

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

H. Stumpf
F. J. Biehl

Die Methode der orthogonalen
Projektionen und ihre
Anwendungen zur Berechnung
orthotroper Platten

Heft Nr. 7



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

H. Stumpf und F.J. Biehl

**Die Methode der orthogonalen Projektionen
und ihre Anwendung zur Berechnung
orthotroper Platten**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 7

März 1977

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

© 1976 Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf, Dr.-Ing. F. J. Biehl

Lehrstuhl für Mechanik II der Ruhr-Universität Bochum, Universitätsstr. 150

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des
Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder Teilen daraus bedarf der vorherigen
Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

Die Methode der orthogonalen Projektionen oder Hyperkreis-Methode liefert die Möglichkeit, für Näherungslösungen von linear-elastischen Randwertproblemen den Fehler global, d. h. der Energie nach, abzuschätzen. Benutzt man gleichzeitig geeignete Green'sche Zustände, so können auch punktweise Fehlerschranken für beliebige Feldgrößen des Lösungszustandes berechnet werden. In der vorliegenden Arbeit wird die Anwendung dieser Methode zur Berechnung orthotroper Platten untersucht. Möglichkeiten der numerischen Realisierung werden für einige Beispiele aufgezeigt, für die die Plattendurchbiegung bei gleichzeitiger Angabe punktwieser Fehlerschranken erhalten wird.

Summary

For linear-elastic boundary-value problems the method of orthogonal projection or hypercircle-method enables the calculation of global error bounds and bounds of the elastic energy, respectively. Introducing appropriate Green's states also pointwise error bounds can be obtained for arbitrary field quantities of the solution. In this paper the method of orthogonal projection is used to solve boundary-value problems of orthotropic thin plates. Numerical results are given for some examples, for which the displacement field and pointwise error bounds have been calculated.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
2. Zeichenerklärung	2
3. Grundgleichungen der Elastomechanik	4
4. Der Hilbert-Raum der elastischen Zustände	6
5. Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen bei Randwertproblemen	10
6. Anwendung des Eingrenzungsverfahrens auf orthotrope Platten	13
6.1. Grundgleichungen der orthotropen Platte	13
6.2. Zusammenstellung einiger wichtiger Singularitäten	20
6.2. Darstellung der Skalarprodukte	
7. Realisierung der Vergleichszustände	23
8. Numerische Beispiele	32
9. Literatur	39

1. Einleitung

Die Berechnung elastischer Tragelemente und Tragkonstruktionen ist exakt nur in wenigen einfachen Ausnahmefällen möglich. Man ist daher in der Regel auf Näherungsverfahren angewiesen, wozu Differenzen- und Variationsverfahren und daraus abgeleitete Methoden sowie Integralgleichungsverfahren zu zählen sind. Im Bauingenieurwesen finden insbesondere die auf den Variationsprinzipien beruhenden Verfahren, wie z. B. die Methode der finiten Elemente, verbreitete Anwendung, da sie außergewöhnlich vielseitig anwendbar sind und bei Vorhandensein leistungsstarker Rechenanlagen gute Ergebnisse erhalten werden können. Bei der Benutzung approximierender Berechnungsverfahren geht man allerdings nicht immer in ausreichendem Maße den hierbei zu stellenden Fragen nach, ob das verwendete Verfahren z. B. konvergiert und wenn ja, ob eine Konvergenz gegen die Lösung erfolgt, und wie groß in etwa der Fehler bei dem gewählten Approximationsgrad ist.

Ein Berechnungsverfahren, das eine gegen die exakte Lösung konvergierende Näherung liefert und gleichzeitig eine zweiseitige Abschätzung des Approximationsfehlers ermöglicht, ist die sogenannte Methode der orthogonalen Projektionen, die auf den Extremalprinzipien der Elastomechanik beruht [1 - 7]. Führt man den Hilbert-Raum der elastischen Zustände ein, so besteht dieser aus zwei zueinander orthogonalen Unterräumen, dem Raum der Lastspannungszustände sowie dem Raum der Eigenspannungszustände. Physikalisch bedeutet die Orthogonalität, daß die Wechselwirkungsenergie zwischen Last- und Eigenspannungszuständen Null ist. Approximiert man nun einen unbekanntem Spannungszustand durch eine statisch-zulässige und eine geometrisch-zulässige Näherung, so läßt sich der Fehler der Näherungen pauschal abschätzen. Statisch-zulässige bzw. geometrisch-zulässige Näherungen erhält man z. B. mit statisch- bzw. geometrisch-kompatiblen finiten Element-Modellen. Während mit der Projektionsmethode eine Fehleraussage sowie eine Fehlerabschätzung bezüglich der Energie möglich ist, liefert sie keine Information bezüglich der Genauigkeit einzelner dem Näherungszustand zugeordneter Feldgrößen wie etwa Verschiebungs- und Spannungsgrößen.

Um zweiseitige Abschätzungen für bestimmte Feldgrößen zu erhalten, führt man Greensche Zustände ein. Den Greenschen Zustand wählt man so, daß seine Singularität mit der gesuchten Feldgröße des unbekanntem elastischen Zustandes als Produkt eine Arbeit bildet. Die hierzu benötigten Greenschen Zustände lassen sich aus bestimmten Grundzuständen durch Überlagerungen herleiten [5]. Sowohl den unbekanntem wie den benutzten Greenschen Zustand ersetzt man dann durch

Vergleichszustände und schätzt den jeweiligen Fehler nach der Methode der orthogonalen Projektionen ab. Nach diesem Verfahren konnten bei isotropen linear-elastischen Problemen sehr gute numerische Ergebnisse erzielt werden [5,6]. Keine Anwendung fand dieses Eingrenzungsverfahren bisher für anisotrope Probleme.

In der vorliegenden Arbeit werden die in [5,6] durchgeführten Untersuchungen für orthotrope Platten erweitert. Es wird gezeigt, daß für Randwertprobleme bei Benutzung entsprechender Singularitäten beliebige Feldgrößen eingegrenzt werden können. Für rechtwinklig begrenzte Platten werden geometrisch- bzw. statisch-kompatible Ansätze angegeben, die sowohl homogene als auch inhomogene geometrische bzw. statische Randbedingungen erfüllen. Die numerische Realisierung wird für eine quadratische orthotrope Platte unter der Wirkung einer gleichmäßigen Flächenbelastung bei fester sowie gelenkiger Lagerung untersucht, wobei die Durchbiegung punktweise eingegrenzt wird.

2. Zeichenerklärung

Vektorfelder

\mathcal{P}	Oberflächenkräftebelegung
\mathcal{P}	Volumenkraft
\mathcal{W}	Verschiebungsvektor

Tensorfelder zweiter Stufe

$\underline{\sigma}$	Spannungstensor
$\underline{\varepsilon}$	Dehnungstensor
$\underline{\chi}$	Spannungsfunktionentensor
$\underline{\eta}$	Inkompatibilitätentensor

Vektor- und Tensoroperationen

$a \cdot b$	skalares Produkt zweier Vektoren
$a \times b$	vektorielles Produkt zweier Vektoren
$a \otimes b$	dyadisches Produkt zweier Vektoren
$\underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon}$	doppelt skalares Produkt zweier Tensoren 2. Stufe

Differentiationssymbole

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= a_{,x} \\ \nabla &= i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla \alpha &= \text{grad } \alpha \\ \nabla \cdot \alpha &= \text{div } \alpha \\ \nabla \times \alpha &= \text{rot } \alpha \\ \nabla \cdot \nabla &= \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \text{Def } \mathbb{1} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbb{1} + \mathbb{1} \nabla) \\ \text{Ink } \underline{\varepsilon} &= \nabla \times \underline{\varepsilon} \times \nabla \end{aligned}$$

Hilbert-Räume und ihre Elemente

\mathcal{H}	Hilbert - Raum der elastischen Zustände
\mathcal{H}'	Unterraum der Lastspannungszustände
\mathcal{H}''	Unterraum der Eigenspannungszustände
$\overset{i}{f}$	Element im Hilbert-Raum, stellt einen elastischen Zustand des Körpers dar
$\overset{i}{f}'$	Lastspannungszustand
$\overset{i}{f}''$	Eigenspannungszustand
$\overset{i}{f} \sim$	Vergleichszustand, der die geometrischen Bedingungen von $\overset{i}{f}$ erfüllt
$\overset{i}{f} \approx$	Vergleichszustand, der die statischen Bedingungen von $\overset{i}{f}$ erfüllt
$\{\overset{i}{f}, \overset{j}{f}\}$	Skalarprodukt zweier Elemente gleich Wechselwirkungsenergie der elastischen Zustände $\overset{i}{f}$ und $\overset{j}{f}$
$\ f\ $	Norm des Zustandes f
$\overset{\circ}{f}(\mathcal{C}_0)$	Greenscher Zustand mit einer Singularität an der Stelle \mathcal{C}_0
$\overset{\infty}{f}(\mathcal{C}_0)$	Fundamentalzustand im unendlichen Medium bei einer Singularität an der Stelle \mathcal{C}_0
$\overset{\vee}{f}(\mathcal{C}_0)$	Regulärteil des Greenschen Zustandes $\overset{\circ}{f}(\mathcal{C}_0)$

3. Grundgleichungen der Elastizitätstheorie

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sollen ausschließlich Probleme der linearen Elastizitätstheorie untersucht werden, d. h., sämtliche Verschiebungsableitungen werden als hinreichend klein gegen eins vorausgesetzt und die Beziehungen zwischen Spannungen und elastischen Dehnungen seien linear. Der allgemeine elastische Zustand läßt sich dann beschreiben durch die Angabe von Volumenkraften \underline{p} und Extradehnungen $\underline{\epsilon}^Q$ im Innern B des elastischen Körpers K:

$$\underline{p} = \underline{p}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in B, \quad (3.1)$$

$$\underline{\epsilon}^Q = \underline{\epsilon}^Q(\underline{x}), \quad \underline{x} \in B, \quad (3.2)$$

sowie die Kräftebelegung \underline{p}^* auf dem Oberflächenteil F_p und die Verschiebung \underline{w}^* auf dem Oberflächenteil F_w :

$$\underline{p} = \underline{p}^*(\underline{x}), \quad \underline{x} \in F_p, \quad (3.3)$$

$$\underline{w} = \underline{w}^*(\underline{x}), \quad \underline{x} \in F_w. \quad (3.4)$$

Mit \underline{x} werde der Ortsvektor bezeichnet.

Für das im Innern des Körpers hervorgerufene Spannungsfeld $\underline{\sigma}(\underline{x})$ gilt die inhomogene Gleichgewichtsbedingung:

$$\text{div } \underline{\sigma}(\underline{x}) = \nabla \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) = -\underline{p}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in B, \quad (3.5)$$

sowie die Oberflächenbedingung

$$\underline{n} \cdot \underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{p}^*(\underline{x}), \quad \underline{x} \in F_p, \quad (3.6)$$

wobei \underline{n} der Normaleneinheitsvektor ist.

Die in (3.2) angegebene "Extradehnung" $\underline{\epsilon}^Q$ kann verursacht werden durch plastische Verformung, Erwärmung oder Magnetisierung des Materials, was zu Eigenstressungen führt. $\underline{\epsilon}^Q$ trägt aber selbst nicht unmittelbar über das Hooksche Gesetz zu den Spannungen bei. Aus der Extradehnung $\underline{\epsilon}^Q$ und einer elastischen Dehnung $\underline{\epsilon}^E$

$$\underline{\epsilon}^E = \underline{s} \cdot \underline{\sigma}, \quad (3.7)$$

wobei \underline{s} der Tensor 4. Stufe der Elastizitätskoeffizienten ist, setzt sich die Gesamtdehnung

$$\underline{\epsilon}^G = \underline{\epsilon}^E + \underline{\epsilon}^Q \quad (3.8)$$

zusammen, für die die homogene Kompatibilitätsbedingung

$$\text{Ink } \underline{\epsilon}^G = \text{Ink } \underline{\epsilon}^E + \text{Ink } \underline{\epsilon}^Q = 0 \quad (3.9)$$

gilt, und die deshalb aus einer eindeutigen Verschiebung u_0 abgeleitet werden kann:

$$\underline{\varepsilon}^G = \text{Def } u_0 = \frac{1}{2} (\nabla u_0 + u_0 \nabla) . \quad (3.10)$$

Durch die Gleichungen (3.1) bis (3.9) wird der allgemeine elastische Zustand beschrieben, bei dem sowohl Volumenkräfte als auch Extradehnungen sowie Oberflächenkräfte und Oberflächenverschiebungen als Ursache von Verformungen zugelassen sind.

Der Sonderfall, bei dem gilt:

$$\underline{\varepsilon}^Q(\mathcal{V}) = 0, \quad \mathcal{V} \in B, \quad (3.11)$$

$$u_0^*(\mathcal{V}) = 0, \quad \mathcal{V} \in F_w, \quad (3.12)$$

werde als "Lastspannungszustand" bezeichnet. Ist dagegen

$$p(\mathcal{V}) = 0, \quad \mathcal{V} \in B, \quad (3.13)$$

$$p^*(\mathcal{V}) = 0, \quad \mathcal{V} \in F_p, \quad (3.14)$$

so liegt ein "Eigenspannungszustand" vor. Wegen der Bianchi-Identität

$$\text{div Ink } \chi = \nabla \cdot (\nabla \times \chi \times \nabla) = 0$$

läßt sich für den Eigenspannungszustand die homogene Gleichgewichtsbedingung identisch erfüllen durch den Beltramischen Spannungsfunktionsansatz:

$$\underline{\sigma} = \text{Ink } \chi \quad (3.15)$$

mit dem symmetrischen Spannungsfunktionsentensor χ .

Die Linearität der den allgemeinen elastischen Zustand beschreibenden Differentialgleichungen gestattet die Postulierung des sogenannten Zerlegungssatzes. Danach erhält man die Lösung für den allgemeinen elastischen Zustand aus der Superposition der Lösungen für den Lastspannungszustand und für den Eigenspannungszustand:

$$\underline{\sigma}(\mathcal{V}) = \underline{c}(\mathcal{V}) \dots \text{Def } u_0(\mathcal{V}) + \text{Ink } \chi(\mathcal{V}), \quad \mathcal{V} \in B, \quad (3.16)$$

$$\underline{\varepsilon}(\mathcal{V}) = \underline{\varepsilon}^E(\mathcal{V}) = \text{Def } u_0(\mathcal{V}) + \underline{s}(\mathcal{V}) \dots \text{Ink } \chi(\mathcal{V}), \quad \mathcal{V} \in B. \quad (3.17)$$

In (3.16) ist $\underline{c} = \underline{c}(\mathcal{V})$ der zu \underline{s} inverse Tensor 4. Stufe der Elastizitätskonstanten.

Die obenstehenden Ausführungen zeigen, daß der elastische Zustand eines linear-elastischen Körpers jeweils eindeutig und vollständig definiert werden kann durch Angaben, die auf drei verschiedenen Integrationsstufen stehen:

- (I) durch Spannungsfunktionentensor $\underline{\chi}$ und Verschiebungsvektor \underline{u} ;
- (II) durch das Spannungsfeld $\underline{\sigma}$ oder das Dehnungsfeld $\underline{\epsilon}$, die beide über das Hookesche Gesetz miteinander verbunden sind;
- (III) durch Volumenkräfte \underline{p} und Extradehnungen $\underline{\epsilon}^0$ im Innern sowie Kräftebelegung \underline{p} auf dem Oberflächenteil F_p und Verschiebung \underline{u} auf dem Oberflächenteil F_w .

Die Größen der Stufe III lassen sich durch Differenzieren leicht aus denen der Stufe II und in gleicher Weise die Größen der Stufe II aus denen der Stufe I gewinnen. In umgekehrter Weise erhält man die Größen der Stufe I bzw. II aus denen der Stufe II bzw. III nur durch Lösen eines Randwertproblems. Daher bezeichnen wir einen elastischen Zustand als:

- "vollbekannt": wenn die Größen der Stufe I,
 - "bekannt" : wenn die Größen der Stufe II,
 - "unbekannt" : wenn die Größen der Stufe III
- gegeben sind.

4. Der Hilbert-Raum der elastischen Zustände

Den insgesamt möglichen elastischen Zuständen eines bestimmten linear-elastischen Körpers K wird ein reeller Hilbert-Raum \mathcal{H} derart zugeordnet, daß die Elemente f des Hilbert-Raumes die elastischen Zustände des vorgegebenen Körpers darstellen. Die Repräsentation des elastischen Zustandes kann z. B. durch den Spannungstensor $\underline{\sigma}$ bzw. durch seine sechs voneinander unabhängigen Komponenten σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) erfolgen, so daß folgende Zuordnung definiert wird:

$$f : \underline{\sigma}(\mathcal{P}) \cong (\sigma_{11}(\mathcal{P}), \sigma_{22}(\mathcal{P}), \sigma_{33}(\mathcal{P}), \sigma_{12}(\mathcal{P}), \sigma_{13}(\mathcal{P}), \sigma_{23}(\mathcal{P})), \quad \mathcal{P} \in B, \quad (4.1)$$

wobei für das Nullelement $\theta \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\theta : \underline{\sigma}(\mathcal{P}) \cong (0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{für alle } \mathcal{P} \in B,$$

d. h., alle Komponenten des Spannungstensors verschwinden für alle Punkte $\mathcal{P} \in B$. Anstelle des Spannungstensors kann in gleicher Weise der Dehnungstensor

herangezogen werden. Auch ist die Erklärung des Hilbert-Raumes der elastischen Zustände anhand der vollständigen Angabe der Größen der Stufe I oder der Stufe III möglich.

Die für die Definition des Hilbert-Raumes notwendige Bildung eines Skalarproduktes geschieht am sinnvollsten mit Hilfe der elastischen Wechselwirkungsenergie zweier Zustände f^1, f^2 :

$$\begin{aligned} \{f^1, f^2\} &= \int_{(B)} \underline{\sigma}^1(\mathcal{V}) \dots \underline{\varepsilon}^2(\mathcal{V}) \, dV \\ &= \int_{(B)} \underline{\sigma}^1(\mathcal{V}) \dots \underline{s}(\mathcal{V}) \dots \underline{\sigma}^2(\mathcal{V}) \, dV \\ &= \int_{(B)} \underline{\varepsilon}^1(\mathcal{V}) \dots \underline{c}(\mathcal{V}) \dots \underline{\varepsilon}^2(\mathcal{V}) \, dV \end{aligned} \quad (4.3)$$

Unter $\underline{\varepsilon}$ in (4.3) ist die elastische Dehnung im Sinne von Abschnitt 3 zu verstehen. Es läßt sich leicht zeigen, daß das Skalarprodukt (4.3) kommutativ, distributiv, assoziativ und positiv definit ist, also den Forderungen genügt, die im Hilbert-Raum an das Skalarprodukt gestellt werden. Für die Norm des Zustandes f erhält man aus (4.3):

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sqrt{\int_{(B)} \underline{\sigma}(\mathcal{V}) \dots \underline{s}(\mathcal{V}) \dots \underline{\sigma}(\mathcal{V}) \, dV} \\ &= \sqrt{\int_{(B)} \underline{\varepsilon}(\mathcal{V}) \dots \underline{c}(\mathcal{V}) \dots \underline{\varepsilon}(\mathcal{V}) \, dV} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Somit ist die Norm nach Definition die Wurzel aus der doppelten elastischen Energie des Zustandes f . Sie kann aufgefaßt werden als die Länge des Vektors f im Hilbert-Raum \mathcal{X} der elastischen Zustände.

In der Beziehung (4.3) werden zur Berechnung des Skalarproduktes $\{f^1, f^2\}$ für f^1 und f^2 ausschließlich Feldgrößen der Stufe II benutzt. Wie in [5, 6] gezeigt wurde, läßt sich das Skalarprodukt so umformen, daß auch Größen der Stufe I und der Stufe III benutzt werden:

$$\{f^1, f^2\} = (p, w) + [p, w]_{F_p} + [p, w]_{F_w} - (\sigma, \varepsilon^Q), \quad (4.5)$$

mit den folgenden Abkürzungen:

$${}^1_2(p, w) = \int_{(B)} {}^1 p(\mathcal{V}) \cdot {}^2 \mathcal{M}(\mathcal{V}) dV \quad (4.6)$$

$${}^1_2(\sigma, \underline{\varepsilon}^Q) = \int_{(B)} {}^1 \underline{\sigma}(\mathcal{V}) \cdot {}^2 \underline{\varepsilon}^Q(\mathcal{V}) dV \quad (4.7)$$

$$[{}^1_2 p, w]_{F_P} = \int_{(F_P)} {}^1 \mathcal{P}(\mathcal{V}) \cdot {}^2 \mathcal{M}(\mathcal{V}) dV \quad (4.8)$$

$$[{}^1_2 p, w] = \int_{(F_W)} {}^1 \mathcal{P}(\mathcal{V}) \cdot {}^2 \mathcal{M}(\mathcal{V}) dV \quad (4.9)$$

Es läßt sich leicht nachweisen, daß der Hilbert-Raum \mathcal{H} aus zwei orthogonalen Unterräumen \mathcal{H}' und \mathcal{H}'' mit den Elementen $\overset{i}{f}'$ und $\overset{i}{f}''$ besteht, wobei \mathcal{H}' der Unterraum aller Lastspannungszustände, \mathcal{H}'' der Unterraum aller Eigenspannungszustände ist. Nach Abschnitt 2 ist ein Lastspannungszustand $\overset{i}{f}'$ definiert durch die Volumenkräfte p im Innern des Körpers sowie durch die Kräftebelegung \mathcal{P}^* auf dem Oberflächenteil F_P ; die Extradehnung $\underline{\varepsilon}^Q$ verschwindet, geometrische Randbedingungen - sofern vorgeschrieben - sind homogen, d. h., \mathcal{M}^* ist null auf F_W . Der Eigenspannungszustand $\overset{i}{f}''$ ist definiert durch die Angabe einer Extradehnung $\underline{\varepsilon}^Q$ im Innern sowie durch Angabe einer vorgeschriebenen Verschiebung auf dem Oberflächenteil F_W ; die Volumenkraft p und die Oberflächenkraft \mathcal{P} auf F_P verschwinden. Mit diesen Definitionen für Last- und Eigenspannungszustände folgt aus (4.5):

$$\{\overset{i}{f}', \overset{i}{f}''\} = 0, \quad (4.10)$$

d. h. alle Lastspannungszustände $\overset{i}{f}'$ sind orthogonal zu allen Eigenspannungszuständen $\overset{i}{f}''$. Hieraus folgt, daß der Hilbert-Raum \mathcal{H} aus zwei zueinander orthogonalen Unterräumen \mathcal{H}' und \mathcal{H}'' besteht:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'' \quad (4.11)$$

Da nach dem o.a. Zerlegungssatz sich ein allgemeiner linear-elastischer Zustand $\overset{i}{f}$ stets in einen Lastspannungszustand $\overset{i}{f}'$ und einen Eigenspannungszustand $\overset{i}{f}''$ aufteilen läßt

$$\overset{i}{f} = \overset{i}{f}' + \overset{i}{f}'' \quad (4.12)$$

kann diese Zerlegung als orthogonale Projektion in die Unterräume \mathcal{H}' und \mathcal{H}'' interpretiert werden.

Aus (4.10) und (4.12) folgt unmittelbar für die Wechselwirkungsenergie zweier allgemeiner elastischer Zustände:

$$\{f, f\} = \{f', f'\} + \{f'', f''\} . \quad (4.13)$$

Nach (4.13) setzt sich die Wechselwirkungsenergie additiv aus der Wechselwirkungsenergie ihrer Lastspannungszustände sowie der Wechselwirkungsenergie ihrer Eigenspannungszustände zusammen. Dieser Sachverhalt ist als Satz von Colonetti bekannt.

Die Wechselwirkungsenergie zweier Lastspannungszustände ergibt sich nach dem Satz von Betti, Maxwell und Rayleigh als die Arbeit, die das Kräftefeld des einen Lastspannungszustandes am Verschiebungsfeld des anderen Lastspannungszustandes leistet:

$$\begin{aligned} \{f', f'\} &= \int_{(B)} p^1 \cdot w^2 dV + \int_{(F_p)} p^1 \cdot w^2 dF \\ &= (p', w') + [p', w']_{F_p} . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Gleichung (4.14) erhält man auch unmittelbar aus (4.5) unter Beachtung der Definition der Lastspannungszustände.

Für die Wechselwirkungsenergie zweier Eigenspannungszustände ergibt sich:

$$\{f'', f''\} = [p'', w'']_{F_w} - (\sigma'', \underline{\varepsilon}^{2Q}) . \quad (4.15)$$

Mit Hilfe des Beltramischen Spannungsfunktionentensors $\underline{\chi}$ und dem Inkompatibilitätentensor $\underline{\eta}$:

$$\underline{\eta} = \text{Ink } \underline{\varepsilon}^Q = \nabla \times \underline{\varepsilon}^Q \times \nabla \quad (4.16)$$

kann (4.15) auf eine andere Form gebracht werden [5]:

$$\begin{aligned} \{f'', f''\} &= \int_{(F_p + F_w)} ((\nabla \times \underline{\chi}^1 \times \underline{u}) \cdot \underline{\varepsilon}^{2Q} - (\nabla \times \underline{\varepsilon}^{2Q} \times \underline{u}) \cdot \underline{\chi}^1) dF \\ &\quad - \int_{(B)} \underline{\chi}^1 \cdot \underline{\eta}^2 dV , \end{aligned} \quad (4.17)$$

n ist der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor auf der Körperoberfläche.

5. Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen bei inhomogenen Problemen der Elastizitätstheorie

Es wird der Greensche Zustand $\overset{\circ}{f}(\mathcal{M}_0)$ mit einer Singularität an der Stelle \mathcal{M}_0 eingeführt. Dieser erfüllt, von der singulären Stelle \mathcal{M}_0 abgesehen, die homogene Gleichgewichtsbedingung (verschwindende Volumenkräfte) sowie die homogene Kompatibilitätsbedingung (verschwindende Extradehnung) im Innern B des elastischen Körpers. Weiterhin gelten homogene statische Randbedingungen (verschwindende Kräfte) auf dem Oberflächenteil F_p und homogene geometrische Randbedingungen (verschwindende Verschiebung) auf dem Oberflächenteil F_w .

Der Greensche Zustand $\overset{\circ}{f}(\mathcal{M}_0)$ setzt sich zusammen aus einem "Fundamentalzustand" $\overset{\infty}{f}(\mathcal{M}_0)$, der dem Feld der Singularität im homogenen unendlichen Medium entspricht, und einem Regulärteil $\overset{v}{f}(\mathcal{M}_0)$, der für die Erfüllung der übrigen, den Greenschen Zustand definierenden Bedingungen sorgt:

$$\overset{\circ}{f}(\mathcal{M}_0) = \overset{\infty}{f}(\mathcal{M}_0) + \overset{v}{f}(\mathcal{M}_0) \quad (5.1)$$

Es soll nun gezeigt werden, wie sich bei Kenntnis des Greenschen Zustandes $\overset{\circ}{f}(\mathcal{M}_0)$ und der Größen der Stufe III (Volumenkraft p , Extradehnung $\underline{\varepsilon}^0$, Oberflächenkraft \mathcal{P}^* auf F_p , Verschiebung \mathcal{W}^* auf F_w) eines unbekanntes Zustandes beliebige Feldgrößen der Stufen I oder II des unbekanntes Zustandes an der Stelle \mathcal{M}_0 berechnen lassen.

Zur Berechnung der unbekanntes Feldgrößen wird das Skalarprodukt $\{f, \overset{\circ}{f}(\mathcal{M}_0)\}$ aus dem unbekanntes Zustand f und dem Greenschen Zustand $\overset{\circ}{f}(\mathcal{M}_0)$ gebildet. Da der Greensche Zustand mit Ausnahme der singulären Stelle \mathcal{M}_0 überall die homogene Gleichgewichtsbedingung und die homogene Kompatibilitätsbedingung erfüllt, kann er sowohl durch ein Spannungsfunktionenfeld $\overset{\circ}{\chi}(\mathcal{M}_0)$ als auch durch ein Verschiebungsfeld $\overset{\circ}{\mathcal{W}}(\mathcal{M}_0)$ repräsentiert werden.

Mit $\overset{\circ}{\mathcal{W}}(\mathcal{M}_0)$ als Repräsentation des Greenschen Zustandes ergibt sich aus (4.5) für die Wechselwirkungsenergie:

$$\{f, \overset{\circ}{f}(\mathcal{M}_0)\} = (p, \overset{\circ}{w}(\mathcal{M}_0)) + [p, \overset{\circ}{w}(\mathcal{M}_0)]_{F_p} + \overset{\circ}{\mathcal{J}}(\mathcal{M}_0) \quad (5.2)$$

Die Integrale in (5.2) sind so zu bilden, daß die singuläre Stelle \mathcal{L}_0 ausgespart bleibt. Die übrigen in (4.5) vorkommenden Ausdrücke verschwinden wegen der Eigenschaften des Greenschen Zustandes (verschwindende Extra-
dehnung in B, verschwindende Verschiebung auf F_w). Mit $\mathcal{P}(\mathcal{L}_0)$ wird der Beitrag der Singularität zur Wechselwirkungsenergie bezeichnet; er ist proportional zu einer statischen Feldgröße des unbekanntes Zustandes f.

Wird andererseits für den Greenschen Zustand $\overset{\circ}{f}(\mathcal{L}_0)$ eine Repräsentation durch den Spannungsfunktionentensor $\overset{\circ}{\chi}(\mathcal{L}_0)$ gewählt, so folgt aus Gleichung (4.5) unter Berücksichtigung der Eigenschaften von $\overset{\circ}{f}(\mathcal{L}_0)$:

$$\{f, \overset{\circ}{f}(\mathcal{L}_0)\} = [w, \overset{\circ}{p}(\mathcal{L}_0)]_{F_w} - (\varepsilon^{\mathcal{Q}, \overset{\circ}{\sigma}}(\mathcal{L}_0)) + \mathcal{E}(\mathcal{L}_0) . \quad (5.3)$$

In (5.3) ist wiederum die singuläre Stelle \mathcal{L}_0 bei der Integration auszuschließen. $\mathcal{E}(\mathcal{L}_0)$ ist der Beitrag der Singularität zur Wechselwirkungsenergie und stellt bis auf einen konstanten Faktor eine geometrische Feldgröße des unbekanntes Zustandes f dar.

Subtrahiert man (5.2) von (5.3), so fällt das Skalarprodukt heraus:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{L}_0) &= \mathcal{E}(\mathcal{L}_0) - \mathcal{P}(\mathcal{L}_0) \\ &= (p, \overset{\circ}{w}(\mathcal{L}_0)) + (\varepsilon^{\mathcal{Q}, \overset{\circ}{\sigma}}(\mathcal{L}_0)) + [p, \overset{\circ}{w}(\mathcal{L}_0)]_{F_p} - [w, \overset{\circ}{p}(\mathcal{L}_0)]_{F_w} \end{aligned} \quad (5.4)$$

In $\mathcal{F}(\mathcal{L}_0)$ sind die Beiträge der Singularität zusammengefaßt. Bei der praktischen Anwendung der Beziehung (5.4) wählt man die Singularitäten jeweils so, daß entweder $\mathcal{P}(\mathcal{L}_0)$ oder $\mathcal{E}(\mathcal{L}_0)$ verschwindet, je nachdem, ob eine geometrische oder eine statische Feldgröße berechnet werden soll. Voraussetzung für eine erfolgreiche Ermittlung von unbekanntes Feldgrößen mit Hilfe von (5.4) ist die Kenntnis der auf der rechten Seite auftretenden Feldgrößen des Greenschen Zustandes. Da das im allgemeinen nicht der Fall ist, werden zunächst für den Greenschen Zustand $\overset{\circ}{f}(\mathcal{L}_0)$ Vergleichszustände $\overset{\circ}{f}^{\sim}(\mathcal{L}_0)$ und $\overset{\circ}{f}^{\approx}(\mathcal{L}_0)$ eingeführt, die nur die statischen bzw. nur die geometrischen Bedingungen von $\overset{\circ}{f}(\mathcal{L}_0)$ erfüllen:

$$\overset{\circ}{f}^{\sim}(\mathcal{L}_0) = \overset{\infty}{f}(\mathcal{L}_0) + \overset{u}{f}^{\sim}(\mathcal{L}_0) \quad (5.5)$$

$$\overset{\circ}{f}^{\approx}(\mathcal{L}_0) = \overset{\infty}{f}(\mathcal{L}_0) + \overset{u}{f}^{\approx}(\mathcal{L}_0) \quad (5.6)$$

Bei bekanntem Fundamentzustand $\overset{\infty}{f}(\mathcal{L}_0)$ können Vergleichszustände $\overset{u}{f}^{\sim}(\mathcal{L}_0)$ und $\overset{u}{f}^{\approx}(\mathcal{L}_0)$ in der Regel leicht angegeben werden.

Mit (5.5) und (5.6) erhält man eine zu (5.4) analoge Beziehung für die Größe $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{C}_0) &= (p, \overset{\circ}{w}(\mathcal{C}_0)) + (\varepsilon^0, \overset{\circ}{\sigma}(\mathcal{C}_0)) + [p, \overset{\circ}{w}(\mathcal{C}_0)]_{F_P} - [w, \overset{\circ}{p}(\mathcal{C}_0)]_{F_W} \\ &+ \{f, \tilde{f}(\mathcal{C}_0) - f(\mathcal{C}_0)\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Gegenüber (5.4) treten in den ersten vier Integralausdrücken auf der rechten Seite von (5.7) Feldgrößen der Vergleichszustände des Greenschen Zustandes auf, die als bekannt angesehen werden können. Allerdings erscheint in (5.7) noch ein Skalarprodukt mit dem unbekanntem Zustand f . Um hierfür eine Abschätzung zu erhalten, werden auch für den unbekanntem Zustand f selbst Vergleichszustände eingeführt:

f^{\sim} erfülle alle geometrischen Bedingungen von f , so daß

$$(f^{\sim} - f) = (f^{\sim} - f)' \quad (5.8)$$

ein reiner Lastspannungszustand ist.

f^{\approx} erfülle alle statischen Bedingungen von f , so daß

$$(f^{\approx} - f) = (f^{\approx} - f)'' \quad (5.9)$$

ein reiner Eigenspannungszustand ist.

Mit diesen Vergleichszuständen ergibt sich für das Skalarprodukt mit dem unbekanntem Zustand f folgende Abschätzung [5,6]:

$$\begin{aligned} &|\{f, \tilde{f}(\mathcal{C}_0) - \tilde{f}(\mathcal{C}_0)\} - \frac{1}{2} \{f^{\sim} + f^{\approx}, \tilde{f}(\mathcal{C}_0) - \tilde{f}(\mathcal{C}_0)\}| \\ &\leq \frac{1}{2} \|f^{\approx} - f^{\sim}\| \|\tilde{f}(\mathcal{C}_0) - \tilde{f}(\mathcal{C}_0)\| \end{aligned} \quad (5.10)$$

Vorstehende Abschätzung, in (5.7) eingesetzt, liefert die Eingrenzungsformel:

$$|\mathcal{F}(\mathcal{C}_0) - \mathcal{F}_N(\mathcal{C}_0)| \leq \frac{1}{2} \|f^{\approx} - f^{\sim}\| \|\tilde{f}(\mathcal{C}_0) - \tilde{f}(\mathcal{C}_0)\| \quad (5.11)$$

mit der Näherungsgröße

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N(\mathcal{C}_0) &= (p, \overset{\circ}{w}(\mathcal{C}_0)) + (\varepsilon^0, \overset{\circ}{\sigma}(\mathcal{C}_0)) + [p, \overset{\circ}{w}(\mathcal{C}_0)]_{F_P} - [w, \overset{\circ}{p}(\mathcal{C}_0)]_{F_W} \\ &+ \frac{1}{2} \{f^{\sim} + f^{\approx}, \tilde{f}(\mathcal{C}_0) - \tilde{f}(\mathcal{C}_0)\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Nach der Abschätzung (5.11) unterscheidet sich die gesuchte Feldgröße $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0)$ von f an der Stelle \mathcal{C}_0 von einem Näherungswert $\mathcal{F}_N(\mathcal{C}_0)$ nach (5.12) höchstens um eine Eingrenzungsgröße, die durch die rechte Seite der Ungleichung (5.11) beschrieben wird.

6. Anwendung des Eingrenzungsverfahrens auf die orthotrope Platte

6.1. Grundgleichungen der orthotropen Platte

Betrachtet wird eine homogene orthotrope Platte mit konstanter Dicke h , die genügend klein gegenüber den Abmessungen der Plattenmittelebene ist. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Durchbiegung der Platte infolge der Normalbelastung p klein sei gegenüber der Plattendicke h . Gültigkeit der Kirchhoffschen Normalenhypothese kann damit vorausgesetzt werden. Volumenkräfte (etwa das Gewicht) werden zur Normalbelastung hinzugerechnet.

Um das verallgemeinerte Hookesche Gesetz in der Voigtschen Schreibweise benutzen zu können, werden die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} ; & \sigma_2 &= \sigma_{22} ; & \sigma_3 &= \sigma_{33} ; \\ \sigma_4 &= \sigma_{23} ; & \sigma_5 &= \sigma_{13} ; & \sigma_6 &= \sigma_{12} . \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_{11} ; & \epsilon_2 &= \epsilon_{22} ; & \epsilon_3 &= \epsilon_{33} ; \\ \epsilon_4 &= 2\epsilon_{23} ; & \epsilon_5 &= 2\epsilon_{13} ; & \epsilon_6 &= 2\epsilon_{12} . \end{aligned}$$

Damit lautet des Hookesche Gesetz in Indizesschreibweise

$$\sigma_a = A_{ab} \epsilon_b ; \quad A_{ab} = A_{ba} ; \quad a, b = 1, \dots, 6 \tag{6.1.2}$$

Hierbei wurde die Einsteinsche Summationskonvention benutzt, wonach in einem multiplikativ zusammengesetzten Ausdruck über gleich benannte Indizes summiert wird. Bestimmt man aus (6.1.2) die Dehnungskomponenten als Funktion der Spannungskomponenten, so ergibt sich:

$$\epsilon_a = B_{ab} \sigma_b ; \quad B_{ab} = B_{ba} ; \quad a, b = 1, \dots, 6 \tag{6.1.3}$$

Die Koeffizienten A_{ab} ergeben sich aus den Elementen des Tensors \underline{c} der Elastizitätskonstanten und die Koeffizienten B_{ab} aus den Elementen des Tensors \underline{g} der Elastizitätskoeffizienten. Die Matrizen A_{ab} und B_{ab} sind zueinander invers

$$A_{ac} B_{cb} = \delta_{ab} \tag{6.1.4}$$

mit δ_{ab} dem bekannten Kronecker-Symbol.

Zur Beschreibung der orthotropen Platte werde ein rechtwinkliges cartesisches Koordinatensystem benutzt, wobei die x, y -Ebene mit der unverformten Platten-

mittelfläche zusammenfalle und die z-Achse darauf senkrecht stehe. Die Verschiebungskomponenten eines beliebigen Plattenpunktes seien u, v, w . Erfährt die Plattenmittelfläche keine Horizontalverschiebung, so gilt bei Annahme der Kirchhoffschen Normalenhypothese:

$$u = -zw_{,x} \quad ; \quad v = -zw_{,y} \quad . \quad (6.1.5)$$

Indizes hinter dem Komma bedeuten partielle Differentiation nach der entsprechenden Koordinatenrichtung.

In der Voigtschen Schreibweise lautet das Hookesche Gesetz für den ebenen Spannungszustand:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= B_{11}\sigma_1 + B_{12}\sigma_2 + B_{16}\sigma_6 \quad ; \\ \epsilon_2 &= B_{21}\sigma_1 + B_{22}\sigma_2 + B_{26}\sigma_6 \quad ; \\ \epsilon_6 &= B_{61}\sigma_1 + B_{62}\sigma_2 + B_{66}\sigma_6 \quad . \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

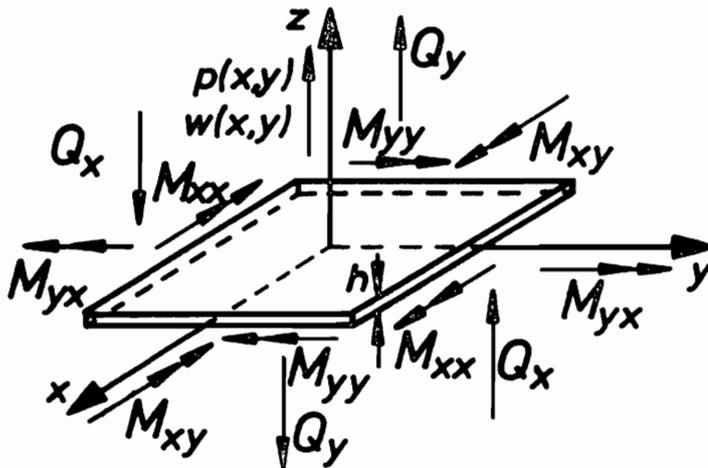
Löst man das Gleichungssystem (6.1.6) nach den Spannungen auf und drückt die Dehnungen durch die Verschiebungen nach (3.9) aus, so erhält man unter Berücksichtigung von (6.1.5):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -z(A_{11}w_{,xx} + A_{12}w_{,yy} + 2A_{16}w_{,xy}) \quad ; \\ \sigma_2 &= -z(A_{12}w_{,xx} + A_{22}w_{,yy} + 2A_{26}w_{,xy}) \quad ; \\ \sigma_6 &= -z(A_{16}w_{,xx} + A_{26}w_{,yy} + 2A_{66}w_{,xy}) \quad . \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

Die zur Berechnung der Plattenquerkräfte erforderlichen Spannungen σ_4 und σ_5 erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen (3.5), wenn man diese unter Berücksichtigung von (6.1.7) über z integriert und annimmt, daß σ_4 und σ_5 an der Plattenunter- und Plattenoberseite verschwinden:

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) [A_{16}w_{,xxx} + (A_{12} + 2A_{66})w_{,xxy} + 3A_{26}w_{,xyy} + A_{12}w_{,yyy}] \quad ; \\ \sigma_5 &= \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{h^2}{4} \right) [A_{11}w_{,xxx} + 3A_{16}w_{,xxy} + (A_{12} + 2A_{66})w_{,xyy} + A_{26}w_{,yyy}] \quad . \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

Als Schnittgrößen werden nun die folgenden Momentenkomponenten und Querkräfte definiert (Abb. 1):



(Abb. 6.1)

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 z \, dz, & M_{yy} &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 z \, dz, \\
 M_{xy} = M_{yx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_6 z \, dz, & & \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_4 \, dz, & Q_y &= - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_5 \, dz.
 \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Weiterhin werden die spezifischen Plattensteifigkeiten definiert:

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} A_{ij} z^2 \, dz = \frac{A_{ij} h^3}{12}. \tag{6.1.10}$$

Anstelle von (6.1.7) und (6.1.8) erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (6.1.9) und (6.1.10) die Beziehung zwischen den oben definierten Schnittgrößen und den Durchbiegungsableitungen:

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= D_{12} w_{,xx} + 2D_{26} w_{,xy} + D_{22} w_{,yy}, \\
 M_{yy} &= D_{11} w_{,xx} + 2D_{16} w_{,xy} + D_{12} w_{,yy}, \\
 M_{xy} = M_{yx} &= - (D_{16} w_{,xx} + 2D_{66} w_{,xy} + D_{26} w_{,yy}), \\
 Q_x &= - (D_{16} w_{,xxx} + (D_{12} + 2D_{66}) w_{,xxy} + 3D_{26} w_{,xyy} + D_{22} w_{,yyy}), \\
 Q_y &= D_{11} w_{,xxx} + 3D_{16} w_{,xxy} + (D_{12} + 2D_{66}) w_{,xyy} + D_{26} w_{,yyy}.
 \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

Die Momentenkomponenten (6.1.11) lassen sich zu einem Momententensor zusammenfassen:

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{pmatrix} . \quad (6.1.12)$$

Die entsprechende Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen (3.5) liefert für die Schnittgrößen die drei Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_{xx}}{\partial y} &= Q_x , \\ \frac{\partial M_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= Q_y , \\ \frac{\partial Q_y}{\partial x} - \frac{\partial Q_x}{\partial y} &= p(x,y) . \end{aligned} \quad (6.1.13)$$

Hierbei ist $p(x,y)$ die in positiver z -Richtung wirkende Normalbelastung je Flächeneinheit. Durch Elimination der Querkräfte in (6.1.13) erhält man als Gleichgewichtsbedingung die Differentialgleichung der Momentenkomponenten:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial x^2} = \begin{cases} 0 \\ p \end{cases} \quad (6.1.14)$$

Die Null auf der rechten Seite von (6.1.14) entspricht dem homogenen Fall, bei dem die Normalbelastung verschwindet.

Führt man noch den Krümmungstensor $\underline{\kappa}$ mit

$$\underline{\kappa} = \begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} \end{pmatrix} \quad (6.1.15)$$

ein, so nehmen die Kompatibilitätsbedingungen bei Abwesenheit bzw. Vorhandensein von Inkompatibilitäten η_x, η_y die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \kappa_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial y} &= \begin{cases} 0 \\ \eta_x \end{cases} \\ \frac{\partial \kappa_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \kappa_{yy}}{\partial y} &= \begin{cases} 0 \\ \eta_y \end{cases} . \end{aligned} \quad (6.1.16)$$

Für eigenspannungsfreie Platten lassen sich die Komponenten des Krümmungstensors aus der Durchbiegung der Platte ableiten:

$$\begin{aligned} \kappa_{xx} &= w_{,yy} \quad , \quad \kappa_{yy} = w_{,xx} \quad , \\ \kappa_{xy} &= \kappa_{yx} = -w_{,xy} \quad . \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

Setzt man in (6.1.14) die Beziehungen zwischen den Momenten und den Verschiebungen nach (6.1.11) ein, so gelangt man zur Differentialgleichung der Plattenbiegung:

$$\begin{aligned} D_{11}w_{,xxxx} + 4D_{16}w_{,xxxxy} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} \\ + 4D_{26}w_{,xyyy} + D_{22}w_{,yyyy} = P \quad . \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

Zur vollständigen Beschreibung des Randwertproblems der Plattenbiegung ist neben der Angabe der Differentialgleichungen (6.1.18) bzw. (6.1.14) noch die Festsetzung der geometrischen und statischen Randbedingungen für die verschiedenen Arten der Lagerung notwendig. Mit den Bezeichnungen von Abb. (6.2) lassen sich die Randbedingungen eines Lastspannungszustandes $f \in \mathcal{R}$ einer

beliebig gelagerten Platte wie folgt zusammenfassen:

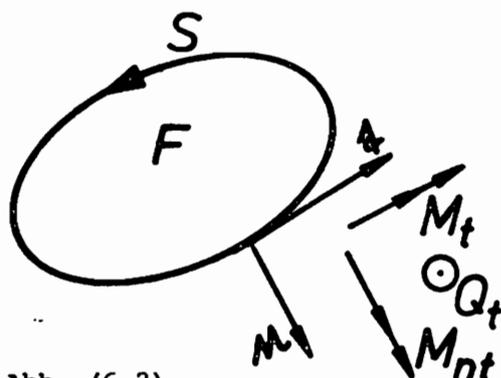


Abb. (6.2)

Rand	geometrische RB	statische RB
eingespannt	$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0$	-----
gelenkig gelagert	$w = 0$	$M_t = 0$
frei	-----	$M_t = 0, \bar{Q}_t = 0, R = 0$

wobei \bar{Q}_t die Stützkraft:

$$\bar{Q}_t = Q_t - \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} \tag{6.1.19}$$

und R die in den Ecken wirkende Einzelkraft bedeuten. Diese ist gleich der Differenz der in den Eckpunkten an verschiedenen Seiten genommenen Torsionsmomente M_{nt} .

Für die Wechselwirkungsenergie $\{f, f\}^{1, 2}$ zweier elastischer Zustände der Platte gilt:

$$\{f, f\}^{1, 2} = \int_V \underline{\sigma}^1 \cdot \underline{\varepsilon}^2 dV . \quad (6.1.20)$$

(B)

Mit Hilfe von (6.1.5) und (6.1.17) läßt sich bei Lastspannungszuständen der Dehnungstensor $\underline{\varepsilon}$ durch den Krümmungstensor $\underline{\kappa}$ ausdrücken. Führt man in (6.1.20) die Integration nach der z-Richtung durch, so nimmt das Skalarprodukt zweier Lastspannungszustände für die Platte die folgende Gestalt an:

$$\{f, f\}^{1, 2} = \int_F \underline{\kappa}^1 \cdot \underline{M}^2 dF$$

(F)

$$= \int_F \left[\kappa_{xx}^1 M_{xx}^2 + \kappa_{yy}^1 M_{yy}^2 + 2\kappa_{xy}^1 M_{xy}^2 \right] dF . \quad (6.1.21)$$

(F)

Die bisher gemachten Ausführungen bezogen sich auf den allgemeinen anisotropen Fall; hierbei wurde die Materialeigenschaft der Platte charakterisiert durch Angabe der 6 Plattensteifigkeiten $D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{16}, D_{26}$ und D_{66} . Ein wichtiger Sonderfall der anisotropen Platte ist die orthogonal anisotrope oder kurz orthotrope Platte, die im folgenden ausschließlich betrachtet werden soll. Die orthotrope Platte ist gekennzeichnet durch:

$$D_{16} = D_{26} = 0 \quad (6.1.22)$$

In Anlehnung an Timoschenko [9] werden die Umbenennungen:

$$D_x \equiv D_{11} ; D_y \equiv D_{22} ; D_1 \equiv D_{12} ; D_{xy} = D_{66}$$

$$H = D_1 + 2D_{xy} \quad (6.1.23)$$

eingeführt. Zwischen den Plattensteifigkeiten und den Biegesteifigkeiten sowie den Querkontraktionszahlen für die x- bzw. y-Richtung bestehen die Relationen [10]:

Querkontraktionszahl für die x-Richtung : ν_x
 Querkontraktionszahl für die y-Richtung : ν_y
 Biegesteifigkeit im Schnitt $x=\text{konst}$ pro Längeneinheit: $[EJ]_x$
 Biegesteifigkeit im Schnitt $y=\text{konst}$ pro Längeneinheit: $[EJ]_y$ (6.1.24)

Plattensteifigkeiten: $D_x = \frac{[EJ]_x}{1-\nu_x \nu_y}$ $D_y = \frac{[EJ]_y}{1-\nu_x \nu_y}$

Mittelwert der Torsionssteifigkeit: $D_{xy} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}) \sqrt{D_x D_y}$

Konstante D_1 : $D_1 = \frac{1}{2} (D_x \nu_y + D_y \nu_x)$

Kennwert λ : $\lambda = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}} = \frac{1}{\sqrt{D_x D_y}} \left[\frac{1}{2} (D_x \nu_y + D_y \nu_x) + 2D_{xy} \right]$

Reziprozitätsbedingung von Betti: $D_x \nu_y = D_y \nu_x$ (6.1.24)

Für die isotrope Platte ist $\nu_x = \nu_y = \nu$ zu setzen, die Plattensteifigkeiten nehmen die Werte

$$\begin{aligned} D_x = D_y &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} , \\ D_1 &= \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)} , \\ D_{xy} &= \frac{Eh^3}{24(1+\nu)} , \end{aligned} \tag{6.1.25}$$

an. Mit E wurde der Elastizitätsmodul, mit J das Trägheitsmoment und mit ν die Poissonsche Zahl bezeichnet. Anstelle von (6.1.18) vereinfacht sich die Differentialgleichung der orthotropen Plattenbiegung zu:

$$D_x w_{,xxxx} + 2D_{xy} w_{,xxyy} + D_y w_{,yyyy} = p \tag{6.1.26}$$

Aus der Gleichung (6.1.21) für das Skalarprodukt $\{f, f\}$ zweier Lastspannungszustände lassen sich einige für die Anwendung wichtige Umformungen herleiten. Drückt man die Krümmungen und die Momente durch Verschiebungsableitungen aus, so gelangt man zu:

$$\begin{aligned} \{f, f\} &= \int (F) \left[D_x w_{,xx}^2 + D_1 (w_{,xx} w_{,yy} + w_{,yy} w_{,xx}) \right. \\ &\quad \left. + D_y w_{,yy}^2 + 4D_{xy} w_{,xy}^2 \right] dF. \end{aligned} \tag{6.1.27}$$

Eliminiert man mit Hilfe von (6.1.11) aus (6.1.21) die Krümmungen bzw. Verschiebungsableitungen, so erhält man das Skalarprodukt als Funktion der Momente:

$$\{f, f\} = \frac{1}{D_x D_y - D_1^2} \int_{(F)} [D_y M_{xx} M_{xx} + D_x M_{yy} M_{yy} - D_1 (M_{xx} M_{yy} + M_{yy} M_{xx}) + \frac{D_x D_y - D_1^2}{D_{xy}} M_{xy} M_{xy}] dF. \quad (6.1.28)$$

Aus (6.1.21) erhält man durch partielle Integration schließlich noch die folgende Darstellung des Skalarproduktes zweier elastischer Zustände:

$$\{f, f\} = \int_{(F)} w p dF + \oint_{(S)} [w Q_t - \frac{\partial w}{\partial n} M_t] dS - \sum_E w [M_{nt}^{(+)} - M_{nt}^{(-)}]. \quad (6.1.29)$$

6.2. Zusammenstellung einiger Singularitäten

Zur Anwendung der Eingrenzungsbeziehung (5,11) und (5,12) ist die Kenntnis der Fundamentalzustände $\bar{f}(\mathcal{C}_0)$ erforderlich. Dies bedeutet, daß für orthotrope Platten die Durchbiegung, die Momente und die Querkräfte in einer unendlich ausgedehnten Platte unter der Wirkung einer Singularität in Form von Einzelkraft, Einzelmoment usw. bekannt sein müssen. In [10] hat Stein Lösungen angegeben, die im folgenden auszugsweise aufgeführt werden.

A. Einzelkraft als Singularität

Im Punkte $\mathcal{C}_0 = (x_0, y_0)$ der unendlich ausgedehnten Platte greife senkrecht zur Plattenebene eine Einzelkraft vom Betrag $P = 1$ kp an. Die dadurch hervorgerufene Durchbiegung erhält man aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$D_x w_{,xxxx} + 2Hw_{,xxyy} + D_y w_{,yyyy} = 0. \quad (6.2.1)$$

Durch die Koordinatentransformation $x = \sqrt[4]{D_x} \bar{x}$ und $y = \sqrt[4]{D_y} \bar{y}$ in Verbindung mit $\lambda = \frac{H}{\sqrt{D_x D_y}}$ wird (6.2.1) in die nachstehende Gleichung überführt:

$$w_{,xxxx} + 2\lambda w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = 0. \quad (6.2.2)$$

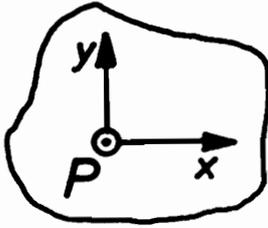


Abb. 6.3

Der Einfachheit halber wird der Kraftangriffspunkt als der Nullpunkt des Koordinatensystems angenommen.

Die Lösungen der Gleichungen (6.2.2) sind abhängig von der Größe des Koeffizienten $\lambda = H/\sqrt{D_x D_y}$. Maßgebend hierbei sind die Fälle $\lambda = 0$, $0 < \lambda < 1$, $1 < \lambda < \infty$.

Singularitäten der Durchbiegung

$\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} \overset{\infty}{w}(\bar{x}, \bar{y}) = & \frac{1}{8\pi\sqrt[4]{D_x D_y}} \left[\frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\sqrt{2}} \ln \sqrt{\bar{x}^4 + \bar{y}^4} + 2\bar{x}\bar{y} \ln \sqrt{\frac{\bar{x}^2 + \sqrt{2\bar{x}^2\bar{y}^2 + \bar{y}^2}}{\bar{x}^2 - \sqrt{2\bar{x}^2\bar{y}^2 + \bar{y}^2}}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{x}^2 \arctan \frac{\bar{x}^2}{\bar{y}^2} + \bar{y}^2 \arctan \frac{\bar{y}^2}{\bar{x}^2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

$0 < \lambda < 1$:

$$\begin{aligned} \overset{\infty}{w}(\bar{x}, \bar{y}) = & \frac{1}{8\pi\sqrt[4]{D_x D_y}} \left[\frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\sqrt{2(1+\lambda)}} \ln \sqrt{\bar{x}^4 + 2\lambda\bar{x}^2\bar{y}^2 + \bar{y}^4} + 2 \frac{\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right. \\ & \cdot \ln \sqrt{\frac{\bar{x}^2 + \sqrt{2(1-\lambda)\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2}}{\bar{x}^2 - \sqrt{2(1-\lambda)\bar{x}\bar{y} + \bar{y}^2}}} + \frac{1}{\sqrt{2(1-\lambda)}} \left\{ \bar{x}^2 \arctan \frac{\sqrt{1-\lambda^2}\bar{y}^2}{\bar{y}^2 + \lambda\bar{x}^2} \right. \\ & \left. \left. + \bar{y}^2 \arctan \frac{\sqrt{1-\lambda^2}\bar{x}^2}{\bar{x}^2 + \lambda\bar{y}^2} \right\} \right] \end{aligned}$$

$\lambda = 1$:

$$\overset{\infty}{w}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{8\pi\sqrt[4]{D_x D_y}} [(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \{1 + \ln \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}\}]$$

$1 < \lambda < \infty$:

$$\begin{aligned} \overset{\infty}{w}(\bar{x}, \bar{y}) = & \frac{1}{8\pi\sqrt[4]{D_x D_y}} \left[\frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{\sqrt{2(\lambda+1)}} \ln \sqrt{\bar{x}^4 + 2\lambda\bar{x}^2\bar{y}^2 + \bar{y}^4} + 2 \frac{\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\lambda^2-1}} \arctan \frac{\sqrt{2(\lambda-1)}\bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{2(\lambda-1)}} \left\{ \bar{x}^2 \ln \sqrt{\frac{(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1})\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{(\lambda - \sqrt{\lambda^2-1})\bar{x}^2 + \bar{y}^2}} + \bar{y}^2 \ln \sqrt{\frac{\bar{x}^2 + (\lambda + \sqrt{\lambda^2-1})\bar{y}^2}{\bar{x}^2 + (\lambda - \sqrt{\lambda^2-1})\bar{y}^2}} \right\} \right] \end{aligned}$$

Die restlichen Schnittgrößen lassen sich durch Differentiation der Durchbiegung gewinnen:

$$\varphi_x^\infty = \frac{\partial w^\infty(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} \quad (6.2.4)$$

$$M_{xx}^\infty = D_x \left\{ \frac{\partial^2 w^\infty(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w^\infty(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y^2} \right\}$$

$$M_{yy}^\infty = D_y \left\{ \frac{\partial^2 w^\infty(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w^\infty(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x^2} \right\} \quad (6.2.5)$$

$$M_{xy}^\infty = M_{yx}^\infty = 2D_{xy} \frac{\partial^2 w^\infty(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x \partial y} \quad (6.2.6)$$

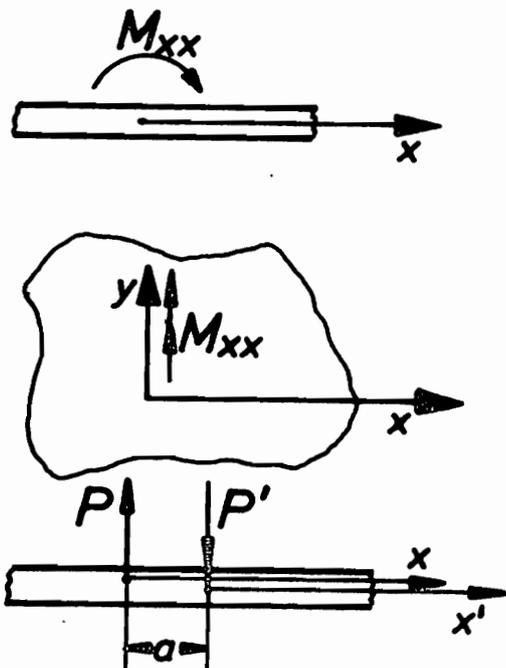
$$Q_x^\infty = \frac{\partial M_{xy}^\infty}{\partial x} - \frac{\partial M_{xx}^\infty}{\partial y}$$

$$Q_y^\infty = \frac{\partial M_{yy}^\infty}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}^\infty}{\partial x} \quad (6.2.7)$$

$$Q_x^{\text{is}} = Q_x^\infty + \frac{\partial M_{xy}^\infty}{\partial y}$$

$$Q_y^{\text{is}} = Q_y^\infty - \frac{\partial M_{xy}^\infty}{\partial x} \quad (6.2.8)$$

B. Einzelmoment als Singularität



Das Moment M_{xx} soll im Koordinatenursprung angreifen. Es wird zunächst dargestellt durch ein Kräftepaar $P - P'$ mit dem Abstand a . Man erhält die Lösung für die Durchbiegung w_M^∞ der unendlich ausgehenden orthotropen Platte infolge eines Einzelmomentes aus dem Grenzwert:

Abb. 6.4

$$(\bar{w}_M^{x,y}) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} [\bar{w}_P^{x',y'} - \bar{w}_P^{x,y}] , \quad (6.2.12)$$

\bar{w}_P ist hierin die Durchbiegung infolge einer Einzelkraft P. Wie in [10] gezeigt wurde, liefert die Grenzwertbetrachtung das Ergebnis:

$$\bar{w}_M^{x,y} = - \frac{\partial \bar{w}_P^{x,y}}{\partial x} . \quad (6.2.13)$$

Somit lassen sich die Verformungs- und Schnittgrößen infolge eines Einzelmomentes aus den entsprechenden Größen für die Einzelkraft durch Differentiation gewinnen. In gleicher Weise wie o. a. kann man vorgehen, wenn beispielsweise Quadrupole, Oktupole usw. als Singularitäten angenommen werden.

7. Ansätze für die Vergleichszustände

In diesem Abschnitt werden für das Beispiel der eigenspannungsfreien orthotropen Platte die zur Eingrenzung der Durchbiegung notwendigen Ansätze für die drei verschiedenen Lagerungsfälle der Platte konstruiert.

Wegen der Beschränkung auf einen reinen Lastspannungszustand wird in (5.12):

$$(\epsilon^0, \sigma^0(\mathcal{C}_0)) = [w, p^0(\mathcal{C}_0)]_{F_w} = 0 . \quad (7.1.)$$

Der Ausdruck $(p, \bar{w}^0(\mathcal{C}_0))$ wird null, da das Gewicht der äußeren Belastung hinzugerechnet wird. Somit verbleibt für die Näherungsgröße $\mathcal{F}_N(\mathcal{C}_0)$ nach (5.12):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N(\mathcal{C}_0) &= [p, \bar{w}^0(\mathcal{C}_0)]_{F_p} + \frac{1}{2} \{f^{\sim} + f^{\approx}, \bar{f}^{\vee}(\mathcal{C}_0) - \bar{f}^{\vee}(\mathcal{C}_0)\} \\ &= [p, \bar{w}^0(\mathcal{C}_0)]_{F_p} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{f^{\sim}, \bar{f}^{\vee}(\mathcal{C}_0)\} - \frac{1}{2} \{f^{\approx}, \bar{f}^{\vee}(\mathcal{C}_0)\} + \frac{1}{2} \{f^{\approx}, \bar{f}^{\vee}(\mathcal{C}_0)\} - \frac{1}{2} \{f^{\sim}, \bar{f}^{\vee}(\mathcal{C}_0)\} , \end{aligned} \quad (7.2.)$$

und für die Eingrenzungsspanne:

$$\begin{aligned}
 | \mathcal{F}(\mathcal{C}_0) - \mathcal{F}_N(\mathcal{C}_0) | &\leq \text{sp} \mathcal{F}(\mathcal{C}_0) = \frac{1}{2} \| \underline{f}^{\sim} - \underline{f}^{\sim} \| \| \underline{f}^{\sim}(\mathcal{C}_0) - \underline{f}^{\sim}(\mathcal{C}_0) \| \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{ \{ \underline{f}^{\sim}, \underline{f}^{\sim} \} + \{ \underline{f}^{\sim}, \underline{f}^{\sim} \} - 2 \{ \underline{f}^{\sim}, \underline{f}^{\sim} \} } \cdot \\
 &\cdot \sqrt{ \{ \underline{f}^{\sim}(\mathcal{C}_0), \underline{f}^{\sim}(\mathcal{C}_0) \} + \{ \underline{f}^{\sim}(\mathcal{C}_0), \underline{f}^{\sim}(\mathcal{C}_0) \} - 2 \{ \underline{f}^{\sim}(\mathcal{C}_0), \underline{f}^{\sim}(\mathcal{C}_0) \} }.
 \end{aligned}
 \tag{7.3}$$

Zur Eingrenzung der Durchbiegung an der Stelle \mathcal{C}_0 wird dort als Singularität eine senkrecht zur Plattenebene wirkende Einzelkraft P vom Betrag 1 kp angenommen. Dabei ist $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0)$ gleichbedeutend mit der Arbeit, die die singuläre Kraft $P = 1$ kp leistet, wenn sie infolge der Flächenlast p eine Verschiebung um $w(\mathcal{C}_0)$ erfährt. Entsprechend ist $\mathcal{F}_N(\mathcal{C}_0)$ die Arbeit, die die Kraft $P = 1$ kp bei einer Verschiebung um den Näherungswert $w_N(\mathcal{C}_0)$ leistet.

Zur Berechnung der in (7.2) und (7.3) auftretenden Skalarprodukte müssen die Vergleichszustände $\underline{f}^{\sim}, \underline{f}^{\sim}, \underline{f}^{\sim}(\mathcal{C}_0)$ und $\underline{f}^{\sim}(\mathcal{C}_0)$ realisiert werden. Die Zustände \underline{f}^{\sim} und $\underline{f}^{\sim}(\mathcal{C}_0)$ sollen durch Verschiebungsansätze dargestellt werden, wohingegen für \underline{f}^{\sim} und $\underline{f}^{\sim}(\mathcal{C}_0)$ eine Repräsentation durch den Momententensor gewählt wird.

Verschiebungsansätze

Bei Verschiebungsansätzen mit den üblichen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsanforderungen sind die Kompatibilitätsbedingungen in der Regel immer erfüllt. Schwieriger dagegen ist das Einhalten der geometrischen Randbedingungen für den festeingespannten und den drehbar gelagerten Rand. Beschränkt man sich auf rechtwinklig begrenzte Plattenflächen, d. h., der Rand verläuft entweder parallel zur x - oder zur y -Achse, so läßt sich mit Hilfe der sogenannten bikubischen Interpolation, die auf Schaefer [11] zurückgeht, eine Verschiebungsfunktion w konstruieren, die allen homogenen geometrischen Randbedingungen für die verschiedenen Lagerungsfälle genügt.

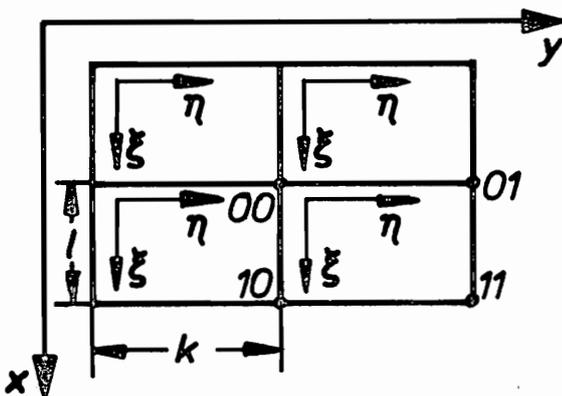


Abb. 7.1

Danach wird das Plattengebiet F in rechtwinklige Maschen mit den Seitenlängen l und k in x - und in y -Richtung unterteilt. In jeder Masche wird ein separater Ansatz $w(\xi, \eta)$ im ξ, η -Koordinatensystem gewählt, dessen Ursprung in der linken oberen Ecke jeder Masche liegt. Durch geeignete Normierung mit

Hilfe der Seitenlängen l und k läßt sich zudem das Koordinatensystem dimensionslos machen; aus den rechtwinkligen Maschen werden dann Quadrate mit der Kantenlänge Eins. Für $w(\xi, \eta)$ werden hier ausschließlich kubische Polynome in den Variablen ξ und η benutzt. Der bikubische Ansatz läßt sich folgendermaßen darstellen [11]:

$$w(\xi, \eta) = [f_0(\xi), g_0(\xi), f_1(\xi), g_1(\xi)] \begin{bmatrix} w_{00} & q_{00} & w_{01} & q_{01} \\ p_{00} & r_{00} & p_{01} & r_{01} \\ w_{10} & q_{10} & w_{11} & q_{11} \\ p_{10} & r_{10} & p_{11} & r_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(\eta) \\ g_0(\eta) \\ f_1(\eta) \\ g_1(\eta) \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

In (7.4) sind die Elemente des Zeilen- und des Spaltenvektors die "Hermiteischen" Interpolationspolynome (Abb. 7.2):

$$\begin{aligned} f_0(\xi) &= (1-\xi)^2(2\xi+1) & f_1(\xi) &= \xi^2(3-2\xi) \\ g_0(\xi) &= (1-\xi)^2\xi & g_1(\xi) &= \xi^2(\xi-1) \end{aligned} \quad (7.5)$$

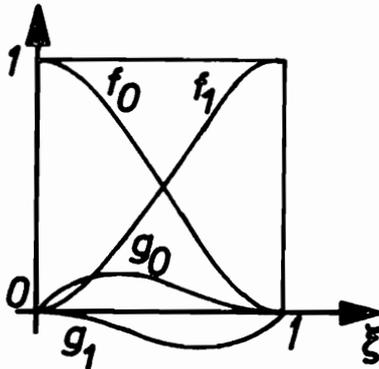


Abb. 7.2

Ferner sind in (7.4) die Abkürzungen eingeführt:

$$p = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (7.6)$$

Durch die Parameter $w_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$, $p_{\alpha\beta}$, $r_{\alpha\beta}$ in den Knotenpunkten (α, β) werden die separaten Maschenansätze miteinander verknüpft und die Gestalt der resultierenden, über das gesamte Plattengebiet F definierten Verschiebungsfunktion festgesetzt. In den Knoten wird die

Durchbiegung gleich $w_{\alpha\beta}$, die Neigungen gleich $p_{\alpha\beta}$ bzw. $q_{\alpha\beta}$ und die gemischte Ableitung gleich $r_{\alpha\beta}$. In [11] wurde nachgewiesen, daß der Ansatz einschließlich der ersten und der gemischten Ableitungen stetig ist.

Die geometrischen Randbedingungen der gelenkig gelagerten Platte (verschwindende Verschiebung) werden erfüllt durch Nullsetzen der Parameter $w_{\alpha\beta}$ und $p_{\alpha\beta}$ für Randstreifen parallel zur x -Achse bzw. $w_{\alpha\beta}$ und $q_{\alpha\beta}$ für Randstreifen parallel zur y -Achse für alle Knoten (α, β) auf dem Rand. Bei der festeingespannten Platte müssen für die Randknoten sämtliche Werte $w_{\alpha\beta}$, $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$, $r_{\alpha\beta}$ null gesetzt werden.

Die Parameter in (7.4), die nicht zur Befriedigung der geometrischen Randbedingungen null gesetzt werden, sind Freiwerte, die so variiert werden, daß die Eingrenzungsspanne nach (7.3) minimal bezüglich des Vergleichszustandes f wird. Dazu muß gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}} \{f^{\sim}, f^{\sim}\} - 2 \frac{\partial}{\partial w_{\alpha\beta}} \{f^{\sim}, f^{\approx}\} &= 0, \\ \vdots & \\ \frac{\partial}{\partial r_{\alpha\beta}} \{f^{\sim}, f^{\sim}\} - 2 \frac{\partial}{\partial r_{\alpha\beta}} \{f^{\sim}, \approx\} &= 0, \end{aligned} \quad (7.7)$$

für alle freien Parameter $w_{\alpha\beta}$, $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$, $r_{\alpha\beta}$. Wählt man für $\{f^{\sim}, f^{\sim}\}$ die Form nach (6.1.27) und für $\{f^{\sim}, f^{\approx}\}$ die Form nach (6.1.29), so erhält man aus (7.7) ein lineares Gleichungssystem für die Variationsparameter.

Für den Vergleichszustand $f^{\sim}(\mathcal{C}_0)$ muß eine Verschiebungsfunktion $w^{\sim}(\mathcal{C}_0)$ konstruiert werden, die bei der gelenkig gelagerten Platte auf dem Rand zusammen mit der Fundamentalverschiebung $\bar{w}(\mathcal{C}_0)$ verschwindet:

$$\bar{w}(\mathcal{C}_0) + w^{\sim}(\mathcal{C}_0) = 0. \quad (7.8)$$

Bei der festeingespannten Platte muß außer (7.8) noch gelten:

$$\frac{\partial \bar{w}(\mathcal{C}_0)}{\partial n} + \frac{\partial w^{\sim}(\mathcal{C}_0)}{\partial n} = 0, \quad (7.9)$$

n ist eine Variable entlang des nach außen gerichteten Normalenvektors.

Für die gelenkig gelagerte Platte geht man

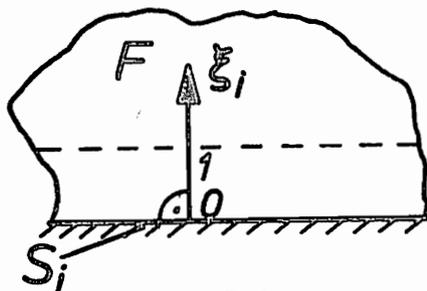


Abb. 7.3

zur Konstruktion von w^{\sim} folgendermaßen vor:

Senkrecht zu jedem Randstück S_i wird eine ins Innere des Plattengebietes F positiv zählende Koordinate ξ_i eingeführt. Dann wird gesetzt:

$$w^{\sim}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}) = \begin{cases} -\bar{w}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C} \in S_i) \cdot f_0(\xi_i) & \text{für } 0 \leq \xi_i \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.10)$$

mit $f_0(\xi_i)$ nach (7.5). In (7.10) bezeichnet \mathcal{C}_0 in \bar{w} den Angriffspunkt der

Singularität und $\varrho \in S_i$ bedeutet, daß der Aufpunkt sich nur auf dem Randstück S_i bewegen darf. Außerhalb des zu S_i parallelen Streifens ($0 \leq \xi_i \leq 1$) wird \tilde{w} identisch null gesetzt. Erweist sich die Streifenbreite Eins als zu groß - das ist dann der Fall, wenn sich zwei parallel verlaufende Streifen überlappen - so kann jederzeit durch eine geeignete Koordinatentransformation für ξ_i eine passende Streifenbreite erzielt werden.

Durch den Ansatz (7.10) wird erreicht, daß $\tilde{w} + \tilde{w}$ auf jedem Randstück S_i Null wird. Allerdings müssen noch für die ein- und ausspringenden Ecken Kompensations- bzw. Ergänzungsglieder in (7.10) eingeführt werden, weil sonst in den sich überlappenden Streifen bei den ausspringenden Ecken die Randbedingungen verletzt werden bzw. bei einspringenden Ecken \tilde{w} nicht definiert ist. Für ausspringende Ecken (i,j) (Abb. 7.4) wird jeweils der

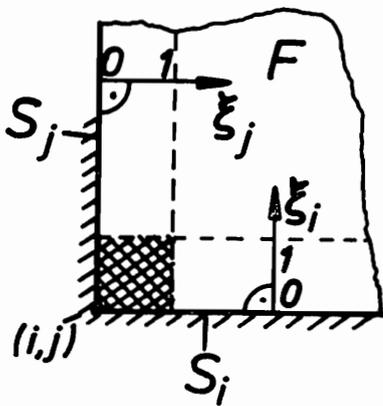


Abb. 7.4

Term

$$+ \tilde{w}(\varrho_0, \varrho = (i,j)) \cdot f_0(\xi_i) \cdot f_0(\xi_j), \quad (7.11)$$

der außerhalb des doppelt schraffierten Quadrates null ist, hinzuaddiert.

Bei einspringenden Ecken (Abb. 7.5) wird \tilde{w} in dem doppelt schraffierten Quadrat um das Glied

$$- \tilde{w}(\varrho_0, \varrho = (i,j)) \cdot f_0(\xi_i) f_0(\xi_j) \quad (7.12)$$

ergänzt.

Bei der festeingespannten Platte muß zusätzlich noch die Bedingung (7.9) berücksichtigt werden, so daß sich anstelle von (7.10) ergibt:

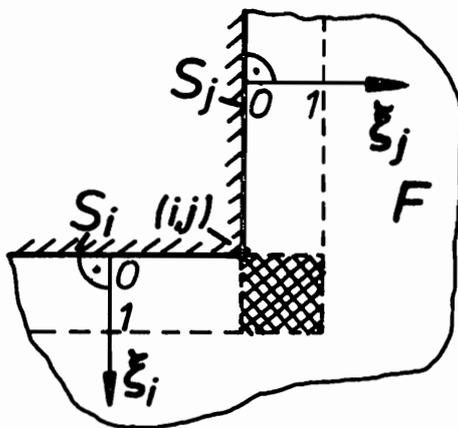


Abb. 7.5

$$\tilde{w} = \begin{cases} - \tilde{w}(\varrho_0, \varrho \in S_i) f_0(\xi_i) + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \xi_i} \Big|_{\varrho_0, \varrho \in S_i} g_0(\xi_i) & \text{für } 0 \leq \xi_i \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.13)$$

Man beachte $\frac{\partial \bar{w}}{\partial n} = - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_i}$, (n wird nach außen positiv gezählt!)

Bei den ausspringenden Ecken werden die Kompensationsglieder

$$\begin{aligned} & \bar{w}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C} = (i,j)) f_0(\xi_i) f_0(\xi_j) - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_i} \Big|_{\mathcal{C}_0, \mathcal{C} = (i,j)} g_0(\xi_i) f_0(\xi_j) \\ & - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_j} \Big|_{\mathcal{C}_0, \mathcal{C} = (i,j)} f_0(\xi_i) g_0(\xi_j) + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \Big|_{\mathcal{C}_0, \mathcal{C} = (i,j)} g_0(\xi_i) g_0(\xi_j) \end{aligned} \quad (7.14)$$

hinzugefügt. Bei den einspringenden Ecken benötigt man die Glieder:

$$\begin{aligned} & - \bar{w}(\mathcal{C}_0, \mathcal{C} = (i,j)) f_0(\xi_i) f_0(\xi_j) + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_i} \Big|_{\mathcal{C}_0, \mathcal{C} = (i,j)} g_0(\xi_i) f_0(\xi_j) \\ & + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \xi_j} \Big|_{\mathcal{C}_0, \mathcal{C} = (i,j)} f_0(\xi_i) g_0(\xi_j) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Neben den in (7.10) bis (7.14) beschriebenen Ansätzen fügt man einen bikubischen Ansatz nach (7.4) hinzu, der homogene geometrische Randbedingungen erfüllt. Die im homogenen Zusatzansatz auftretenden Freiwerte $\tilde{w}_{\alpha\beta}^u, \tilde{p}_{\alpha\beta}^u, \tilde{q}_{\alpha\beta}^u, \tilde{r}_{\alpha\beta}^u$ werden wiederum so variiert, daß die Eingrenzungsspanne (7.3) bezüglich des Vergleichszustandes $\tilde{f}^u(\mathcal{C}_0)$ einen möglichst kleinen Wert annimmt. Das führt auf die Bedingungen

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tilde{w}_{\alpha\beta}^u} \{ \tilde{f}^u(\mathcal{C}_0), \tilde{f}^u(\mathcal{C}_0) \} - 2 \frac{\partial}{\partial \tilde{w}_{\alpha\beta}^u} \{ \tilde{f}^u(\mathcal{C}_0), \tilde{f}^u(\mathcal{C}_0) \} = 0 \\ & \quad \vdots \\ & \frac{\partial}{\partial \tilde{r}_{\alpha\beta}^u} \{ \tilde{f}^u(\mathcal{C}_0), \tilde{f}^u(\mathcal{C}_0) \} - 2 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}_{\alpha\beta}^u} \{ \tilde{f}^u(\mathcal{C}_0), \tilde{f}^u(\mathcal{C}_0) \} = 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

für alle freien Parameter $\tilde{w}_{\alpha\beta}^u, \tilde{q}_{\alpha\beta}^u, \tilde{p}_{\alpha\beta}^u, \tilde{r}_{\alpha\beta}^u$. Für $\{ \tilde{f}^u(\mathcal{C}_0), \tilde{f}^u(\mathcal{C}_0) \}$ wählt man wie in (7.7) die Form (6.1.27) und für $\{ \tilde{f}^u(\mathcal{C}_0), \tilde{f}^u(\mathcal{C}_0) \}$ die Form nach (6.1.29).

Zur Darstellung des Vergleichszustandes \tilde{f}^u werden Ansätze für die Biegemomente M_{xx} und M_{yy} sowie für das Torsionsmoment M_{xy} benötigt, die der inhomogenen Gleichgewichtsbedingung (6.1.14) und den dem jeweiligen Plattenlagerungsfall zugeordneten statischen Randbedingungen genügen. Zweckmäßigerweise bestimmt man hier zuerst einen partikulären Ansatz, der die inhomogene Gleichgewichtsbedingung und die Randbedingungen erfüllt. Zur Minimierung der Eingrenzungs-

spanne überlagert man dem partikulären Ansatz einen homogenen mit zunächst noch unbestimmten Parametern, die in der Weise variiert werden, daß die Fehlerschranken möglichst klein werden.

Für den partikulären Ansatz kann man setzen:

$$\begin{aligned} M_{yx} = M_{xy} &= \frac{1}{2} p_{xy} , \\ M_{xx} = M_{yy} &= 0 . \end{aligned} \quad (7.17)$$

Der in (7.17) definierte partikuläre Momententensor ist gültig für alle Lagerungsfälle, da er in jedem Fall den statischen Randbedingungen genügt.

Zur Konstruktion des homogenen Momententensors werden die Schaefer'schen Spannungsfunktionen ϕ und ψ eingeführt:

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} , \quad M_{yy} = \frac{\partial \psi}{\partial y} , \\ M_{xy} = M_{yx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) . \end{aligned} \quad (7.18)$$

Die Querkräfte der Platte erhält man hiermit zu:

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) ; \quad \bar{Q}_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} , \\ Q_y &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) ; \quad \bar{Q}_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} . \end{aligned} \quad (7.19)$$

Der nach (7.18) definierte Momententensor befriedigt identisch die homogene Gleichgewichtsbedingung. Für die Spannungsfunktionen ϕ und ψ wird jeweils ein bikubischer Interpolationsansatz nach (7.4) gewählt. Die Knotenkennwerte werden für ϕ mit $w_{\phi\alpha\beta}^{\sim}$, $p_{\phi\alpha\beta}^{\sim}$, $q_{\phi\alpha\beta}^{\sim}$, $r_{\phi\alpha\beta}^{\sim}$ und die für ψ mit $w_{\psi\alpha\beta}^{\sim}$, $p_{\psi\alpha\beta}^{\sim}$, $q_{\psi\alpha\beta}^{\sim}$, $r_{\psi\alpha\beta}^{\sim}$ bezeichnet.

Für die gelenkig gelagerte Platte lauten die Randbedingungen:

$$\begin{aligned} M_{xx} = \phi_{,y} &= 0 \quad \text{auf Randstücken parallel zur x-Achse,} \\ M_{yy} = \psi_{,y} &= 0 \quad \text{auf Randstücken parallel zur y-Achse.} \end{aligned} \quad (7.20)$$

Soll $\phi_{,x}$ etwa entlang der Linie (0,1) - (1,1) in Abb. 7.1 null werden, so muß gesetzt werden:

$$w_{\phi 01}^{\sim} = w_{\phi 11}^{\sim} ; \quad p_{\phi 01}^{\sim} = p_{\phi 11}^{\sim} = 0 . \quad (7.21)$$

Soll hingegen $\psi_{,y}$ entlang der Linie (1,0) - (1,1) in Abb. 7.1 null werden, so muß gelten:

$$w_{\psi 10}^{\approx} = w_{\psi 11}^{\approx} ; q_{\psi 10}^{\approx} = q_{\psi 11}^{\approx} = 0 . \quad (7.22)$$

Bei der frei gelagerten Platte lauten die Randbedingungen

$$\begin{aligned} M_{xx} = \emptyset_{,x} = 0 , \bar{Q}_x = \psi_{,xx} = 0 \text{ auf Randstücken parallel zur } x\text{-Achse} \\ M_{yy} = \psi_{,y} = 0 , \bar{Q}_y = -\emptyset_{,yy} = 0 \text{ auf Randstücken parallel zur } y\text{-Achse} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Für die als Beispiel gewählte Linie (0,1) - (1,1) in Abb. 7.1 gilt dann

$$\begin{aligned} w_{\emptyset 01}^{\approx} = w_{\emptyset 11}^{\approx} ; P_{\emptyset 01}^{\approx} = P_{\emptyset 11}^{\approx} = 0 ; \\ w_{\psi 01}^{\approx} = w_{\psi 11}^{\approx} ; P_{\psi 01}^{\approx} = P_{\psi 11}^{\approx} = 0 , \end{aligned} \quad (7.24)$$

und entsprechend für die Linie (1,0) - (1,1):

$$\begin{aligned} w_{\psi 10}^{\approx} = w_{\psi 11}^{\approx} ; q_{\psi 10}^{\approx} = q_{\psi 11}^{\approx} = 0 , \\ w_{\emptyset 10}^{\approx} = w_{\emptyset 10}^{\approx} ; q_{\emptyset 10}^{\approx} = q_{\emptyset 11}^{\approx} = 0 , \end{aligned} \quad (7.25)$$

Die in \emptyset und ψ verbleibenden unbestimmten Parameter werden in gleicher Weise wie bei den Verschiebungsansätzen so variiert, daß die Eingrenzungs-spanne (7.3) bezüglich des Vergleichszustandes f^{\approx} einem Kleinstwert zustrebt. Das führt auf die Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w_{\emptyset \alpha \beta}^{\approx}} \{f^{\approx}, f^{\approx}\} = 0 , \\ \frac{\partial}{\partial w_{\psi \alpha \beta}^{\approx}} \{f^{\approx}, f^{\approx}\} = 0 \text{ usw.} \end{aligned} \quad (7.26)$$

Für das Skalarprodukt $\{f^{\approx}, f^{\approx}\}$ benötigt man hier die Form nach (6.1.28). Wegen des partikulären Anteils nach (7.17) ist das Gleichungssystem (7.26) inhomogen und ohne Schwierigkeiten lösbar.

Zur Darstellung des Vergleichszustandes $f^{\approx}(\mathcal{L}_0)$ wird ein Ansatz für M_{xx}^{\approx} und M_{yy}^{\approx} konstruiert, so daß das System $M_{xx}^{\approx} = \bar{M}_{xx}^{\approx} + M_{xx}^{\approx}$, $M_{yy}^{\approx} = \bar{M}_{yy}^{\approx} + M_{yy}^{\approx}$, $M_{xy}^{\approx} = \bar{M}_{xy}^{\approx} + M_{xy}^{\approx}$ der Gleichgewichtsbedingung und den statischen Randbedingungen genügt.

Bei der gelenkig gelagerten Platte wird mit den Bezeichnungen von Abb. 7.3

gesetzt:

$$\overset{v}{M}_{xx} \approx = \begin{cases} -\overset{\infty}{M}_{xx}(\varrho_0, \varrho \in S_i)(1-\xi_i) & \text{für } 0 \leq \xi_i \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.27)$$

für solche Randstücke S_i , die parallel zur x-Achse verlaufen. Für $\xi_i = 0$ wird $\overset{v}{M}_{xx} \approx = -\overset{\infty}{M}_{xx}$ auf S_i . Zusammen mit einem entsprechenden Ansatz für $\overset{v}{M}_{yy}$ auf den Randstücken, die parallel zur y-Achse verlaufen, ist die statische Randbedingung für die gelenkig gelagerte Platte erfüllt. Wegen

$$\frac{\partial^2 \overset{v}{M}_{xx} \approx}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \overset{v}{M}_{yy}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{für } \xi_i \neq 1 \quad (7.28)$$

ist auch der Gleichgewichtsbedingung genüge getan, da $\overset{\infty}{M}_{xx}, \overset{\infty}{M}_{yy}, \overset{\infty}{M}_{xy}$ für sich alleine ein Gleichgewichtssystem bilden und die Singularität bei ϱ_0 richtig wiedergegeben wird. Die (hebbare) Unstetigkeit der zweiten Ableitungen in (7.28) für $\xi_i = 1$ kann unberücksichtigt bleiben.

Auf dem freien Rand wird auf dem Randstück S_i (hier parallel zur x-Achse) zusätzlich gefordert:

$$\bar{Q}_x = -\frac{\partial (\overset{\infty}{M}_{xx} + \overset{v}{M}_{xx} \approx)}{\partial y} = 0$$

d. h. $\frac{\partial \overset{v}{M}_{xx} \approx}{\partial y} = -\frac{\partial \overset{\infty}{M}_{xx}}{\partial y}$ auf S_i parallel zur x-Achse. (7.29)

Der Ansatz

$$\overset{v}{M}_{xx} \approx = \begin{cases} -\overset{\infty}{M}_{xx}(\varrho_0, \varrho \in S_i)(1-\xi_i) - \frac{\partial \overset{\infty}{M}_{xx}}{\partial y} \Big|_{\varrho_0, \varrho \in S_i} \cdot \xi_i & \text{für } 0 \leq \xi_i \leq 0,5 \\ -\overset{\infty}{M}_{xx}(\varrho_0, \varrho \in S_i)(1-\xi_i) - \frac{\partial \overset{\infty}{M}_{xx}}{\partial y} \Big|_{\varrho_0, \varrho \in S_i} \cdot (1-\xi_i) & \text{für } 0,5 \leq \xi_i \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.31)$$

erfüllt zusammen mit einem entsprechenden Ansatz für $\overset{v}{M}_{yy}$ alle notwendigen Bedingungen. Zur Verbesserung der Eingrenzungsspanne wird analog zum Vergleichszustand $\overset{v}{f}$ den Regulärgliedern ein aus den Spannungsfunktionen $\overset{v}{\phi}$ und $\overset{v}{\psi}$ gebildeter homogener Momententensor überlagert, dessen Freiwerte $\overset{v}{w}_{\alpha\beta} \approx, \overset{v}{p}_{\alpha\beta} \approx, \overset{v}{q}_{\alpha\beta} \approx, \overset{v}{r}_{\alpha\beta} \approx$ aus den Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial \overset{v}{w}_{\alpha\beta} \approx} \{ \overset{v}{f}(\varrho_0), \overset{v}{\tilde{f}}(\varrho_0) \} = 0 \quad \text{usw.} \quad (7.32)$$

bestimmt werden.

8. Numerische Beispiele

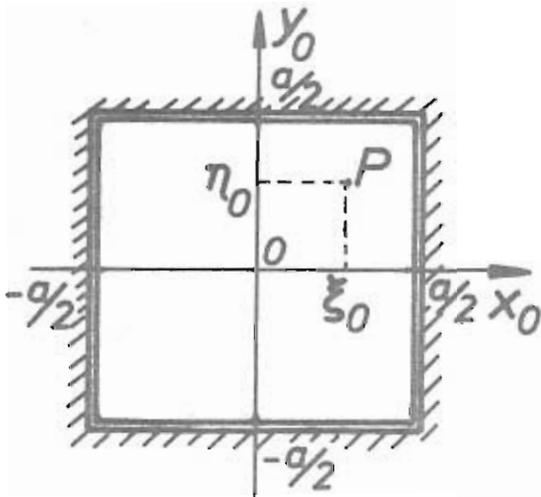


Abb. 8.1

Betrachtet wird die quadratische orthotrope Platte mit der Kantenlänge a bei gelenkiger Lagerung des Randes und bei fester Einspannung des Randes. In den oben beschriebenen Vergleichszuständen wird mit den normierten Variablen

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_0}{a/2} \quad , \quad y = \frac{y_0}{a/2} \quad , \\ \xi &= \frac{\xi_0}{a/2} \quad , \quad \eta = \frac{\eta_0}{a/2} \quad . \end{aligned} \quad (8.1)$$

gerechnet. Für die Plattensteifigkeiten wird gewählt:

$$\nu_x = \nu_y = \nu = 0,3 \quad , \quad D_x = D_y = N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad ; \quad D_1 = D_{xy} = N/3 \quad . \quad (8.2.)$$

Dann wird:

$$\lambda = \frac{D_1 + 2D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} = 1 \quad , \quad (8.3)$$

und für die Singularität der Durchbiegung gilt:

$$w^\infty = \frac{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) (1 + 1/2 \ln(\bar{x}^2 + \bar{y}^2))}{8\pi \sqrt[4]{D_x D_y}} \quad , \quad (8.4)$$

mit

$$\bar{x} = \frac{x - \xi}{\sqrt[4]{D_x}} \quad , \quad \bar{y} = \frac{y - \eta}{\sqrt[4]{D_y}} \quad . \quad (8.5)$$

Ferner gilt für die Singularität der Momente:

$$\begin{aligned} M_{xx}^\infty &= D_x \left(\frac{\partial^2 w^\infty}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w^\infty}{\partial y^2} \right) \quad , \\ M_{yy}^\infty &= D_y \left(\frac{\partial^2 w^\infty}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w^\infty}{\partial x^2} \right) \quad , \\ M_{xy}^\infty &= 2D_{xy} \frac{\partial^2 w^\infty}{\partial x \partial y} \quad . \end{aligned} \quad (8.6)$$

Bei der gelenkig gelagerten Platte wird für den Regulärteil $\tilde{f}^v(\mathcal{C}_0)$ des Vergleichszustandes $\tilde{f}^\infty(\mathcal{C}_0)$ der Ansatz (7.10 - 12) gewählt, bei der festeingespannten Platte der Ansatz (7.13 - 15). Die homogenen Verschiebungsansätze werden durch (7.4) dargestellt, wobei im Falle der gelenkig gelagerten Platte die Verschiebung und im Falle der festeingespannten Platte die Verschiebung und die zugehörige Normalableitung auf dem Rand Null werden müssen.

Für den Vergleichszustand $\tilde{f}^v(\mathcal{C}_0)$ dient bei der gelenkig gelagerten Platte der Ansatz (7.27). Die homogenen Momentenansätze werden bei beiden Lagerungsfällen aus den Schaefer'schen Spannungsfunktionen ϕ und ψ entsprechend Gleichung (7.18) gebildet. Die Spannungsfunktionen selbst werden durch den bikubischen Ansatz (7.4) realisiert, wobei für die gelenkige Lagerung die Randbedingungen (7.21 - 25) zu beachten sind.

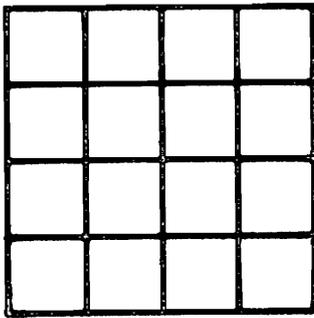


Abb. 8.2

Bei einer Einteilung des Plattengebietes in Maschen nach Abb. 8.2 bekommt man bei den Verschiebungsansätzen für die gelenkige Lagerung 64 freie Parameter und für die feste Einspannung 32 Variationsfreiwerte.

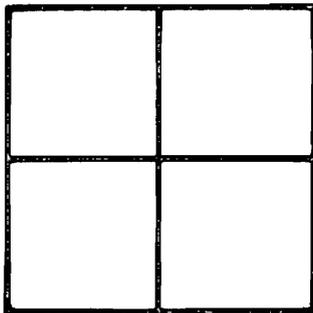


Abb. 8.3

Für die Spannungsfunktionen wurde im vorliegenden Beispiel aus Gründen der Speicherplatzkapazität eine Einteilung nach Abb. 8.3 vorgenommen. Hier erhält man bei der gelenkig gelagerten Platte je Spannungsfunktion 24 Freiwerte und bei der festeingespannten Platte 36 Freiwerte.

Auf einer Rechenanlage CD 6400 sind für die beiden Lagerungsfälle die Durchbiegung infolge einer konstanten Flächenlast $p = 1 \text{ kp/cm}^2$ für verschiedene Punkte eingegrenzt worden. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 1 und 2 dargestellt.

Tabelle 1: gelenkig gelagerte Platte

ξ	η	$\frac{w_N}{10^{-3} \frac{\text{pa}^4}{N}}$	$\frac{Sp w_N}{10^{-3} \frac{\text{pa}^4}{N}}$	$\frac{Sp w_N}{w_N}$
0	0,1	3,68	0,163	4,47 ‰
0	0,2	3,53	0,174	4,93 ‰
0	0,3	3,32	0,198	5,97 ‰
0	0,4	3,04	0,208	6,85 ‰
0	0,5	2,67	0,210	7,85 ‰
0	0,6	2,35	0,212	9,50 ‰
0,	0,7	1,74	0,215	12,37 ‰
0	0,8	1,18	0,218	18,3 ‰
0	0,9	0,61	0,22	36,4 ‰
0	0	3,70	0,159	4,32 ‰
0,1	0,1	3,61	0,178	4,94 ‰
0,2	0,2	3,37	0,189	5,62 ‰
0,3	0,3	2,98	0,214	7,20 ‰
0,4	0,4	2,49	0,216	8,66 ‰
0,5	0,5	1,94	0,222	11,48 ‰
0,6	0,6	1,36	0,226	16,58 ‰
0,7	0,7	0,83	0,230	27,82 ‰
0,8	0,8	0,39	0,236	60,5 ‰
0,9	0,9	0,10	0,242	237 ‰

Tabelle 2: festeingespannte Platte

ξ	η	$\frac{w_N}{10^{-3} \frac{\text{pa}^4}{N}}$	$\frac{Sp w_N}{10^{-3} \frac{\text{pa}^4}{N}}$	$\frac{Sp w_N}{w_N}$
0	0,1	1,125	0,0553	4,92 ‰
0	0,2	1,072	0,0559	5,21 ‰
0	0,3	0,974	0,0626	6,44 ‰
0	0,4	0,845	0,0652	7,71 ‰
0	0,5	0,691	0,0623	9,02 ‰
0	0,6	0,492	0,0598	12,18 ‰
0	0,7	0,287	0,0583	20,34 ‰
0	0,8	0,104	0,0404	38,65 ‰
0	0,9	≈ 0	--	--
0	0	1,152	0,0554	4,80 ‰
0,1	0,1	1,108	0,0580	5,23 ‰
0,2	0,2	0,993	0,0676	6,82 ‰
0,3	0,3	0,823	0,0675	8,21 ‰
0,4	0,4	0,622	0,0651	10,48 ‰
0,5	0,5	0,420	0,0636	15,17 ‰
0,6	0,6	0,206	0,0706	34,28 ‰
0,7	0,7	0,037	0,0267	71,73 ‰
0,8	0,8	≈ 0	--	--
0,9	0,9	≈ 0	--	--

Aus Symmetriegründen sind nur die Werte für den ersten Quadranten angegeben.

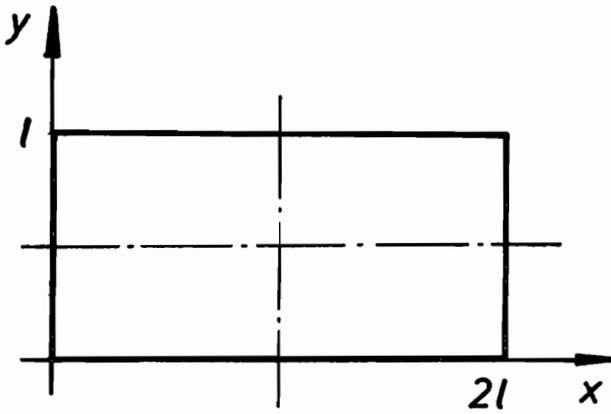


Abb. 8.4

Als weiteres Beispiel wird eine orthotrope Rechteckplatte (Abb. 8.4) mit den Kantenlängen l und $2l$ unter der Wirkung einer konstanten Belastung p berechnet, wobei eine allseitig gelenkige Lagerung bzw. eine allseitig feste Einspannung angenommen wird. Nach [9] werden die folgenden Plattensteifigkeiten gewählt

$$D_x = 1,52439 K = N$$

$$D_{xy} = 0,21054 K$$

$$D_y = 0,15244 K$$

$$D_1 = 0,06098 K$$

K besitzt die Dimension einer Plattensteifigkeit und N ist die Plattensteifigkeit der isotropen Platte nach (8.2)₂.

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 3 und 4 zusammengestellt, wobei aus Symmetriegründen Werte nur für den ersten Quadranten der Plattenfläche angegeben werden.

Tabelle 3: gelenkig gelagerte Platte

$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{l}$	$\frac{w_N}{10^{-1}pl^4/N}$	$\frac{Sp w_N}{10^{-2}pl^4/N}$	$\frac{Sp w_N}{w_N} [\%]$
0,1	0,05	0,0138	0,0269	19,6
0,2	0,1	0,0527	0,0751	14,2
0,3	0,15	0,1116	0,1092	9,8
0,4	0,2	0,1835	0,1287	7,0
0,5	0,25	0,2608	0,1483	5,7
0,6	0,3	0,3358	0,1610	4,8
0,7	0,35	0,4019	0,1728	4,3
0,8	0,4	0,4537	0,1855	4,1
0,9	0,45	0,4867	0,1896	3,9
1,0	0,5	0,4981	0,1896	3,8
0,1	0,5	0,0826	0,1059	12,8
0,2	0,5	0,1623	0,1445	8,9
0,3	0,5	0,2364	0,1724	7,3
0,4	0,5	0,3032	0,1820	6,0
0,5	0,5	0,3614	0,1866	5,2
0,6	0,5	0,4099	0,1873	4,6
0,7	0,5	0,4482	0,1882	4,2
0,8	0,5	0,4759	0,1888	4,0
0,9	0,5	0,4925	0,1895	3,9
1,0	0,1	0,1588	0,1284	8,1
1,0	0,2	0,2993	0,1553	5,2
1,0	0,3	0,4074	0,1751	4,3
1,0	0,4	0,4748	0,1849	3,9

Nach [9] erhält man für die Plattenmitte ($x = 1, y = \frac{1}{2}$)

das Ergebnis: $\frac{w_N}{10^{-1}pl^4/N} = 0,5065$

Tabelle 4: fest eingespannte Platte

$\frac{x}{l}$	$\frac{y}{l}$	$\frac{w_N}{10^{-1}pl^4/N}$	$\frac{Sp w_N}{10^{-2}pl^4/N}$	$\frac{Sp w_N}{w_N} [\%]$
0,1	0,05	0,00025	0,00071	28,3
0,2	0,1	0,0031	0,0053	17,1
0,3	0,15	0,0119	0,0121	10,2
0,4	0,2	0,0277	0,0247	8,9
0,5	0,25	0,0493	0,0389	7,9
0,6	0,3	0,0732	0,0512	7,0
0,7	0,35	0,0967	0,0628	6,5
0,8	0,4	0,1165	0,0712	6,1
0,9	0,45	0,1298	0,0741	5,7
1,0	0,5	0,1346	0,0744	5,5
0,1	0,5	0,0062	0,0122	19,8
0,2	0,5	0,0215	0,0315	14,9
0,3	0,5	0,0412	0,0460	11,2
0,4	0,5	0,0622	0,0577	9,3
0,5	0,5	0,0825	0,0667	8,1
0,6	0,5	0,1003	0,0701	7,0
0,7	0,5	0,1150	0,0712	6,2
0,8	0,5	0,1258	0,0740	5,8
0,9	0,5	0,1324	0,0742	5,6
1,0	0,1	0,0185	0,0173	9,3
1,0	0,2	0,0585	0,0403	6,9
1,0	0,3	0,0977	0,0605	6,2
1,0	0,4	0,1246	0,0711	5,7

9. Literaturverzeichnis

- [1] W. Prager and J.L. Synge, Approximations in Elasticity based on the Concept of Function Space, *Quart. Appl. Math.* 5, 241 - 269 (1947).
- [2] J.B. Diaz and H.J. Greenberg, Upper and Lower Bounds for the Solution of the First Biharmonic Boundary Value Problem, *J. Math. Phys.* 27, 193 - (1948).
- [3] J.L. Synge, Upper and Lower Bounds for the Solution of Problems in Elasticity, *Proc. Roy. Irish Acad.* 53 A, 41 - 64 (1950).
- [4] J.L. Synge, *The Hypercircle in Mathematical Physics*, Univ. Press, Cambridge 1957.
- [5] H. Stumpf, *Eingrenzungsverfahren in der Elastomechanik*, Forschungsberichte NRW Nr. 2116, Westdeutscher Verlag Köln-Opladen 1970.
- [6] H. Stumpf, Die Berechnung statischer und geometrischer Feldgrößen elastischer Randwertprobleme durch punktweise Eingrenzung, *Acta Mechanica* 12, 223 - 243 (1971).
- [7] G. Rieder, Eingrenzung in der linearen Elastizitäts- und Potentialtheorie, *Z. Angew. Math. Mech.* 52, T340 - T347 (1972).
- [8] K. Volling, *Numerische Berechnung anisotroper Platten unter Berücksichtigung der Spannungskonzentration in den Ecken*, Dissertation TH Braunschweig, 1970.
- [9] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [10] P. Stein, *Die Anwendung der Singularitätenmethode zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten einschließlich Trägerrosten*, Stahlbau-Verlag, Köln (1959).
- [11] H. Schaefer, Eine einfache Konstruktion von Koordinatenfunktionen für die numerische Lösung zweidimensionaler Randwertprobleme nach Rayleigh-Ritz, *Ingenieur-Archiv* 35, 73 - 81 (1966).

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 7**