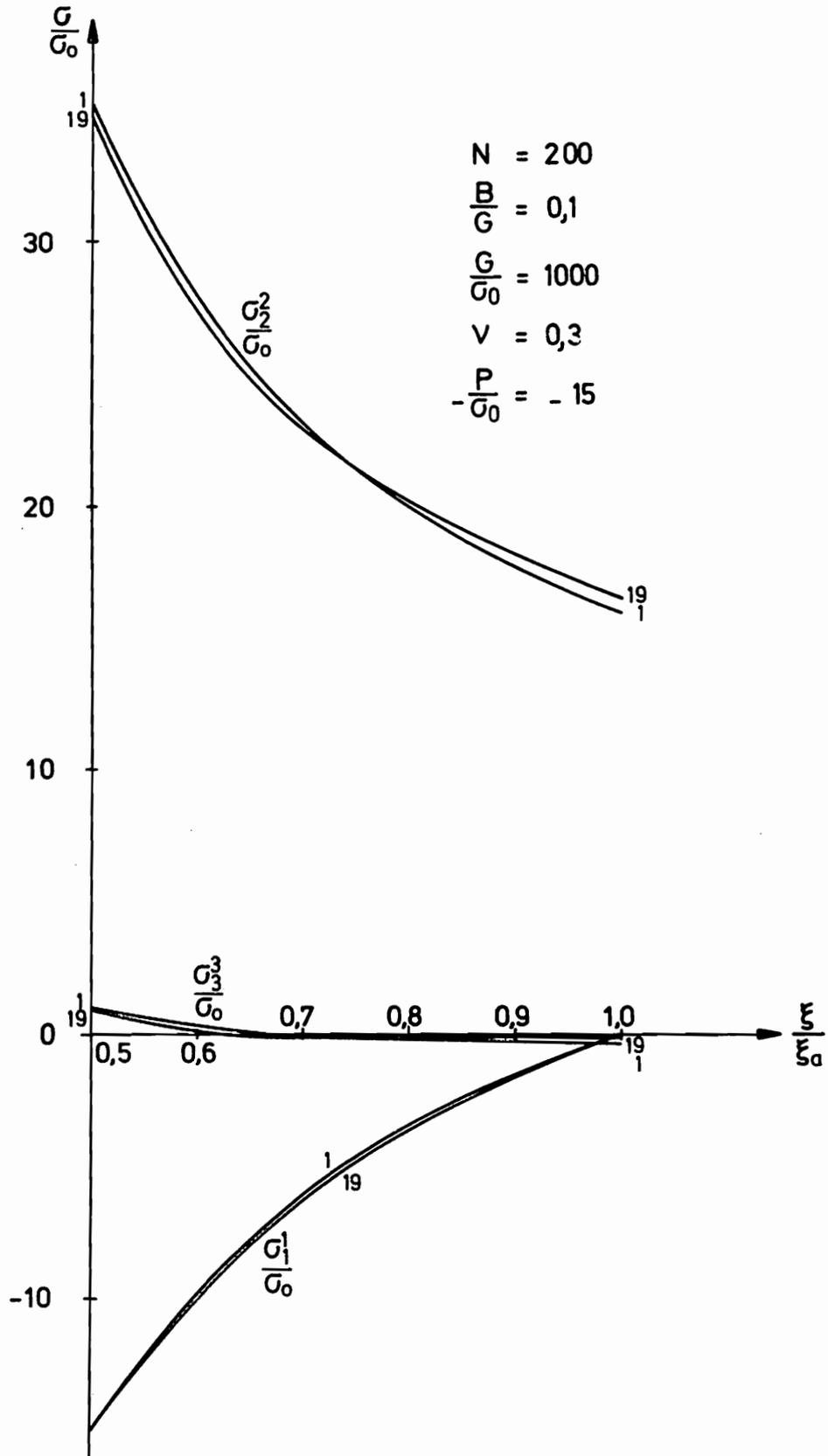


Abb. 8 - 3 Axialkraft $\bar{N}_3 = 0$

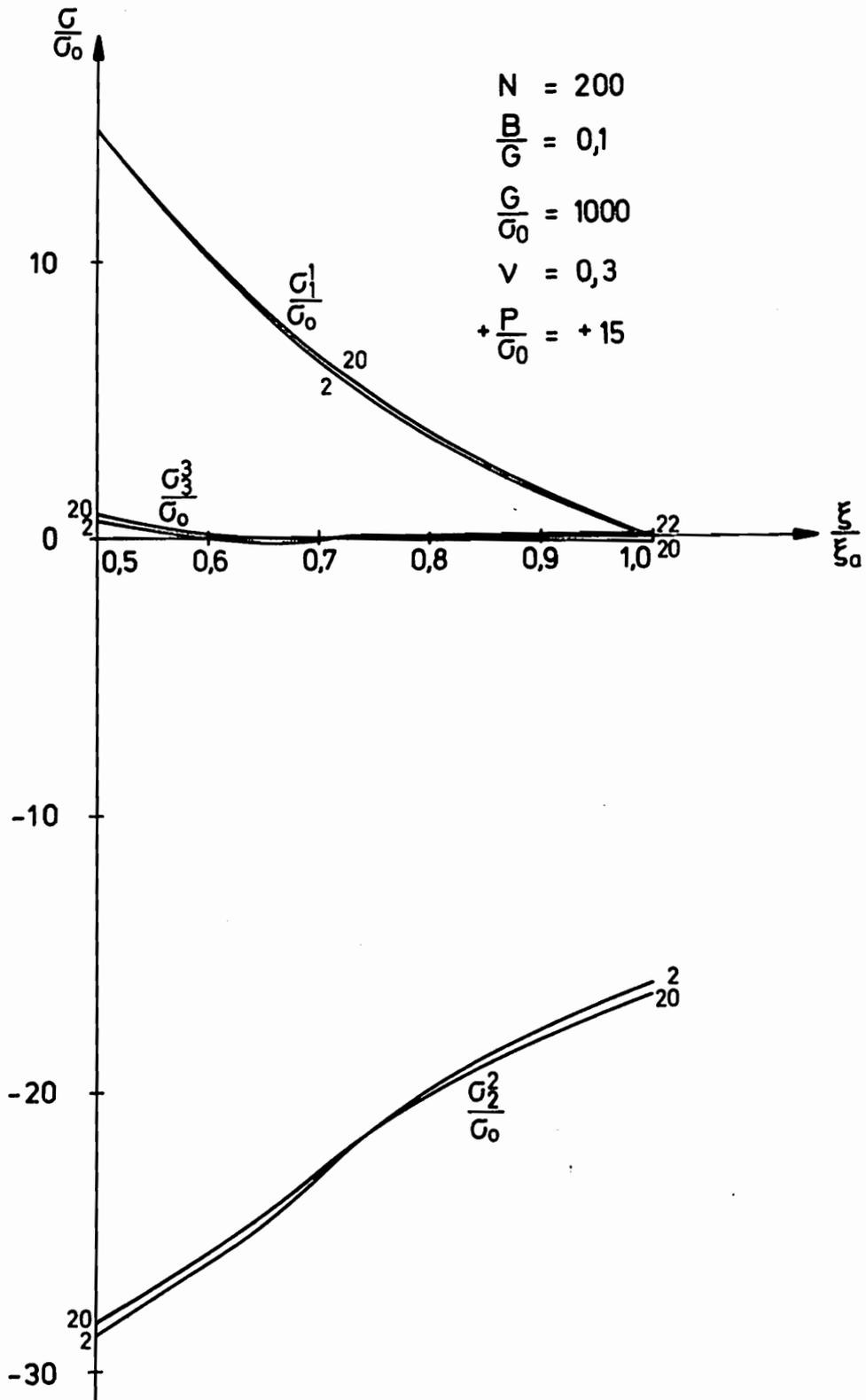


Abb.8-4 Axialkraft $\bar{N}_3 = 0$

lich hohe Beanspruchung im ersten Halbzyklus stark von der Mittellage für kleine Beanspruchungen verschoben.

9. Sekundäres Fließen im 2. Halbzyklus

In der Rechnung des ersten Halbzyklusses bei endlichen Verformungen des dickwandigen Zylinders zeigt es sich, wie in Abbildung 9-1 für die konstanten Parameter ν und G und variiertes B/G dargestellt, daß das Last-Verformungsdiagramm für die Kurven der unterschiedlichen Verfestigungsmoduli B/G jeweils einen maximalen Wert aufweist. Die Minima sind in Abbildung 9-1 durch eine gestrichelte Kurve gekennzeichnet. Das bedeutet, daß die Last mit den zugehörigen Parametern bis zu diesem absolut gesehen größten Lastwert gesteigert werden kann. Wir können also zwei Verschiebungswerte für Lastwerte angeben, die größer als das Lastminimum sind. Vergleiche auch Kapitel 7.2 und Abbildung 7-1.

Im folgenden betrachten wir einen Zylinder, der aus dem Anfangszustand heraus bis zu einem bestimmten Innendruck p belastet wird und anschließend bis zum Innendruck $p = 0$ entlastet wird. Treten bei diesem Entlastungsvorgang erneute Beanspruchungen im plastischen Bereich auf, so spricht man vom sekundären Fließen. Für einen Zylinder aus idealplastischem Werkstoff zeigen Prager/Hodge [32], daß sekundäres Fließen auftritt, wenn das Radienverhältnis r_a / r_i größer als 2.2 ist. Wir wollen das Problem des sekundären Fließens unter Berücksichtigung der Werkstoffverfestigung jedoch bei kleinen Verformungen untersuchen. Dabei gehen wir aus von der sowohl im elastischen als auch im elasto-plastischen Bereich für den ersten Halbzyklus geltenden Gleichung (analog zu Gleichung 5.28)

$$\sigma_2^2 + \sigma_1^2 = \frac{2G}{1 - 2\nu} (\epsilon_2^2 + \epsilon_1^2) \quad (9.1)$$

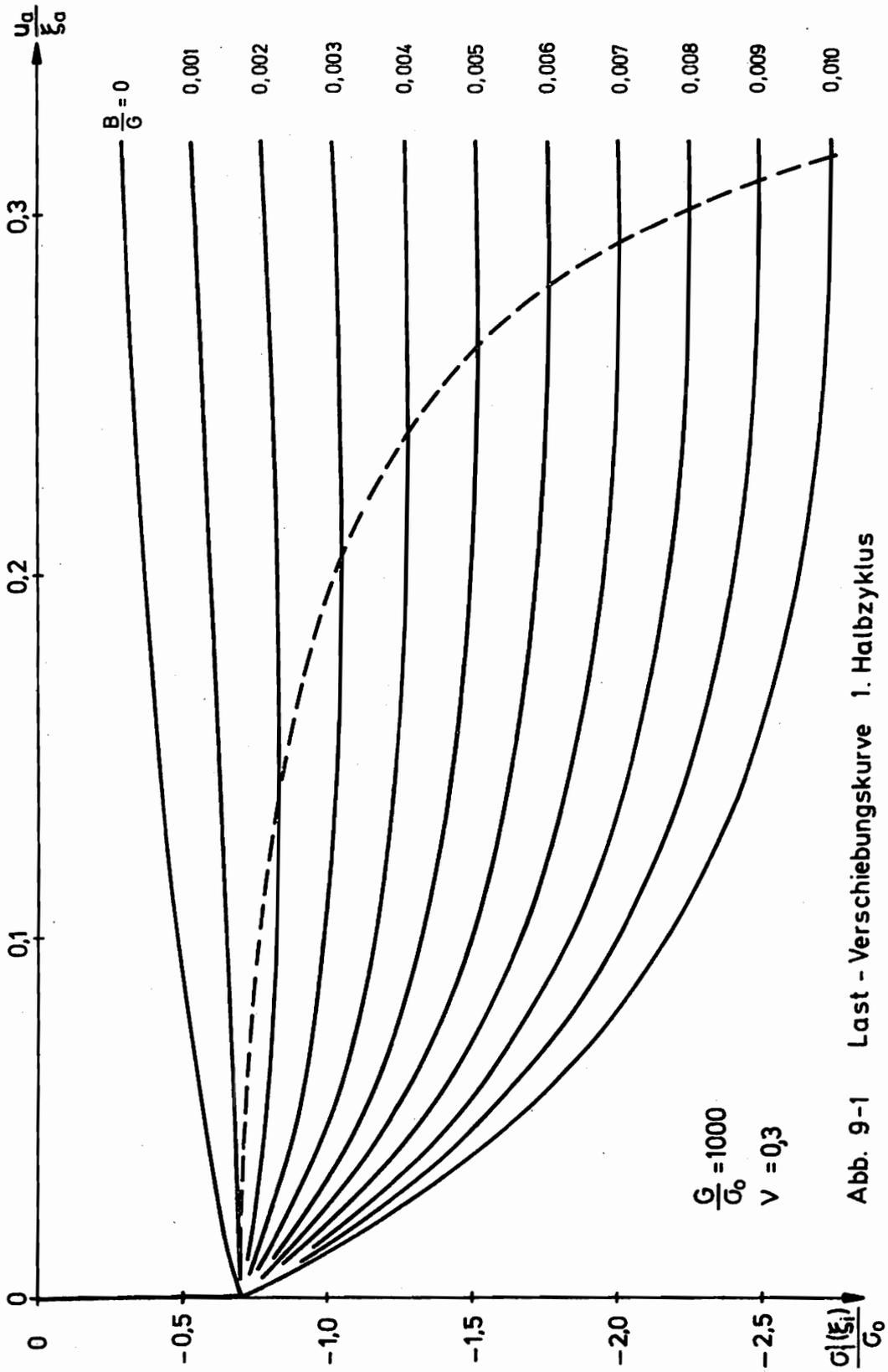


Abb. 9-1 Last - Verschiebungskurve 1. Halbzyklus

der in der elastoplastischen Zone für den ersten Halbzyklus geltenden Gleichung

$$\sigma_2^2 - \sigma_1^1 = \frac{2BG}{B+2G} \left[\frac{\sigma_0}{B} + (\epsilon_2^2 - \epsilon_1^1) \right] \quad (9.2)$$

und der Gleichgewichtsbedingung

$$\sigma_1^1 = (\sigma_2^2 - \sigma_1^1) \frac{1}{\psi} \quad (9.3)$$

mit

$$\epsilon_1^1 = u' \quad (9.4)$$

und

$$\epsilon_2^2 = \frac{u}{\psi} \quad (9.5)$$

Die Lösung der Differentialgleichung im elastoplastischen Bereich lautet

$$u = C_1 \psi + C_2 \frac{1}{\psi} + \frac{(1-2\nu)\sigma_0}{2[G+B(1-\nu)]} \psi \ln(\psi) \quad (9.6)$$

und im elastischen Bereich

$$u = C_3 \psi + C_4 \frac{1}{\psi} \quad (9.7)$$

Die Konstanten werden aus den Rand- und Übergangsbedingungen bestimmt

$$\sigma_{\text{elpl}}^1(\psi_i) = \tau \quad (9.8)$$

$$\sigma_{\text{el}}^1(\psi_a) = 0 \quad (9.9)$$

$$\sigma_{\text{elpl}}^1(\psi_{gr}) = \sigma_{\text{el}}^1(\psi_{gr}) \quad (9.10)$$

$$u_{\text{dnl}}(\varphi_{gr}) = u_{\text{el}}(\varphi_{gr}) \quad (9.11)$$

$$G_{\text{el}}^2(\varphi_{gr}) - G_{\text{el}}^1(\varphi_{gr}) = G_0 \quad (9.12)$$

und ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{G_0}{2} \left\{ \frac{\varphi_{gr}^2}{\varphi_a^2} + \frac{1}{1-2\nu} \right\} \\ &- \frac{A_1}{A_1+A_2} \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} G_0 + A_2 A_3 \ln(\varphi_{gr}) \right. \\ &- \left. \frac{1-\nu}{1-2\nu} \eta^2 G_0 \right. \\ &+ \left. \frac{A_1 A_2 A_3}{A_1+A_2} \ln(\varphi_i) \right\} \quad (9.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{G_0}{2A_1} \left\{ \frac{\varphi_{gr}^2}{\varphi_a^2} + \frac{1}{1-2\nu} \right\} \\ &- \frac{1}{A_1+A_2} \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} G_0 + A_2 A_3 \ln(\varphi_{gr}) \right\} \quad (9.14) \end{aligned}$$

Es gelten folgende Abkürzungen:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2G}{1-2\nu} & A_2 &= \frac{2BG}{B+2G} & A_3 &= \frac{G_0}{B} \\ P &= \frac{B}{G} (1-\nu) & \mathcal{R} &= \frac{\varphi_a}{\varphi_i} & \eta &= \frac{\varphi_{gr}}{\varphi_i} \end{aligned}$$

$$C_2 = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\varphi_{gr}^2}{A_1+A_2} G_0 \quad (9.15)$$

$$C_3 = \frac{G_0}{2A_1} \frac{\varphi_{gr}^2}{\varphi_a^2} \quad (9.16)$$

$$C_4 = \frac{G_0}{2A_1} \frac{\varphi_{gr}^2}{1-2\nu} \quad (9.17)$$

Durch Grenzübergang der Gleichung (9.13) zum ideal plastischen Werkstoffverhalten erhalten wir wie Prager/Hodge den Innendruck zu

$$-p = \frac{G_0}{2} \left\{ 1 - \frac{\varphi_{gr}^2}{\varphi_a^2} + 2 \ln(\eta) \right\} \quad (9.18)$$

Mit den Konstanten C_1 und C_2 lassen sich die Spannungen und Verschiebungen für den elastoplastischen Bereich angeben.

$$\sigma_1^z = \frac{G_0}{2(1+P)} \left\{ -1 + 2 \ln\left(\frac{\varphi}{\varphi_{gr}}\right) + (1+P) \frac{\varphi_{gr}^2}{\varphi_a^2} - P \frac{\varphi_{gr}^2}{\varphi^2} \right\} \quad (9.19)$$

$$\sigma_2^z = \frac{G_0}{2(1+P)} \left\{ 1 + 2 \ln\left(\frac{\varphi}{\varphi_{gr}}\right) + (1+P) \frac{\varphi_{gr}^2}{\varphi_a^2} + P \frac{\varphi_{gr}^2}{\varphi^2} \right\} \quad (9.20)$$

$$\sigma_2^z - \sigma_1^z = \frac{G_0}{1+P} \left(1 + P \frac{\varphi_{gr}^2}{\varphi^2} \right) \quad (9.21)$$

$$\begin{aligned} u = \frac{G_0}{2(1+P)} \frac{1}{2G} \left\{ (1-2\nu) \left[-1 + 2 \ln\left(\frac{\varphi}{\varphi_{gr}}\right) + (1+P) \frac{\varphi_{gr}^2}{\varphi_a^2} \right] \varphi \right. \\ \left. + [2(1-\nu) + P] \frac{\varphi_{gr}^2}{\varphi} \right\} \quad (9.22) \end{aligned}$$

Für den elastischen Bereich ergeben sich mit den Konstanten C_3 und C_4 folgende Spannungen

$$\sigma_1^1 = \frac{\sigma_0}{2} \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} \left(\frac{1}{\varrho_0^2} - \frac{1}{\varrho^2} \right) \quad (9.23)$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma_0}{2} \frac{\varrho^2}{\varrho_0^2} \left(\frac{1}{\varrho_0^2} + \frac{1}{\varrho^2} \right) \quad (9.24)$$

Für die Spannung am Innenrand des Zylinders im elasto-plastischen Bereich gilt mit Gleichung (9.19) insbesondere

$$\begin{aligned} r = \frac{\sigma_0}{2(1+\mu)} \left\{ -2 \ln(\eta) - 1 - \mu \eta^2 \right. \\ \left. + (1+\mu) \frac{\frac{\varrho^2}{\varrho_0^2}}{\frac{\varrho_0^2}{\varrho^2}} \right\} \end{aligned} \quad (9.25)$$

Die Entlastung verläuft im entgegengesetzten Sinne zur Erstbelastung. Wir bestimmen zunächst die elastische Lösung für einen sich elastisch verhaltenden Zylinder über die Randbedingungen

$$\sigma_{\varrho}^1(\varrho_i) = r \quad (9.26)$$

$$\sigma_{\varrho}^1(\varrho_a) = 0 \quad (9.27)$$

und erhalten

$$\sigma_1^1 = r \frac{\left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^2 - 1}{\varrho^2 - 1} \quad (9.28)$$

$$\sigma_2^2 = -r \frac{\left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^2 + 1}{\varrho^2 - 1} \quad (9.29)$$

Die Entlastung bis auf $p = 0$ ergibt dann Zusatzspannungen

$$\Delta \sigma_1^1 = -\tau \frac{\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2 - 1}{\alpha^2 - 1} \quad (9.30)$$

$$\Delta \sigma_2^2 = \tau \frac{\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2 + 1}{\alpha^2 - 1} \quad (9.31)$$

die den aus der Erstbelastung vorhandenen Spannungen zu überlagern sind, so daß bei vollständiger Entlastung, $p = 0$, der Spannungszustand

$$\begin{aligned} \sigma_1^1 \Big|_{p=0} &= \sigma_1^1 \Big|_{\text{Bel.}} + \Delta \sigma_1^1 \\ &= \frac{\sigma_0}{2(1+P)} \left\{ -1 + 2 \ln \left(\frac{\sigma}{\sigma_{gr}} \right) + (1+P) \frac{\sigma_{gr}^2}{\sigma_0^2} - P \frac{\sigma_{gr}^2}{\sigma^2} \right\} \\ &\quad - \tau \frac{\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2 - 1}{\alpha^2 - 1} \quad (\sigma < \sigma_{gr}) \quad (9.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma_0}{2} \frac{\sigma_{gr}^2}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right) \\ &\quad - \tau \frac{\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2 - 1}{\alpha^2 - 1} \quad (\sigma > \sigma_{gr}) \quad (9.33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_2^2 \quad r=0 &= G_2^2 \quad \text{Bel} + \Delta G_2^2 \\
 &= \frac{G_0}{2(1+P)} \left\{ 1 + 2 \ln \left(\frac{\psi}{\psi_{gr}} \right) + (1+P) \frac{\psi_{gr}^2}{\psi^2} + P \frac{\psi_{gr}^2}{\psi^2} \right\} \\
 &\quad + \pi \frac{\left(\frac{\psi_{gr}}{\psi} \right)^2 + 1}{\chi^2 - 1} \quad (\psi < \psi_{gr})
 \end{aligned}$$

(9.34)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{G_0}{2} \frac{\psi_{gr}^2}{\psi^2} \left(\frac{1}{\chi^2} + \frac{1}{\psi^2} \right) \\
 &\quad + \pi \frac{\left(\frac{\psi_{gr}}{\psi} \right)^2 + 1}{\chi^2 - 1} \quad (\psi > \psi_{gr})
 \end{aligned}$$

(9.35)

$$\begin{aligned}
 (G_2^2 - G_1^1) \quad r=0 &= \frac{G_0}{1-P} \left(1 + P \frac{\psi_{gr}^2}{\psi^2} \right) \\
 &\quad + 2\pi \frac{\left(\frac{\psi_{gr}}{\psi} \right)^2}{\chi^2 - 1}
 \end{aligned}$$

(9.36)

herrscht. Diese Betrachtung setzt voraus, daß sich der Zylinder bei dieser Belastung in Gegenrichtung ständig elastisch verhält und daß also kein erneutes Fließen (sekundäres Fließen) in Gegenrichtung erfolgt. Bedingung dafür ist

$$(G_2^2 - G_1^1) \quad r=0 > \begin{cases} - (G_2^2 - G_1^1)_{\text{Bel}} & \psi < \psi_{gr} \quad (9.37) \\ - G_0 & \psi > \psi_{gr} \quad (9.38) \end{cases}$$

Eine nähere Betrachtung dieser Beziehung zeigt, daß erneutes Fließen zunächst am Innenrand auftritt. Damit wird aus Gleichung (9.37)

$$(G_2^2 - G_1^1)_{\substack{r=0 \\ \varphi = \varphi_i}} > (G_2^2 - G_1^1)_{\substack{\text{Bel} \\ \varphi = \varphi_i}} \quad (9.39)$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{G_0}{1-p} (1+p\eta^2) + 2r \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} > - \frac{G_0}{1-p} (1+p\eta^2) \quad (9.40)$$

Ziehen wir nun Gleichung (9.25) für p heran, so ergibt sich nach einigen Umrechnungen folgende Ungleichung

$$\alpha^2 - 2 - \eta^2 [1 + p(\alpha^2 - 1)] - 2\alpha^2 \ln(\eta) > 0 \quad (9.41)$$

Mit dieser Ungleichung (9.41) wird ein Zustand im Zylinder beschrieben, bei dem kein sekundäres Fließen im entlasteten Zylinder auftritt.

Der zugehörige Druck ist

$$\frac{r}{G_0} = \frac{1}{2(1+p)} \left[-1 - 2 \ln(\eta) + (1+p) \frac{\eta^2}{\alpha^2} - p\eta^2 \right] \quad (9.42)$$

Die Auswertung der Gleichungen (9.41) und (9.42) ist in Abbildung 9-2 zu sehen. Die Kurven für die verschiedenen, bezogenen Plastizitätsmoduli

$$p = \frac{B}{G} (1 - \nu)$$

sind die unteren Grenzen, bei denen gerade noch sekundäres Fließen im entlasteten Zylinder zu beobachten ist.

Durch Differentiation von Gleichung (9.41) nach η gewinnen wir einen Grenzkurvenverlauf. Diese Grenzkurve ist die obere Begrenzung der für die durch unterschiedliche, bezogene Plastizitätsmoduli berechneten unteren

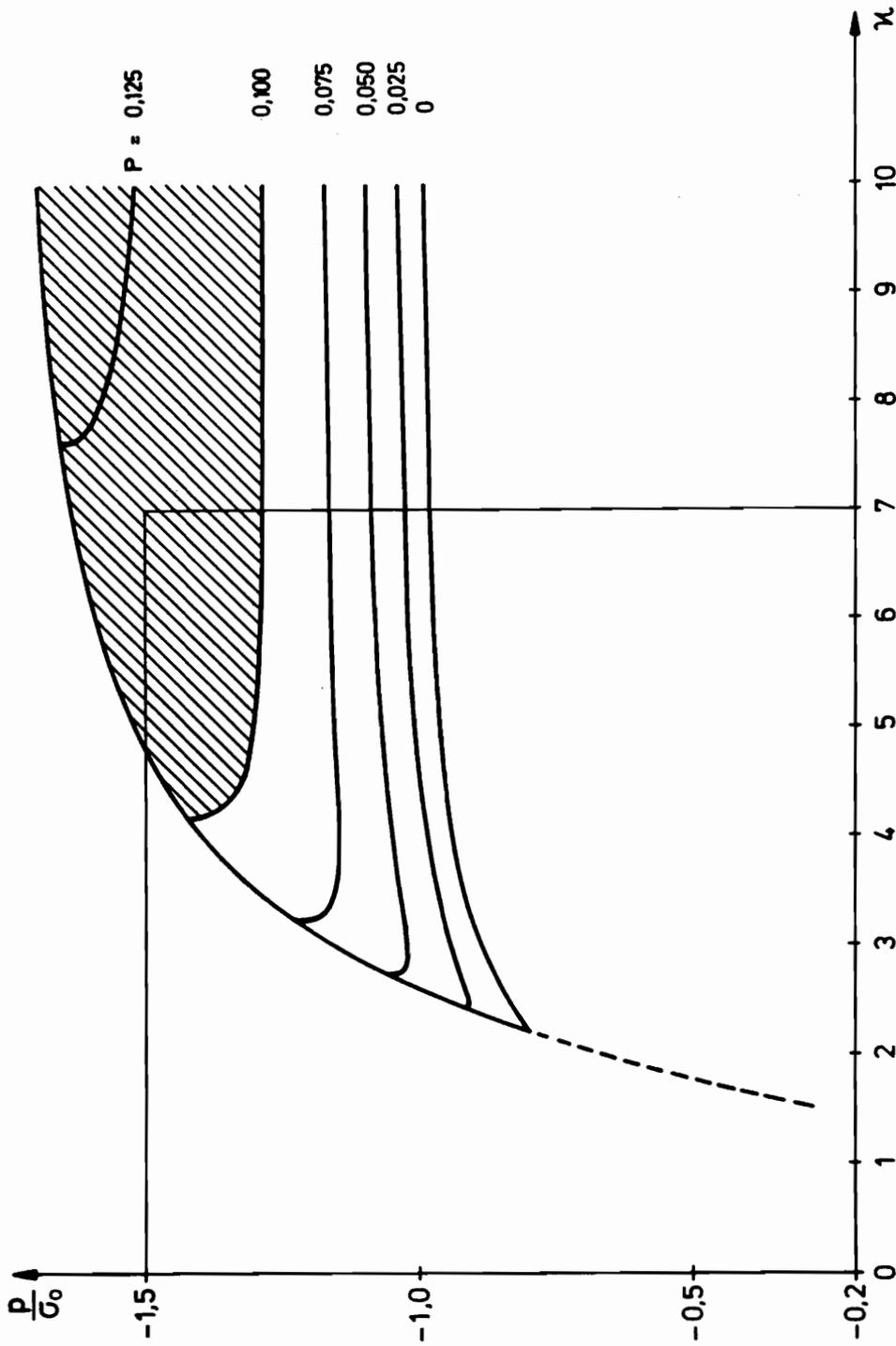


Abb.9-2 Untere Grenzen des sekundären Fließens

Grenzen für sekundäres Fließen.

$$2(\alpha^2 - 1) - \alpha^2 \ln \left[\frac{\alpha^2}{1 + P(\alpha^2 - 1)} \right] = 0 \quad (9.43)$$

Der zugehörige Druck zur Grenzkurve (9.43) beträgt

$$\frac{p}{G_0} = - \frac{(\alpha^2 - 1) [1 + P(2\alpha^2 - 1)]}{(1 + P)\alpha^2 [1 + P(\alpha^2 - 1)]} \quad (9.44)$$

Für die Gleichung (9.43) ergibt sich als Grenzwert

$$P_{max} = \frac{1}{e^2} = 0,1353 ,$$

wenn wir α gegen Unendlich laufen lassen.

Der Grenzkurvenverlauf ist in Abbildung 9-2 dargestellt. Das sekundäre Fließen beginnt bei $\alpha = 2,1972245$. Für jedes Radienverhältnis größer 2,19..... und für jeden Verfestigungsmodul lassen sich eine obere und untere Grenze angeben. Liegt die Belastung innerhalb dieser Grenzen, so ist mit sekundärem Fließen zu rechnen.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein dickwandiger Zylinder bei zyklischer Beanspruchung, die als Verschiebung des Außenrandes oder als Spannung am Innenrand aufgebracht wird, im elastischen und im elastoplastischen Bereich untersucht. In der Theorie ergeben das Formänderungsgesetz und die Trescasche Fließbedingung, verbunden mit einem linearen Verfestigungsansatz, sowie die Gleichgewichtsbedingung die Grundgleichungen für das Problem. Diese bilden ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für den elastischen und für den elastoplastischen Bereich, mit dem es möglich ist, die Formänderungen und die Spannungen eines dickwandigen Zylinders infolge zyklischer Beanspruchung bei endlichen Verzerrungen zu beschreiben. Die Differentialgleichungen werden numerisch gelöst.

Die wesentlichsten Ergebnisse dieser Arbeit seien noch einmal kurz zusammengestellt.

In den Abbildungen 7-2 bis 7-4 werden elastoplastische Grenzen bei verschiedenen großen Beanspruchungen im zweiten Halbzyklus dargestellt. Bei kleiner Beanspruchung beginnt der dickwandige Zylinder am Innenrand zu fließen, während bei großer Beanspruchung der Zylinder vom Außenrand aus zu fließen beginnt. Zwischen diesen beiden Zuständen gibt es auch Zwischenzustände, bei denen der Zylinder bei noch relativ großer Beanspruchung von der Mitte aus zum Innen- und zum Außenrand zu fließen beginnt.

Bei kleinen Verschiebungen liegt die elastoplastische Grenze bei vorgegebenen Parametern im metallischen Bereich fest. Mit steigender Zyklenzahl werden die Spannungen im elastoplastischen Bereich der Azimutalspannung σ_i^2 größer. Der Kurvenverlauf dieser Spannung wird bei einer endlichen Halbzyklenanzahl aus diesem Grunde nicht mehr durch die Knickstelle der elasto-

plastischen Grenze gestört, sondern es bildet sich vom elastischen zum elastoplastischen Bereich ein durchgehender Kurvenzug aus. Bei großen Verschiebungen liegen die Spannungen voll im elastoplastischen Bereich und steigen mit zunehmender Zyklenzahl weiterhin unterlinear an. Wird der dickwandige Zylinder durch Innendruck bzw. -zug beansprucht, so bilden sich bei kleiner Beanspruchung infolge der elastoplastischen Grenze Knickstellen im Spannungsverlauf der Azimutalspannung σ_{θ}^2 .

Da die elastoplastische Grenze mit steigender Zyklenzahl in Richtung des Innenrandes wandert, vergrößert sich der elastische Bereich vom Außenrand r_a bis zur elastoplastischen Grenze r_{ep} und wird die elastoplastische Zone infolgedessen kleiner. Ein ganz anderes Verhalten zeigt der dickwandige Zylinder bei großer Innendruck- bzw. -zugbeanspruchung. Auch hier wandert eine elastoplastische Grenze zum Außenrand hin. Der Bereich vom Innenrand r_i bis zur elastoplastischen Grenze r_{ep} verhält sich elastisch und von r_{ep} bis zum Außenrand r_a elastoplastisch. Die Restspannungen bleiben wegen der großen Verformung im ersten Halbzyklus von gleicher Größenordnung und werden nur geringfügig mit steigender Zyklenzahl abgebaut.

Zusätzlich wird der Zylinder ohne Normalkraft untersucht. Diese Untersuchungen führen zu ähnlichen Ergebnissen wie oben beschrieben.

Zum Schluß seien noch die Ergebnisse aus unterschiedlichen Radienverhältnissen erwähnt, die auf ein sekundäres Fließen führen, sobald die Radien das Verhältnis von $R_a/R_i = 2.2$ überschreiten.

Literaturverzeichnis

- [1] Lamé, G., Lecons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides,
Paris (1866), Gauthier-Villars
- [2] Turner, L.B., The stresses in a thick hollow cylinder subjected to internal pressure,
Trans. Camb. Phil. Soc. 21
(1909), 377-396
- [3] Nádai, A., On the mechanics of the plastic state of metals,
Trans. Am. Soc. Mech. Eng. 52
(1930), 193-216
- [4] Cook, G., The stresses in thick-walled cylinders of mild steel overstrained by internal pressure,
Proc. Inst. Mech. Engrs. 126
(1934), 407-455
- [5] Hencky, H., Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen,
ZAMM 4 (1924), 323-334
- [6] Belayev, N.M. und Stresses and deformations in thick-walled cylinders on the plastic-elastic state of material,
A.K. Sinitskij, Bull. Acad. Sci. U.R.S.S.
2 (1938), 3

- [7] Sokolovsky, W.W., Theorie der Plastizität,
Moskau, 1946
- [8] Allen, D.N. and D.G. Sopwith, The stresses and strains in
a partly plastic thick tube
under internal pressure and
end-load,
Proc. R. Soc. London, Ser. A,
205 (1951), 69
- [9] Steele, M.C., Partially plastic thick-walled
cylinder theory,
J. Appl. Mech., Trans. ASME,
19 (1952), 133-140
- [10] MacGregor, C.W., Coffin, L.F.Jr.
and J.C. Fisher, Partially plastic thick-walled
tubes,
J. Franklin Inst. 245 (1948),
135-158
- [11] Hill, R., Lee, E.H. and S.J. Tupper, The theory of combined plastic
and elastic deformation with
particular reference to a thick
tube under internal pressure,
Proc. R. Soc. London, Ser. A,
191 (1947), 278-303
- [12] Hill, R., Lee, E.H. and S.J. Tupper, Plastic flow in a closed-end tube
with internal pressure,
Proc. First U.S. Nat. Congr.
Applied Mechanics, Chicago,
III., 1951
- [13] Hill, R., The mathematical theory of
plasticity,
Oxford (1950), Clarendon Press

- [14] Hodge, P.G. and G.N. White, A quantitative comparison of flow and deformation theories of plasticity, J. Appl. Mech. 72 (1950), 180-184
- [15] Prandtl, L., Spannungsverteilung in plastischen Körpern, Proc. 1th Int. Congr. Appl. Mech. Delft 1924, 43-54
- [16] Reuß, A., Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie, ZAMM 10 (1930), 266-274
- [17] Chu, S.-C., A more rational approach to the problem of an elastoplastic thick-walled cylinder, J. Franklin Inst. 294, 1 (1972), 57-65
- [18] Koiter, W.T., On partially plastic thick-walled tubes, Anniversary Volume on Applied Mechanics, Antwerpen 1953, 232-251
- [19] Celep, Z., Beitrag zur Theorie dicker Kreiszyylinder- und Kugelschalen unter innerem Druck, Dissertation (1971), TU Hannover
- [20] Swift, H.W., Length changes in metals under torsional overstrain, Engineering 163 (1947), 253-257

- [21] Ronay, M., Second-order strain accumulation in cyclic torsion, Brit. J. Appl. Phys. 16 (1965), 727-728
- [22] Ronay, M., On second-order strain accumulation in aluminium in reserved cyclic torsion at devated temperatures, Int. J. Solids Struct. 3 (1967), 167-176
- [23] Mróz, Z., An attempt to describe the behavior of metals under cyclic loads using a more general workhardening model, Acta Mechanics 7 (1969), 199-212
- [24] Bruhns, O., On the description of cyclic deformation processes using a more general elasto-plastic constitutive law, Arch. Mech. Stos. 25 (1973) Nr. 3, 535-546
- [25] Mioduchowski, A. und K. Thermann, Zur zyklischen elasto-plastischen Torsion des Kreiszyllinders bei endlichen Verzerrungen, Ing.-Archiv 42 (1973), 309-318
- [26] Lücke, B., Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen, RU Bochum, Mitteilungen aus dem Inst. für Mechanik 4 (1976)

- [27] Lehmann, Th.,
Einige Betrachtungen zur
Beschreibung von Vorgängen
in der klassischen Kontinuums-
mechanik,
Ing.-Archiv 29 (1960), 316-330
- [28] Lehmann, Th.,
Zur Beschreibung großer plasti-
scher Formänderungen unter
Berücksichtigung der Werk-
stoffverfestigung,
Rheologica Acta 2 (1962),
247-254
- [29] Hencky, H.,
Über die Form des Elastizitäts-
gesetzes bei ideal elastischen
Stoffen,
Z. Techn. Phys. 9 (1928),
- [30] Green, A.E. und
W. Zerna,
Theoretical Elasticity,
Oxford 1954, Clarendon Press
- [31] Bruhns, O. und
K. Thermann,
Elastisch-plastische Biegung
eines Plattenstreifens bei
endlichen Formänderungen,
Ing.-Archiv 38 (1969), 141-152
- [32] Prager, W. und
P.G. Hodge,
Theorie ideal plastischer
Körper,
Wien 1954, Springer-Verlag
- [33] Bruhns, O.,
Die Berücksichtigung einer
isotropen Werkstoffverfesti-
gung bei der elastisch-
plastischen Blechbiegung mit
endlichen Formänderungen,
Ing.-Archiv 39 (1970) Nr. 1,
63-72

[34] Lehmann, Th.,

Einige Bemerkungen zu einer
allgemeinen Klasse von Stoff-
gesetzen für große elasto-
plastische Formänderungen,
Ing.-Archiv 41 (1972) Nr. 4,
297-310

[35]

Revised Report on the
Algorithmic Language Algol 60,
Num. Mathematik 4 (1963), 447ff

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann: Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Seminarberichte zur Thermomechanik (in Vorbereitung)
- Nr. 3 Wolfgang Krings: Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke: Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze: Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer: Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl: Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers: Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer: Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 9**